

# Chapitre 9

## INTÉGRALE DE RIEMANN

Dans tout ce paragraphe on désigne par  $[a, b]$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ .

Version du 16 novembre 2005

## 9.1 Fonctions en escalier

**DEFINITION** Si  $X$  est un ensemble et  $A \subset X$ , la fonction

$$1_A : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

s'appelle la *fonction caractéristique* de  $A$ .

Une *subdivision* de  $[a, b]$  est une suite  $(x_j)_{j=0, \dots, m}$  de  $[a, b]$  telle que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b .$$

Nous dirons que  $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision  $(x_j)_{j=0, \dots, m}$  de  $[a, b]$ , dite associée à  $\varphi$ , telle que  $\varphi$  soit constante sur chaque intervalle  $[x_j, x_{j+1}[$  pour  $j = 0, \dots, m-1$ . On a donc

$$\varphi = \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot 1_{[x_j, x_{j+1}[} + \varphi(b) \cdot 1_{\{b\}} .$$

Nous désignerons par  $\mathcal{E}([a, b])$  l'ensemble de toutes les fonctions en escalier.

Remarquons que les fonctions en escalier sont continues à droite et qu'une telle fonction peut avoir plusieurs représentations comme ci-dessus.

**LEMME** Soient  $(u_j)_{j=0, \dots, p}$  et  $(v_j)_{j=0, \dots, q}$  des subdivisions. Il existe une unique subdivision  $(x_j)_{j=0, \dots, m}$  telle que

$$\{x_0, \dots, x_m\} = \{u_0, \dots, u_p\} \cup \{v_0, \dots, v_q\} .$$

C'est évident. □

**PROPOSITION**  $\mathcal{E}([a, b])$  est un *sous-espace vectoriel réticulé* de l'espace vectoriel réticulé  $\mathbb{R}^{[a, b]}$  de toutes les fonctions réelles sur  $[a, b]$ , i.e. pour tout  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b])$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a

$$\alpha \cdot \varphi \quad , \quad \varphi + \psi \quad , \quad \min(\varphi, \psi) \quad , \quad \max(\varphi, \psi) \quad \in \quad \mathcal{E}([a, b]) .$$

En outre, pour tout  $p \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$|\varphi|^p \quad , \quad \varphi \cdot \psi \quad \in \quad \mathcal{E}([a, b]) .$$

Soient  $(u_j)_{j=0, \dots, p}$  et  $(v_j)_{j=0, \dots, q}$  des subdivisions associées à  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement et considérons la subdivision réunion  $(x_j)_{j=0, \dots, m}$ . Comme chaque intervalle  $[x_j, x_{j+1}[$  est contenu dans

un intervalle de la forme  $[u_r, u_{r+1}[$  , ainsi que dans un intervalle de la forme  $[v_s, v_{s+1}[$  , on en déduit que  $\varphi$  et  $\psi$  sont constantes sur  $[x_j, x_{j+1}[$  , donc aussi toutes les fonctions citées dans la proposition. 

---

 □

**EXEMPLE** Pour tout  $c, d \in [a, b]$  tels que  $c \leq d$  , on a  $1_{[c, d[} \in \mathcal{E}([a, b])$  , mais  $1_{[c, d]} \notin \mathcal{E}([a, b])$  , à moins que  $d = b$  .

## 9.2 Intégrale élémentaire

Soient  $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$  et  $(u_j)_{j=0, \dots, p}$ ,  $(v_j)_{j=0, \dots, q}$  des subdivisions associées à  $\varphi$ . La subdivision  $(x_j)_{j=0, \dots, m}$  réunion de  $(u_j)_{j=0, \dots, p}$  et  $(v_j)_{j=0, \dots, q}$  est aussi associée à  $\varphi$ . En outre

$$[u_r, u_{r+1}[ = \bigcup_{u_r \leq x_j < u_{r+1}} [x_j, x_{j+1}[$$

et  $(x_j)_{u_r \leq x_j < u_{r+1}}$  est une subdivision de  $[u_r, u_{r+1}[$ . On a alors

$$\sum_{r=0}^{p-1} \varphi(u_r) \cdot (u_{r+1} - u_r) = \sum_{r=0}^{p-1} \varphi(u_r) \cdot \sum_{u_r \leq x_j < u_{r+1}} (x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j),$$

puisque  $\varphi(u_r) = \varphi(x_j)$  si  $u_r \leq x_j < u_{r+1}$ . On obtient de même

$$\sum_{s=0}^{q-1} \varphi(v_s) \cdot (u_{s+1} - u_s) = \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j),$$

donc

$$\sum_{r=0}^{p-1} \varphi(u_r) \cdot (u_{r+1} - u_r) = \sum_{s=0}^{q-1} \varphi(v_s) \cdot (u_{s+1} - u_s).$$

Ceci nous permet de poser la

**DEFINITION** Si  $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$  et  $(x_j)_{j=0, \dots, m}$  est une subdivision associée à  $\varphi$ , on dit que

$$\int_a^b \varphi := \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j)$$

est l'*intégrale (élémentaire) de Riemann* de  $\varphi$ .

**PROPOSITION** Pour tout  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b])$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a

$$(i) \quad \int_a^b (\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot \int_a^b \varphi.$$

$$(ii) \quad \int_a^b (\varphi + \psi) = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi.$$

$$(iii) \quad \varphi \leq \psi \implies \int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi.$$

Si  $(x_j)_{j=0, \dots, m}$  est une subdivision associée à  $\varphi$  et  $\psi$ , on obtient

$$\int_a^b (\alpha \cdot \varphi) = \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha \cdot \varphi)(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) = \alpha \cdot \int_a^b \varphi,$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (\varphi + \psi) &= \sum_{j=0}^{m-1} (\varphi + \psi)(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=0}^{m-1} \psi(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi \end{aligned}$$

et, si  $\varphi \leq \psi$ ,

$$\int_a^b \varphi = \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) \leq \sum_{j=0}^{m-1} \psi(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) = \int_a^b \psi .$$

□

**REMARQUE 1** Les propriétés (i) et (ii) signifient que

$$\varphi \longmapsto \int_a^b \varphi : \mathcal{E}([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme linéaire. On exprime la propriété (iii) en disant que cette forme linéaire est *croissante* ou encore qu'elle est *positive*, car elle est équivalente à

$$\varphi \geq 0 \implies \int_a^b \varphi \geq 0 .$$

En effet si  $\varphi \leq \psi$ , alors  $\psi - \varphi \geq 0$ , donc

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi = \int_a^b (\psi - \varphi) \geq 0 .$$

□

**REMARQUE 2 (Intégrales de Stieltjes)** Une fonction croissante  $\rho : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  possède des limites à gauche  $\rho(x-)$  et à droite  $\rho(x+)$  en tout point  $x \in [a, b]$ , excepté les deux cas suivants définis par

$$\rho(a-) := \rho(a) \quad \text{et} \quad \rho(b+) := \rho(b)$$

(cf. exercices 7.8.3 et 7.9.5).

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ , on définit alors l'intégrale (élémentaire) de Stieltjes de  $\varphi$  par

$$\int_a^b \varphi d\rho := \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot [\rho(x_{j+1}-) - \rho(x_j-)] + \varphi(b) \cdot [\rho(b+) - \rho(b-)] .$$

Elle possède les mêmes propriétés que l'intégrale élémentaire de Riemann. On a

$$\int_a^b \varphi = \int_a^b \varphi d(\text{id}) .$$

### 9.3 Intégrale supérieure de Darboux

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction (bornée), on va définir son intégrale en approximant  $f$  par en haut comme par en bas à l'aide de fonctions en escalier. Ceci nous conduit à introduire les deux nombres suivants.

**DEFINITION** Pour toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on pose

$$\int_a^{b^*} f := \inf_{\varphi \in \mathcal{E}([a, b]), \varphi \geq f} \int_a^b \varphi \in \overline{\mathbb{R}}$$

et

$$\int_{a^*}^b f := \sup_{\psi \in \mathcal{E}([a, b]), \psi \leq f} \int_a^b \psi \in \overline{\mathbb{R}}.$$

On dit que ce sont respectivement les *intégrales supérieure* et *inférieure* de Darboux de  $f$ .

**PROPOSITION** Pour toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\int_{a^*}^b f \leq \int_a^{b^*} f, \quad \int_{a^*}^b f = - \int_a^{b^*} (-f),$$

$$\int_a^{b^*} f < \infty \iff f \text{ est majorée}$$

et si l'on a  $m \leq f \leq M$  pour certains  $m, M \in \mathbb{R}$ , alors

$$m \cdot (b - a) \leq \int_{a^*}^b f \leq \int_a^{b^*} f \leq M \cdot (b - a).$$

Si  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b])$  et  $\psi \leq f \leq \varphi$ , alors  $\int_a^b \psi \leq \int_a^b \varphi$  par la proposition 9.2.iii, d'où la première partie. Pour la deuxième on a

$$\int_{a^*}^b f = - \inf_{\psi \in \mathcal{E}([a, b]), \psi \leq f} \int_a^b \psi = - \inf_{\psi \in \mathcal{E}([a, b]), -f \leq -\psi} \int_a^b (-\psi) = \int_a^{b^*} (-f),$$

puisque  $\psi \in \mathcal{E}([a, b])$  est équivalent à  $-\psi \in \mathcal{E}([a, b])$ . La troisième est immédiate car une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc est bornée. Pour la dernière partie il suffit de remarquer que

$$m \cdot 1_{[a, b]} \leq f \leq M \cdot 1_{[a, b]}.$$

□

**EXEMPLE 1** Pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ , on a

$$\int_{a^*}^b \varphi = \int_a^b \varphi = \int_a^{b^*} \varphi.$$

C'est immédiat.

□

**EXEMPLE 2** Considérons la fonction

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

On a

$$\int_0^{1*} f = 1 \quad \text{et} \quad \int_{0*}^1 f = 0 .$$

Soient  $\varphi \in \mathcal{E}([0, 1])$  tel que  $\varphi \geq f$  et  $(x_j)_{j=0, \dots, m}$  une subdivision de  $[0, 1]$  associée à  $\varphi$ . Pour tout  $k = 0, \dots, m-1$ , il existe un nombre rationnel  $q \in [x_j, x_{j+1}[$ . On a donc  $\varphi(x_j) = \varphi(q) \geq f(q) = 1$ . Ainsi

$$\int_0^1 \varphi \geq \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) \geq \sum_{j=0}^{m-1} (x_{j+1} - x_j) = 1 .$$

On en déduit que  $\int_0^{1*} f = 1$ , car 1 est aussi une fonction en escalier et  $1 \geq f$ .

L'autre assertion se démontre de la même manière, en remarquant que  $[x_j, x_{j+1}[$  contient un nombre irrationnel, par exemple  $q + \frac{\sqrt{2}}{l}$  pour  $l$  assez grand. \_\_\_\_\_  $\square$

## 9.4 Continuité uniforme

**DEFINITION** Soient  $X$  et  $Y$  des espaces métriques et  $f : X \rightarrow Y$  une application. On dit que  $f$  est *uniformément continue* si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $u, v \in X$ , on ait

$$d_X(u, v) \leq \delta \implies d_Y(f(u), f(v)) \leq \varepsilon .$$

**EXEMPLE** La fonction  $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est uniformément continue, par contre  $\text{id}^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ne l'est pas. Il en est de même de  $\sin \frac{1}{\text{id}} : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Il suffit de prendre  $\delta = \varepsilon$ . Le reste est laissé en exercice.

**THEOREME (de Heine)** Une fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est uniformément continue.

Si  $f$  n'est pas uniformément continue, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  l'implication

$$\text{pour tout } u, v \in [a, b], |u - v| \leq \frac{1}{k} \implies |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$$

soit fausse. Il existe donc  $u_k, v_k \in [a, b]$  tels que

$$|u_k - v_k| \leq \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad |f(u_k) - f(v_k)| > \varepsilon .$$

Le théorème de Bolzano-Weierstrass 5.11 nous permet d'extraire une sous-suite convergente  $(u_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ . Soit alors  $x = \lim_l u_{k_l} \in [a, b]$ . Comme on a

$$|x - v_k| \leq |x - u_k| + |u_k - v_k| \leq |x - u_k| + \frac{1}{k} ,$$

on en déduit que  $(v_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$  est aussi convergente et que  $\lim_l v_{k_l} = x$ . Par la continuité de  $f$ , on obtient alors

$$\lim_l [f(u_{k_l}) - f(v_{k_l})] = f(x) - f(x) = 0 ,$$

ce qui est absurde, puisque  $|f(u_{k_l}) - f(v_{k_l})| \geq \varepsilon$  pour tout  $l \in \mathbb{N}$ . □

**EXERCICE** Soient  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction dérivable dont la dérivée  $f'$  est bornée. Montrer que  $f$  est uniformément continue.



## 9.5 Intégrabilité au sens de Riemann

**DEFINITION** Une fonction  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est dite (*Riemann*) *intégrable* si l'on a

$$\int_{a^*}^b f = \int_a^{b^*} f \in \mathbb{R} .$$

Ce nombre s'appelle l' *intégrale* (*de Riemann*) de  $f$  et se note

$$\int_a^b f .$$

**LEMME** Une fonction  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est intégrable si, et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b])$  tels que

$$\psi \leq f \leq \varphi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\varphi - \psi) \leq \varepsilon .$$

C'est immédiat par définition. □

**EXEMPLE 1** Toute fonction en escalier est intégrable d'après l'exemple 9.3.1. Par contre la fonction de l'exemple 9.3.2 n'est pas intégrable.

**THEOREME** Toute fonction continue  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est intégrable.

D'après le théorème de Heine, nous savons que  $f$  est uniformément continue. Il existe donc  $\delta > 0$  tel que l'on ait  $|f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$  si  $|u - v| \leq \delta$ . Choisissons  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{b-a}{m} \leq \delta$ . On considère alors la subdivision

$$x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{m} \quad \text{pour } j = 0, \dots, m .$$

Nous savons par le théorème de Weierstrass 7.10 que  $f$  est bornée. Nous pouvons donc poser

$$\varphi := \sum_{j=0}^{m-1} \sup f([x_j, x_{j+1}[) \cdot 1_{[x_j, x_{j+1}[} + f(b) \cdot 1_{\{b\}}$$

et

$$\psi := \sum_{j=0}^{m-1} \inf f([x_j, x_{j+1}[) \cdot 1_{[x_j, x_{j+1}[} + f(b) \cdot 1_{\{b\}} .$$

On a  $\psi \leq f \leq \varphi$  car, pour tout  $x \in [a, b[$ , il existe  $j$  tel que  $x \in [x_j, x_{j+1}[$ , donc

$$\psi(x) = \inf f([x_j, x_{j+1}[) \leq f(x) \leq \sup f([x_j, x_{j+1}[) = \varphi(x) ,$$

tandis que

$$\psi(b) = f(b) = \varphi(b) .$$

D'autre part, pour tout  $u, v \in [x_j, x_{j+1}[$ , on a  $|u - v| \leq \delta$ , donc  $|f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$  et en particulier

$$f(u) \leq f(v) + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On en déduit que

$$\sup f([x_j, x_{j+1}[) \leq \inf f([x_j, x_{j+1}[) + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

et par suite que

$$0 \leq \sup f([x_j, x_{j+1}[) - \inf f([x_j, x_{j+1}[) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ainsi

$$0 \leq \varphi - \psi \leq \frac{\varepsilon}{b-a},$$

donc

$$\int_a^b (\varphi - \psi) \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

d'où notre assertion par le lemme. □

**REMARQUE 1** Rappelons, si  $X$  est un ensemble et  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions que l'on a

$$\min(f, g) + \max(f, g) = f + g.$$

En posant

$$f^+ := \max(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- := \max(-f, 0),$$

on a

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = \max(f, -f) = f^+ + f^-.$$

**PROPOSITION** Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions bornées et  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . On a alors

$$(i) \quad \int_{a^*}^b (\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \int_{a^*}^b f \quad \text{et} \quad \int_a^{b^*} (\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \int_a^{b^*} f.$$

$$(ii) \quad \int_{a^*}^b f + \int_{a^*}^b g \leq \int_{a^*}^b (f + g) \quad \text{et} \quad \int_a^{b^*} (f + g) \leq \int_a^{b^*} f + \int_a^{b^*} g.$$

$$(iii) \quad f \leq g \implies \int_{a^*}^b f \leq \int_{a^*}^b g, \quad \int_a^{b^*} f \leq \int_a^{b^*} g.$$

$$(iv) \quad \int_{a^*}^b f + \int_{a^*}^b g \leq \int_{a^*}^b \min(f, g) + \int_{a^*}^b \max(f, g)$$

et

$$\int_a^{b^*} \min(f, g) + \int_a^{b^*} \max(f, g) \leq \int_a^{b^*} f + \int_a^{b^*} g.$$

Les formules pour les intégrales inférieures découlent des formules pour les intégrales supérieures, car on a

$$\int_{a^*}^b f = - \int_a^{b^*} (-f) .$$

**Démonstration de (i)** Si  $\alpha \neq 0$  la formule est évidente. Si  $\alpha > 0$ , alors

$$\begin{aligned} \int_a^{b^*} (\alpha \cdot f) &= \inf_{\varphi \in \mathcal{E}([a,b]), \varphi \geq \alpha \cdot f} \int_a^b \varphi = \alpha \cdot \inf_{\varphi \in \mathcal{E}([a,b]), \frac{\varphi}{\alpha} \geq f} \int_a^b \frac{\varphi}{\alpha} = \\ &= \alpha \cdot \inf_{\varphi \in \mathcal{E}([a,b]), \varphi \geq f} \int_a^b \varphi = \alpha \cdot \int_a^{b^*} f , \end{aligned}$$

puisque  $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$  est équivalent à  $\frac{\varphi}{\alpha} \in \mathcal{E}([a,b])$ .

**Démonstration de (ii)** Etant donné  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$  tels que  $\varphi \geq f$  et  $\psi \geq g$ , on a  $\varphi + \psi \geq f + g$ , donc

$$\int_a^{b^*} (f + g) \leq \int_a^b (\varphi + \psi) = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi .$$

La deuxième formule en découle en prenant l'infimum sur ces  $\varphi$ , puis sur ces  $\psi$ .

**Démonstration de (iii)** Etant donné  $\psi \in \mathcal{E}([a,b])$  tels que  $\psi \geq g$ , on a  $\psi \geq f$ , donc

$$\int_a^{b^*} f \leq \int_a^b \psi ,$$

d'où la formule.

**Démonstration de (iv)** Etant donné  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$  tels que  $\varphi \geq f$  et  $\psi \geq g$ , on a  $\min(\varphi, \psi) \geq \min(f, g)$  et  $\max(\varphi, \psi) \geq \max(f, g)$ ,

donc

$$\begin{aligned} \int_a^{b^*} \min(f, g) + \int_a^{b^*} \max(f, g) &\leq \int_a^b \min(\varphi, \psi) + \int_a^b \max(\varphi, \psi) = \\ \int_a^b [\min(\varphi, \psi) + \max(\varphi, \psi)] &= \int_a^b (\varphi + \psi) = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi , \end{aligned}$$

ce qui finit de prouver la proposition. □

**COROLLAIRE** Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions intégrables,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $p \in [1, \infty[$ . Alors les fonctions

$\alpha \cdot f$ ,  $f + g$ ,  $\min(f, g)$ ,  $\max(f, g)$ ,  $f^+$ ,  $f^-$ ,  $|f|^p$  et  $f \cdot g$  sont intégrables, et on a

$$\int_a^b \alpha \cdot f = \alpha \cdot \int_a^b f \quad , \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g ,$$

ainsi que

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g .$$

Comme  $f$  et  $g$  sont intégrables, on a

$$\int_{a^*}^b f = \int_a^{b^*} f \text{ et } \int_{a^*}^b g = \int_a^{b^*} g .$$

Si  $\alpha \geq 0$ , on obtient alors

$$\int_{a^*}^b (\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \int_{a^*}^b f = \alpha \cdot \int_a^{b^*} f = \int_a^{b^*} (\alpha \cdot f) .$$

Si  $\alpha < 0$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{a^*}^b (\alpha \cdot f) &= \int_{a^*}^b (-|\alpha| \cdot f) = - \int_a^{b^*} (|\alpha| \cdot f) = -|\alpha| \cdot \int_a^{b^*} f = \\ &= -|\alpha| \cdot \int_{a^*}^b f = - \int_{a^*}^b (|\alpha| \cdot f) = \int_a^{b^*} (\alpha \cdot f) . \end{aligned}$$

Pour prouver que  $f + g$  est intégrable, il suffit de constater que

$$\int_a^{b^*} f + \int_a^{b^*} g = \int_{a^*}^b f + \int_{a^*}^b g \leq \int_{a^*}^b (f + g) \leq \int_a^{b^*} (f + g) \leq \int_a^{b^*} f + \int_a^{b^*} g .$$

Quant à l'intégrabilité de  $\min(f, g)$  et  $\max(f, g)$ , elle découle de

$$\begin{aligned} \int_a^{b^*} f + \int_a^{b^*} g &= \int_{a^*}^b f + \int_{a^*}^b g \leq \int_{a^*}^b \min(f, g) + \int_{a^*}^b \max(f, g) \leq \\ &\leq \int_a^{b^*} \min(f, g) + \int_a^{b^*} \max(f, g) \leq \int_a^{b^*} f + \int_a^{b^*} g , \end{aligned}$$

car pour tout  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ , on a

$$\alpha \leq \gamma, \beta \leq \delta, \alpha + \beta = \gamma + \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \gamma, \beta = \delta .$$

On en déduit celle de  $f^+$ ,  $f^-$  et  $|f|$ .

Pour démontrer l'intégrabilité de  $|f|^p$ , nous pouvons remplacer  $f$  par  $|f|$ . En outre il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que que  $0 \leq f \leq M$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , par le lemme il existe  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b])$  tels que  $\psi \leq f \leq \varphi$  et  $\int_a^b (\varphi - \psi) \leq \varepsilon$ . Nous pouvons supposer que  $\psi \geq 0$  et  $\varphi \leq M$  en remplaçant au besoin  $\psi$  par  $\psi^+$  et  $\varphi$  par  $\min(\varphi, M)$ . On a

$$\psi^p, \varphi^p \in \mathcal{E}([a, b]) \text{ et } \psi^p \leq f^p \leq \varphi^p .$$

Par la formule des accroissements finis, pour tout  $u, v \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$u^p - v^p = p \cdot \xi^{p-1} \cdot (u - v)$$

pour un certain  $\xi$  entre  $u$  et  $v$ . En en déduit que

$$\varphi^p - \psi^p \leq p \cdot M^{p-1} \cdot (\varphi - \psi) ,$$

puisque pour tout  $x \in [a, b]$ , le point  $\xi$  est entre  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$ , donc  $\xi \leq M$ , et que  $\text{id}^{p-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante. Il vient alors

$$\int_a^b (\varphi^p - \psi^p) \leq p \cdot M^{p-1} \cdot \int_a^b (\varphi - \psi) \leq p \cdot M^{p-1} \cdot \varepsilon .$$

Finalement il suffit de remarquer que

$$f^2 = |f|^2 \quad \text{et} \quad f \cdot g = \frac{1}{4} \cdot [(f + g)^2 - (f - g)^2] .$$

□

**REMARQUE 2** Pour  $p \in ]0, 1[$ , on peut aussi montrer que  $|f|^p$  est intégrable, mais la démonstration est plus compliquée, car  $\text{id}^{p-1}$  n'est pas croissante. Mais cela n'est pas important car les seules fonctions que nous rencontrerons, avant de traiter l'intégrale de Lebesgue, sont celles qui sont continues par morceaux (cf. exemples 3 ci-dessous) et pour lesquelles le résultat est évident.

**EXEMPLE 2** Nous savons que les fonctions en escalier et les fonctions continues sont intégrables. En outre on démontre facilement (voir l'exercice ci-dessous) que, pour tout  $x \in [a, b]$ , la fonction  $1_{\{x\}}$  est intégrable. Le corollaire montre alors que toute combinaison linéaire de telles fonctions est aussi intégrable. On voit alors immédiatement que ces fonctions sont celles qui sont continues par morceaux sur  $[a, b]$  au sens de la définition suivante :

Si  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , nous dirons qu'une fonction  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$  est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision  $(x_j)_{j=0, \dots, m}$  de  $J$ , telle que  $x_0 = \inf J \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $x_m = \sup J \in \overline{\mathbb{R}}$ , telle que la restriction de  $f$  à chaque intervalle ouvert  $]x_j, x_{j+1}[$  possède un prolongement continu à l'intervalle fermé  $[x_j, x_{j+1}] \cap \mathbb{R}$ .

Les valeurs de  $f$  aux points  $x_j \in J$  peuvent donc être quelconques.

**EXERCICE 1** Montrer que les fonctions croissantes sur  $[a, b]$  sont intégrables.

## EXERCICE 2

(a) Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée. S'il existe une suite de subdivisions  $(x_{k,j})_{j=0, \dots, m_k}$  de  $[a, b]$  telles que

$$\begin{aligned} C &:= \lim_k \sum_{j=0}^{m_k-1} \sup f([x_{k,j}, x_{k,j+1})) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) = \\ &= \lim_k \sum_{j=0}^{m_k-1} \inf f([x_{k,j}, x_{k,j+1})) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) , \end{aligned}$$

alors  $f$  est intégrable et

$$\int_a^b f = C .$$

(b) Montrer que pour tout  $x \in [a, b]$ , la fonction  $1_{\{x\}}$  est intégrable.

## 9.6 Théorème de la moyenne

**THEOREME** Soient  $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues telles que  $g \geq 0$ . Alors il existe  $\xi \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int_a^b g .$$

D'après le théorème de Weierstraß 7.10, il existe  $u, v \in [a, b]$  tels que

$$m := \inf f([a, b]) = f(u) \text{ et } M := \sup f([a, b]) = f(v) .$$

On a évidemment  $m \cdot g \leq f \cdot g \leq M \cdot g$ , donc

$$m \cdot \int_a^b g \leq \int_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int_a^b g ,$$

ce qui montre que  $\int_a^b f \cdot g = \alpha \cdot \int_a^b g$  pour un certain  $\alpha \in [m, M] = [f(u), f(v)]$ . Le théorème de la valeur intermédiaire 7.5, p. 181, prouve alors l'existence d'une  $\xi$  entre  $u$  et  $v$ , donc dans  $[a, b]$  tel que  $f(\xi) = \alpha$ , ce qu'il fallait démontrer. □

**COROLLAIRE** Pour toute fonction continue  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , il existe  $\xi \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b - a) .$$

## 9.7 Intégration des fonctions à valeurs complexes

**DEFINITION** Soit  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  une fonction à valeurs complexes. On dit que  $f$  est (*Riemann*) *intégrable* si  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  le sont. On définit l'*intégrale (de Riemann)* de  $f$  par

$$\int_a^b f := \int_a^b \operatorname{Re} f + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im} f .$$

**PROPOSITION** Si  $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  sont des fonctions intégrables et  $\alpha \in \mathbb{C}$ , alors les fonctions

$$\alpha \cdot f \quad , \quad f + g \quad , \quad |f| \quad \text{et} \quad f \cdot g$$

sont intégrables, et on a

$$\int_a^b (\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \int_a^b f \quad , \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

et

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq M \cdot (b - a) \quad ,$$

si  $|f| \leq M \in \mathbb{R}_+$

Il suffit d'utiliser le corollaire 9.5, sauf pour les assertions concernant  $|f|$ . L'intégrabilité découle de la remarque 9.5.2 (avec  $p = \frac{1}{2}$ ) et de la formule

$$|f| = ((\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Quant à l'inégalité, il suffit de remarquer qu'il existe  $u \in \mathbb{U}$  tel que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \right| &= u \cdot \int_a^b f = \int_a^b (u \cdot f) = \int_a^b \operatorname{Re}(u \cdot f) + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(u \cdot f) = \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(u \cdot f) \leq \int_a^b |f| \quad , \end{aligned}$$

car  $\int_a^b (u \cdot f) \in \mathbb{R}$ , donc  $\int_a^b \operatorname{Im}(u \cdot f) = 0$ , et

$$\operatorname{Re}(u \cdot f) \leq |u \cdot f| = |f| .$$

---

□

## 9.8 Intégrales indéfinies

**DEFINITION 1** On pose

$$\int_a^a f = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f := - \int_b^a f \quad \text{si } b < a .$$

**LEMME** Soient  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ .

(i) Soient  $a, b, c \in J$  tels que  $a < b < c$ . Pour que  $f|_{[a,c]}$  soit intégrable, il faut et il suffit que  $f|_{[a,b]}$  et  $f|_{[b,c]}$  soient intégrables.

(ii) Pour tout  $a, b, c \in J$ , on a

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f ,$$

si  $f$  est intégrable sur le plus petit intervalle contenant  $a, b$  et  $c$ .

**Démonstration de (i)** C'est immédiat en utilisant le lemme 9.5 et on a la formule.

**Démonstration de (ii)** Il suffit de distinguer les cas  $c < a$  et  $c \in [a, b]$ . ————  $\square$

**THEOREME (Existence d'une primitive)** Soient  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\xi \in J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Alors la fonction

$$G : J \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \int_{\xi}^x g$$

est une primitive de  $g$ , i.e.  $G$  est dérivable et  $G' = g$ .

Plus précisément  $G$  est l'unique solution du problème avec condition initiale

$$f' = g \quad \text{et} \quad f(\xi) = 0 .$$

On peut évidemment, en séparant partie réelle et partie imaginaire, supposer que  $g$  est réelle. Etant donné  $x \in J$ , pour tout  $y \in J$  tel que  $y \neq x$ , on a

$$\frac{G(y) - G(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \cdot \left( \int_{\xi}^y g - \int_{\xi}^x g \right) = \frac{1}{y - x} \cdot \int_x^y g .$$

Mais d'après le théorème de la moyenne (corollaire 9.6), il existe  $\eta_y$  entre  $x$  et  $y$  tel que

$$\int_x^y g = g(\eta_y) \cdot (y - x) ,$$

donc

$$\frac{G(y) - G(x)}{y - x} = f(\eta_y) .$$



Mais comme  $\lim_{x \neq y \rightarrow x} \eta_y = x$  et que  $f$  est continue, on obtient

$$G'(x) = \lim_{x \neq y \rightarrow x} \frac{G(y) - G(x)}{y - x} = f(x) .$$

On a évidemment  $G(\xi) = 0$ . Finalement l'unicité découle du théorème d'unicité 8.7. —  $\square$

**DEFINITION 2** On dit que  $\int_{\xi}^{\diamond} g$  est l'*intégrale indéfinie* de  $g$  s'annulant en  $\xi$ .

Nous pouvons maintenant généraliser la proposition 8.7.

**PROPOSITION** Soient  $c, d : J \rightarrow \mathbb{C}$  des fonctions continue,  $\tau \in J$  et  $\eta \in \mathbb{C}$ .

(i) Il existe une et une seule fonction dérivable  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$  solution du problème (homogène) avec condition initiale

$$f' = c \cdot f \quad \text{et} \quad f(\tau) = \eta .$$

On a

$$f = \eta \cdot \exp \left( \int_{\tau}^{\diamond} c \right) .$$

(ii) Il existe une et une seule fonction dérivable solution du problème (inhomogène) avec condition initiale

$$f' = c \cdot f + d \quad \text{et} \quad f(\tau) = \eta .$$

On a

$$\begin{aligned} f &= \left[ \eta + \int_{\tau}^{\diamond} d(s) \cdot \exp \left( - \int_{\tau}^s c \right) ds \right] \cdot \exp \left( \int_{\tau}^{\diamond} c \right) = \\ &= \eta \cdot \exp \left( \int_{\tau}^{\diamond} c \right) + \int_{\tau}^{\diamond} d(s) \cdot \exp \left( \int_s^{\diamond} c \right) ds . \end{aligned}$$

**Démonstration de (i)** La démonstration est identique à celle de la proposition 8.7 en faisant l'Ansatz  $f = g \cdot \exp \left( \int_{\tau}^{\diamond} c \right)$ , car

$$\exp \left( \int_{\tau}^{\diamond} c \right)' = \exp \left( \int_{\tau}^{\diamond} c \right) \cdot \left( \int_{\tau}^{\diamond} c \right)' = c \cdot \exp \left( \int_{\tau}^{\diamond} c \right) .$$

**Démonstration de (ii)** La démonstration est laissée en exercice. On utilise le même Ansatz que ci-dessus  $f = g \cdot \exp \left( \int_{\tau}^{\diamond} c \right)$ , dite *méthode de la variation des constantes* : cela revient dans la solution du problème homogène à changer la constante  $\eta$  en la fonction  $g$ . On peut remarquer que

$$\left[ \int_{\tau}^{\diamond} d(s) \cdot \exp \left( - \int_{\tau}^s c \right) ds \right] \cdot \exp \left( \int_{\tau}^{\diamond} c \right)$$

est solution de problème inhomogène

$$f' = c \cdot f + d \quad \text{et} \quad f(\tau) = 0 .$$

Nous généraliserons ces considérations aux équations différentielles linéaires vectorielles (cf. 12.7 et 12.9). —  $\square$

**EXEMPLE** L'unique solution du problème avec condition initiale

$$f' = 2 \cdot \text{id} \cdot f + 1 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

est

$$f(t) = \int_0^t e^{t^2-s^2} ds = e^{t^2} \cdot \int_0^t e^{-s^2} ds .$$

Remarquons que la fonction

$$\text{erf} := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty e^{-s^2} ds ,$$

importante pour le Calcul des ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires. On dit que c'est une *fonction spéciale* .

**EXERCICE 1** Calculer la dérivée de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int_x^{x^2+\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt .$$

**EXERCICE 2** Quelle est l'unique solution du problème avec condition initiale

$$f' = 2 \text{id} \cdot f + \text{id} \quad , \quad f(0) = 0 ?$$

**EXERCICE 3** Soit  $\eta \in \mathbb{R}$  . Quelle est l'unique solution du problème avec condition initiale

$$f' = (1 + \text{id}) \cdot f + 1 - 3 \cdot \text{id} + \text{id}^2 \quad , \quad f(0) = \eta ?$$

Le cas  $\eta = 0$  a déjà été considéré par Newton dans son traité sur les fluxions, dont le manuscrit est daté de 1671. Il a résolu cette équation différentielle en faisant l'Ansatz  $f = \sum_{l=1}^\infty c_l \cdot \text{id}^l$  .

**EXERCICE 4**

(a) Soient  $c_1, c_2, \eta \in \mathbb{C}$  ,  $c_1 \neq 0$  . Montrer à l'aide de l'Ansatz  $f = g \cdot e^{-c_1 \cdot \text{id}}$  , que

$$f = \frac{c_2}{c_1} + \left( \eta - \frac{c_2}{c_1} \right) \cdot e^{-c_1 \cdot \text{id}}$$

est solution du problème avec condition initiale

$$f' + c_1 \cdot f = c_2 \quad , \quad f(0) = \eta .$$

(b) Soient  $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{C}$  . Résoudre le problème avec condition initiale

$$f'' + f = 0 \quad , \quad f(0) = \eta_0 \quad , \quad f'(0) = \eta_1 .$$

Faire l'Ansatz  $f = g \cdot e^{i \cdot \text{id}}$  et montrer que l'on a  $g'' + 2i \cdot g' = 0$  .

(c) Donner les solutions pour les couples  $(\eta_0, \eta_1) = (1, 0)$  ,  $(0, 1)$  .

**EXERCICE 5** Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue satisfaisant à l'équation fonctionnelle  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$  pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$  .

(a) On a  $f = 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  ou  $f > 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  .

Quelles sont les valeurs possibles pour  $f(1)$  ?

- (b) Pour que  $f$  soit dérivable, il faut et il suffit que  $f$  soit dérivable en un point  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Dans ce cas  $f$  satisfait à une équation différentielle. Laquelle ?
- (c) Montrer que  $f$  est continûment dérivable.  
On étudiera l'intégrale  $\int_1^x f(t) dt$  en remarquant que  $t = \frac{t}{x} \cdot x$ .
- (d) On en déduira la forme de  $f$ .

## 9.9 Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

**THEOREME** Soient  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et  $F$  une primitive de  $f$ . Alors

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) .$$

D'après le théorème 9.8 la fonction  $\int_a^\diamond f$  est une primitive de  $f$ . Mais le théorème d'unicité 8.7 montre que  $F = \int_a^\diamond f + c$  pour un certain  $c \in \mathbb{C}$ . On a alors

$$\int_a^b f = \left( \int_a^b f + c \right) - \left( \int_a^a f + c \right) = F(b) - F(a) .$$

□

**DEFINITION** On pose

$$[F]_a^b := F(b) - F(a) .$$

Le théorème fondamental peut donc s'écrire

$$\int_a^b f = [F]_a^b .$$

Comme dans beaucoup de situations une fonction dépend encore de certains paramètres, il est utile de préciser la variable par rapport à laquelle on intègre. On écrit alors

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_{x=a}^b .$$

**EXEMPLE 1** Pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_a^b x^s dx = \begin{cases} \left[ \frac{x^{s+1}}{s+1} \right]_a^b & s \neq -1 \\ \left[ \ln |x| \right]_a^b & s = -1 \end{cases} \text{ si}$$

avec

$$a, b \text{ quelconques} \quad \text{si } s \in \mathbb{N} ,$$

$$0 \notin [a, b] \quad \text{si } s \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} ,$$

$$[a, b] \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{si } s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$$

et

$$[a, b] \subset \mathbb{R}_+^* \quad \text{si } s \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z} .$$

Il suffit de discuter les cas où la fonction  $x \mapsto x^s$  est bien définie et continue. —  $\square$

Attention, si l'on ne tient pas compte des valeurs de  $a$  et  $b$ , on peut avoir des surprises :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2!$$

**EXEMPLE 2** Pour tout  $c \in \mathbb{C}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_a^b e^{c \cdot x} dx = \begin{cases} \left[ \frac{1}{c} \cdot e^{c \cdot x} \right]_a^b & c \neq 0 \\ b - a & c = 0 \end{cases} .$$

Nous pouvons maintenant améliorer l'inégalité de la moyenne 8.5.

**PROPOSITION (Inégalité de la moyenne)** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continûment dérivable. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| .$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \left| \int_a^b f' \right| \leq \int_a^b |f'| \leq \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \cdot \int_a^b 1 = (b - a) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| . \end{aligned}$$

$\square$

**EXERCICE** Calculer  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$  pour

(a)

$$a_k := \sum_{j=0}^k \frac{1}{k+j} .$$

(b)

$$a_k := \sum_{j=1}^k \frac{(j^2 + k^2)(2j + 1)}{k^4} (\ln(j^2 + k^2) - 2 \ln k) .$$

On interprétera les sommes comme des intégrales élémentaires.

## 9.10 Règle de substitution

**THEOREME** Soient  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue,  $[c, d]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\rho : [c, d] \rightarrow J$  une fonction continûment dérivable. Alors on a

$$\int_c^d f \circ \rho \cdot \rho' = \int_{\rho(c)}^{\rho(d)} f .$$

En effet si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $F \circ \rho$  est une primitive de  $f \circ \rho \cdot \rho'$  par la règle de dérivation des fonctions composées (théorème 8.3.i) :

$$(F \circ \rho)' = F' \circ \rho \cdot \rho' = f \circ \rho \cdot \rho' .$$

Il vient alors

$$\int_c^d f \circ \rho \cdot \rho' = [F \circ \rho]_c^d = [F]_{\rho(c)}^{\rho(d)} = \int_{\rho(c)}^{\rho(d)} f .$$

□

**REMARQUE 1** Si  $\rho$  est croissante, on peut montrer que

$$\int_c^d f \circ \rho \cdot \rho' = \int_c^d f \, d\rho$$

en utilisant l'intégrale de Stieltjes.

Mnémotechniquement, la formule de substitution

$$\int_{\rho(c)}^{\rho(d)} f(x) \, dx = \int_c^d f(\rho(y)) \, d\rho(y) = \int_c^d f(\rho(y)) \cdot \rho'(y) \, dy$$

s'obtient en faisant la substitution  $x = \rho(y)$ , puis en utilisant la règle  $dx = d\rho(y) = \rho'(y) \, dy$ .

Il n'est pas nécessaire que  $\rho$  soit bijective. Une substitution n'est donc pas nécessairement un changement de variable (cf. exemples 3 et 4 ci-dessous).

**REMARQUE 2** Si  $\rho$  est strictement monotone, i.e. une bijection de  $[c, d]$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , et par suite  $x = \rho(y)$  un *changement de variable*, alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\rho^{-1}(a)}^{\rho^{-1}(b)} f(\rho(y)) \cdot \rho'(y) \, dy .$$

**REMARQUE 3** On désigne souvent par  $\int f$  une primitive de  $f$ . Mais attention, cette notation n'est pas assez précise et peut vite conduire à des erreurs, puisqu'il n'est pas clair de quelle primitive il s'agit !

La formule de substitution montre alors que

$$\int (f \circ \rho \cdot \rho') = \left( \int f \right) \circ \rho + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{C} ,$$

ce qui est évident par la règle de dérivation des fonctions composées.

Si  $\rho$  est une bijection, alors

$$\int f = \left( \int f \circ \rho \cdot \rho' \right) \circ \rho^{-1} + c .$$

**EXEMPLE 1** Pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(y-c) dy .$$

On fait le changement de variable  $x = y - c$ . \_\_\_\_\_  $\square$

**EXEMPLE 2** Pour tout  $c \in \mathbb{R}^*$ , on a

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{c} \cdot \int_{c \cdot a}^{c \cdot b} f\left(\frac{y}{c}\right) dy .$$

On fait le changement de variable  $x = \frac{y}{c}$ . \_\_\_\_\_  $\square$

**EXEMPLE 3** On a

$$\int_0^\pi \cos y dy = \int_0^\pi 1 \cdot \sin' y dy = \int_0^0 1 dx = 0 ,$$

en faisant la substitution  $x = \sin y$ , car  $dx = \cos y dy$ .

**EXEMPLE 4** Si  $\rho : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continûment dérivable telle que  $\rho \neq 0$  partout, alors en faisant la substitution  $x = \rho(y)$ , on obtient

$$\int_c^d \frac{\rho'(y)}{\rho(y)} dy = \int_{\rho(c)}^{\rho(d)} \frac{1}{x} dx = \left[ \ln |x| \right]_{\rho(c)}^{\rho(d)} = \ln \frac{\rho(d)}{\rho(c)} ,$$

car  $\rho$  ne change pas de signe. En d'autres termes, nous avons simplement utiliser le théorème fondamental et le fait que  $\ln |\rho|$  est une primitive de  $\frac{\rho'}{\rho}$ .

En particulier, si  $[c, d] \subset ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , alors

$$\int_c^d \tan y dy = - \int_c^d \frac{\cos' y}{\cos y} dy = - \ln \frac{\cos d}{\cos c} .$$

**EXEMPLE 5** Si  $[a, b] \subset [-1, 1]$ , alors

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \sqrt{1-\sin^2 y} \cdot \cos y dy = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos^2 y dy ,$$

en faisant le changement de variable  $x = \sin y$ . Mais comme  $\cos^2 y = \frac{1}{2} \cdot (\cos 2y + 1)$ , on a

$$\int_u^v \cos^2 y dy = \frac{1}{2} \cdot \int_u^v (\cos 2y + 1) dy = \left[ \frac{1}{4} \cdot \sin 2y + \frac{1}{2} \cdot y \right]_u^v .$$

Ainsi

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sin 2y + y \right]_{\arcsin a}^{\arcsin b} = \frac{1}{2} \cdot \left[ x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right]_a^b,$$

puisque

$$\sin 2y = 2 \cdot \sin y \cdot \cos y = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}.$$

En particulier, on obtient

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot [\arcsin 1 - \arcsin(-1)] = \frac{\pi}{2},$$

qui est la surface sous le graphe d'un demi-cercle de rayon 1.

**EXEMPLE 6** Soient  $p, q \in \mathbb{R}$  tels que l'on ait  $x^2 + 2p \cdot x + q \neq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ . On a

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2p \cdot x + q} = \int_{a+p}^{b+p} \frac{dy}{(y-p)^2 + 2p \cdot (y-p) + q} = \int_{a+p}^{b+p} \frac{dy}{y^2 + r},$$

en faisant le changement de variable  $x = y - p$  et en posant  $r := q - p^2$ .

(a) Le cas  $r = 0$  est trivial :

$$\int_a^b \frac{dx}{(x+p)^2} = \left[ -\frac{1}{(x+p)} \right]_a^b.$$

(b) Si  $r > 0$ , en faisant le changement de variable  $y = \sqrt{r} \cdot t$ , on obtient

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2p \cdot x + q} = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \int_{\frac{a+p}{\sqrt{r}}}^{\frac{b+p}{\sqrt{r}}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \left[ \arctan \frac{x+p}{\sqrt{r}} \right]_a^b.$$

(c) Si  $r < 0$ , en faisant le changement de variable  $y = \sqrt{-r} \cdot t$ , on obtient

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2p \cdot x + q} = \frac{1}{\sqrt{-r}} \cdot \int_{\frac{a+p}{\sqrt{-r}}}^{\frac{b+p}{\sqrt{-r}}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-r}} \cdot \left[ \ln \left| \frac{\sqrt{-r} + x + p}{\sqrt{-r} - x - p} \right| \right]_a^b,$$

car  $\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1+\text{id}}{1-\text{id}} \right|$  est une primitive de  $\frac{1}{1-\text{id}^2}$ .

En fait, à la place de se souvenir de ces formules, il est préférable à chaque fois de refaire les changements de variable. Dans le troisième cas, puisque les racines  $x_1$  et  $x_2$  de  $x^2 + 2p \cdot x + q = 0$  sont réelles, on peut directement utiliser la décomposition en fractions simples :

$$\frac{1}{x^2 + 2p \cdot x + q} = \frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2}.$$

Par exemple

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x},$$

et si  $\pm 1 \notin [a, b]$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{2}{1-x^2} dx &= \int_a^b \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \\ &= \left[ -\ln |1-x| + \ln |1+x| \right]_a^b = \left[ \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_a^b. \end{aligned}$$



**EXERCICE 1** Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Calculer les intégrales

$$\int_0^a x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^k dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \frac{dx}{x \cdot \ln x}.$$

**EXERCICE 2** Déterminer une primitive de

$$\mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

**EXERCICE 3** Déterminer une primitive de  $\frac{\exp-1}{\exp+1}$ .

**EXERCICE 4** Pour  $c \in \mathbb{C}$ , calculer l'intégrale

$$\int_0^\pi e^{c \cdot x} \cdot \sin^2 x \, dx.$$

## 9.11 Intégration par parties

**PROPOSITION** Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  des fonctions continûment dérivables. Alors

$$\int_a^b f \cdot g' = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g .$$

La règle de dérivation d'un produit (théorème 8.2.ii) montre que  $f \cdot g$  est une primitive de  $f' \cdot g + f \cdot g'$ , donc

$$\int_a^b (f' \cdot g + f \cdot g') = [f \cdot g]_a^b ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**REMARQUE** Cette règle nous permet souvent de déterminer une primitive d'un produit, puisqu'on a

$$\int (f \cdot g') = f \cdot g - \int (f' \cdot g) + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{C} .$$

**EXEMPLE 1** Si  $a, b > 0$ , alors

$$\int_a^b \ln = \left[ \text{id} \cdot \ln \right]_a^b - \int_a^b \text{id} \cdot \frac{1}{\text{id}} = \left[ \text{id} \cdot (\ln - 1) \right]_a^b ,$$

puisque  $\text{id}' = 1$ .

**EXEMPLE 2** Si  $a, b \in ]-1, 1[$ , alors

$$\int_a^b \arcsin = \left[ \text{id} \cdot \arcsin \right]_a^b - \int_a^b \frac{\text{id}}{\sqrt{1 - \text{id}^2}} .$$

Mais

$$\int_a^b \frac{\text{id}}{\sqrt{1 - \text{id}^2}} = -\frac{1}{2} \cdot \int_a^b \frac{(1 - \text{id}^2)'}{\sqrt{1 - \text{id}^2}} = \left[ -\sqrt{1 - \text{id}^2} \right]_a^b ,$$

donc

$$\int_a^b \arcsin = \left[ \text{id} \cdot \arcsin + \sqrt{1 - \text{id}^2} \right]_a^b .$$

Remarquons que les deux membres dépendent continûment de  $a$  et  $b$  dans  $[-1, 1]$ , i.e. pour  $a \in [-1, 1]$  fixe, les fonctions

$$b \mapsto \int_a^b \arcsin \quad \text{et} \quad b \mapsto \left[ \text{id} \cdot \arcsin + \sqrt{1 - \text{id}^2} \right]_a^b$$

sont continues. En choisissant  $a \in ]-1, 1[$ , ces deux fonctions sont donc égales par ce qui précède sur  $]-1, 1[$ . Par continuité elles sont donc égales sur  $[-1, 1]$ , ce qui montre que la formule ci-dessus est valable pour tout  $a \in ]-1, 1[$  et  $b \in [-1, 1]$ . En échangeant les rôles de  $a$  et  $b$ , on obtient finalement que la formule est vraie pour tout  $a, b \in [-1, 1]$ .

En particulier

$$\int_0^1 \arcsin = \left[ \text{id} \cdot \arcsin + \sqrt{1 - \text{id}^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

**EXEMPLE 3** Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos^2 &= [\cos \cdot \sin]_a^b - \int_a^b (-\sin) \cdot \sin = \\ &= [\cos \cdot \sin]_a^b + \int_a^b (1 - \cos^2) = [(\cos \cdot \sin + \text{id})]_a^b - \int_a^b \cos^2, \end{aligned}$$

donc

$$\int_a^b \cos^2 = \frac{1}{2} \cdot [\cos \cdot \sin + \text{id}]_a^b.$$

**EXERCICE 1** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , calculer l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^k \cdot \sin x \, dx.$$

**EXERCICE 2** Soient  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  et  $g \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b])$ . On suppose que  $g$  est monotone. Montrer qu'il existe un  $\xi \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f \cdot g = g(a) \cdot \int_a^{\xi} f + g(b) \cdot \int_{\xi}^b f,$$

en intégrant par partie et en utilisant le théorème de la moyenne.

**EXERCICE 3** Soit  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment dérivable injective. Déterminer une primitive de la fonction réciproque  $f^{-1}$ , exprimée à l'aide de  $f^{-1}$  et d'une primitive  $F$  de  $f$ , en faisant une substitution et une intégration par partie.

Appliquer ce résultat à la fonction

$$\text{id} \cdot \exp : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

(cf. exercice 7.13).

## 9.12 Formule de Taylor avec reste intégral

**THEOREME** Soient  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $(k + 1)$ -fois continûment dérivable. Pour tout  $x, y \in J$ , on a alors

$$f(y) = \sum_{l=0}^k \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y-x)^l + \frac{1}{k!} \cdot \int_x^y (y-t)^k \cdot f^{(k+1)}(t) dt .$$

Le cas  $k = 0$ , i.e.

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(t) dt ,$$

est évident par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral 9.9.

Si maintenant la formule est vraie pour  $k$ , alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \cdot \int_x^y (y-t)^k \cdot f^{(k+1)}(t) dt = \\ & = \left[ -\frac{(y-t)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot f^{(k+1)}(t) \right]_{t=x}^y + \frac{1}{(k+1)!} \cdot \int_x^y (y-t)^{k+1} \cdot f^{(k+2)}(t) dt = \\ & = \frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!} \cdot (y-x)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!} \cdot \int_x^y (y-t)^{k+1} \cdot f^{(k+2)}(t) dt \end{aligned}$$

montre que la formule est vraie pour  $k + 1$ . □

**EXEMPLE** En utilisant cette formule on peut améliorer le résultat de l'exemple 8.13.3 :

Pour tout  $x \in ]-1, 1]$ , on a

$$\ln(1+x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \cdot x^l .$$

Pour tout  $] -1, 1[$ , on a

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \cdot x^{2l+1} .$$

En particulier

$$\ln 2 = 2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2l+1} .$$

Cette série converge encore plus rapidement que celles données dans l'exemple 8.14.2.

En effet le reste s'écrit maintenant

$$R_{k+1}(x) = \frac{1}{k!} \cdot \int_0^x (x-t)^k \cdot \frac{(-1)^k \cdot k!}{(1+t)^{k+1}} dt = (-1)^k \cdot \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^k \frac{dt}{1+t} .$$

Mais pour tout  $x \in ]-1, 1]$  et  $t$  entre 0 et  $x$ , on a  $|x| \leq 1$ , donc

$$|x - t| = |x| - |t| \leq |x| - |t| \cdot |x| = (1 - |t|) \cdot |x| \leq (1 + t) \cdot |x| ,$$

et par suite

$$\left| \frac{x - t}{1 + t} \right| \leq |x| .$$

Ainsi

$$|R_{k+1}(x)| \leq |x|^k \cdot \left| \int_0^x \frac{dt}{1+t} \right| = |x|^k \cdot |\ln(1+x)| ,$$

et on obtient  $\lim_k R_{k+1}(x) = 0$  si  $|x| < 1$ .

Remarquons que notre estimation du reste ne fournit pas la représentabilité de  $\ln(1 + \text{id})$  par sa série de Taylor au point 1, résultat pourtant obtenu dans l'exemple 8.13.3. Cela revient à montrer que

$$\lim_k \int_0^1 \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^k \frac{dt}{1+t} = 0 ,$$

ce qui est possible à l'aide du théorème de la convergence dominée de Lebesgue (ceci sera traité dans le cours d'Analyse III).

Pour la seconde formule on a

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot \left( (-1)^{l-1} - (-1)^{l-1} \cdot (-1)^l \right) \cdot x^l = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot \left( (-1)^{l-1} + 1 \right) \cdot x^l = 2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \cdot x^{2l+1} . \end{aligned}$$

Comme  $2 = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$ , on obtient la dernière formule. \_\_\_\_\_  $\square$

## 9.13 Formule de Wallis

On se propose tout d'abord de calculer l'intégrale

$$A_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k .$$

On a

$$A_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin = \left[ -\cos \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 .$$

D'autre part, pour  $k \geq 2$ , il vient en intégrant par partie

$$\begin{aligned} A_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k = \left[ -\sin^{k-1} \cdot \cos \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (k-1) \cdot \sin^{k-2} \cdot \cos^2 = \\ &= (k-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{k-2} - \sin^k) = (k-1) \cdot (A_{k-2} - A_k) , \end{aligned}$$

donc

$$A_k = \frac{k-1}{k} \cdot A_{k-2} .$$

On en déduit, par récurrence, que

$$A_{2k} = \frac{(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{l=1}^k \frac{2l-1}{2l} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2}$$

et

$$A_{2k+1} = \frac{2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2k+1) \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3} \cdot 1 = \prod_{l=1}^k \frac{2l}{2l+1} = \frac{2^{2k} \cdot (k!)^2}{(2k+1)!} .$$

On a

$$\sin^{2k+2} \leq \sin^{2k+1} \leq \sin^{2k} \quad \text{sur} \quad \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] ,$$

donc

$$A_{2k+2} \leq A_{2k+1} \leq A_{2k} ,$$

i.e.

$$\frac{A_{2k+2}}{A_{2k}} \leq \frac{A_{2k+1}}{A_{2k}} \leq 1 .$$

Mais comme

$$\lim_k \frac{A_{2k+2}}{A_{2k}} = \lim_k \frac{2k+1}{2k+2} = 1 ,$$

on en déduit que

$$\lim_k \frac{A_{2k+1}}{A_{2k}} = 1 ,$$

c'est-à-dire que

$$\lim_k \frac{(2^k \cdot k!)^4}{(2k)! (2k+1)!} = \frac{\pi}{2}.$$

En outre, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A_{2k+1}}{A_{2k}} &= \frac{(2^k \cdot k!)^4}{(2k)! (2k+1)!} = \prod_{l=1}^k \frac{2^4 \cdot l^4}{2l(2l-1)(2l+1)2l} = \\ &= \prod_{l=1}^k \frac{2^2 \cdot l^2}{(2l-1)(2l+1)} = \prod_{l=1}^k \frac{4 \cdot l^2}{4l^2 - 1}. \end{aligned}$$

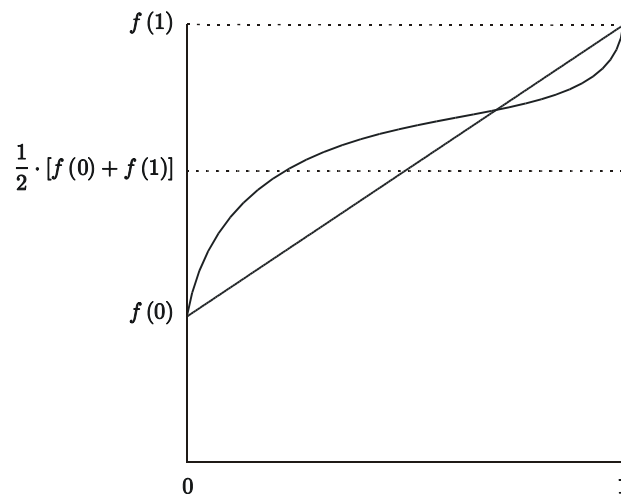
Ainsi

$$\prod_{l=1}^{\infty} \frac{4l^2}{4l^2 - 1} := \lim_k \prod_{l=1}^k \frac{4l^2}{4l^2 - 1} = \frac{\pi}{2}.$$

## 9.14 Règle du trapèze

**PROPOSITION** Soient  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$  une fonction deux fois continûment dérivable. Alors il existe  $\xi \in [0, 1]$  tel que

$$\int_0^1 f = \frac{1}{2} \cdot [f(0) + f(1)] - \frac{1}{12} \cdot f''(\xi) .$$



Définissons la fonction  $g$  sur  $[0, 1]$  par

$$g := \frac{1}{2} \cdot \text{id} \cdot (1 - \text{id}) .$$

On a  $g \geq 0$ ,  $g' = \frac{1}{2} - \text{id}$  et  $g'' = -1$ . En intégrant deux fois par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 f &= - \int_0^1 g'' \cdot f = \left[ -g' \cdot f \right]_0^1 + \int_0^1 g' \cdot f' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [f(0) + f(1)] + \left[ g \cdot f' \right]_0^1 - \int_0^1 g \cdot f'' = \frac{1}{2} \cdot [f(0) + f(1)] - \int_0^1 g \cdot f'' . \end{aligned}$$

Le résultat en découle par le théorème de la moyenne 9.6 : on a

$$\int_0^1 g \cdot f'' = f''(\xi) \cdot \int_0^1 g$$

pour un  $\xi \in [0, 1]$  et

$$\int_0^1 g = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x \cdot (1 - x) dx = \left[ \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12} .$$

□

**COROLLAIRE** Soient  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  une fonction deux fois continûment dérivable,

$$M := \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$



et  $k \in \mathbb{N}^*$ . En posant  $h := \frac{b-a}{k}$ , on a alors

$$\int_a^b f = \left( \frac{1}{2} \cdot f(a) + \sum_{l=1}^{k-1} f(a+l \cdot h) + \frac{1}{2} \cdot f(b) \right) \cdot h + R$$

avec

$$|R| \leq \frac{1}{12} \cdot M \cdot (b-a) \cdot h^2 .$$

En effet, on a

$$\int_{a+l \cdot h}^{a+(l+1) \cdot h} f = h \cdot \int_0^1 f(a+h \cdot [l+t]) dt$$

en faisant le changement de variable  $x = a + h \cdot [l+t]$ . Comme

$$\partial_t^2 f(a+h \cdot [l+t]) = h^2 \cdot f''(a+h \cdot [l+t]) ,$$

la règle du trapèze montre que

$$\int_{a+l \cdot h}^{a+(l+1) \cdot h} f = h \cdot \left( \frac{1}{2} [f(a+l \cdot h) + f(a+(l+1) \cdot h)] + R_l \right)$$

avec

$$|R_l| \leq \frac{1}{12} \cdot M \cdot h^2 .$$

Finalement, il vient

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \sum_{l=0}^{k-1} \int_{a+l \cdot h}^{a+(l+1) \cdot h} f = \sum_{l=0}^{k-1} h \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot [f(a+l \cdot h) + f(a+(l+1) \cdot h)] + R_l \right) = \\ &= h \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot f(a) + \sum_{l=1}^{k-1} f(a+l \cdot h) + \frac{1}{2} \cdot f(b) \right) + R , \end{aligned}$$

avec

$$|R| \leq h \cdot \sum_{l=0}^{k-1} |R_l| \leq h \cdot \frac{1}{12} \cdot M \cdot h^2 \cdot k = \frac{1}{12} \cdot M \cdot (b-a) \cdot h^2 .$$

□

## 9.15 Equations différentielles à variables séparées

**DEFINITION** Soient  $\tilde{I}, \tilde{J}$  des intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $\rho : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues. On dit que

$$f' = \sigma \cdot \rho(f)$$

est une *équation différentielle à variables séparées*. Une *solution*  $f$  de cette équation différentielle est une fonction  $f : J \rightarrow \tilde{I}$  dérivable, définie sur un intervalle  $J \subset \tilde{J}$ , et telle que l'on ait

$$f'(t) = \sigma(t) \cdot \rho(f(t)) \quad \text{pour tout } t \in J.$$

Cette dernière formule montre qu'une solution est continûment dérivable.

**REMARQUE 1** Si  $\eta \in \tilde{I}$  est tel que  $\rho(\eta) = 0$ , alors la fonction constante

$$\tilde{J} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \eta$$

est une solution.

Nous sommes essentiellement intéressé aux problèmes avec condition initiale ayant une unique solution, ceux-ci étant les seuls utiles comme modèle de prédiction. En cas d'unicité d'un problème à variables séparées il nous suffit donc d'étudier les solutions à valeurs dans un intervalle  $I \subset \tilde{I}$  tel que  $\rho \neq 0$  sur  $I$ . Nous allons voir que cette hypothèse entraîne effectivement l'unicité, mais attention cela n'implique pas nécessairement l'unicité des solutions à valeurs dans  $\tilde{I}$ . Pour une discussion approfondie voir la remarque et l'exemple 2 ci-dessous. Pour un résultat général d'unicité voir le théorème 12.3.

Soit donc  $I \subset \tilde{I}$  un intervalle tel que  $\rho \neq 0$  dans  $I$ . Etant donné  $\tau \in \tilde{J}$  et  $\xi \in I$ , définissons

$$R : I \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_{\xi}^x \frac{1}{\rho} \quad \text{et} \quad S : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \int_{\tau}^t \sigma.$$

Ce sont des fonctions continûment dérivables. Comme  $R' = \frac{1}{\rho}$  et puisque notre hypothèse entraîne que  $\frac{1}{\rho}$  est soit  $> 0$ , soit  $< 0$  dans  $I$ , la fonction  $R$  est strictement monotone (proposition 8.6.ii), donc possède une fonction réciproque  $\overset{-1}{R} : R(I) \rightarrow I$  continue (cf. théorème 7.11). En outre  $\overset{-1}{R}$  est dérivable de dérivée

$$\left( \overset{-1}{R} \right)' = \frac{1}{R' \circ \overset{-1}{R}} = \rho \circ \overset{-1}{R}$$

(cf. théorème 8.3.ii). Ceci montre que  $\overset{-1}{R}$  est continûment dérivable.

**THEOREME (d'existence et d'unicité)** Soient  $J$  un intervalle de  $\tilde{J}$  tel que  $\tau \in J$  et  $I \subset \tilde{I}$  un intervalle tel que  $\rho \neq 0$  dans  $I$ . Pour que  $f : J \rightarrow I$  soit solution du problème avec

condition initiale

$$f' = \sigma \cdot \rho(f) \quad \text{et} \quad f(\tau) = \xi ,$$

il faut et il suffit que

$$S(J) \subset R(I) \quad \text{et que} \quad f = \overset{-1}{R} \circ S|_J .$$

Prouvons tout d'abord l'unicité, i.e. la nécessité. Pour tout  $s \in J$ , on a

$$\sigma(s) = \frac{f'(s)}{\rho(f(s))} ,$$

donc

$$S(t) = \int_{\tau}^t \sigma(s) ds = \int_{\tau}^t \frac{f'(s)}{\rho(f(s))} ds = \int_{f(\tau)}^{f(t)} \frac{dx}{\rho(x)} = \int_{\xi}^{f(t)} \frac{1}{\rho} = R(f(t)) ,$$

pour tout  $t \in J$ , en ayant fait la substitution  $x = f(t)$ . Ceci montre que  $S(J) \subset R(I)$  et que  $f = R^{-1} \circ S|_J$ .

Quant à l'existence, i.e. la suffisance, il suffit de vérifier. On a

$$f'(t) = (R^{-1})'(S(t)) \cdot S'(t) = \rho(R^{-1}(S(t))) \cdot \sigma(t) = \sigma(t) \cdot \rho(f(t)) \quad \text{pour tout } t \in J ,$$

et

$$f(\tau) = R^{-1}(S(\tau)) = R^{-1}(0) = \xi .$$

□

**REMARQUE 2** Si  $I \subset \tilde{I}$  est un intervalle maximal tel que  $\rho \neq 0$  sur  $I$ , on dit que  $f : J \rightarrow I$  est une *solution maximale* du problème avec condition initiale si  $J$  est le plus grand intervalle contenant  $\tau$  et contenu dans  $S^{-1}(R(I))$ .

Dans ce cas si  $a \in \tilde{J} \setminus J$  est une extrémité de  $J$  et  $\eta := \lim_{J \ni t \rightarrow a} f(t)$  existe dans  $\tilde{I}$ , alors  $\rho(\eta) = 0$ .

En outre  $f$  se raccorde à la solution constante  $\eta$  en une solution et on n'a pas unicité sur  $I \cup (J \cap [a, \infty[)$ , respectivement  $I \cup (J \cap ]-\infty, a])$ , si  $a$  est l'extrémité droite respectivement gauche de  $J$ .

On a  $\eta \in \tilde{I}$ . Si  $\rho(\eta) \neq 0$ , on a nécessairement  $\eta \in I$  par la maximalité de  $I$ . Mais alors la continuité de  $S$  sur  $\tilde{J}$  et  $R$  sur  $I$  entraîne

$$S(a) = \lim_{J \ni t \rightarrow a} S(t) = \lim_{J \ni t \rightarrow a} R(f(t)) = R(\lim_{J \ni t \rightarrow a} f(t)) = R(\eta) ,$$

ce qui montre que  $a \in S^{-1}(R(I))$ . Par la maximalité de  $J$  on devrait avoir  $a \in J$ , ce qui est absurde. La fonction raccordée est (continûment) dérivable en  $a$  puisque

$$\lim_{J \ni t \rightarrow a} f'(t) = \lim_{J \ni t \rightarrow a} \sigma(t) \cdot \rho(f(t)) = \sigma(a) \cdot \rho(\eta) = 0$$

(cf. exercice 8.2.2).

□

Les exemples qui suivent illustrent bien le raccordement d'une solution avec une solution constante. Dans le premier cas ce raccordement n'est pas possible et on a unicité sans restriction. Dans le second cas le raccordement est possible et on n'a pas unicité.

**EXEMPLE 1** Soient  $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ . Nous allons déterminer les solutions du problème avec condition initiale

$$f' = f^2 \quad \text{et} \quad f(\tau) = \xi. \quad (*)$$

On a

$$\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2 \quad \text{et} \quad \sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto 1.$$

Il nous faut tout d'abord considérer les deux cas  $I = ]0, \infty[$  si  $\xi > 0$  ou  $I = ]-\infty, 0[$  si  $\xi < 0$ . Il vient alors

$$R(x) = \int_{\xi}^x \frac{du}{u^2} = \left[ -\frac{1}{y} \right]_{\xi}^x = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x \in I$$

et

$$S(t) = \int_{\tau}^t 1 = t - \tau \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que

$$R(I) = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{I} = \frac{1}{\xi} - I$$

et, pour tout  $y \in \frac{1}{\xi} - I$ , que

$$R^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{1}{\xi} - y}.$$

D'autre part

$$S^{-1}(R(I)) = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t - \tau \in \frac{1}{\xi} - I \right\} = \tau + \frac{1}{\xi} - I$$

et, pour tout  $t \in \tau + \frac{1}{\xi} - I$ , il vient

$$R^{-1}(S(t)) = \frac{1}{\tau + \frac{1}{\xi} - t}.$$

Le théorème montre alors que l'unique solution (maximale) de (\*) à valeurs dans  $I$  est

$$\left] -\infty, \tau + \frac{1}{\xi} \right[ \longrightarrow ]0, \infty[ : t \longmapsto \frac{1}{\tau + \frac{1}{\xi} - t},$$

resp.

$$\left] \tau + \frac{1}{\xi}, \infty \right[ \longrightarrow ]-\infty, 0[ : t \longmapsto \frac{1}{\tau + \frac{1}{\xi} - t}.$$

Sans utiliser le théorème, nous pouvons argumenter de la manière suivante. Si  $f : J \longrightarrow I$  est une solution de (\*) telle que  $f(t) \neq 0$ , pour tout  $t \in J$ , i.e.  $I = ]0, \infty[$  si  $\xi > 0$  ou  $I = ]-\infty, 0[$  si  $\xi < 0$ , nous avons

$$1 = \frac{f'(t)}{f^2(t)},$$

donc

$$t - \tau = \int_{\tau}^t 1 = \int_{\tau}^t \frac{f'(s)}{f^2(s)} ds = \int_{f(\tau)}^{f(t)} \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{\xi}^{f(t)} = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{f(t)},$$

i.e.

$$f(t) = \frac{1}{\tau + \frac{1}{\xi} - t} .$$

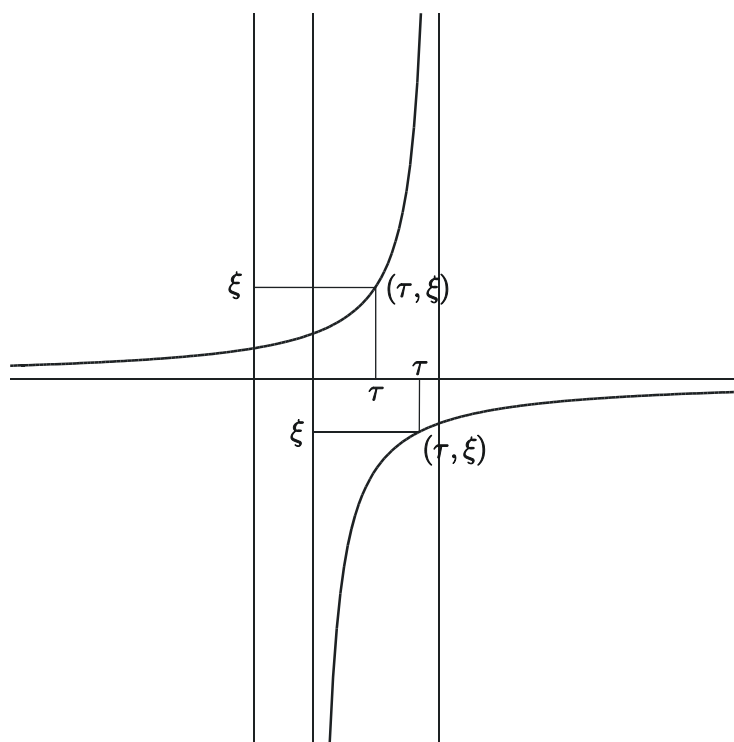
Mais  $f(t) \in I$  est équivalent à

$$\frac{1}{\tau + \frac{1}{\xi} - t} \in I ,$$

donc à

$$t \in \tau + \frac{1}{\xi} - \frac{1}{I} = \tau + \frac{1}{\xi} - I .$$

Ceci montre qu'une solution maximale de (\*) à valeur dans  $I$  est définie sur  $J = \tau + \frac{1}{\xi} - I$  ; nous retrouvons évidemment le même résultat qu'avant !



Considérons maintenant le cas  $\xi = 0$  . Il est clair que 0 est une solution de (\*) . Nous allons montrer que c'est la seule.

En effet, si  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de (\*) telle que  $f \neq 0$  , soit  $t_0 \in J$  tel que  $f(t_0) \neq 0$  . Supposons que  $\tau < t_0$  , le cas  $\tau > t_0$  se traite de manière analogue, et définissons

$$s := \sup \{ t \in [\tau, t_0] \mid f(t) = 0 \} \in [\tau, t_0] \subset J .$$

Puisqu'il existe une suite  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergente vers  $s$  telle que  $f(t_k) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  , on a  $f(s) = 0$  par continuité. Ainsi  $s \neq t_0$  et, par construction, on a  $f \neq 0$  dans  $]s, t_0]$  . Par ce qui précède, il vient

$$f(t) = \frac{1}{t_0 + \frac{1}{f(t_0)} - t} \quad \text{pour tout } t \in ]s, t_0] .$$

Par continuité, on obtient

$$0 = f(s) = \lim_{t \rightarrow s^+} \frac{1}{t_0 + \frac{1}{f(t_0)} - t} = \frac{1}{t_0 + \frac{1}{f(t_0)} - s} \neq 0,$$

ce qui est absurde. □

**REMARQUE 3** Nous obtiendrons plus tard (cf. 12.3) un théorème d'unicité valable pour une grande classe de problèmes avec condition initiale et permettant d'éviter une discussion du type ci-dessus. Celui que nous venons d'étudier en fait partie, mais pas celui de l'exemple 2 qui suit.

**EXEMPLE 2** Soient  $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ . Considérons le problème avec condition initiale

$$f' = \sqrt[3]{f^2} = |f|^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad f(\tau) = \xi.$$

On a  $\rho = |\text{id}|^{\frac{2}{3}}$  et  $\sigma = 1$ , donc  $I = ]0, \infty[$  si  $\xi > 0$  ou  $I = ]-\infty, 0[$  si  $\xi < 0$ ,

$$R : I \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 3 \cdot \left[ \text{signum} \cdot |\text{id}|^{\frac{1}{3}} - \text{signum} \xi \cdot |\xi|^{\frac{1}{3}} \right]$$

et

$$S = \text{id} - \tau.$$

Il vient alors

$$R(I) = 3 \cdot \left[ \text{signum} \xi \cdot ]0, \infty[ - \text{signum} \xi \cdot |\xi|^{\frac{1}{3}} \right] = \begin{cases} ]-3 \cdot \xi^{\frac{1}{3}}, \infty[ & \text{si } \xi > 0 \\ ]-\infty, 3 \cdot |\xi|^{\frac{1}{3}}[ & \text{si } \xi < 0 \end{cases},$$

donc

$$S^{-1}(R(I)) = \begin{cases} ]\tau - 3 \cdot \xi^{\frac{1}{3}}, \infty[ & \text{si } \xi > 0 \\ ]-\infty, \tau + 3 \cdot |\xi|^{\frac{1}{3}}[ & \text{si } \xi < 0 \end{cases}.$$

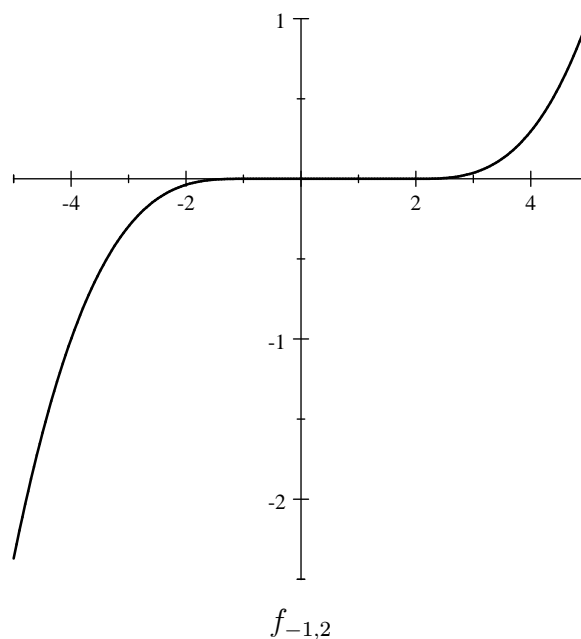
La solution maximale à valeur dans  $I$  est donc définie sur  $J := S^{-1}(R(I))$  et on montre facilement que

$$f(t) = R^{-1}(S(t)) = \left( \frac{t - \tau}{3} + \text{signum} \xi \cdot |\xi|^{\frac{1}{3}} \right)^3 \quad \text{pour tout } t \in J.$$

Finalement on peut montrer que toute solution définie sur  $\mathbb{R}$  est de la forme

$$f_{a,b}(t) = \begin{cases} \left( \frac{t-a}{3} \right)^3 & t \leq a \\ 0 & \text{si } t \in ]a, b[ \\ \left( \frac{t-b}{3} \right)^3 & b \leq t \end{cases}$$

avec  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  tels que  $a \leq b$ .



**EXERCICE 1** Déterminer les solutions maximales du problème avec condition initiale

$$f' = \cos \cdot e^f \quad \text{et} \quad f(0) = \xi$$

pour  $\xi = -\ln 2, 0, \ln 2$ .

**EXERCICE 2** Déterminer la solution maximale du problème avec condition initiale

$$f' = 1 + f^2 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 .$$

**EXERCICE 3** Déterminer la solution maximale du problème avec condition initiale

$$(f' \cdot \text{id} - f) \cdot \exp\left(\frac{f}{\text{id}}\right) = \text{id} \quad , \quad f(1) = 0 .$$

On fera l'Ansatz  $f = g \cdot \text{id}$ .

## 9.16 Lemme de Riemann-Lebesgue

**LEMME** Soit  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  une fonction continûment dérivable et posons, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\widehat{f}(k) := \int_a^b e^{-2\pi i \cdot kx} \cdot f(x) \, dx .$$

Alors  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(k) = 0$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ , en intégrant par partie on obtient

$$\widehat{f}(k) = \left[ f(x) \cdot \frac{1}{-2\pi i \cdot k} \cdot e^{-2\pi i \cdot kx} \right]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot \frac{1}{-2\pi i \cdot k} \cdot e^{2\pi i \cdot kx} \, dx .$$

Puisque  $f$  et  $f'$  sont continues, donc aussi  $|f|$  et  $|f'|$ , le théorème de Weierstrass 7.10 montre qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$|f|, |f'| \leq M .$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}(k) \right| &\leq \left| \left[ f(x) \cdot \frac{1}{-2\pi i \cdot k} \cdot e^{-2\pi i \cdot kx} \right]_a^b \right| + \left| \int_a^b f'(x) \cdot \frac{1}{2\pi i \cdot k} \cdot e^{-2\pi i \cdot kx} \, dx \right| \leq \\ &\leq \frac{2 \cdot M}{2\pi |k|} + \int_a^b \frac{M}{2\pi |k|} = \frac{(2 + b - a) \cdot M}{2\pi |k|} , \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**REMARQUE** Nous verrons dans le cours d'Analyse III que l'on peut considérablement améliorer ce résultat.

**APPLICATION** Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on a

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \cdot lx}}{l} = -\ln(2 \cdot \sin \pi x) + \pi i \cdot \left( \frac{1}{2} - x \right) .$$

En particulier

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \cdot lx}{l} = -\ln(2 \cdot \sin \pi x) \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi \cdot lx}{l} = \pi \cdot \left( \frac{1}{2} - x \right) .$$

En effet, on a

$$2\pi i \cdot \int_{\frac{1}{2}}^x e^{2\pi i \cdot ly} \, dy = \left[ \frac{e^{2\pi i \cdot ly}}{l} \right]_{\frac{1}{2}}^x = \frac{e^{2\pi i \cdot lx}}{l} - \frac{(-1)^l}{l} ,$$



donc

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^k \frac{e^{2\pi i \cdot l x}}{l} &= \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^l}{l} + 2\pi i \cdot \int_{\frac{1}{2}}^x \left( \sum_{l=1}^k e^{2\pi i \cdot l y} \right) dy = \\ &= \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^l}{l} + 2\pi i \cdot \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{e^{2\pi i \cdot (k+1)y} - e^{2\pi i \cdot y}}{e^{2\pi i \cdot y} - 1} dy = \\ &= \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^l}{l} - 2\pi i \cdot \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{e^{2\pi i \cdot y}}{e^{2\pi i \cdot y} - 1} dy + 2\pi i \cdot \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{e^{2\pi i \cdot y} - 1} \cdot e^{2\pi i \cdot (k+1)y} dy , \end{aligned}$$

Mais par l'exemple 8.13.3, on a

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} = -\ln 2$$

et

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{e^{2\pi i \cdot y}}{e^{2\pi i \cdot y} - 1} dy &= \pi \cdot \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{e^{\pi i \cdot y}}{\frac{1}{2i}(e^{\pi i \cdot y} - e^{-\pi i \cdot y})} dy = \pi \cdot \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\cos \pi y + i \cdot \sin \pi y}{\sin \pi y} dy = \\ &= \left[ \ln(\sin \pi y) + i\pi \cdot \text{id} \right]_{\frac{1}{2}}^x = \ln(\sin \pi x) + \pi i \cdot \left( x - \frac{1}{2} \right) , \end{aligned}$$

d'où le résultat par le lemme de Riemann-Lebesgue. En effet l'intervalle fermé d'extrémités  $\frac{1}{2}$  et  $x$  est contenu dans  $]0, 1[$ , donc

$$y \longmapsto \frac{1}{1 - e^{2\pi i \cdot y}}$$

$y$  est une fonction continûment dérivable. \_\_\_\_\_  $\square$

## 9.17 Intégrales impropres

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Si  $f$  se prolonge par continuité à  $[a, b]$ , en désignant par  $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  son prolongement, on définit

$$\int_a^b f := \int_a^b \tilde{f} .$$

On a

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f ,$$

car l'intégrale indéfinie  $\int_a^\infty \tilde{f}$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ . Ceci nous conduit à poser la

**DEFINITION** Soient  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $-\infty < a < b \leq \infty$  et  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue, nous dirons que l'intégrale (impropre)  $\int_a^b f$  est *convergente*, si  $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f$  existe dans  $\mathbb{C}$  et on pose

$$\int_a^b f := \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f .$$

Dans le cas contraire on dit que cette intégrale est *divergente*. On procède de même pour un intervalle de la forme  $]a, b]$  avec  $-\infty \leq a < b < \infty$ .

Pour un intervalle de la forme  $]a, b[$ , nous dirons que  $\int_a^b f$  est convergente s'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que les intégrales  $\int_a^c f$  et  $\int_c^b f$  soient convergentes et on pose

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f .$$

**REMARQUE** La dernière définition est bien posée, car cela ne dépend pas du point  $c$  choisi d'après le lemme 9.8. On outre il est équivalent que les limites successives

$$\lim_{x \rightarrow a+} \lim_{y \rightarrow b-} \int_x^y f \quad \text{ou bien} \quad \lim_{y \rightarrow b-} \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^y f$$

existent et on a

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a+} \lim_{y \rightarrow b-} \int_x^y f = \lim_{y \rightarrow b-} \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^y f .$$

**PROPOSITION** Si  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction continue, alors l'intégrale  $\int_a^b f$  est convergente si, et seulement si,

$$\sup_{x < b} \int_a^x f < \infty .$$

C'est immédiat par l'exercice 7.9.4, car la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

est croissante. □

**EXEMPLE 1** Soit  $s \in \mathbb{R}$ . L'intégrale  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$  est convergente si, et seulement si,  $s > 1$ . Dans ce cas on a

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}.$$

En effet, pour  $s > 1$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{dy}{y^s} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{y^{s-1}} \right]_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-s} \cdot \left( \frac{1}{x^{s-1}} - 1 \right) = \frac{1}{s-1}.$$

Si  $s = 1$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{dy}{y} = \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln y]_1^x = \infty,$$

tandis que pour  $s < 1$ , il vient

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{dy}{y^s} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-s} \cdot \left( \frac{1}{x^{s-1}} - 1 \right) = \infty.$$

□

**EXEMPLE 2** Soit  $s \in \mathbb{R}$ . L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$  est convergente si, et seulement si,  $s < 1$ . Dans ce cas on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}.$$

Cela se démontre de la même manière.

**EXEMPLE 3** L'intégrale  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  est convergente et on a

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

En effet

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \lim_{y \rightarrow 1^-} \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[ \arcsin t \right]_x^0 + \lim_{y \rightarrow 1^-} \left[ \arcsin t \right]_0^y = \pi. \end{aligned}$$

□

**EXEMPLE 4** L'intégrale  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$  est convergente et on a

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

En effet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_x^y \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \left[ \arctan t \right]_x^y = \pi .$$

□

**COROLLAIRE (Comparaison série-intégrale)** Soit  $f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue décroissante. La série  $\sum_{l=1}^{\infty} f(l)$  est convergente si, et seulement si, l'intégrale  $\int_1^{\infty} f$  est convergente.

Pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [l, l+1]$ , on a

$$f(l+1) \leq f(x) \leq f(l) ,$$

donc

$$f(l+1) \leq \int_l^{l+1} f \leq f(l) ,$$

et par suite

$$\sum_{l=2}^k f(l) \leq \int_1^k f \leq \sum_{l=1}^k f(l) ,$$

d'où le résultat. □

**EXEMPLE 5** Pour tout  $s > 1$ , la série  $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}$  est convergente. Nous avons déjà traité cette série de manière élémentaire dans l'exemple 6.2.2. La fonction

$$\zeta : s \mapsto \zeta(s) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} : ]1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

s'appelle *fonction zéta de Riemann*.

C'est immédiat grâce à l'exemple 1 ci-dessus. Nous en avons déjà donné une démonstration dans l'exemple 6.2.2. □

**THEOREME (Critère de la majorante)** Soient  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  et  $g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  des fonctions continues telles que

$$|f| \leq g .$$

Si l'intégrale  $\int_a^b g$  est convergente, il en est de même des intégrales  $\int_a^b f$  et  $\int_a^b |f|$ , et on a

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b g .$$

Pour tout  $x, y \in [a, b[$  tels que  $x \leq y$ , on a

$$\left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f| \leq \int_x^y g = \int_a^y g - \int_a^x g .$$

Puisque l'intégrale  $\int_a^b g$  est convergente, pour toute suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $[a, b[$  convergente vers  $b$ , la suite  $(\int_a^{x_k} g)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Les inégalités ci-dessus montre qu'il en est de même de  $(\int_a^{x_k} f)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\int_a^{x_k} |f|)_{k \in \mathbb{N}}$ , et que la limite de ces suites ne dépend pas de la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

Ceci prouve que les intégrales  $\int_a^b f$  et  $\int_a^b |f|$  sont convergentes. Il suffit alors de passer à la limite dans les inégalités en remplaçant  $x$  par  $a$  et  $y$  par  $x_k$ . □

**EXERCICE 1** Déterminer si les séries

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \ln l} \quad \text{et} \quad \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \ln^2 l}$$

sont convergentes ou divergentes.

**EXERCICE 2** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continûment dérivable. Montrer :

- (a) Si  $\int_0^{\infty} f \cdot f'$  est convergente, alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existe dans  $\mathbb{R}_+$ .
- (b) Si  $\int_0^{\infty} f$  est convergente et  $f'$  bornée, alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .
- (c) Est-ce qu'il existe une fonction continue  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $\int_0^{\infty} f$  soit convergente, mais que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  soit faux ?
- (d) Peut-on étendre les assertions (i) et (ii) aux fonctions  $f$  à valeurs complexes ?

**EXERCICE 3** Montrer en intégrant par partie que l'intégrale  $\int_0^{\infty} \frac{\sin}{\text{id}}$  est convergente.

**EXERCICE 4** Parmi les intégrales impropres qui suivent déterminer lesquelles sont convergentes :

(a) 
$$\int_{-1}^1 \frac{t^3 e^t dt}{\sqrt{1-t^2}} .$$

(b) 
$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^5} .$$

(c) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t^2) dt .$$

(d) 
$$\int_0^{\infty} \frac{(1 + \ln t) dt}{\sqrt{t^4 + t + 1}} .$$

## 9.18 Formule de Stirling

**DEFINITION** Soient  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$  deux suites de  $\mathbb{C}^*$ . Nous dirons qu'elles sont *asymptotiquement équivalentes* si

$$\lim_k \frac{z_k}{w_k} = 1 \quad , \text{ i.e. } \quad \lim_k \frac{w_k - z_k}{w_k} = 0 \quad ,$$

et on écrit  $z_k \sim w_k$  (lorsque  $k$  tend vers l'infini).

Cela signifie que l'erreur relative faite en approximant  $z_k$  par  $w_k$  tend vers 0, donc que le nombre de décimale exacte augmente, lorsque  $k$  tend vers l'infini (cf. proposition 5.7).

**EXEMPLE (Formule de Stirling)** Lorsque  $k$  tend vers l'infini, on a

$$k! \sim \sqrt{2\pi \cdot k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k .$$

Plus précisément, l'erreur relative satisfait à

$$0 \leq \frac{k! - \sqrt{2\pi \cdot k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k}{\sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k} \leq \exp\left(\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k-1}\right) - 1 .$$

En particulier, on a

$$\sqrt{2\pi \cdot k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k \leq k! \leq \sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \exp\left(\frac{1}{12 \cdot (k-1)}\right) .$$

Remarquons tout d'abord que

$$\ln(k!) = \sum_{l=1}^k \ln l .$$

Par la règle du trapèze 9.14, pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\int_l^{l+1} \ln = \int_0^1 \ln(x+l) dx = \frac{1}{2} \cdot [\ln l + \ln(l+1)] + R_l$$

avec

$$R_l = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{(\xi_l + l)^2} \in \left[0, \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{l^2}\right]$$

pour un  $\xi_l \in [0, 1]$ . La série à termes positifs  $\sum_{l=1}^{\infty} R_l$  est donc convergente. Il vient alors

$$\int_1^k \ln = \sum_{l=1}^{k-1} \int_l^{l+1} \ln = \sum_{l=1}^k \ln l - \frac{1}{2} \cdot \ln k + \sum_{l=1}^k R_l .$$

Mais comme

$$\int_1^k \ln = \left[\text{id} \cdot (\ln - 1)\right]_1^k = k \cdot \ln k - k + 1 ,$$

on en déduit

$$\ln(k!) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln k - k + 1 - \sum_{l=1}^k R_l ,$$

et par suite

$$k! = c_k \cdot \sqrt{k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k ,$$

en ayant posé

$$c_k := \exp\left(1 - \sum_{l=1}^k R_l\right) .$$

Puisque la série  $\sum_{l=1}^k R_l$  est convergente, la suite  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  possède une limite par la continuité de  $\exp$ . Soit

$$c := \lim_k c_k = \exp\left(1 - \sum_{l=1}^{\infty} R_l\right) .$$

On a en outre

$$\frac{c_k^2}{c_{2k}} = \frac{(k!)^2 \cdot \sqrt{2k} \cdot \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{(2k)! \cdot k \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^{2k}} = \sqrt{\frac{2}{k}} \cdot 2^{2k} \cdot \frac{(k!)^2}{(2k)!} ,$$

donc

$$\begin{aligned} c &= \lim_k \frac{c_k^2}{c_{2k}} = \lim_k \left( \sqrt{\frac{2}{k}} \cdot 2^{2k} \cdot \frac{(k!)^2}{(2k)!} \right) = \lim_k \left( \frac{2 \cdot (2k+1)}{k} \cdot \frac{(2^k \cdot k!)^4}{(2k)! \cdot (2k+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \cdot \left( \lim_k \frac{(2^k \cdot k!)^4}{(2k)! \cdot (2k+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

par la formule de Wallis 9.13. Ainsi

$$\lim_k \frac{k!}{\sqrt{2\pi} \cdot k \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k} = \lim_k \frac{c_k}{\sqrt{2\pi}} = 1 ,$$

ce qui prouve la première assertion. Plus précisément, l'erreur relative est

$$\frac{k! - \sqrt{2\pi} \cdot k \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k}{\sqrt{2\pi} \cdot k \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k} = \frac{c_k}{c} - 1 = \exp\left(\sum_{l=k}^{\infty} R_l\right) - 1 ,$$

et comme on a

$$0 \leq \sum_{l=k}^{\infty} R_l \leq \frac{1}{12} \cdot \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{l^2} \leq \frac{1}{12} \cdot \int_{k-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x}\right]_{k-1}^{\infty} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k-1} ,$$

on obtient le résultat. □

### EXERCICE

(a) Si  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont des suites de nombres positifs telles que  $a_k \sim b_k$ , alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot c_n < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot c_n < \infty .$$

(b) Montrer en utilisant la formule de Stirling que  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k \cdot (k!)^2 \cdot (2k+1)}$  est convergente.