Chapitre 16

THÉORÈME DE FUBINI

ET

CHANGEMENT DE VARIABLES

Dans tout ce qui suit X et Y sont des espaces métriques,
ou plus généralement des espaces topologiques séparés,
μ et ν sont des intégrales de Radon sur X et Y respectivement.

Version du 16 janvier 2006

Introduction

Jusqu'à présent nous ne connaissons en fait que les intégrales de Dirac et celle de Lebesgue (ou plus généralement celles de Lebesgue-Stieltjes) sur $\mathbb{R}$. Notre but dans ce parapraphe est d'en construire de nouvelles en intégrant des intégrales de Radon. Plus précisément si $\left(\mu_y\right)_{y\in Y}$ est une famille convenable d'intégrales de Radon sur X nous allons définir ce que nous appelerons son intégrale par rapport à une intégrale de Radon ν sur Y . Nous écrirons $\mu = \int \mu_y \, d\nu\left(y\right)$.

Par exemple, nous verrons que

$$\mu = \int \varepsilon_y \, d\mu\left(y\right) \ \ ,$$

formule triviale, mais intuitivement très appréciée, surtout par les physiciens qui l'exprime en disant qu'une intégrale est une superposition de masses pontuelles unités. Nous verrons que l'intégrale de Lebesgue λ^{n+m} sur $\mathbb{R}^{n+m}$ s'écrit

$$\lambda^{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_y^n \, d\lambda^m\left(y\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_x^m \, d\lambda^n\left(x\right) \ \ ,$$

où λ_y^n et λ_x^m désignent respectivement l'image de l'intégrale de Lebesgue λ^n sur $\mathbb{R}^n \times \{y\}$ et celle de λ^m sur $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ (cf. exemple 16.1.2). Cette formule exprime le **principe de Cavalieri** de décomposition en tranches. Nous verrons également que

$$\lambda^n = \int_0^\infty \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} \, dr \ \ ,$$

où $\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}}$ désigne l'intégrale de Lebesgue ("superficielle") sur la sphère de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$ (cf. exemple 17.4).

16.1 Décomposition d'une intégrale de Radon

DEFINITION Soient μ et ν des intégrales de Radon sur X et Y respectivement et $\left(\mu_y\right)_{y\in Y}$ une famille d'intégrales de Radon sur X , i.e. une application $Y \longrightarrow \mathcal{M}_+(X)$. Nous dirons que $\left(\mu_y\right)_{y\in Y}$ est une *décomposition* de μ par rapport à ν et on écrit

$$\mu = \int \mu_y \, d\nu(y)$$

si, pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, on a

$$\mu(s) = \int^* \mu_y(s) \; d\nu(y) \ .$$

EXEMPLE 1 Pour toute intégrale de Radon μ sur X , on a

$$\mu = \int \varepsilon_y \, d\mu(y) \ .$$

En effet, pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, on a $\varepsilon_y(s) = s(y)$! □

EXEMPLE 2 Intégrales de Lebesgue et principe de Cavalieri

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ et $Y \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts et considérons les intégrales de Lebesgue correspondantes λ_X et λ_Y (cf. 14.7). Pour tout $y \in Y$, il est clair que

$$\mathcal{K}(X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longmapsto \lambda_X(\varphi(\cdot, y))$$

est une forme linéaire positive. Elle définit donc une intégrale de Radon $\lambda_{X,y}$ sur $X \times Y$ par le théorème 14.6. On dit que c'est l'image de λ_X dans $X \times Y$ par l'application

$$j_y : x \longmapsto (x, y) : X \longrightarrow X \times Y$$

(cf. 16.6 et 16.7 pour le cas général).

Pour tout $s \in \mathcal{SK}(X \times Y)$, on a

$$\lambda_{X,y}(s) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X\times Y),\varphi\leqslant s} \lambda_{X,y}(\varphi) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X\times Y),\varphi\leqslant s} \lambda_X(\varphi(\cdot, y))$$

par définition. D'autre part $y \longmapsto \lambda_X(\varphi(\cdot, y))$ est une fonction continue par le corollaire 14.7.i et on vérifie immédiatement qu'elle appartient à $\mathcal{K}(Y)$. Grâce au théorème 14.7 on obtient alors

$$\lambda_{X\times Y}(\varphi) = \int \left(\int \varphi(\cdot, y) \; d\lambda_X \right) d\lambda_Y(y) \ ,$$

donc

$$\lambda_{X\times Y}(s) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X\times Y),\varphi\leqslant s} \lambda_{X\times Y}(\varphi) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X\times Y),\varphi\leqslant s} \int \left(\int \varphi(\cdot, y) \; d\lambda_X \right) d\lambda_Y(y) =$$

$$= \int^* \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X\times Y),\varphi\leqslant s} \lambda_X(\varphi(\cdot, y)) \; d\lambda_Y(y) = \int^* \lambda_{X,y}(s) \; d\lambda_Y(y) \ .$$

Ceci finit de prouver que

$$\lambda_{X\times Y} = \int \lambda_{X,y}\, d\lambda_Y(y) \ .$$

On obtient de même

$$\lambda_{X\times Y} = \int \lambda_{x,Y}\, d\lambda_X(x) \ ,$$

où $\lambda_{x,Y}$ est l'image de λ_Y dans $X\times Y$ par l'application ${}_xj : y \longmapsto (x,y) : Y \longrightarrow X\times Y$.

REMARQUE 1 Pour tout $s\in\mathcal{SK}(X\times Y)$, le théorème 14.4 montre que

$$s = \sup\nolimits_{\varphi\in\mathcal{K}(X\times Y),\varphi\leqslant s}\varphi \ ,$$

donc que

$$s(\cdot,y) = \sup\nolimits_{\varphi\in\mathcal{K}(X\times Y),\varphi\leqslant s}\varphi(\cdot,y) \ ;$$

par la propriété de Bourbaki 14.5 on obtient

$$\lambda_{X,y}(s) = \sup\nolimits_{\varphi\in\mathcal{K}(X\times Y),\varphi\leqslant s}\lambda_X(\varphi(\cdot,y)) = \lambda_X(s(\cdot,y)) \ .$$

En particulier, on a

$$\lambda^*_{X,y}(X\times Y \smallsetminus X\times\{y\}) = \lambda_{X,y}\left(1_{X\times Y\smallsetminus X\times\{y\}}\right) = \lambda_X(0) = 0 \ .$$

On dit que $\lambda_{X,y}$ est *portée* par $X\times\{y\}$. Comme $\left(\int\varphi(x,\cdot)\ \lambda_X(x)\right)_{\varphi\in\mathcal{K}(X\times Y),\varphi\leqslant s}$ est une famille filtrante croissante de $\mathcal{K}(Y)$, cette formule montre aussi que

$$\lambda_{X,\diamond}(s) = \sup\nolimits_{\varphi\in\mathcal{K}(X\times Y),\varphi\leqslant s}\int\varphi(x,\cdot)\, d\lambda_X(x) \in \mathcal{SK}(Y) \ .$$

PROPOSITION *Soit $\mu = \int\mu_y\, d\nu(y)$ une décomposition de μ . On a*

$$\int^* f\ d\mu \geqslant \int^*\left(\int^* f\ d\mu_y\right) d\nu(y)$$

pour toute fonction $f : X\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

En effet

$$\int^* f\ d\mu = \inf\nolimits_{s\in\mathcal{SK}(X),s\geqslant f}\int^*\left(\int^* s\ d\mu_y\right) d\nu(y) \geqslant \int^*\left(\int^* f\ d\mu_y\right) d\nu(y) \ .$$

□

THEOREME (Intégrations successives) *Soit $\mu = \int\mu_y\, d\nu(y)$ une décomposition de μ .*

(i) Si f est une fonction μ-intégrable, alors f est μ_y-intégrable pour ν-presque tous les $y\in Y$. En définissant $\int f\ d\mu_y$ par 0 en les y où f n'est pas μ_y-intégrable, la fonction $\int f\ d\mu_\diamond$ est ν-intégrable et on a

$$\int f\ d\mu = \int\left(\int f\ d\mu_y\right) d\nu(y) \ .$$

Si f est réelle, alors les fonctions $\int_* f\ d\mu_\diamond$ et $\int^* f\ d\mu_\diamond$ sont ν-intégrable et on a

$$\int f\ d\mu_\diamond = \int_* f\ d\mu_\diamond = \int^* f\ d\mu_\diamond \quad \nu\text{-p.p.} \ .$$

(ii) Si A est une partie μ-négligeable, alors A est μ_y-négligeable pour ν-presque tous les $y \in Y$.

Démonstration de (i) On se ramène immédiatement au cas réel. La proposition nous permet alors d'écrire

$$-\infty < \int_* f \, d\mu \leqslant \int_* \left(\int_* f \, d\mu_y \right) d\nu(y) \leqslant \left\{ \begin{array}{c} \int^* \left(\int_* f \, d\mu_y \right) d\nu(y) \\ \int_* \left(\int^* f \, d\mu_y \right) d\nu(y) \end{array} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \int^* \left(\int^* f \, d\mu_y \right) d\nu(y) \leqslant \int^* f \, d\mu = \int_* f \, d\mu < \infty \ .$$

Ceci montre que les fonctions $\int_* f \, d\mu_\diamond$ et $\int^* f \, d\mu_\diamond$ sont ν-intégrables et ont même intégrale par rapport à ν . Elles sont donc finies ν-presque partout par le corollaire 15.1.ii et égales ν-presque partout par le théorème 15.2.iii. Ceci montre que f est μ_y-intégrable pour ν-presque tous les $y \in Y$. Comme $\int f \, d\mu_\diamond = \int^* f \, d\mu_\diamond$ ν-p.p. , les dernières assertions découlent du théorème 15.2.i.

Démonstration de (ii) C'est immédiat par le théorème 15.1.ii. □

REMARQUE 2 Dans le cas du produit de deux intégrales de Radon, que nous traiterons en 16.3, ce résultat est le théorème de Fubini.

EXERCICE Montrer que les intégrales de Lebesgue successives de la fonction

$$f :]0,1[\times]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto e^{-xy} - 2 \cdot e^{-2xy}$$

existent et sont de signe contraire, tandis que celles de $|f|$ sont infinies.

16.2 Théorème d'intégrabilité

Le théorème précédent donne la possibilité de calculer l'intégrale d'une fonction f par rapport à μ par intégration successive, mais il est nécessaire à priori de savoir que f est μ-intégrable ! D'après le critère d'intégrabilité 15.10 f doit être μ-mesurable et elle doit être μ-modérée par l'exemple 15.12.1. Nous allons maintenant voir que sous ces hypothèses nécessaires, on peut ramener la condition de finitude à des intégrations successives.

THEOREME *Soient $\mu = \int \mu_y \, d\nu(y)$ une décomposition de μ et f une fonction réelle ou complexe μ-mesurable et μ-modérée sur X . Alors*

(i) f est μ_y-mesurable pour ν-presque tous les $y \in Y$. La fonction $\int^* |f| \; d\mu_\diamond$ est ν-mesurable et

$$\int^* |f| \; d\mu = \int^* \left(\int^* |f| \; d\mu_y \right) d\nu(y) \ .$$

(ii) f est μ-intégrable si, et seulement si, f est μ-mesurable et

$$\int^* \left(\int^* |f| \, d\mu_y \right) d\nu(y) < \infty \ .$$

(iii) Soit A une partie μ-mesurable et μ-modérée. Pour que A soit μ-négligeable, il faut et il suffit que A soit μ_y-négligeable pour ν-presque tous les $y \in Y$.

Démonstration de (i) Nous pouvons évidemment supposer que f est réelle et posons

$$f_l := \min\left[\max\left(f, -l \cdot 1_{A_l}\right), l \cdot 1_{A_l}\right] \ ,$$

où (A_l) est une suite croissante d'ensembles μ-intégrables tels que f s'annule hors de $\bigcup A_l$. Ce sont des fonctions μ-intégrables par le critère d'intégrabilité 15.10, puisqu'elle sont μ-mesurables et que

$$\int^* |f_l| \, d\mu \leqslant l \cdot \mu(A_l) < \infty \ .$$

Le théorème d'intégrations successives montre alors que f_l est μ_y-intégrable, donc μ_y-mesurable pour ν-presque tous les $y \in Y$. Comme une réunion dénombrable d'ensembles ν-négligeables est ν-négligeable, le théorème 15.8.iv montre que $f = \limsup_l f_l$ est μ_y-mesurable pour ν-presque tous les $y \in Y$.

On a $|f| = \sup_l |f_l|$ et $|f_l| = \min\left(|f|, l \cdot 1_{K_l}\right)$. Par la propriété de Daniell 14.11 et le théorème d'intégrations successives 16.1, on obtient la ν-mesurabilité de

$$\int^* |f| \; d\mu_\diamond = \sup_l \int^* |f_l| \, d\mu_\diamond \ ,$$

puis

$$\int^* |f| \; d\mu = \sup_l \int |f_l| \, d\mu = \sup_l \int \left(\int |f_l| \, d\mu_y \right) d\nu(y) = \int^* \left(\int^* |f| \; d\mu_y \right) d\nu(y) \ .$$

Démonstration de (ii) C'est évidente par le critère d'intégrabilité 15.10.

Démonstration de (iii) Cela découle de la formule (ii) et du théorème 15.1.iii. □

REMARQUE 1 Dans le cas du produit de deux intégrales de Radon que nous traiterons en 16.3, ce théorème est celui de Tonelli.

REMARQUE 2 La μ-mesurabilité sur f ou A ne peut pas être remplacée par la μ_y-mesurabilité pour ν-presque tous les $y \in Y$ (cf. remarque 16.3). Dans le cas d'une intégrale de masses ponctuelles cela est possible (cf. 16.9).

REMARQUE 3 On peut montrer grâce au théorème 15.9.i que la fonction

$$\mu_\diamond(s) = \int^* s \, d\mu_\diamond$$

est ν-mesurable pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$.

16.3 Les théorèmes de Fubini et Tonelli

Si μ et ν sont des intégrales de Radon sur X et Y respectivement, on peut montrer (cf. 16.11) qu'il existe une intégrale de Radon $\mu\otimes\nu$ sur $X\times Y$ telle que, pour tout $s\in\mathcal{SK}(X\times Y)$, on ait

$$\mu\otimes\nu(s)=\int^*\mu(s(\cdot,y))\,d\nu(y)=\int^*\nu(s(x,\cdot))\,d\mu(x)\ \ ,$$

i.e.

$$\mu\otimes\nu=\int\mu_{X,y}\,d\nu(y)=\int\nu_{x,Y}\,d\mu(x)\ \ .$$

Les intégrales de Radon $\mu_{X,y}$ et $\nu_{x,Y}$ sur $X\times Y$ sont respectivement les images de μ et ν par les applications

$$j_y:x\longmapsto(x,y):X\longrightarrow X\times Y\quad\text{et}\quad {}_xj:y\longmapsto(x,y):Y\longrightarrow X\times Y\ ,$$

i.e. telles que, pour tout $s\in\mathcal{SK}(X\times Y)$, on ait

$$\mu_{X,y}(s):=\mu(s(\cdot,y))\quad\text{et}\quad\nu_{x,Y}(s):=\nu(s(x,\cdot))\ \ .$$

Pour tout $f:X\times Y\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$, on a alors

$$\int^* f\,d\mu_{X,y}=\int^* f(\cdot,y)\,d\mu\quad\text{et}\quad\int^* f\,d\nu_{x,Y}=\int^* f(x,\cdot)\,d\nu$$

(cf. proposition 16.9).

Dans l'exemple 16.1.2 nous avons en fait montré, si X et Y sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement, que l'on a

$$\lambda_{X\times Y}=\lambda_X\otimes\lambda_Y\ \ .$$

Le théorème 16.1 sur les intégrations successives devient le

THEOREME (de Fubini) *Soit f une fonction réelle ou complexe sur $X\times Y$ qui soit $\mu\otimes\nu$-intégrable.*

Alors pour ν-presque tous les $y\in Y$ respectivement pour μ-presque tous les $x\in X$, les fonctions $f(\cdot,y)$ et $f(x,\cdot)$ sont μ- et ν-intégrables. Les fonctions

$$y\longmapsto\int f(\cdot,y)\,d\mu\quad\textit{et}\quad x\longmapsto\int f(x,\cdot)\,d\nu$$

convenablement définies sont alors ν- respectivement μ-intégrables, et on a

$$\int f\ d\mu\otimes\nu=\int\left(\int f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)=\int\left(\int f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)\ \ .$$

Le théorème d'intégrabilité 16.2 devient le

THEOREME (de Tonelli) *Soit f une fonction réelle ou complexe $\mu\otimes\nu$-modérée sur $X\times Y$.*

(i) Si f est $\mu\otimes\nu$-mesurable, alors pour ν-presque tous les $y\in Y$ et μ-presque tous les $x\in X$, les fonctions $f(\cdot,y)$ et $f(x,\cdot)$ sont respectivement μ- et ν-mesurables.

Les fonctions

$$y \longmapsto \int^* |f(\cdot, y)| \, d\mu \quad et \quad x \longmapsto \int^* |f(x, \cdot)| \, d\nu$$

sont respectivement ν- et μ-mesurables et on a

$$\int^* |f| \ d\mu \otimes \nu = \int^* \left(\int^* |f(x,y)| \ d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int^* \left(\int^* |f(x,y)| \ d\nu(y) \right) d\mu(x) \ .$$

(ii) En particulier, f est $\mu \otimes \nu$-intégrable si, et seulement si, f est $\mu \otimes \nu$-mesurable et

$$\int^* \left(\int^* |f(x,y)| \ d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int^* \left(\int^* |f(x,y)| \ d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \ .$$

(iii) Soit A une partie $\mu \otimes \nu$-mesurable et $\mu \otimes \nu$-modérée. Pour que A soit $\mu \otimes \nu$-négligeable, il faut et il suffit que $A_y := \{x \in X \mid (x,y) \in A\}$ soit μ-négligeable pour ν-presque tous les $y \in Y$, ou bien que ${}_xA := \{y \in Y \mid (x,y) \in A\}$ soit ν-négligeable pour μ-presque tous les $x \in X$.

REMARQUE 1 Comme nous l'avons déjà signalé dans la remarque 16.2.2 l'hypothèse de $\mu \otimes \nu$-mesurabilité ne peut être supprimée. En effet on peut construire une fonction

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

telle que le graphe $\mathrm{Gr}\, f \subset [0,1]^2$ ne soit pas $\lambda_{[0,1]} \otimes \lambda_{[0,1]}$-mesurable. On a même

$$\int^* \left(\int^* 1_{\mathrm{Gr}\, f}(x,y) \ d\lambda_{[0,1]}(x) \right) d\lambda_{[0,1]}(y) = 1 \ ,$$

mais

$$\int^* \left(\int^* 1_{\mathrm{Gr}\, f}(x,y) \ d\lambda_{[0,1]}(y) \right) d\lambda_{[0,1]}(x) = 0$$

puisque la coupe au-dessus de x ne contient qu'un point. Il est bien clair que cette fonction ne peut être $\lambda_{[0,1]}$-mesurable.

La construction de fonctions $\mu \otimes \nu$-mesurables passe d'après le théorème 15.9.ii par la construction d'ensembles $\mu \otimes \nu$-négligeables, sans savoir à priori qu'ils sont $\mu \otimes \nu$-mesurables. Dans ce cas on pourrait évidemment utiliser le théorème de Tonelli (iii) !

LEMME *Si $N \subset X$ est une partie μ-négligeable et B une partie ν-modérée de Y , alors $N \times B$ est $\mu \otimes \nu$-négligeable.*

Par le théorème 15.7.iv, il existe une suite décroissante (G_k) d'ouverts de X telle que

$$N \subset \bigcap G_k \quad \text{et} \quad \mu(G_k) \leqslant \frac{1}{k} \ ,$$

et par la proposition 15.12.i une suite croissante (H_l) d'ensembles ouverts ν-intégrables de Y telle que $B \subset \bigcup H_l$. Puisque $1_{G_k \times H_l} \in \mathcal{SK}(X)$, on a alors

$$\mu \otimes \nu (G_k \times H_l) = \int^* \mu(1_{G_k \times H_l}(\cdot, y)) \ d\nu(y) = \int^* \mu(G_k) \cdot 1_{H_l}(y) \ d\nu(y) =$$

$$= \mu(G_k) \cdot \nu(H_l) \leqslant \frac{1}{k} \cdot \nu(H_l) \ ,$$

puis

$$(\mu \otimes \nu)^* (N \times H_l) \leqslant \inf_k \frac{1}{k} \cdot \nu (H_l) = 0 \ .$$

Ainsi

$$(\mu \otimes \nu)^* (N \times B) \leqslant \sup_l \mu \otimes \nu^* (N \times H_l) = 0$$

par la propriété de Daniell 14.11 . □

DEFINITION Si f et g sont des fonctions réelles ou complexes sur X et Y respectivement, on définit la fonction $f \otimes g : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) par

$$f \otimes g (x, y) := f (x) \cdot g (y) \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et } y \in Y \ .$$

COROLLAIRE *Soient f et g des fonctions réelles ou complexes sur X et Y respectivement.*

(i) Si f et g sont respectivement μ- et ν-intégrable, alors $f \otimes g$ est $\mu \otimes \nu$-intégrable et on a

$$\int f \otimes g \ d\mu \otimes \nu = \left(\int f \ d\mu \right) \cdot \left(\int g \ d\nu \right) \ .$$

(ii) Si f et g sont respectivement μ- et ν-mesurable, alors $f \otimes g$ est $\mu \otimes \nu$-mesurable.

Démonstration de (i) Par le théorème d'approximation 15.6, il existe des suites décroissantes (s_k) et (t_k) respectivement dans $\mathcal{SK}(X)$ et $\mathcal{SK}(Y)$, ainsi que des ensembles M et N respectivement μ- et ν-négligeables tels que ponctuellement on ait

$$f = \lim_k s_k \text{ sur } \complement M \quad \text{et} \quad g = \lim_k t_k \text{ sur } \complement N \ .$$

En outre puisque f est μ-modérée par l'exemple 15.12.1, il existe un ouvert G de X qui soit μ-modéré et tel que f s'annule hors de G . Il existe de même un ouvert H de Y qui soit ν-modéré et tel que g s'annule hors de H . Par le lemme on en déduit que

$$(G \times H) \cap [(M \times Y) \cup (X \times N)] \subset (M \times H) \cup (G \times N)$$

est $\mu \otimes \nu$-négligeable, et comme $f \otimes g = \lim_k (1_G \otimes 1_H) \cdot (s_k \otimes t_k)$ ponctuellement sur

$$\left(\complement G \times Y \right) \cup \left(X \times \complement H \right) \cup \left(\complement M \times \complement N \right) =$$

$$= \complement (G \times H) \cup \complement [(M \times Y) \cup (X \times N)] = \complement \{(G \times H) \cap [(M \times Y) \cup (X \times N)]\} \ ,$$

on obtient

$$f \otimes g = \lim_k (1_G \otimes 1_H) \cdot (s_k \otimes t_k) \quad \mu \otimes \nu\text{-p.p.} \ .$$

Mais les fonctions $s_k \otimes 1$ et $1 \otimes t_k$ sont s.c.i. , puisque pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\{s_k \otimes 1 > \gamma\} = \{s_k > \gamma\} \times Y \quad \text{et} \quad \{1 \otimes t_k > \gamma\} = X \times \{t_k > \gamma\} \ ,$$

donc

$$(1_G \otimes 1_H) \cdot (s_k \otimes t_k) = (1_G \otimes 1_H) \cdot (s_k \otimes 1) \cdot (1 \otimes t_k) \in \mathcal{M}(\mu \otimes \nu) \ .$$

Le théorème 15.9.ii montre alors que $f \otimes g \in \mathcal{M}(\mu \otimes \nu)$. Nous pouvons ainsi appliquer le théorème de Tonelli, ainsi que l'exemple 14.11.2 :

$$\int^* |f \otimes g| \ d\mu \otimes \nu = \int^* \left(\int^* |f (x)| \cdot |g (y)| \ d\mu (x) \right) d\nu (y) =$$

$$= \int^* \left(\int^* |f(x)| \, d\mu(x) \right) \cdot |g(y)| \, d\nu(y) = \left(\int^* |f| \, d\mu \right) \cdot \left(\int^* |g| \, d\nu \right) < \infty \ .$$

Par le critère d'intégrabilité 15.10, on en déduit que $f \otimes g$ est $\mu \otimes \nu$-intégrable, d'où la formule par le théorème de Fubini en remarquant que $g(y)$ est fini pour ν-presque tous les $y \in Y$. Ceci finit de prouver (i).

Démonstration de (ii) Par le théorème 15.9.i il nous suffit de montrer que si C est une partie compact de $X \times Y$, alors $1_C \cdot f \otimes g$ est $\mu \otimes \nu$-mesurable. Comme $K := \mathrm{pr}_1(C)$ et $L := \mathrm{pr}_2(C)$ sont des parties compactes de X et Y respectivement et que

$$1_C \cdot f \otimes g = 1_C \cdot (1_K \cdot f \otimes 1_L \cdot g) \ ,$$

il nous suffit de montrer que $1_K \cdot f \otimes 1_L \cdot g$ est $\mu \otimes \nu$-mesurable. Posons

$$f_k := \min\left[\max\left(1_K \cdot f, -k\right), k\right] \quad \text{et} \quad g_k := \min\left[\max\left(1_L \cdot g, -k\right), k\right] \ .$$

Ce sont des fonctions μ- respectivement ν-intégrables, donc $f_k \otimes g_k$ est $\mu \otimes \nu$-mesurable par (i). Finalement, on a $f = \lim_k f_k$ μ-p.p. et $g = \lim_k g_k$ ν-p.p. , donc

$$f \otimes g = \lim_k f_k \otimes g_k \quad \mu \otimes \nu\text{-p.p.}$$

par le lemme, ce qui finit de prouver que $f \otimes g$ est $\mu \otimes \nu$-mesurable. □

EXEMPLE Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions μ-mesurables et $h : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction ν-mesurable. Alors la partie

$$A := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) \leqslant h(y) \leqslant g(x)\}$$

est $\mu \otimes \nu-$mesurable, et en posant

$$A_x := \{y \in Y \mid f(x) \leqslant h(y) \leqslant g(x)\} \ ,$$

on a

$$(\mu \otimes \nu)^*(A) = \int^* \nu^*(A_x) \, d\mu(x) \ .$$

En effet

$$A = \{f \otimes 1 \leqslant 1 \otimes h \leqslant g \otimes 1\}$$

et les fonctions $f \otimes 1$, $1 \otimes h$ et $g \otimes 1$ sont $\mu \otimes \nu$-mesurables, d'où le résultat par le théorème de Tonelli (i). □

En particulier, si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $f \leqslant g$, alors l'ensemble

$$B := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

est $\mu \otimes \lambda$-intégrable et

$$(\mu \otimes \lambda)(B) = \int g \, d\mu - \int f \, d\mu \ .$$

En effet

$$\lambda(B_x) = g(x) - f(x) \in \mathbb{R} \quad \mu\text{-p.p.} \ .$$

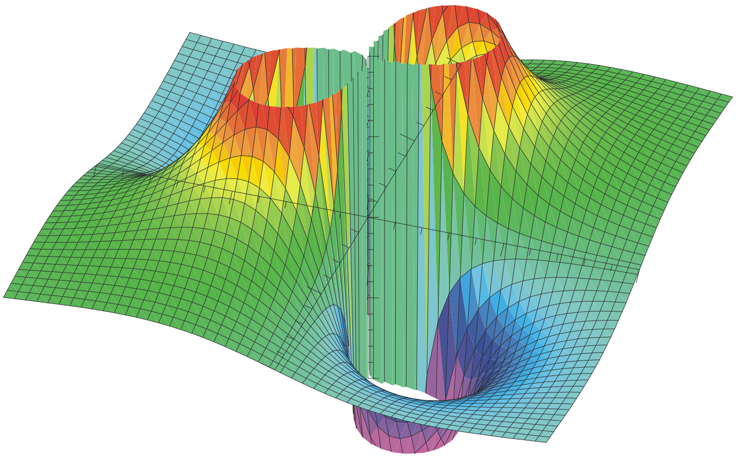
□

EXERCICE 1 Montrer que les intégrales de Lebesgue successives de la fonction

$$f :]-1,1[^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

existent et coïncident, mais que

$$f \notin \mathcal{L}^1\left(\lambda_{](-1,1)[^2}\right) .$$



EXERCICE 2 Montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin\ x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} ,$$

en utilisant le théorème de Fubini et le fait que

$$\int_0^\infty e^{-xy}\, dy = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* .$$

REMARQUE 2 Dans le cadre de l'intégration essentielle le lemme est valable en toute généralité :

Si $N \subset X$ est une partie localement μ-négligeable, alors $N \times Y$ est localement $\mu \otimes \nu$-négligeable.

Par contre les théorèmes de Fubini et Tonelli ne sont valables que si la première intégrale par rapport à laquelle on intègre est modérée. On ne peut donc pas toujours permuter les intégrations.

L'exercice ci-dessous montre les difficultés que que l'on rencontre.

EXERCICE 3 (Parties localement négligeables dans un produit) Soient

$$X := [0,1] \times [0,1]_d \quad \text{et} \quad \sigma := \lambda_{[0,1]} \otimes \#_{[0,1]_d} .$$

(a) Pour tout $s \in [0,1]$, la partie $\{s\} \times [0,1]_d$ n'est pas σ-négligeable.

(b) La diagonale $\Delta \subset X$ est fermée, localement σ-négligeable, mais pas σ-négligeable, chaque coupe verticale est de $\#_{[0,1]_d}$-mesure 1 et chaque coupe horizontale $\lambda_{[0,1]}$-négligeable.

(c) La partie

$$A := \{((s,t),(u,v)) \in X \times X \mid v = s\}$$

est fermée et localement $\sigma\otimes\sigma$-négligeable, mais les coupes ne sont pas localement σ-négligeables, bien que σ-mesurables.

16.4 Cas de $\mathbb{R}^n$

DEFINITION Nous désignerons par λ^n l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

On a

$$\lambda^n = \bigotimes_{j=1}^{n} \lambda \ ,$$

produit de n copies de l'intégrale de Lebesgue $\lambda := \lambda_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda^{n+m} = \lambda^n \otimes \lambda^m \ .$$

EXEMPLE 1 Les ensembles dénombrables, ainsi que les hyperplans et les sphères dans $\mathbb{R}^n$ sont des ensembles λ^n-négligeables.

Ces ensembles étant λ^n-mesurables, on peut utiliser le théorème de Tonelli. Dans une décomposition adéquate de $\mathbb{R}^n$, du type $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ en ayant au besoin permuté certaines coordonnées, la coupe au-dessus de chaque $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ étant au plus dénombrable est λ-négligeable, d'où le résultat. $\square$

EXEMPLE 2 Soient $Q := \left]0,1\right[^2 \subset \mathbb{R}^2$ et $s \in \mathbb{R}$. On a $\lambda_Q = \lambda_{]0,1[} \otimes \lambda_{]0,1[}$. La fonction

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{(x+y)^s} : Q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est λ_Q-intégrable si, et seulement si, on a $s < 2$. Dans ce cas, on a

$$\iint_Q^* \frac{1}{(x+y)^s} \, d(x, y) = \begin{cases} 2 \cdot \ln 2 & \text{si} \quad s = 1 \\ \frac{2^{2-s}-2}{(1-s)(2-s)} & \phantom{\text{si}} \quad s < 2 \text{ et } s \neq 1 \end{cases} \ .$$

Il est clair que cette fonction est λ_Q-mesurable, puisqu'elle est continue. En outre, par le théorème de Tonelli, on a

$$\iint_Q^* \frac{1}{x+y} \, d(x, y) = \int_{]0,1[}^* \left(\int_{]0,1[}^* \frac{dy}{x+y} \right) dx = \int_{]0,1[}^* \Big[\ln(x+y) \Big]_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_{]0,1[}^* \left[\ln(x+1) - \ln x \right] dx = 2 \cdot \ln 2 \ .$$

Si $s \neq 1$, il vient

$$\iint_Q^* \frac{1}{(x+y)^s} \, d(x, y) = \int_{]0,1[}^* \left(\int_{]0,1[}^* \frac{dy}{(x+y)^s} \right) dx = \int_{]0,1[}^* \left[\frac{1}{1-s} \cdot (x+y)^{1-s} \right]_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_{]0,1[}^* \frac{1}{1-s} \cdot \left[(x+1)^{1-s} - x^{1-s} \right] dx \ .$$

Si $s < 1$, il est clair que cette intégrale supérieure est finie. Si $s > 1$, on l'écrit sous la forme

$$\int_{]0,1[}^{*} \frac{1}{s-1} \cdot \left[x^{1-s} - (x+1)^{1-s}\right] \, dx \; .$$

Mais comme le second terme est intégrable, cette intégrale supérieure est finie si, et seulement si, $\int_{]0,1[}^{*} x^{1-s} \, dx < \infty$, i.e. $s < 2$ (cf. exercice 14.10). □

EXEMPLE 3 Avec les mêmes notations, la fonction

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{(x^2 + y^2)^s} : Q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est λ_Q-intégrable si, et seulement si, on a $s < 1$.

Elle est évidemment λ_Q-mesurable. Si $s < 1$, il vient

$$\iint_{Q}^{*} \frac{1}{(x^2 + y^2)^s} \, d(x, y) \leqslant \iint_{Q}^{*} \frac{2}{(x + y)^{2s}} \, d(x, y) < \infty \; ,$$

ce qui montre que la condition est suffisante. Réciproquement, si $s \geqslant 1$ on a

$$\iint_{Q}^{*} \frac{1}{(x^2 + y^2)^s} \, d(x, y) \geqslant \iint_{Q}^{*} \frac{1}{(x + y)^{2s}} \, d(x, y) = \infty \; .$$

□

Ce dernier exemple montre les difficultés que l'on rencontre pour calculer explicitement l'intégrale de fonctions à plusieurs variables. Il est nécessaire de pouvoir faire un changement simultané de toutes les variables. C'est ce que nous allons traiter dans le numéro suivant.

THEOREME (Intégration par parties) *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ et $a, b \in J$. Alors*

$$\int_a^b \partial F \cdot G = \Big[F \cdot G\Big]_a^b - \int_a^b F \cdot \partial G \; .$$

On peut supposer que $a \leqslant b$. On a alors

$$\int_a^b \partial F \cdot G = \int_a^b \partial F(s) \cdot \left[G(a) + \int_a^s \partial G(t) \, dt\right] ds =$$

$$= [F(b) - Fa] \cdot G(a) + \int \left[\int 1_{]a,s[}(t) \cdot \partial F(s) \cdot \partial G(t) \; d\lambda_{]a,b[}(t)\right] d\lambda_{]a,b[}(s) \; .$$

En posant

$$A := \left\{(s, t) \in \left]a, b\right[^2 \;\middle|\; t < s\right\} \; ,$$

on a

$$1_{]a,s[}(t) = 1_A(s, t) = 1_{]t,b[}(s) \; .$$

Par le corollaire 16.3, le théorème de Tonelli et le théorème de Fubini, on obtient

$$\int \left[\int 1_{]a,s[}(t) \cdot \partial F(s) \cdot \partial G(t) \; d\lambda_{]a,b[}(t)\right] d\lambda_{]a,b[}(s) = \int 1_A \cdot \partial F \otimes \partial G \, d\lambda_{]a,b[} \otimes \lambda_{]a,b[} =$$

$$= \int \left[\int 1_{]t,b[}(s) \cdot \partial F(s) \cdot \partial G(t) \; d\lambda_{]a,b[}(s) \right] d\lambda_{]a,b[}(t) = \int_a^b \left[\int_t^b \partial F(s) \; ds \right] \cdot \partial G(t) \; dt =$$

$$= \int_a^b [F(b) - F(t)] \cdot \partial G(t) \; dt = F(b) \cdot [G(b) - G(a)] - \int_a^b F \cdot \partial G \; .$$

Finalement

$$\int_a^b \partial F \cdot G = [F(b) - Fa] \cdot G(a) + F(b) \cdot [G(b) - G(a)] - \int_a^b F \cdot \partial G =$$

$$= F(b) \cdot G(b) - F(a) \cdot G(a) - \int_a^b F \cdot \partial G \; .$$

□

COROLLAIRE *On a $F \cdot G \in \mathcal{A}(J)$ et*

$$\partial(F \cdot G) = \partial F \cdot G + F \cdot \partial G \; .$$

C'est immédiat, puisque pour tout $t, \tau \in J$, on a

$$(F \cdot G)(t) = (F \cdot G)(\tau) - \int_\tau^t (\partial F \cdot G + F \cdot \partial G) \; .$$

□

EXERCICE (Théorème de dérivabilité) Le résultat qui suit généralise le théorème 15.5.

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, Y un espace métrique, ν une intégrale de Radon sur Y , et

$$f : J \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$$

une fonction telle que

(a) $f(t, \cdot) : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ est ν-intégrable pour tout $t \in J$.

(b) $f(\cdot, y) : J \longrightarrow \mathbb{C}$ est absolument continue, de dérivée $\partial_1 f(\cdot, y)$ pour ν-presque tous les $y \in Y$.

(c) Pour tout intervalle compact $[a, b] \subset J$, la fonction

$$(t, y) \longmapsto \partial_1 f(s, y) : [a, b] \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$$

est $\lambda_{[a,b]} \otimes \nu$-intégrable.

Alors $\partial_1 f(t, \cdot)$ est ν-intégrable pour presque tout les $t \in J$, et la fonction

$$\int f(\cdot, y) \; d\nu(y) : t \longmapsto \int f(t, \cdot) \; d\nu : J \longrightarrow \mathbb{C}$$

est absolument continue sur J de dérivée

$$\partial \left(\int f(\cdot, y) \; d\nu(y) \right) = \int \partial_1 f(\cdot, y) \; d\nu(y) \; .$$

EXEMPLE 4 Soit $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une énumération de $\mathbb{Q}$. La fonction

$$f := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\operatorname{signum}(\mathrm{id} - q_k) \cdot \sqrt{|\mathrm{id} - q_k|}}{2^k \cdot \left(1 + \sqrt{|q_k|}\right)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est absolument continue de dérivée

$$\partial f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+1}\cdot\left(1+\sqrt{|q_k|}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{|\mathrm{id}-q_k|}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Remarquons que cette dérivée est non-bornée au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

En effet cette dernière fonction est évidemment λ-mesurable et localement λ-intégrable, puisque pour tout intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et tout $k\in\mathbb{N}$, on a

$$\int_a^b \frac{1}{2\left(1+\sqrt{|q_k|}\right)\cdot\sqrt{|\mathrm{id}-q_k|}} = \frac{1}{1+\sqrt{|q_k|}}\cdot\left[\mathrm{signum}\,(\mathrm{id}-q_k)\cdot\sqrt{|\mathrm{id}-q_k|}\right]_a^b \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1+\sqrt{|q_k|}}\cdot\left(\sqrt{|b-q_k|}+\sqrt{|a-q_k|}\right) \leqslant \frac{\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}+2\sqrt{|q_k|}}{1+\sqrt{|q_k|}} \leqslant 4+\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}$$

et, par le théorème de Beppo Levi

$$\int_a^b \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+1}\left(1+\sqrt{|q_k|}\right)\cdot\sqrt{|\mathrm{id}-q_k|}} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\int_a^b \frac{1}{2^{k+1}\left(1+\sqrt{|q_k|}\right)\cdot\sqrt{|\mathrm{id}-q_k|}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{4+\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}}{2^{k+1}} < \infty \ .$$

En outre

$$\int_a^b \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+1}\left(1+\sqrt{|q_k|}\right)\cdot\sqrt{|\mathrm{id}-q_k|}} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\left[\frac{\mathrm{signum}\,(\mathrm{id}-q_k)\cdot\sqrt{|\mathrm{id}-q_k|}}{2^k\cdot\left(1+\sqrt{|q_k|}\right)}\right]_a^b =$$

$$= f(b)-f(a) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

EXEMPLE 5 Utilisant la fonction f de l'exemple précédent, on voit facilement que la fonction

$$(t,y) \longmapsto f(t-y)\cdot e^{-y^2} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

satisfait aux conditions de l'exercice ci-dessus grâce à l'invariance par translation de l'intégrale de Lebesgue (cf. exemple 16.6.1). On a donc

$$\partial\left(\int_{\mathbb{R}} f(\diamond - y)\cdot e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(\diamond - y)\cdot e^{-y^2}\,dy \ .$$

Cet exemple montre que nous avons non-seulement généralisé le théorème de dérivabilité 15.5 aux fonctions absolument continues, mais aussi affaibli la troisième condition. En effet, pour tout $\tau\in\mathbb{R}$ et tout voisinage U de τ , il n'existe aucune fonction λ-intégrable g telle

$$\sup_{t\in U}\left|\partial_1 f(t-\mathrm{id})\cdot e^{-\mathrm{id}^2}\right| \leqslant g \quad \lambda\text{-p.p.} \ .$$

16.5 Changement de variables

THEOREME *Soient X , Y des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi : Y \longrightarrow X$ un difféomorphisme. Alors*

$$\Phi\left(|\det D\Phi| \cdot \lambda_Y\right) = \lambda_X \ ,$$

i.e.

$$\lambda_X = \int |\det D\Phi\left(y\right)| \cdot \varepsilon_{\Phi(y)} \, d\lambda_Y\left(y\right) \ .$$

D'après la définition 16.9, cela signifie que, pour tout $s \in \mathcal{SK}\left(X\right)$, on a

$$\lambda_X\left(s\right) = \int^* s \circ \Phi\left(y\right) \cdot |\det D\Phi\left(y\right)| \ d\lambda_Y\left(y\right) \ .$$

Mais par le théorème 14.6 et la propriété de Bourbaki 14.5, il nous suffit de montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}\left(X\right)$, on a

$$\int \varphi \ d\lambda_X = \int \varphi \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \ d\lambda_Y \ .$$

La démonstration se fait par récurrence sur n . Si $n = 1$, nous savons que

$$Y = \bigcup I_k \ ,$$

où (I_k) est une suite disjointe au plus dénombrable d'intervalles ouverts, et par suite que

$$X = \bigcup \Phi\left(I_k\right) \ .$$

D'autre part Φ est sur chaque intervalle I_k ou bien strictement croissante, ou bien strictement décroissante. Comme $1_{\Phi(I_k)} \cdot \varphi \in \mathcal{K}\left(\Phi\left(I_k\right)\right)$ et $1_{\Phi(I_k)} \cdot \varphi \neq 0$ seulement pour un nombre fini de k , la formule classique de substitution montre que

$$\int \varphi \ d\lambda_X = \sum \int 1_{\Phi(I_k)} \cdot \varphi \ d\lambda_{\Phi(I_k)} = \sum \int 1_{I_k} \cdot \left(\varphi \circ \Phi\right) \cdot |\det D\Phi| \ d\lambda_{I_k} =$$

$$= \int \varphi \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \ d\lambda_Y \ .$$

Nous supposons maintenant que la formule est vraie en dimension $n-1$ pour tous les difféomorphismes et nous allons démontrer en trois étapes que cette formule est vraie en dimension n .

(A) Supposons tout d'abord que Φ est un difféomorphisme laissant l'une des variables fixe. Nous pouvons supposer que c'est la première, donc que Φ est de la forme

$$\Phi\left(y_1, \ldots, y_n\right) = \left(y_1, \Phi_2\left(y_1, \ldots, y_n\right), \ldots, \Phi_n\left(y_1, \ldots, y_n\right)\right) \ .$$

Etant donné $y_1 \in \mathbb{R}$, soient

$$Y_{y_1} := \left\{ \tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1} \;\middle|\; (y_1, \tilde{y}) \in Y \right\} \quad , \quad X_{y_1} := \left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \;\middle|\; (y_1, \tilde{x}) \in X \right\} \ ,$$

et considérons la bijection

$$\Phi_{y_1} : Y_{y_1} \longrightarrow X_{y_1} : \tilde{y} \longmapsto \left(\Phi_2\left(y_1, \tilde{y}\right), \ldots, \Phi_n\left(y_1, \tilde{y}\right)\right) \ .$$

Comme Φ est continûment dérivable, i.e. continûment partiellement dérivable, il en est de même de Φ_{y_1} et on a

$$D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \partial_1\Phi_2 & \partial_2\Phi_2 & \ldots & \partial_n\Phi_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1\Phi_n & \partial_2\Phi_n & \ldots & \partial_n\Phi_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D\Phi_{y_1} = \begin{pmatrix} \partial_1\Phi_2\,(y_1,\cdot) & \ldots & \partial_n\Phi_2\,(y_1,\cdot) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1\Phi_n\,(y_1,\cdot) & \ldots & \partial_n\Phi_n\,(y_1,\cdot) \end{pmatrix} .$$

Ceci montre que

$$\det D\Phi_{y_1}(\tilde{y}) = \det D\Phi\,(y_1,\tilde{y}) \neq 0 \ ,$$

donc que Φ_{y_1} est un difféomorphisme en dimension $n-1$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(Y) \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, puisque $\lambda^n = \lambda \otimes \lambda^{n-1}$, on obtient par le théorème de Fubini et l'hypothèse de récurrence

$$\int \varphi \; d\lambda_X = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi\,(x_1,\tilde{x}) \; d\tilde{x} \right) dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{X_{y_1}} \varphi\,(y_1,\tilde{x}) \; d\tilde{x} \right) dy_1 =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{Y_{y_1}} \varphi\,(y_1,\Phi_{y_1}(\tilde{y})) \cdot \left|\det D\Phi_{y_1}(\tilde{y})\right| \; d\tilde{y} \right) dy_1 =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi \circ \Phi\,(y_1,\tilde{y}) \cdot \left|\det D\Phi\,(y_1,\tilde{y})\right| \; d\tilde{y} \right) dy_1 =$$

$$= \int \varphi \circ \Phi \cdot \left|\det D\Phi\right| \; d\lambda_Y \ ,$$

ce qui montre que la formule est vraie dans ce cas.

(B) Soient Φ un difféomorphisme quelconque et $\eta \in Y$. Comme $\det D\Phi\,(\eta) \neq 0$, il existe des indices k,l tels que $\partial_k\Phi_l\,(\eta) \neq 0$. En permutant les variables $y_1,\ldots,y_n$ et les fonctions $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$, nous pouvons supposer que

$$\partial_n\Phi_n\,(\eta) \neq 0 \ .$$

Considérons alors l'application

$$\Psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}^n : (\tilde{y},y_n) \longmapsto (\tilde{y},\Phi_n\,(\tilde{y},y_n)) \ ,$$

qui est évidemment (partiellement) continûment dérivable. On a

$$D\Psi = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \mathrm{Id} & \vdots \\ & & 0 \\ \partial_1\Phi_n & \ldots & \partial_n\Phi_n \end{pmatrix} ,$$

donc

$$\det D\Psi\,(\eta) = \partial_n\Phi_n\,(\eta) \neq 0 \ .$$

Le théorème de la fonction réciproque 13.2 montre alors qu'il existe un voisinage ouvert V_η dans Y de η tel que Ψ induise un difféomorphisme Ψ_η de V_η sur le voisinage ouvert $W_\eta := \Psi\,(V_\eta)$ de $\Psi\,(\eta)$. Remarquons que Ψ_η est de la forme décrite en (A). D'autre part

$$\Theta_\eta := \Phi \circ \overset{-1}{\Psi}_\eta : W_\eta \longrightarrow U_\eta := \Phi\,(V_\eta)$$

est aussi un difféomorphisme de la même forme, puisque si $w = \Psi_\eta(\tilde{y}, y_n) = (\tilde{y}, \Phi_n(\tilde{y}, y_n))$, on a $w_n = \Phi_n(\tilde{y}, y_n)$, donc

$$\Theta_{\eta,n}(w) = \Phi_n\left(\overset{-1}{\Psi}_\eta(w)\right) = \Phi_n(\tilde{y}, y_n) = w_n \ .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(U_\eta)$, il vient alors

$$\int_{U_\eta} \varphi \, d\lambda_X = \int_{W_\eta} \varphi \circ \Theta_\eta \cdot |\det D\Theta_\eta| \, d\lambda = \int_{V_\eta} \varphi \circ \Theta_\eta \cdot |\det D\Theta_\eta| \circ \Psi_\eta \cdot |\det D\Psi_\eta| \, d\lambda =$$

$$= \int_{V_\eta} \varphi \circ \Phi_\eta \cdot |\det D\Phi_\eta| \, d\lambda_Y \ ,$$

où $\Phi_\eta := \Theta_\eta \circ \Psi_\eta$ est le difféomorphisme entre V_η et U_η induit par Φ .

(C) Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, il existe par compacité une suite finie (η_k) telle que

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \bigcup U_{\eta_k} \ .$$

En posant

$$A_k := V_{\eta_k} \setminus \bigcup_{l=0}^{k-1} V_{\eta_l} \quad \text{et} \quad B_k := \Phi(A_k) \ ,$$

on obtient

$$\int \varphi \, d\lambda_X = \sum \int_{U_{\eta_k}} 1_{B_k} \cdot \varphi \, d\lambda_X = \sum \int_{V_{\eta_k}} 1_{A_k} \cdot \left(\varphi \circ \Phi_{\eta_k}\right) \cdot \left|\det D\Phi_{\eta_k}\right| \, d\lambda_Y =$$

$$= \int \varphi \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda_Y \ ,$$

ce qui finit de prouver le théorème. □

COROLLAIRE (Formule du changement de variables)

(i) Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a

$$\int^* f \, d\lambda_X = \int^* f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda_Y \ .$$

(ii) Une fonction réelle ou complexe f sur X est λ_X-intégrable si, et seulement si $f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi|$ est λ_Y-intégrable. Dans ce dernier cas, on a

$$\int f \, d\lambda_X = \int f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda_Y \ .$$

(iii) Une fonction réelle ou complexe f sur X est λ_X-mesurable, si, et seulement si, $f \circ \Phi$ est λ_Y-mesurable.

(iv) Pour qu'une partie $A \subset X$ soit λ_X-négligeable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\Phi}(A)$ soit λ_Y-négligeable.

Démonstration de (i) Par la proposition 16.1, on a

$$\int^* f \, d\lambda_X \geqslant \int^* f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda_Y \ ,$$

ainsi que

$$\int^{*} f\circ\Phi\cdot\left|\det D\Phi\right|\,d\lambda_Y \geqslant \int^{*}\left[f\circ\Phi\cdot\left|\det D\Phi\right|\right]\circ\overset{-1}{\Phi}\cdot\left|\det D\overset{-1}{\Phi}\right|\,d\lambda_X = \int^{*} f\,d\lambda_X\ ,$$

puisque $\overset{-1}{\Phi}$ est un difféomorphisme de X sur Y et que

$$\det D\overset{-1}{\Phi} = \frac{1}{(\det D\Phi)\circ\overset{-1}{\Phi}}\ .$$

Démonstration de (ii) C'est immédiat par définition de l'intégrabilité.

Démonstration de (iii) Par le théorème des intégrations successives 16.1 nous savons que

$$f\circ\Phi\cdot\left|\det D\Phi\right| : y\longmapsto \int f\,d\left(\left|\det D\Phi\left(y\right)\right|\cdot\varepsilon_{\Phi(y)}\right)$$

est λ_Y-mesurable. Par symmétrie comme dans (i) nous obtenons la réciproque.

Démonstration de (iv) C'est immédiat par (ii) puisque $1_{\overset{-1}{\Phi}(A)} = 1_A\circ\Phi$ et $\det D\Phi\neq 0$ partout. □

16.6 Exemples

EXEMPLE 1 Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une transformation affine bijective, i.e.

$$\Phi : x \longmapsto Tx + b$$

avec $T \in \mathbb{GL}_{\mathbb{R}}(n)$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a

$$\int^* f(y)\ dy = |\det T| \cdot \int^* f(Tx + b)\ dx\ .$$

En particulier l'intégrale de Lebesgue est invariante par transformation orthogonale et translation, i.e.

$$\int^* f(y)\ dy = \int^* f(Tx + b)\ dx \quad \text{si } T \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)\ ,$$

et pour tout $r \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\int^* f(y)\ dy = |r|^n \cdot \int^* f(rx)\ dx\ .$$

C'est immédiat, puisque $D\Phi(x) = T$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. □

EXEMPLE 2 Soit $(v_j)_{j=1,\ldots,n}$ une suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. Nous désignerons par

$$P[v_1, \ldots, v_n] := \left\{ x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot v_j \ \middle|\ 0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1 \text{ pour } j = 1, \ldots, n \right\}$$

le parallélotope (peut-être dégénéré) construit sur les v_j .

On a

$$\lambda^n(P[v_1, \ldots, v_n]) = |\det(v_1, \ldots, v_n)|\ .$$

En effet, si les v_j sont linéairement dépendants, i.e. $\det(v_1, \ldots, _n) = 0$, le parallélotope est contenu dans un hyperplan, donc de mesure nulle, ce qui prouve la formule dans ce cas. Si les v_j sont linéairement indépendants, il existe une unique application linéaire bijective $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $Ae_j = v_j$, où (e_j) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a alors $A([0,1]^n) = P[v_1, \ldots, v_n]$, donc

$$\lambda^n(P[v_1, \ldots, v_n]) = \int 1_{A([0,1]^n)}\ d\lambda = |\det A| \cdot \int 1_{A([0,1]^n)} \circ A\ d\lambda =$$

$$= |\det A| \cdot \int 1_{[0,1]^n}\ d\lambda = |\det A| = |\det(v_1, \ldots, v_n)|\ .$$

□

REMARQUE Les considérations heuristiques suivantes fournissent une justification de la formule du changement de variables, lorsqu'on connait la formule donnant le volume d'un parallélotope. Rappelons que, pour tout $y \in Y$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ petit, on peut écrire

$$\Phi(y+h) \simeq \Phi(y) + D\Phi(y)\,h$$

(cf. 11.9 et remarque 8.1.3).

On a donc

$$\Phi(y + [0,\varepsilon[^n) \simeq \Phi(y) + D\Phi(y)([0,\varepsilon]^n) = \Phi(y) + P[\varepsilon \cdot D\Phi(y)\,e_1, \ldots, \varepsilon \cdot D\Phi(y)\,e_n] \ ,$$

donc

$$\lambda^n(\Phi(y + [0,\varepsilon[^n)) \simeq \lambda^n(\varepsilon \cdot P[D\Phi(y)\,e_1, \ldots, D\Phi(y)\,e_n]) =$$

$$= \varepsilon^n \cdot |\det D\Phi(y)| = |\det D\Phi(y)| \cdot \lambda^n(y + [0,\varepsilon[^n) \ .$$

En considérant une partition approximative $(y_k^\varepsilon + [0,\varepsilon[^n)$ de Y , pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, il vient

$$\int \varphi \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \ d\lambda_Y = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum \varphi \circ \Phi(y_k^\varepsilon) \cdot |\det D\Phi(y_k^\varepsilon)| \cdot \lambda^n(y_k^\varepsilon + [0,\varepsilon[^n) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum \varphi(\Phi(y_k^\varepsilon)) \cdot \lambda^n(\Phi(y_k^\varepsilon + [0,\varepsilon[^n)) = \int \varphi \ d\lambda_X \ ,$$

puisque $(\Phi(y_k^\varepsilon + [0,\varepsilon[^n))$ est une partition approximative “tordue” de X .

On dit que $|\det D\Phi|$ est l' *élément de volume* relatif aux *coordonnées curvilignes* définies par Φ .

EXEMPLE 3 Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$.

Nous savons que (cf. exemple 13.2.2)

$$\Phi_2 :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{R}_- \times \{0\} : (r,\varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

est un difféomorphisme et que $\det D\Phi_2(r,\varphi) = r$. Comme $\mathbb{R}_- \times \{0\}$ est une partie λ^2-négligeable, la formule du changement de variables prend la forme

$$\iint_{\mathbb{R}^2}^{*} f(x,y) \ d(x,y) = \iint_{]0,\infty[\times]-\pi,\pi[}^{*} f(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi) \cdot r \ d(r,\varphi) \ .$$

EXEMPLE 4 Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^3$.

Nous savons que l'application (cf. exemple 13.2.3)

$$\Phi_3 :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \smallsetminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R} : (\rho,\varphi,\vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \rho \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi \\ \rho \cdot \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

est un difféomorphisme et que $\det D\Phi_3(\rho,\varphi,\vartheta) = \rho^2 \cdot \cos\vartheta$. Puisque $\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}$ est une partie λ^3-négligeable, la formule du changement de variables prend la forme

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3}^{*} f(x,y,z) \ d(x,y,z) =$$

$$= \int\int\int^*_{]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} f(\rho\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\varphi, \rho\cdot\sin\vartheta)\cdot\rho^2\cdot\cos\vartheta\, d(\rho,\varphi,\vartheta) \ .$$

EXEMPLE 5 Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$.

Nous savons que l'application (cf. exemple 13.2.4)

$$\Phi_n :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times\left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{R}_- \times\{0\}\times\mathbb{R}^{n-2}$$

$$(\rho,\varphi_2,\ldots,\varphi_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\cos\varphi_{n-1}\cdot\ldots\ldots\cdot\cos\varphi_3\cdot\cos\varphi_2 \\ \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\ldots\ldots\cdot\cos\varphi_4\cdot\cos\varphi_3\cdot\sin\varphi_2 \\ \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\ldots\ldots\cdot\cos\varphi_4\cdot\sin\varphi_3 \\ \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\ldots\ldots\cdot\sin\varphi_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho\cdot\sin\varphi_n \end{pmatrix}$$

est un difféomorphisme et que

$$\det D\Phi_n(\rho,\varphi_2,\ldots,\varphi_n) = \rho^{n-1}\cdot\cos^{n-2}\varphi_n\cdot\cos^{n-3}\varphi_{n-1}\cdot\ldots\cdot\cos\ \varphi_3 \ .$$

Comme application calculons le volume de la boule $\mathbb{B}^n(r)$ dans $\mathbb{R}^n$. On a

$$\lambda^n(\mathbb{B}^n(r)) =$$

$$= \int\cdots\int_{]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[^{n-2}} 1_{]0,r[}(\rho)\cdot\rho^{n-1}\cdot\cos^{n-2}\varphi_n\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_3\, d\left(\varphi_2,\ldots,\varphi_n\right) =$$

$$= \left(\int_0^r \rho^{n-1}\,d\rho\right)\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_2\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^j\varphi_{j+2}\,d\varphi_{j+2} = \frac{r^n}{n}\cdot 2\pi\cdot\prod_{j=1}^{n-2} 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^j\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{r^n}{n}\cdot 2\pi\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+2}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot r^n \ .$$

En effet les nombres $A_j := \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^j\varphi\,d\varphi$ satisfont d'après 9.13 à la relation de récurrence

$$A_0 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad A_1 = 1 \quad \text{et} \quad A_{j+2} = \frac{\frac{j}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{j}{2}+1}\cdot A_j \text{ pour tout } j\in\mathbb{N} \ .$$

Il n'est pas difficile de vérifier, en utilisant le fait que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x) \ ,$$

que

$$A_j = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{j}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j}{2}+1\right)} \quad \text{pour tout } j\in\mathbb{N} \ .$$

En outre, on a

$$\int\cdots\int_{]-\pi,\pi[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[^{n-2}} \cos^{n-2}\varphi_n\cdot\cos^{n-3}\varphi_{n-1}\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_3\, d\left(\varphi_{2,}\ldots,\varphi_n\right) = \frac{2\cdot\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \ .$$

Nous verrons ci-dessous (exemple 17.3) que ce nombre est la surface de la spère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLE 6 Remarquons tout d'abord qu'une fonction $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) est *invariante par rotation* (ou par transformation orthogonale) si, et seulement si, il existe une fonction $\widetilde{f}:\mathbb{R}_+\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que

$$f(x)=\widetilde{f}(|x|)\quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}^n \ .$$

En effet une fonction de cette forme est invariante par toute transformation $A\in\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$, puisque $|Ax|=|x|$. Réciproquement, il suffit de poser $\widetilde{f}(r):=f(r\cdot e_1)$, car pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, il existe une rotation $A_x\in\mathbb{SO}_n(\mathbb{R})$ telle que $x=A_x(|x|\cdot e_1)$. □

Une fonction $f:x\longmapsto\widetilde{f}(|x|)$ invariante par rotation est λ^n-intégrable si, et seulement si, la fonction $r\longmapsto\widetilde{f}(r)\cdot r^{n-1}$ est $\lambda_{]0,\infty[}$-intégrable. Dans ce cas on a

$$\int f\ d\lambda^n=\frac{2\cdot\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\int_0^\infty\widetilde{f}(r)\cdot r^{n-1}\,dr \ .$$

En effet $f\circ\Phi_n=\widetilde{f}_{|]0,\infty[}\otimes 1_{]-\pi,\pi[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[^{n-2}}$, et f est λ^n-intégrable si, et seulement si, $f\circ\Phi_n\cdot|\det D\Phi_n|$ est $\lambda^n_{]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[^{n-2}}$-intégrable, d'où le résultat. □

Pour que la fonction $1_{\mathbb{B}^n(1)}\cdot\frac{1}{|\mathrm{id}|^s}$ soit λ^n-intégrable, il faut et il suffit que l'on ait $s<n$. Dans ce cas

$$\int_{\mathbb{B}^n(1)}\frac{1}{|x|^s}\,dx=\frac{2\cdot\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-s)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \ .$$

En effet l'intégrale $\int_0^1\frac{1}{r^s}\cdot r^{n-1}\,dr$ est convergente si, et seulement si, on a $s<n$. Dans ce cas son intégrale est $\frac{1}{s-n}$. □

EXERCICE 1 Soit

$$G:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x,y>0 \text{ et } x+y<4\right\} \ .$$

Calculer

$$\int_G\exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\,d(x,y) \ .$$

EXERCICE 2 Soient $f,g\in\mathcal{L}^1(\lambda)$ tels que $0\leqslant f\leqslant g$ et

$$A:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ f(z)\leqslant x^2+y^2\leqslant g(z)\right\} \ .$$

Donner une interprétation géométrique de A , puis montrer que A est λ^3-intégrable et que

$$\lambda^3(A)=\pi\cdot\left(\int g\ d\lambda-\int f\ d\lambda\right) \ .$$

EXERCICE 3 Soient $0 < r < R$ et $T \subset \mathbb{R}^3$ le tore plein, obtenu par rotation du disque

$$K := \left\{ (u, 0, w) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (u - R)^2 + w^2 \leqslant r^2 \right\}$$

autour de l'axe des z , i.e.

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z \right) \in K \right\} \ .$$

Montrer que T est λ^3-intégrable et que $\lambda^3 (T) = 2\pi^2 \cdot r^2 \cdot R$ de deux manières différentes. Utiliser tout d'abord l'exercice 2, puis des coordonnées polaires adéquates.

EXERCICE 4 Soient $R > 0$ et

$$M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 2z^2 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2 \right\}$$

Montrer que M est λ^3-intégrable et calculer son volume.

EXERCICE 5 Soit A une matrice $n \times n$ réelle symétrique et définie positive. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x|Ax)} \, dx \ .$$

Utiliser (et montrer) qu'il existe une matrice $n \times n$ réelle symétrique et définie positive B telle que $B^2 = A$. Calculer également le volume de l'ellipsoïde

$$E := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x| Ax) \leqslant 1 \} \ .$$

EXERCICE 6 Déterminer l'ensemble des $s \in \mathbb{R}$ pour lesquels la fonction

$$x \longmapsto \frac{x_1 \cdot x_2}{(1 + |x|)^s} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

est λ^3-intégrable et calculer son intégrale.

EXERCICE 7 Soit $n \geqslant 2$. Déterminer l'ensemble des $s \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_{\mathbb{B}^n(1)}^{*} \frac{1}{\left(1 - |x|^2\right)^s} \, dx < \infty \ .$$

EXERCICE 8 Avec les notations de l'exercice 13.2.2, calculer la surface de l'ensemble

$$E := \Phi \left( ]\varphi_1, \varphi_2[\times]0, \vartheta_0[\right) \ .$$

EXERCICE 9 Avec les notations de l'exercice 13.2.3, calculer la surface de l'ensemble S délimitée par les courbes C_{s_1} , C_{s_2} , D_{t_1} , D_{t_2} .

EXERCICE 10 Avec les notations de l'exercice 13.2.4, calculer la surface de l'ensemble S délimitée par les courbes P_{a_1} , P_{a_2} , Q_{b_1} , Q_{b_2} .

EXERCICE 11 Soient $f, g \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda^n)$.

(a) Montrer que la fonction

$$(x, y) \longmapsto f(x - y) \cdot g(y)$$

appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}\left(\lambda^{2n}\right)$, puis que $f(x - \cdot) \cdot g \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda^n)$ pour λ-presque tous les x .

(b) La première partie permet de définir une fonction sur $\mathbb{R}^n$, notée $f * g$, par

$$f * g(x) := \int f(x - y) \cdot g(y)\ dy\ .$$

Montrer que $f * g \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda^n)$ et $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

(c) Soit $f := 1_{[-1,1]} \cdot |\mathrm{id}|^{-\frac{1}{2}}$ et

$$g := \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \cdot f(\cdot - q_k)\ \ ,$$

où (q_k) est une énumération de $\mathbb{Q}$. Montrer que $g \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda)$ et que

$$g * g(q) = \int^* g(q - y) \cdot g(y)\, dy = \infty \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{Q}\ .$$

Peut-on déterminer les x où $g * g(x)$ est bien définie ?

16.7 Famille μ-dense de fonctions

Avant de pouvoir donner des conditions permettant d'intégrer une famille $\left(\mu_y\right)_{y\in Y}$ d'intégrales de Radon, introduisons la notion technique dont nous aurons besoin.

DEFINITION Soit μ une intégrale de Radon sur X . Nous dirons qu'une famille $\mathcal{U} \subset \mathcal{SK}_-(X)$ est *μ-dense* si, pour tout $s \in \mathcal{SK}_+(X)$, on a

$$\mu(s) = \sup\nolimits_{u\in\mathcal{U}, -u\leqslant s} -\mu(u) \ .$$

EXEMPLE Si X est localement compact, alors $\mathcal{K}_-(X)$ est μ-dense.

C'est immédiat par le théorème 14.6 . □

LEMME *Si K est une partie compacte de X , alors l'ensemble*

$$\left\{u \in \mathcal{SK}_-(X) \;\middle|\; u_{|K} \text{ est continue}\right\}$$

est μ-dense.

Soient $s \in \mathcal{SK}_+(X)$, $r \in \mathbb{R}$ tels que $r < \mu(s)$, $t \in \mathcal{SK}_-(X)$ tel que $-t \leqslant s$ et $-\mu(t) > r$. Il existe alors une partie compacte $L \supset K$ telle que $t = 0$ hors de L . Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $-\mu(t) - \varepsilon \cdot \mu(L) \geqslant r$. Puisque L est complètement régulier, pour tout $x \in L$, il existe $f_x \in \mathcal{C}(L)$ tel que $f_x = 0$ hors de $\left\{s > -t(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap L$ et $f_x(x) = -t(x) - \frac{\varepsilon}{2}$. On peut supposer que $f_x \leqslant -t(x) - \frac{\varepsilon}{2}$, donc que $f_x \leqslant s$. Comme

$$U_x := \left\{f_x + t_{|L} > -\varepsilon\right\}$$

est un voisinage ouvert de x dans L , par compacité il existe $x_1, \ldots, x_l \in L$ tels que

$$L = \bigcup_{j=1}^{l} U_{x_j} \ .$$

En définissant $u \in \mathcal{SK}_-(X)$ comme le prolongement de $-\min_{j=1,\ldots,l} f_{x_j}$ par 0 hors de L , on a $u_{|K} \in \mathcal{C}(K)$ et $u \leqslant t + \varepsilon$, donc

$$-\mu(u) \geqslant -\int 1_L \cdot (t+\varepsilon)\, d\mu = -\mu(t) - \varepsilon \cdot \mu(L) \geqslant r \ .$$

□

16.8 Intégration d'une famille d'intégrales

Dans ce qui suit, on considère une intégrale de Radon ν sur Y et $(\mu_y)_{y\in Y}$ une famille d'intégrales de Radon sur X . Pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, nous écrirons

$$\mu_\diamond(s) : y \longmapsto \mu_y(s) : Y \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}} .$$

DEFINITION 1 Nous dirons qu'une famille $(\mu_y)_{y\in Y}$ est *convenablement ν-mesurable* si, pour tout compact L de Y et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $L' \subset L$ tel que

(a) $\nu(L \smallsetminus L') \leqslant \varepsilon$.

(b) Il existe une partie $\mathcal{U} \subset \mathcal{SK}_-(X)$ qui soit μ_z-dense pour tout $z \in L'$ et telle que $\mu_\diamond(u)_{|L'}$ soit continue pour tout $u \in \mathcal{U}$.

Elle est dite *convenablement ν-intégrable* si elle est convenablement ν-mesurable et si, pour tout $x \in X$, il existe $t \in \mathcal{SK}_+(X)$ tel que $t(x) > 0$ et

$$\int^* \mu_\diamond(t)\, d\nu < \infty .$$

EXEMPLE 1 Pour toute intégrale de Radon μ , la famille $(\varepsilon_y)_{y\in X}$ est convenablement μ-intégrable.

Cela découle immédiatement du lemme 16.7, en prenant $L' = L$ et en remarquant que $\varepsilon_\diamond(u) = u$. □

EXEMPLE 2 Si X est localement compact et si, pour tout compact L de Y et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $L' \subset L$ tel que

$$\nu(L \smallsetminus L') \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu_\diamond(\varphi)_{|L'} \text{ est continue pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) ,$$

alors $(\mu_y)_{y\in Y}$ est convenablement ν-mesurable.

Il suffit de se rappeler l'exemple 16.7 . □

EXEMPLE 3 Avec les notations de l'exemple 16.1.2, on vérifie facilement comme ci-dessus que $(\lambda_{X,y})_{y\in Y}$ et $(\lambda_{x,Y})_{x\in X}$ sont respectivement convenablement λ_Y- et λ_X-intégrables.

LEMME

(i) Si $(\mu_y)_{y\in Y}$ est convenablement ν-mesurable, pour tout $s \in \mathcal{SK}_+(X)$ la fonction $\mu_\diamond(s)$ est ν-mesurable au sens de Lusin, donc ν-mesurable.

(ii) *Si* $\left(\mu_y\right)_{y\in Y}$ *est convenablement* ν*-intégrable, alors pour tout* $s \in \mathcal{SK}(X)$ *respectivement* $s \in \mathcal{SK}_-(X)$ *, la fonction* $\mu_\diamond(s)$ *est* ν*-mesurable respectivement* ν*-intégrable. En particulier*

$$s \longmapsto \int^* \mu_\diamond(s)\, d\nu : \mathcal{SK}_-(X) \longrightarrow \mathbb{R}_-$$

est croissante linéaire.

Démonstration de (i) Avec les notations de la définition, pour tout $s \in \mathcal{SK}_+(X)$, on a

$$\mu_\diamond(s) = \sup\nolimits_{u\in\mathcal{U},-u\leqslant s} -\mu_\diamond(u) \quad \text{sur } L' \ ,$$

ce qui montre que $\mu_\diamond(s)_{|L'}$ est s.c.i. , d'où notre assertion par la proposition 15.11 .

Démonstration de (ii) Pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, il existe par hypothèse et la compacité de $\overline{\{s<0\}}$ un $t \in \mathcal{SK}_+(X)$ tel que $-t \leqslant s$ et $\mu(t) = \int^* \mu_\diamond(t)\, d\nu < \infty$. D'après (i) les fonctions $\mu_\diamond(t)$ et $\mu_\diamond(t+s) = \mu_\diamond(t) + \mu_\diamond(s)$ sont ν-mesurable, et comme $\mu_\diamond(t)$ est finie ν-p.p. par le corollaire 15.1.ii, on en déduit que $\mu_\diamond(s)$ est ν-mesurable en utilisant les théorèmes 15.8.iii, et 15.9.ii. En outre, on obtient

$$-\infty < -\mu(t) = \int_* -\mu_y(t)\, d\nu(y) \leqslant \int_* \mu_y(s)\, d\nu(y) \ .$$

Le résultat en découle par le critère d'intégrabilité 15.10 et la proposition 14.10.

REMARQUE 1 Le théorème de Lusin 15.11 ne permet pas de démontrer la réciproque de (i), la condition exigeant l'existence de L' indépendemment des $u \in \mathcal{U}$.

DEFINITION 2 Rappelons (cf. définition 15.12) qu'une intégrale de Radon μ sur X est dite *modérée* si X est μ-modéré.

THEOREME *Soit* $\left(\mu_y\right)_{y\in Y}$ *une famille convenablement* ν*-intégrable d'intégrales de Radon sur* X *. Si*

$$\int_* \mu_\diamond(s)\, d\nu = \int^* \mu_\diamond(s)\, d\nu \quad \text{pour tout } s \in \mathcal{SK}_+(X) \ , \tag{$*$}$$

alors

$$\mu := \int \mu_y\, d\nu(y) : s \longmapsto \int^* \mu_y(s)\, d\nu(y) : \mathcal{SK}(X) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$$

est une intégrale de Radon sur X *et* $\left(\mu_y\right)_{y\in Y}$ *est une décomposition de* μ *.*

La condition $(*)$ *est en particulier satisfaite dans les deux cas suivants :*

(i) ν *est modérée.*

(ii) *Pour tout* $s \in \mathcal{SK}_+(X)$ *, la fonction* $\mu_\diamond(s)$ *est s.c.i.*

Si la condition $(*)$ est satisfaite, μ est à valeurs dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ par le lemme (ii). En outre pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, on a

$$\int_* \mu_\diamond(s)\, d\nu \leqslant \int^* \mu_\diamond\left(s_- + s^+\right) d\nu \leqslant \int^* \mu_\diamond(s_-)\, d\nu + \int^* \mu_\diamond\left(s^+\right) d\nu =$$

$$= \int_* \mu_\diamond(s_-)\ d\nu + \int_* \mu_\diamond(s^+)\ d\nu \leqslant \int_* \mu_\diamond(s)\ d\nu\ ,$$

grâce à la proposition 14.10.(iv) et au lemme (ii), donc $\int_* \mu_\diamond(s)\ d\nu = \int^* \mu_\diamond(s)\ d\nu$. La proposition 14.10 montre alors que μ est croissante et linéaire. Il nous reste à prouver la régularité. Nous pouvons supposer que $s \geqslant 0$ en remplaçant s par $s + t$, en choisissant t comme dans la démonstration du lemme (ii), car

$$\mu(s) + \mu(t) = \mu(s+t) = \sup_{u \in \mathcal{SK}(X), -u \leqslant s+t} -\mu(u)\ ,$$

donc

$$\mu(s) = \sup_{u \in \mathcal{SK}(X), -u \leqslant s+t} -\mu(u+t) \leqslant \sup_{u \in \mathcal{SK}(X), -u \leqslant s} -\mu(u) \leqslant \mu(s)$$

par le lemme 14.6. Ce lemme montre aussi qu'il suffit, pour tout $r \in \mathbb{R}$ tel que $r < \mu(s)$, de construire $t \in \mathcal{SK}(X)$ tel que $-t \leqslant s$ et $-\mu(t) \geqslant r$.

Par définition de $\int_* \mu_\diamond(s)\, d\nu$ et puisque $\mu_\diamond(s) \geqslant 0$, il existe $v \in \mathcal{SK}_-(Y)$ tel que

$$-v \leqslant \mu_\diamond(s) \quad \text{et} \quad -\nu(v) > r\ .$$

Soit L un compact tel que $v = 0$ hors de L et $\varepsilon > 0$ tel que

$$-\nu(v) - [1 + \nu(L)] \cdot \varepsilon > r\ .$$

Finalement choisissons un compact $L' \subset L$ tel que $\nu(L \smallsetminus L') \leqslant \frac{\varepsilon}{\|v\|_\infty}$ et une partie $\mathcal{U}$ de $\mathcal{SK}_-(X)$ qui soit μ_z-dense pour tout $z \in L'$ et telle que la fonction $\mu_\diamond(u)_{|L'}$ soit continue pour tout $u \in \mathcal{U}$. Comme $\mu_z(s) > -v(z) - \varepsilon$, il existe $u_z \in \mathcal{U}$ tel que $-u_z \leqslant s$ et

$$-\mu_z(u_z) > -v(z) - \varepsilon\ .$$

Par hypothèse, la fonction $(-\mu_\diamond(u_z) + v)_{|L'}$ est s.c.i. , donc

$$U_z := \left\{(-\mu_\diamond(u_z) + v)_{|L'} > -\varepsilon\right\}$$

est un voisinage ouvert de z dans L' . Par compacité de L' , il existe $z_1, \ldots, z_k \in L'$ tels que $L' \subset \bigcup_{j=1}^k U_{z_j}$. Posons

$$t := \min_{j=1,\ldots,k} u_{z_j} \in \mathcal{SK}_-(X)\ .$$

On a évidemment $-t \leqslant s$ et, pour tout $y \in U_{z_j}$,

$$-\mu_y(t) \geqslant -\mu_y\left(u_{z_j}\right) \geqslant -v(y) - \varepsilon\ .$$

Ainsi

$$-\mu_\diamond(t) \geqslant -1_{L'} \cdot v - \varepsilon \cdot 1_{L'}\ ,$$

donc

$$-\mu(t) = \int^* -\mu_\diamond(f)\ d\nu \geqslant \int (-1_{L'} \cdot v - \varepsilon \cdot 1_{L'})\ d\nu = -\nu(v) + \int 1_{L \smallsetminus L'} \cdot v\ d\nu - \varepsilon \cdot \nu(L') \geqslant$$

$$\geqslant -\nu(v) - \|v\|_\infty \cdot \nu(L \smallsetminus L') - \varepsilon \cdot \nu(L) \geqslant -\nu(v) - [1 + \nu(L)] \cdot \varepsilon > r\ .$$

Ceci finit de prouver que μ est une intégrale de Radon. Vérifions maintenant que la condition $(*)$ est satisfaite dans les deux cas cités.

Démonstration de (i) Puisque ν est modérée, c'est une conséquence de la proposition 15.12.iii.

Démonstration de (ii) Si pour tout $s \in \mathcal{SK}_+(X)$, la fonction $\mu_\diamond(s)$ est s.c.i., la régularité de ν et la proposition 14.8 montre que

$$\int^* \mu_\diamond(s)\ d\nu = \nu(\mu_\diamond(s)) = \sup_{t\in\mathcal{SK}(X), -t\leqslant\mu_\diamond(s)} -\nu(t) = \int_* \mu_\diamond(s)\ d\nu\ .$$

Le théorème est donc démontré. □

REMARQUE 2 On peut généraliser les résultats ci-dessus et supprimer la condition $(*)$ en introduisant la notion d'intégrale supérieure essentielle.

16.9 Intégration de masses ponctuelles

Soient $\rho : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction ν-mesurable et $p : Y \longrightarrow X$ une application ν-mesurable au sens de Lusin , i.e. telle que pour tout compact L de Y et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $L' \subset L$ tel que

$$\nu\left(L \setminus L'\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad p_{|L'} \text{ est continue.}$$

Nous utiliserons le théorème de Lusin 15.11 et rappelons que, pour tout $y \in Y$, la fonctionnelle $\rho\left(y\right) \cdot \varepsilon_{p(y)}$ est une intégrale de Radon sur X (cf. exemple 14.5).

THEOREME (Condition d'intégrabilité) *Pour que la famille $\left(\rho\left(y\right) \cdot \varepsilon_{p(y)}\right)_{y \in Y}$ soit convenablement ν-intégrable, il faut et il suffit que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que*

$$\int^* \rho \cdot 1_{\overset{-1}{p}(U)}\, d\nu < \infty \ .$$

La condition est nécessaire. En effet, pour tout $x \in X$, il existe par définition $t \in \mathcal{SK}_+\left(X\right)$ tel que $t\left(x\right) > 0$ et $\int^* \rho\left(y\right) \cdot \varepsilon_{p(y)}\left(t\right)\, d\nu\left(y\right) < \infty$, et il suffit de poser

$$U := \left\{ t > \frac{t\left(x\right)}{2} \right\} \ .$$

Réciproquement, soient L un compact de Y et $\varepsilon > 0$ donnés. Il existe alors un compact $L' \subset L$ tel que $\nu\left(L \setminus L'\right) \leqslant \varepsilon$ et que $\rho_{|L'}$, $p_{|L'}$ soient continues. Puisque $p\left(L'\right)$ est compact, le lemme 16.7 montre que l'ensemble des $u \in \mathcal{SK}_-\left(X\right)$ tels que $u_{|p(L')}$ soit continue est $\rho\left(y\right) \cdot \varepsilon_{p(y)}$-dense pour tout $y \in L'$. Mais comme $\rho \cdot \varepsilon_p\left(u\right) = \rho \cdot u \circ p$, la fonction

$$\rho \cdot \varepsilon_p\left(u\right)_{|L'} = \rho_{|L'} \cdot u \circ p_{|L'} = \rho_{|L'} \cdot u_{|p(L')} \circ p_{|L'}$$

est continue, ce qui prouve que $\left(\rho\left(y\right) \cdot \varepsilon_{p(y)}\right)_{y \in Y}$ est convenablement ν-mesurable. Finalement, pour tout $x \in X$, si U est comme dans l'hypothèse, posons $t := 1_U$. On a $t\left(x\right) = 1$ et $\rho \cdot t \circ p = \rho \cdot 1_{\overset{-1}{p}(U)}$, donc

$$\int^* \rho \cdot \varepsilon_p\left(t\right)\, d\nu = \int^* \rho \cdot 1_{\overset{-1}{p}(U)}\, d\nu < \infty \ .$$

$\square$

COROLLAIRE *Si la condition d'intégrabilité est satisfaite et si*

$$\int_* \rho \cdot s \circ p\, d\nu = \int^* \rho \cdot s \circ p\, d\nu \quad \textit{pour tout } s \in \mathcal{SK}_+\left(X\right) \ ,$$

par exemple si

$$\nu \textit{ est modérée}$$

ou bien

$$\rho \textit{ est s.c.i. et } p \textit{ continue,}$$

alors $\int \rho \cdot \varepsilon_p\, d\nu$ est une intégrale de Radon.

C'est immédiat par le théorème 16.8. Dans le second cas il suffit de constater que, pour tout $s \in \mathcal{SK}_+(X)$, la fonction

$$\rho(\diamond) \cdot \varepsilon_{p(\diamond)}(s) = \rho \cdot s \circ p$$

est s.c.i. par la proposition 14.2. □

DEFINITION On dit que l'intégrale de Radon

$$p(\rho \cdot \nu) := \int \rho(y) \cdot \varepsilon_{p(y)} \, d\nu(y)$$

est une *intégrale de masses ponctuelles* .

Pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, on a $\rho \cdot \varepsilon_p(s) = s \circ p \cdot \rho$, donc

$$p(\rho \cdot \nu)(s) = \int^* s \circ p \cdot \rho \, d\nu$$

et, quel que soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$\int^* f \, d\left[\rho(y) \cdot \varepsilon_{p(y)}\right] = f \circ p(y) \cdot \rho(y)$$

par l'exemple 14.8.3.

Bien que nous allons utiliser le théorème d'intégrabilité 16.2, l'hypothèse de modération que nous ferrons pourrait être supprimée en considérant l'intégrale essentielle et en faisant une autre démonstration.

THEOREME (Critère de mesurabilité et d'intégrabilité) *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction $p(\rho \cdot \nu)$-modérée.*

(i) Pour que f soit $p(\rho \cdot \nu)$-mesurable, il faut et il suffit que $f \circ p \cdot \rho$ soit ν-mesurable. Dans ce cas, on a

$$\int^* |f| \, dp(\rho \cdot \nu) = \int^* |f| \circ p \cdot \rho \, d\nu \ .$$

(ii) f est $p(\rho \cdot \nu)$-intégrable si, et seulement si, $f \circ p \cdot \rho$ est ν-intégrable, et on a

$$\int f \, dp(\rho \cdot \nu) = \int f \circ p \cdot \rho \, d\nu \ .$$

(iii) Pour qu'une partie A de X soit $p(\rho \cdot \nu)$-négligeable, il faut et il suffit que ρ s'annule ν-p.p. sur $\overset{-1}{p}(A)$.

En tenant compte du théorème d'intégrabilité 16.2, il nous suffit de prouver que la condition dans (i) est suffisante. Pour (iii) il suffit de remarquer que A est $\rho(y) \cdot \varepsilon_{p(y)}$-négligeable si, et seulement si, $p(y) \in A \Rightarrow \rho(y) = 0$.

Supposons donc que $f \circ p \cdot \rho$ est ν-mesurable. Soient $K \in \mathfrak{K}(X)$ et $\varepsilon > 0$.

Utilisant le théorème 15.7.iv et la ν-mesurabilité au sens de Lusin de ρ , $f \circ p \cdot \rho$ (théorème 15.11) et p , on construit une suite disjointe (L_k) de compacts de $Y \smallsetminus \{\rho = 0\}$ telle que

$$\nu^*\left(Y \smallsetminus \left[\{\rho = 0\} \cup \bigcup L_k\right]\right) = 0$$

et telle que les applications $\rho_{|L_k}$, $f \circ p \cdot \rho_{|L_k}$ et $p_{|L_k}$ soient continues. Puisque les $p(L_k)$ sont compacts, la partie $N := X \smallsetminus \bigcup p(L_k)$ est $p(\rho \cdot \nu)$ −mesurable. D'après (iii) elle est $p(\rho \cdot \nu)$-négligeable, puisque

$$\overset{-1}{p}(N) \cap \{\rho \neq 0\} \subset \left(Y \smallsetminus \bigcup L_k\right) \smallsetminus \{\rho \neq 0\} = Y \smallsetminus \left[\{\rho = 0\} \cup \bigcup L_k\right]$$

est ν-négligeable. Finalement, comme $\rho_{|L_k} > 0$, la fonction $f \circ p_{|L_k} = \frac{1}{\rho_{|L_k}} \cdot (f \circ p \cdot \rho)_{|L_k}$ est continue. On en déduit que $f_{|p(L_k)}$ est continue par le lemme ci-dessous, donc que $1_{p(L_k)} \cdot f$ est $p(\rho \cdot \nu)$-mesurable par la proposition 15.11. Puisque

$$f = \sum 1_{p(L_k)} \cdot f \quad p(\rho \cdot \nu)\text{-p.p. ,}$$

il en est de même de f par les théorèmes 15.8, iii et iv, et 15.9.ii. □

LEMME *Soient X et Y des espaces compacts, Z un espace topologique et $p : X \longrightarrow Y$ une application continue surjective. Si $f : Y \longrightarrow Z$ est une application telle que $f \circ p$ soit continue, alors f est continue.*

Soit F une partie fermée de Z . On a

$$\overset{-1}{f}(F) = p\left(\overset{-1}{p}\left[\overset{-1}{f}(F)\right]\right) = p\left([f \circ p]^{-1}(F)\right) \ ,$$

et comme $[f \circ p]^{-1}(F)$ est fermée dans X , donc compacte, la partie $\overset{-1}{f}(F)$ est compacte, donc fermée dans Y . □

REMARQUE Remarquons qu'un résultat analogue à ce théorème n'est pas valable dans le cadre du produit de deux intégrales de Radon comme nous l'avons vu dans la remarque 16.3.

On peut améliorer (i).

PROPOSITION *Pour tout $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a*

$$\int^* f \, dp(\rho \cdot \nu) = \int^* f \circ p \cdot \rho \, d\nu \ .$$

L'inégalité $\int^* f \, dp(\rho \cdot \nu) \geqslant \int^* f \circ p \cdot \rho \, d\nu$ découle de la proposition 16.1. Pour démontrer l'autre inégalité on peut supposer que $\int^* f \circ p \cdot \rho \, d\nu < \infty$. Soit $t \in \mathcal{SK}(Y)$ tel que $\nu(t) < \infty$ et $t \geqslant f \circ p \cdot \rho$. Il existe un compact L de Y et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $t \geqslant -\alpha \cdot 1_L$. Etant donné $\varepsilon > 0$, soit (L_k) une suite disjointe de compacts de $Y \smallsetminus \{\rho = 0\}$ telle que

$$L_0 \subset L \smallsetminus \{\rho = 0\} \quad , \quad \nu(L \smallsetminus [\{\rho = 0\} \cup L_0]) \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha} \ ,$$

$$\nu^*\left(Y \smallsetminus \left[\{\rho = 0\} \smallsetminus \bigcup L_k\right]\right) = 0$$

et telle que les applications $\rho_{|L_k}$, $t_{|L_k}$ et $p_{|L_k}$ soient continues. Sur L_k la fonction $\frac{t}{\rho}$ est continue et on peut montrer que la fonction s_k définie par

$$s_k(x) := \inf_{y \in \overset{-1}{p}(x) \cap L_k} \frac{t}{\rho}(y)$$

est s.c.i. sur X . On a $s_k \in \mathcal{SK}(X)$, puisque $s_k = \infty$ hors de $p(L_k)$, et comme $\frac{t}{\rho} \geqslant f \circ p$ sur L_k , on obtient $s_k \geqslant f$ quel que soit k . La fonction $g := \inf_k s_k$ est $p(\rho \cdot \nu)$-mesurable $\geqslant -\alpha$ et

$$f \leqslant g = g_- + g^+ \leqslant s_{0-} + g^+ \ .$$

D'autre part on a $t \geqslant 0$ sur $\{\rho = 0\}$ et $t \geqslant s_k \circ p \cdot \rho$ sur L_k , donc

$$t_- \geqslant -\alpha \cdot 1_{L \smallsetminus [\{\rho=0\} \cup L_0]} + s_{0-} \circ p \cdot \rho \quad \text{et} \quad t^+ \geqslant g^+ \circ p \cdot \rho \text{ sur } \{\rho = 0\} \cup \bigcup L_k \ ,$$

et en particulier $t^+ \geqslant g^+ \circ p \cdot \rho$ ν-p.p. . Par le théorème de mesurabilité, on obtient finalement

$$\int^* f \ dp(\rho \cdot \nu) \leqslant \int^* g \ dp(\rho \cdot \nu) \leqslant \int^* s_{0-} \, dp(\rho \cdot \nu) + \int^* g^+ \, dp(\rho \cdot \nu) =$$

$$= \int^* s_{0-} \circ p \cdot \rho \ d\nu + \int^* g^+ \circ p \cdot \rho \ d\nu \leqslant \varepsilon + \int t_- \, d\nu + \int t^+ \, d\nu = \varepsilon + \nu(t) \ .$$

$\square$

16.10 Intégrale de Radon image, avec densité et induite

Considérons maintenant quelques cas particulier d'intégrales de masses ponctuelles.

EXEMPLE 1 Image d'une intégrale de Radon

Prenons $\rho = 1$ et supposons que ν est modérée ou bien que p est continue. L'intégrale de Radon

$$p(\nu) := \int \varepsilon_{p(y)}\, d\nu(y)$$

sur X s'appelle l' *image* de ν par p .

La condition d'intégrabilité signifie que p est ν-mesurable au sens de Lusin et que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\nu^*\left(\overset{-1}{p}(U)\right) < \infty$. On dit alors que p est *ν-propre* .

EXEMPLE 2 Intégrale de Radon avec densité

Prenons $p = \mathrm{id}_Y : Y \longrightarrow Y$ et supposons que ν est modérée ou bien que ρ est s.c.i. L'intégrale de Radon

$$\rho \cdot \nu := \int \rho(y) \cdot \varepsilon_y\, d\nu(y)$$

sur Y est dite de *densité* ρ par rapport à ν .

La condition d'intégrabilité signifie que $\rho \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},\mathbb{R}_+}(\nu)$ et remarquons que l'on peut modifier ρ sur un ensemble ν-négligeable sans changer $\rho \cdot \nu$.

EXEMPLE 3 Intégrale de Radon induite

Soit X une partie ν-mesurable de Y et supposons que ν est modérée ou bien que X est ouverte.

La famille $(1_X(y) \cdot \varepsilon_y)_{y \in Y}$ d'intégrales de Radon sur X , en $y \notin X$ c'est l'intégrale de Radon 0 , est convenablement ν-intégrable, mais $1_X(y) \cdot \varepsilon_y$ est une intégrale de Radon sur Y ! Pour utiliser la théorie développée précédemmment, choisissons un point $x_0 \in X$ et considérons l'application

$$q : Y \longrightarrow X : y \longmapsto \begin{cases} y & \\ & \text{si} \\ x_0 & \end{cases} \begin{matrix} y \in X \\ \\ y \in Y \smallsetminus X \end{matrix} .$$

Elle est ν-mesurable au sens de Lusin. En effet, pour tout compact L de Y , les parties $L \cap X$ et $L \smallsetminus X$ sont ν-intégrables, d'où le résultat par le théorème 15.7.iv. Il est alors clair que la famille $\left(1_X(y) \cdot \varepsilon_{q(y)}\right)_{y \in Y}$ satisfait à la condition d'existence 16.9, puisque $1_X \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},\mathbb{R}_+}(\nu)$. Mais cette famille coïncide avec $(1_X(y) \cdot \varepsilon_y)_{y \in Y}$. Bien que q ne soit pas continue, dans le cas X ouvert, pour tout $s \in \mathcal{SK}_+(X)$, la fonction $1_X \cdot \varepsilon_q(s) = 1_X \cdot s \circ q = 1_X \cdot s$ est s.c.i., et nous pouvons appliquer le théorème 16.8.ii.

Remarquons que, pour toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) , on a $1_X \cdot f \circ q = f_0$, où f_0 désigne le prolongement de f par 0 hors de X .

On dit que l'intégrale de Radon

$$\nu_X := \int 1_X(y) \cdot \varepsilon_y \, d\nu(y)$$

est *induite* par ν sur X .

On a $\nu_\emptyset := 0$ et, pour tout $s \in \mathcal{SK}(Y)$,

$$\nu_X(s) = \int^* s_0 \, d\nu \ .$$

La reformulation dans les trois cas particuliers des théorèmes d'intégrations successives 16.1, d'intégrabilité 16.2 et de mesurabilité 16.9 est laissée au lecteur.

PROPOSITION *Soit X une partie ν-mesurable de Y et $j : X \hookrightarrow Y$ l'injection canonique. On a alors*

$$j(\nu_X) = 1_X \cdot \nu \ .$$

En effet, pour tout $s \in \mathcal{SK}(Y)$, on a

$$j(\nu_X)(s) = \int^* s \circ j \ d\nu_X = \int^* s \circ j \circ q \cdot 1_X \, d\nu = \int^* s \cdot 1_X \, d\nu = 1_X \cdot \nu(s) \ .$$

□

EXEMPLE 4 Si I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \subset J$ et $j : I \hookrightarrow J$ est l'injection canonique, alors

$$(\lambda_J)_I = \lambda_I \quad \text{et} \quad j(\lambda_I) = 1_I \cdot \lambda_J \ .$$

Si I et J ont mêmes extrémités, alors $j(\lambda_I) = \lambda_J$.

D'après le théorème 14.6, il nous suffit de montrer que

$$(\lambda_J)_{I|\mathcal{K}(I)} = \lambda_{I|\mathcal{K}(I)} \ .$$

Mais pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(I)$, il existe une suite $(\psi_k) \subset \mathcal{K}(I^\circ) \subset \mathcal{K}(J)$ telle que

$$\varphi_0 = \lim_k \psi_k \text{ ponctuellement,} \quad |\psi_k| \leqslant cst \cdot 1_{[a,b]} \quad \text{et} \quad [a,b] \subset I \ .$$

Il vient alors

$$(\lambda_J)_I(\varphi) = \int \varphi_0 \, d\lambda_J = \lim_k \int \psi_k \, d\lambda_J = \lim_k \int_a^b \psi_k = \lim_k \int \psi_k \, d\lambda_I = \lambda_I(\varphi) \ .$$

□

EXEMPLE 5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement absolument continue (cf. définition 15.19.3 et remarque 15.19.1).

Nous désignerons par $I(a,b)$ l'intervalle compact d'extrémités $a, b \in I$. En général les intervalles compacts $\Phi(I(a,b))$ et $I(\Phi(a), \Phi(b))$ sont différents !

THEOREME (Règle de substitution) *,Soit $f : \Phi(I(a,b)) \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Si Φ est réelle croissante, alors l'image de $\partial\Phi \cdot \lambda_{I(a,b)}$ par Φ est $\lambda_{\Phi(I(a,b))}$ et f est $\lambda_{\Phi(I(a,b))}$-intégrable si, et seulement si, $f \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est $\lambda_{I(a,b)}$-intégrable. Dans ce cas on a

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(s)\ ds = \int_a^b f \circ \Phi(t) \cdot \partial\Phi(t)\ dt\ .$$

Plus généralement si $f \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est $\lambda_{I(a,b)}$-intégrable, alors f est $1_{\Phi(a),\Phi(b)} \cdot \lambda_{\Phi([a,b])}$-intégrable (ou bien $\lambda_{I(\Phi(a),\Phi(b))}$-intégrable) et on a la même formule.

Nous pouvons supposer que $a < b$ et démontrons tout d'abord la formule pour $\varphi \in \mathcal{C}(\Phi([a,b]))$.

Comme $\partial\Phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}\left(\lambda_{[a,b]}\right)$ et que $\mathcal{C}([a,b])$ est dense dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}\left(\lambda_{[a,b]}\right)$ d'après le théorème de densité 15.15, le théorème de Riesz-Fischer 15.14 montre qu'il existe une suite $(g_k) \subset \mathcal{C}([a,b])$ telle que $\partial\Phi = \lim_k g_k$ ponctuellement $\lambda_{[a,b]}$-p.p. et $|g_k| \leqslant g$ pour un certain $g \in \mathcal{L}^1\left(\lambda_{[a,b]}\right)$. Définissons G_k sur $[a,b]$ par

$$G_k(x) := \Phi(a) + \int_a^x g_k(t)\ dt\ .$$

On a alors

$$|G_k(x) - \Phi(x)| \leqslant \int_a^b |g_k(t) - \partial\Phi(t)|\ dt\ ,$$

ce qui montre par le théorème de Lebesgue, que G_k tend uniformément vers Φ sur $[a,b]$. Mais par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral dans sa version élémentaire et en prolongeant φ en une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{G_k(a)}^{G_k(b)} \varphi(s)\ ds = \int_a^b \varphi \circ G_k(t) \cdot g_k(t)\ dt\ ,$$

d'où le résultat, à nouveau par le théorème de Lebesgue, puisque

$$\lim_k \varphi \circ G_k = \varphi \circ \Phi \text{ ponctuellement} \quad \text{et} \quad |\varphi \circ G_k| \leqslant \|\varphi\|_\infty < \infty \quad \text{pour tout } k\ .$$

La première assertion, si Φ est croissante, est alors immédiate par le théorème 19.6, qui montre que $\Phi\left(\partial\Phi \cdot \lambda_{[a,b]}\right) = \lambda_{\Phi([a,b])}$, puis grâce aux théorèmes de mesurabilité 16.9 et d'intégrabilité 16.2. Ici on a $\Phi([a,b]) = I(\Phi(a), \Phi(b)) = [\Phi(a), \Phi(b)]$, mais ce n'est plus le cas dans ce qui suit.

Plus généralement, si Φ est réelle nous pouvons supposer, en remplaçant au besoin Φ par $-\Phi$, que $\Phi(a) \leqslant \Phi(b)$ et il vient

$$\int \varphi\, d\left(1_{\Phi(a),\Phi(b)} \cdot \lambda_{\Phi([a,b])}\right) = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} \varphi\, d\lambda_{\Phi([a,b])} =$$

$$= \int_a^b \varphi \circ \Phi(t) \cdot \partial\Phi(t)\ dt = \int \varphi \circ \Phi \cdot [\partial\Phi]^+\ d\lambda_{[a,b]} - \int \varphi \circ \Phi \cdot [\partial\Phi]^-\ d\lambda_{[a,b]} =$$

$$= \int \varphi\ d\Phi\left([\partial\Phi]^+ \cdot \lambda_{[a,b]}\right) - \int \varphi\ d\Phi\left([\partial\Phi]^- \cdot \lambda_{[a,b]}\right)\ .$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(\Phi([a,b]))$. Ceci montre que

$$1_{\Phi(a),\Phi(b)} \cdot \lambda_{\Phi([a,b])} + \Phi\left([\partial\Phi]^- \cdot \lambda_{[a,b]}\right) = \Phi\left([\partial\Phi]^+ \cdot \lambda_{[a,b]}\right)\ .$$

Nous pouvons maintenant démontrer la dernière assertion dans le cas général. Si $f \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est $\lambda_{[a,b]}$-intégrable, il en est de même de $f \circ \Phi \cdot [\partial\Phi]^\pm$, donc $f \circ \Phi$ est $[\partial\Phi]^\pm \cdot \lambda_{[a,b]}$-intégrable.

Le critère d'intégrabilité 16.9.ii montre alors que f est $\Phi\left([\partial\Phi]^{\pm} \cdot \lambda_{[a,b]}\right)$-intégrable. Utilisant l'exercice 14.8.2.b, on en déduit que f est $1_{\Phi(a),\Phi(b)} \cdot \lambda_{\Phi([a,b])}$-intégrable, puis la formule. $\square$

COROLLAIRE *Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $\Phi : I \longrightarrow J$, $G : J \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions localement absolument continues. Si Φ est monotone, plus généralement si $\partial G \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est localement λ_I-intégrable, alors $G \circ \Phi$ est localement absolument continue et on a*

$$\partial (G \circ \Phi) = \partial G \circ \Phi \cdot \partial\Phi \ .$$

C'est immédiat. $\square$

REMARQUE Pour plus de détails on peut consulter le livre de N. Bourbaki [12], en particulier le §6, Images d'une mesure, et les exercices 10 à 16 de ce paragraphe, ainsi que le livre de E. Hewitt et K. Stromberg [13], §18, Absolutely continuous functions, en particulier les exercices 18.37 et 18.38, ainsi que 20.2 à 20.9.

EXERCICE 1 Soit A une partie μ-mesurable de X . Montrer que $1_A \cdot \mathbf{L}^p(\mu) = \mathbf{L}^p(1_A \cdot \mu)$, en explicitant les applications permettant l'identification.

$$\begin{array}{ccccc}
1_A \cdot \mathcal{L}^p(\mu) & \hookrightarrow & \mathcal{L}^p(\mu) & \longrightarrow & \mathcal{L}^p(1_A \cdot \mu) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1_A \cdot \mathbf{L}^p(\mu) & \hookrightarrow & \mathbf{L}^p(\mu) & \longrightarrow & \mathbf{L}^p(1_A \cdot \mu)
\end{array}$$

Quelle est l'application réciproque de $1_A \cdot \mathbf{L}^p(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^p(1_A \cdot \mu)$?

EXERCICE 2 Soient X , Y , Z des espaces topologiques séparés, $p : Y \longrightarrow X$, $q : X \longrightarrow Z$ des applications et ν une intégrale de Radon sur Y . Si p est ν-propre et q est $p(\nu)$-propre, alors $q \circ p$ est ν-propre et on a $q \circ p(\nu) = q(p(\nu))$.

EXERCICE 3 Etant donné $\alpha, \beta > 0$, considérons la fonction F sur $\mathbb{R}$ définie par

$$F(t) := \begin{cases} t^\alpha \cdot \sin \frac{1}{t^\beta} & t > 0 \\ & \text{si} \\ 0 & t \leqslant 0 \end{cases} .$$

Montrer que c'est une fonction absolument continue si $\alpha > \beta$, puis pour $\gamma > 0$ que

$$|\mathrm{id}|^{\gamma-1} \circ F \cdot \partial F = |F|^{\gamma-1} \cdot \partial F$$

n'est pas $\lambda_{[0,1]}$-intégrable si $\gamma \cdot \alpha \leqslant \beta$.

Ces conditions sont par exemple satisfaites si

$$\alpha = 2 \quad , \quad \beta = 1 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{2} \ ,$$

[12] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 5, Hermann, Paris, 1967.
[13] E. Hewitt and K. Stromberg, Real and abstract Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

i.e.

$$\left|t^2 \cdot \sin \frac{1}{t}\right|^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial \left(t^2 \cdot \sin \frac{1}{t}\right)$$

n'est pas $\lambda_{[0,1]}$-intégrable.

16.11 Produit de deux intégrales de Radon

LEMME *Pour tout $u \in \mathcal{SK}_{\pm}(X)$ et $v \in \mathcal{SK}_{\pm}(Y)$, on a $\pm u \otimes v \in \mathcal{SK}(X \times Y)$.*

Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on a en effet

$$\{u \otimes v > \gamma\} = \begin{cases} \bigcup_{\alpha,\beta \geqslant 0, \alpha\cdot\beta > \gamma} \{u > \alpha\} \times \{v > \beta\} & 0 \leqslant \gamma \\ & \text{si} \\ X & \gamma < 0 \end{cases}$$

et

$$\{-u \otimes v > \gamma\} = \begin{cases} \emptyset & 0 \leqslant \gamma \\ & \text{si} \\ \bigcup_{\alpha,\beta < 0, -\alpha\cdot\beta > \gamma} \{u > \alpha\} \times \{v > \beta\} & \gamma < 0 \end{cases}$$

REMARQUE Tout $s \in \mathcal{SK}_+(X \times Y)$ s'écrit sous la forme

$$s = \sup_k \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{l=1}^{k\cdot 2^k} 1_{\left\{s > \frac{l}{2^k}\right\}} ,$$

$\left\{s > \frac{l}{2^k}\right\}$ étant une partie ouverte de $X \times Y$, et tout ouvert de $X \times Y$ est réunion d'une famille filtrante croissante $\mathcal{O}$ d'ouverts de la forme

$$\bigcup_{k=1}^{n} G_k \times H_k .$$

Pour tout $y \in Y$, l'application

$$j_y : X \longrightarrow X \times Y : x \longmapsto (x, y) .$$

est continue. D'autre part, pour tout $(x, z) \in X \times Y$, si V est un voisinage ouvert de x tel que $\mu(V) < \infty$, alors $V \times Y$ est un voisinage ouvert de (x, z) et $\overset{-1}{j_y}(V \times Y) = V$. Ceci montre que j_y est μ-propre et nous permet de définir l'intégrale de Radon sur $X \times Y$

$$\mu_{X,y} := j_y(\mu) = \int \varepsilon_{(x,y)} \, d\mu(x)$$

(cf. exemple 16.10.1).

PROPOSITION

(i) *Pour toute fonction $h : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a $h \circ j_y = h(\cdot, y)$ et*

$$\int^* h \; d\mu_{X,y} = \int^* h(\cdot, y) \; d\mu .$$

L'ouvert $X \times (Y \smallsetminus \{y\})$ est μ_y-négligeable.

(ii) *Pour tout* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *et* $u \in \mathcal{SK}_-(X)$, $v \in \mathcal{SK}_-(Y)$, *on a*

$$\int^* f \otimes g \, d\mu_{X,y} = \left(\int^* f \, d\mu\right) \cdot g(y) \quad \text{et} \quad \mu_{X,y}(-u \otimes v) = -\mu(u) \cdot v(y) \ .$$

(iii) *Soit* L *un compact de* Y *et posons*

$$\mathcal{V} := \left\{v \in \mathcal{SK}_-(Y) \;\middle|\; v_{|L} \text{ est continue}\right\} \ .$$

Pour tout $y \in L$, *l'ensemble*

$$-\mathcal{SK}_-(X) \otimes \mathcal{V} := \{-u \otimes v \mid u \in \mathcal{SK}_-(X), v \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{SK}_-(X \times Y)$$

est $\mu_{X,y}$*-dense.*

(iv) *La famille* $\left(\mu_{X,y}\right)_{y \in Y}$ *est convenablement* ν*-intégrable.*

(v) *Pour tout* $s \in \mathcal{SK}_+(X \times Y)$, *la fonction*

$$\mu_{X,\diamond}(s) = \int^* s(x, \cdot) \, d\mu(x)$$

est s.c.i.

Démonstration de (i) C'est évident par la proposition 16.9, mais remarquons que dans la situation présente la démonstration est triviale. Si $u \in \mathcal{SK}(X)$ et $u \geqslant h(\cdot, y)$, il suffit de définir $s \in \mathcal{SK}(X \times Y)$ par $s(\cdot, y) = u$ et ∞ sinon.

Démonstration de (ii) On a

$$\int^* f \otimes g \, d\mu_{X,y} = \int^* g(y) \cdot f \, d\mu = \left(\int^* f \, d\mu\right) \cdot g(y)$$

d'après l'exemple 14.11.2, ainsi que

$$\mu_{X,y}(-u \otimes v) = -\int_* v(y) \cdot u \, d\mu = -\mu(u) \cdot v(y) \ .$$

Démonstration de (iii) En effet, pour tout $s \in \mathcal{SK}_+(X \times Y)$, on a

$$\mu_{X,y}(s) = \int^* s(\cdot, y) \, d\mu = \sup\{-\mu(u) \mid u \in \mathcal{SK}_-(X) \ , \ -u \leqslant s(\cdot, y)\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{-\mu_{X,y}(-u \otimes v) \mid u \in \mathcal{SK}_-(X) \ , \ v \in \mathcal{V} \ , \ u \otimes v \leqslant s\right\} \leqslant \mu_{X,y}(s)$$

par le lemme 14.6. On obtient l'avant-dernière inégalité en montrant, pour tout $u \in \mathcal{SK}_-(X)$ tel que $-u \leqslant s(\cdot, y)$ et $\mu(u) < 0$, et tout $\varepsilon \in \left]0, -2\mu(u)\right[$, qu'il existe un compact K de X tel que $u < 0$ sur K et $\mu(1_K \cdot u) \leqslant \mu(u) + \frac{\varepsilon}{2}$, puis un $v \in \mathcal{V}$ tel qu'en posant $\delta := \frac{1}{2\mu(u)}$, on ait

$$1_K \cdot u \otimes (1 + \delta) \cdot v \leqslant s \text{ et } v(y) = -1 \ .$$

En effet, la suite des ensembles compact $K_l := \left\{u \leqslant -\frac{1}{l}\right\}$ est croissante et de réunion $\{u < 0\}$. Ainsi $u = \inf_l 1_{K_l} \cdot u$, donc $\mu(u) = \inf_l \mu(1_{K_l} \cdot u)$ et il suffit de prendre K_l pour l assez grand. La fonction $s + u \otimes (1 + \delta) \cdot 1_L = -u \otimes (1 + \delta) \cdot (-1_L)$ est s.c.i. par le lemme et, pour tout $x \in K$, on a

$$s(x, y) + u(x) \cdot (1 + \delta) = s(x, y) + u(x) + \delta \cdot u(x) \geqslant \delta \cdot u(x) > 0 \ .$$

Soit alors $U_x \times V_x$ un voisinage ouvert de (x, y) tel que l'on ait

$$s + u \otimes (1 + \delta) \cdot 1_L > 0 \text{ sur } U_x \times V_x \ .$$

Par compacité, il existe un nombre fini de $x_j \in K$, $j = 1, \ldots, n$, tels que les U_{x_j} recouvrent K et considérons $V := \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}$ qui est un voisinage ouvert de y . Choisissons $v \in \mathcal{C}_-(L)$ tel que $v \geqslant -1_V$ et $v(y) = -1$, et dénotons encore par v son prolongement par 0 hors de L . Ainsi $v \in \mathcal{V}$ et

$$s - 1_K \cdot u \otimes (1+\delta) \cdot v \geqslant s + 1_K \cdot u \otimes (1+\delta) \cdot 1_V \geqslant 0 \ .$$

On en déduit alors que

$$-\mu_{X,y}\left(-1_K \cdot u \otimes (1+\delta) \cdot v\right) = \mu\left(1_K \cdot u\right) \cdot (1+\delta) \cdot v(y) \geqslant$$

$$\geqslant -\left[\mu(u) + \frac{\varepsilon}{2}\right] \cdot (1+\delta) \geqslant -\mu(u) - \varepsilon \ .$$

Démonstration de (iv) Comme la fonction $\mu_{X,\diamond}(-u \otimes v)_{|L} = -\mu(u) \cdot v_{|L}$ est continue, la famille $\left(\mu_{X,y}\right)_{y \in Y}$ est convenablement ν-mesurable, en utilisant (iii) et en prenant $L' = L$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

D'autre part, pour tout $(x,y) \in X \times Y$, si

$$u \in \mathcal{SK}_+(X) \ , \ u(x) > 0 \text{ et } \mu(u) < \infty \ , \ v \in \mathcal{SK}_+(Y) \ , \ v(y) > 0 \quad \text{et} \quad \nu(v) < \infty \ ,$$

alors $u \otimes v \in \mathcal{SK}_+(X \times Y)$, $u \otimes v(x,y) = u(x) \cdot v(y) > 0$ et

$$\int^* \mu_{X,y}(u \otimes v)\, d\nu(y) = \int^* \mu(u) \cdot v \, d\nu = \mu(u) \cdot \nu(v) < \infty \ .$$

Démonstration de (v) Pour tout $s \in \mathcal{SK}_+(X)$, grâce à la remarque, on a

$$\mu_{X,\diamond}(s) = \sup\nolimits_k \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{l=1}^{k \cdot 2^k} \mu_{X,\diamond}\left(1_{\left\{s > \frac{l}{2^k}\right\}}\right)$$

et

$$\mu_{X,\diamond}\left(1_{\left\{s > \frac{l}{2^k}\right\}}\right) = \sup \mu_{X,\diamond}(\mathcal{O}) \ ,$$

où $\mathcal{O}$ est une famille filtrante croissante d'ouvert de la forme $O := \bigcup_{k=1}^n G_k \times H_k$. Il nous suffit donc de montrer que $\mu_{X,\diamond}(O)$ est s.c.i. Soit donc $\gamma \in \mathbb{R}$ et $y \in Y$ tel que $\mu_{X,y}(O) > \gamma$ et considérons l'ouvert

$$U := \bigcap_{y \in H_k} H_k \ .$$

Pour tout $z \in U$, on a

$$\mu_{X,z}(O) = \mu\left(\bigcup_{\{k \mid z \in H_k\}} G_k\right) \geqslant \mu\left(\bigcup_{\{k \mid y \in H_k\}} G_k\right) = \mu_{X,y}(O) > \gamma \ ,$$

ce qui prouve que $U \subset \left\{\mu_{X,\diamond}(O) > \gamma\right\}$, donc que ce dernier ensemble est ouvert. ——— □

Nous pouvons donc appliquer le théorème 16.8.ii, et poser la

DEFINITION L'intégrale de Radon sur $X \times Y$

$$\mu \otimes \nu := \int \mu_{X,y}\, d\nu(y)$$

s'appelle le *produit* de μ par ν .

Pour tout $s \in \mathcal{SK}(X \times Y)$, on a

$$\mu \otimes \nu(s) = \int^* \left(\int^* s(\cdot, y)\, d\mu \right) d\nu(y) \ .$$

EXEMPLE Dans l'exemple 16.1.2, nous avons vu que $\lambda_{X \times Y} = \lambda_X \otimes \lambda_Y$.

THEOREME *L'application $S : Y \times X \longrightarrow X \times Y : (y,x) \longmapsto (x,y)$ est $\nu \otimes \mu$-propre et on a*

$$S(\nu \otimes \mu) = \mu \otimes \nu \ ,$$

i.e.

$$\mu \otimes \nu = \int \nu_{x,Y}\, d\mu(x) \ ,$$

où pour tout $x \in X$, on désigne par $\nu_{x,Y}$ l'image sur $X \times Y$ de ν par ${}_xj : y \longmapsto (x,y)$.

En outre, pour tout $u \in \mathcal{SK}_+(X)$ et $v \in \mathcal{SK}_+(Y)$, on a

$$\mu \otimes \nu(u \otimes v) = \mu(u) \cdot \nu(v)$$

et $\mu \otimes \nu$ est modérée si μ et ν sont modérées.

En effet, par définition on a

$$\nu \otimes \mu = \int \overset{-1}{S}(\nu_{x,Y})\, d\mu(x) \ ,$$

puisque

$$\overset{-1}{S} \circ {}_xj : y \longmapsto (x,y) \longmapsto (y,x) \ .$$

D'autre part, pour tout $s \in \mathcal{SK}(X \times Y)$, on obtient

$$S(\nu \otimes \mu)(s) = \int^* s \circ S\ d(\nu \otimes \mu) = \int^* \left(\int^* s(x, \cdot)\, d\nu \right) d\mu(x) = \left(\int \nu_{x,Y}\, d\mu(x) \right)(s) \ .$$

Il est bien clair, par symétrie, que $(\nu_{x,Y})_{x \in X}$ est convenablement μ-intégrable.

Par linéarité, car $\mathcal{SK}(X \times Y) = \mathcal{SK}_+(X \times Y) + \mathcal{SK}_-(X \times Y)$, et régularité, il nous suffit de montrer que les intégrales de Radon $\mu \otimes \nu$ et $S(\nu \otimes \mu)$ coïncident sur $\mathcal{SK}_+(X \times Y)$.

Montrons tout d'abord qu'elles sont égales sur $\mathcal{SK}_+(X) \otimes \mathcal{SK}_+(Y)$. Pour tout $u \in \mathcal{SK}_+(X)$ et $v \in \mathcal{SK}_+(Y)$, il vient par l'exemple 14.11.2

$$\left(\int \mu_{X,y}\, d\nu(y) \right)(u \otimes v) = \int^* \mu_{X,y}(u \otimes v)\ d\nu(y) = \int^* \mu(u) \cdot v(y)\ d\nu(y) = \mu(u) \cdot \nu(v) \ .$$

De même

$$\left(\int \nu_{x,Y}\, d\mu(x) \right)(u \otimes v) = \int^* \nu_{x,Y}(u \otimes v)\ d\mu(x) = \int^* u(x) \cdot \nu(v)\ d\mu(x) = \mu(u) \cdot \nu(v) \ .$$

Elles coïncident donc en particulier sur les ensembles ouverts de la forme $G \times H$. Par la remarque et la propriété de Bourbaki 16.5, il nous suffit de montrer qu'on a égalité sur les ouverts de la forme $\bigcup_{k=1}^n G_k \times H_k$. On procède par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant évidemment trivial. Il suffit alors d'utiliser la formule

$$1_{A \cup B} + 1_{A \cap B} = 1_A + 1_B \ ,$$

avec

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} G_k \times H_k \quad \text{et} \quad B = G_{n+1} \times H_{n+1} \ ,$$

en remarquant que

$$A \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} [G_k \cap G_{n+1}] \times [H_k \cap H_{n+1}] \ .$$

En effet par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mu \otimes \nu \, (A \cap B) = S \, (\nu \otimes \mu) \, (A \cap B) \ ,$$

et on obtient l'égalité pour $A \cup B$ par soustraction si $\mu \otimes \nu \, (A \cap B) < \infty$ et par monotonie sinon.

Finalement, par la proposition 15.12.i, il existe des suites (G_k) et (H_k) d'ensembles ouverts μ- respectivement ν-intégrables telles que

$$X = \bigcup G_k \quad \text{et} \quad Y = \bigcup H_k \ .$$

Les ouverts $G_k \times H_k$ étant $\mu \otimes \nu$-intégrables, on en déduit que $\mu \otimes \nu$ est modérée. —— □

EXERCICE Soient X, Y, Z des espaces topologiques séparés et μ , ν , τ des intégrales de Radon sur X , Y et Z respectivement. Alors on a

$$(\mu \otimes \nu) \otimes \tau = \mu \otimes (\nu \otimes \tau) \ .$$