Chapitre 10

ESPACES NORMÉS

ET

TOPOLOGIE

Dans tout ce chapitre on désigne par (X, d) un espace métrique.

Version du 24 janvier 2005

10.1 Espaces normés

La plupart des espaces métriques que nous allons rencontrer seront des parties d'espaces vectoriels.

DEFINITION 1 Soient F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et

$$\|\cdot\| : F \longrightarrow \mathbb{R}_+ : f \longmapsto \|f\|$$

une fonction positive. On dit que $\|\cdot\|$ est une *norme* sur F et que $(F, \|\cdot\|)$, ou plus simplement F , si aucune confusion n'est à craindre, est un *espace normé* si, pour tout $f, g \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

(a) Homogénéité

$$\|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$$

(b) Inégalité triangulaire

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

(c) Séparation

$$\|f\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \ .$$

PROPOSITION *Si* $(F, \|\cdot\|)$ *est un espace normé, alors*

$$(f, g) \longmapsto \|f - g\| : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une métrique sur F *et on a*

$$\Big| \|f\| - \|g\| \Big| \leqslant \|f - g\| \ .$$

En particulier

$$\|\cdot\| : F \longrightarrow \mathbb{R}_+ : f \longmapsto \|f\|$$

est une fonction continue sur F *.*

C'est immédiat ; en fait c'est la même démonstration que celle de l'exemple 5.1.1, montrant que $\mathbb{C}$ est un espace métrique. L'inégalité découle de l'inégalité triangulaire comme en 4.14. La démonstration de la continuité de $\|\cdot\|$ est analogue à celle de la continuité de $|\cdot|$ (théorèmes 5.5.ii, p. 106, et 7.2, p. 175). $\square$

REMARQUE 1 Nous considérerons toujours un espace normé comme un espace métrique en le munissant de la métrique $(f, g) \longmapsto \|f - g\|$. Une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de F est donc convergente dans F s'il existe $f \in F$ tel que $\lim_k \|f_k - f\| = 0$.

REMARQUE 2 Pour tout $f \in F$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on a

$$B(f, r, \|\cdot\|) = f + r \cdot B(0, 1, \|\cdot\|) \ .$$

Si $r = 0$, on a $B(f, 0, \|\cdot\|) = \{f\}$ et $B(0, 0, \|\cdot\|) = \{0\}$, d'où le résultat. Si $r > 0$, alors

$$B(f, r, \|\cdot\|) = \{g \in F \mid \|g - f\| \leqslant r\} =$$

$$= \{f + r \cdot h \mid h \in F \text{ et } \|h\| \leqslant 1\} = f + r \cdot B(0, 1, \|\cdot\|) \ ,$$

puisque

$$g = f + r \cdot \frac{g - f}{r} \ .$$

□

DEFINITION 2 On dit qu'un espace normé complet (cf. définition 6.3.2) est un *espace de Banach* .

EXEMPLE $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach.

Cela découle du corollaire 5.12. □

10.2 Norme p-ième sur $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons qu'une suite finie $z = (z_j)_{j=1,\ldots,n}$ de $\mathbb{K}^n$ peut être considérée comme une fonction $\{1,\ldots,n\} \longrightarrow \mathbb{K} : j \longmapsto z_j$. En particulier pour $z, w \in \mathbb{K}^n$, le produit des fonctions correspondantes est

$$z \cdot w := (z_j \cdot w_j)_{j=1,\ldots,n} \ .$$

Il ne faut pas le confondre avec le produit scalaire (cf. la remarque ci-dessous).

Pour tout $p \in [1,\infty[$, on pose

$$|z|_p := \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Si $p = 2$, on écrit simplement

$$|z| := |z|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Pour $p = \infty$, on pose

$$|z|_\infty := \max_{j=1,\ldots,n} |z_j| \ .$$

Pour tout $p \in [1,\infty]$, $z \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a évidemment

$$|z|_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0$$

et

$$|\alpha \cdot z|_p = |\alpha| \cdot |z|_p \ .$$

THEOREME *Soient $p, q \in [1,\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i.e. $q = \frac{p}{p-1}$.*

(i) ***Inégalité de Hölder*** *Pour tout $z, w \in \mathbb{K}^n$, on a*

$$|z \cdot w|_1 \leqslant |z|_p \cdot |w|_q \ .$$

(ii) ***Inégalité de Minkowski*** *Pour tout $z, w \in \mathbb{K}^n$, on a*

$$|z + w|_p \leqslant |z|_p + |w|_p \ .$$

Démonstration de (i) Si $p \in]1,\infty[$, donc $q \in]1,\infty[$, respectivement $p = \infty$, donc $q = 1$, cela signifie que

$$\left|\sum_{j=1}^n z_j \cdot w_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^n |z_j \cdot w_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |w_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \ ,$$

respectivement

$$\left|\sum_{j=1}^n z_j \cdot w_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^n |z_j \cdot w_j| \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} |z_j| \cdot \left(\sum_{j=1}^n |w_j|\right) \ .$$

Ces inégalités sont triviales si $p = \infty$ ou $z = 0$ ou $w = 0$. Nous pouvons donc supposer que $p \in \left]1, \infty\right[$ et $|z|_p , |w|_q \neq 0$. En utilisant l'application 8.11, on obtient

$$\frac{|z_j \cdot w_j|}{|z|_p \cdot |w|_q} = \left(\frac{|z_j|^p}{|z|_p^p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|w_j|^q}{|w|_q^q}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{|z_j|^p}{|z|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|w_j|^q}{|w|_q^q} \ .$$

En sommant il vient

$$\frac{1}{|z|_p \cdot |w|_q} \cdot \sum_{j=1}^n |z_j \cdot w_j| \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{|z|_p^p} \cdot \sum_{j=1}^n |z_j|^p + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{|w|_q^q} \cdot \sum_{j=1}^n |w_j|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

Démonstration de (ii) Le cas $p = 1, \infty$ sont immédiats. Soient donc $p \in \left]1, \infty\right[$ et $q := \frac{p}{p-1}$. Définissons $v \in \mathbb{K}^n$ par $v_j := |z_j + w_j|^{p-1}$. Il vient d'une part

$$|v|_q^q = \sum_{j=1}^n |v_j|^q = \sum_{j=1}^n |z_j + w_j|^{(p-1)\cdot q} = \sum_{j=1}^n |z_j + w_j|^p = |z + w|_p^p$$

et d'autre part

$$|z + w|_p^p = \sum_{j=1}^n |z_j + w_j| \cdot |z_j + w_j|^{p-1} = \sum_{j=1}^n |z_j + w_j| \cdot |v_j| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n |z_j \cdot v_j| + \sum_{j=1}^n |w_j \cdot v_j| = |z \cdot v|_1 + |w \cdot v|_1 \ .$$

Utilisant l'inégalité de Hölder, on en déduit

$$|z + w|_p^p \leqslant |z \cdot v|_1 + |w \cdot v|_1 \leqslant |z|_p \cdot |v|_q + |w|_p \cdot |v|_q =$$

$$= \left(|z|_p + |w|_p\right) \cdot |v|_q = \left(|z|_p + |w|_p\right) \cdot |z + w|_p^{\frac{p}{q}} \ ,$$

donc

$$|z + w|_p = |z + w|_p^{p - \frac{p}{q}} \leqslant |z|_p + |w|_p \ .$$

□

REMARQUE On définit un produit scalaire dans $\mathbb{K}^n$ par

$$(z|\, w) := \sum_{j=1}^n \overline{z_j} \cdot w_j \ .$$

On a donc

$$(z|\, z) = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = |z|^2 \ .$$

Si $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder s'écrit

$$|(z|\, w)| \leqslant |z \cdot w|_1 \leqslant |z| \cdot |w| \ .$$

C'est l' *inégalité de Cauchy-Schwarz* .

A la place de $(x|\, y)$ on écrit souvent

$$x \bullet y \ ,$$

si $x, y \in \mathbb{R}^n$. Attention, il ne faut pas confondre $x \bullet y$ et $x \cdot y$!

EXEMPLE Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, on a

$$|a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a| \leqslant |a|^2 + |b|^2 + |c|^2$$

et

$$|a \cdot b + c \cdot d + d \cdot a| \leqslant \sqrt{2\,|a|^2 + |c|^2} \cdot \sqrt{|b|^2 + 2\,|d|^2} \ .$$

Il suffit de considérer les triples

$$z := (a, b, c) \quad , \quad w := (b, c, a)$$

et

$$z := (a, c, a) \quad , \quad w := (b, d, d) \ ,$$

et appliquer l'inégalité de Hölder. □

COROLLAIRE *Pour tout $p \in [1, \infty]$, la fonction $|\cdot|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.*

Nous montrerons que $\left(\mathbb{K}^n, |\cdot|_p\right)$ est un espace de Banach (corollaire 10.4 et proposition 11.6).

10.3 Convergence ponctuelle

DEFINITION Soient X un ensemble, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^X$ une suite de fonctions $f_k : X \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge ponctuellement vers* f si l'on a

$$f(x) = \lim_k f(x) \quad \text{pour tout } x \in X \ .$$

On écrit

$$f = \lim_k f_k \quad \text{ponctuellement sur } X \ .$$

EXEMPLE 1 Considérons la suite de fonctions $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$. On a

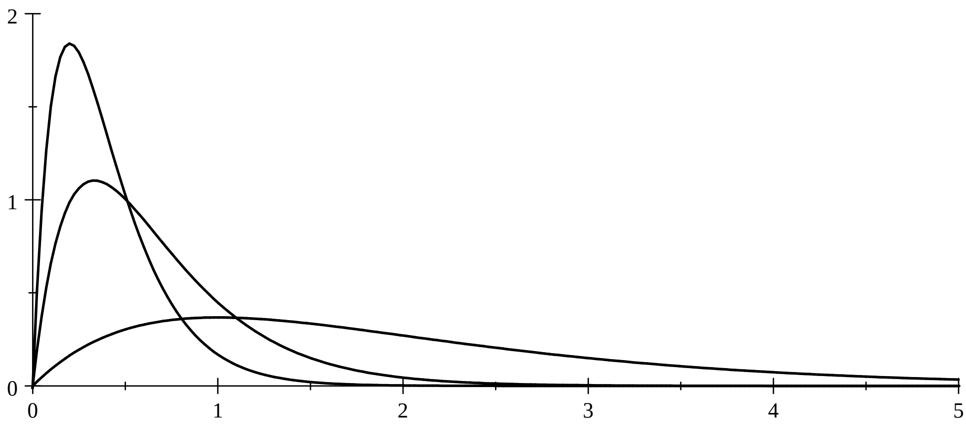
$$\lim_k x^k = \begin{cases} 0 & \quad x \in [0,1[\\ & \text{si} \\ 1 & \quad x = 1 \end{cases} \ .$$

Ainsi

$$1_{\{1\}} = \lim_k \mathrm{id}^k \quad \text{ponctuellement sur } [0,1] \ .$$

Remarquons que les fonctions id^k sont continues, mais que $1_{\{1\}}$ ne l'est pas.

EXEMPLE 2 Considérons la suite de fonctions $\left(k^2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{-k\cdot\mathrm{id}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.



$k = 1, 3, 5$

On a

$$\lim_k k^2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{-k\cdot\mathrm{id}} = 0 \quad \text{ponctuellement sur } [0,1] \ .$$

D'autre part

$$\int_0^1 k^2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{-k\cdot\mathrm{id}} = \left[-\left(k\cdot\mathrm{id}+1\right)\cdot e^{-k\cdot\mathrm{id}}\right]_0^1 = 1 - (k+1)\cdot e^{-k} \ ,$$

donc

$$\lim_k \int_0^1 k^2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{-k\cdot \mathrm{id}} \neq 0 = \int_0^1 \lim_k k^2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{-k\cdot \mathrm{id}} \ .$$

REMARQUE Ces deux exemples montrent que la convergence ponctuelle d'une suite ne préserve pas la continuité et ne commute pas avec l'intégrale de Riemann. Ceci nous conduit à étudier une notion de convergence beaucoup plus forte. Nous allons introduire une norme mesurant la grandeur d'une fonction. La distance entre deux fonctions f et g est alors la norme de leur différence $f - g$. Remarquons que l'on peut définir beaucoup de normes différentes, chacunes étant adaptée à l'étude de certaines propriétés des fonctions. Nous allons commençer par étudier celle qui est la plus appropriée pour les questions de continuité.

10.4 Norme uniforme

DEFINITION 1 Soit X un ensemble. Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, on pose

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\infty,X} := \sup_{x\in X} |f(x)| \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

On désigne par $\ell^\infty(X)$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $\|f\|_\infty < \infty$.

LEMME *Pour tout $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a*

(i)
$$|f| \leqslant \|f\|_\infty \ .$$

(ii)
$$\|f\|_\infty < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est bornée} \ .$$

(iii)
$$\|\alpha \cdot f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty \ .$$

(iv)
$$\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \ .$$

(v)
$$\|f\|_\infty = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \ .$$

(vi)
$$\|f \cdot g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty \ .$$

(vii)
$$|f| \leqslant |g| \quad \Longrightarrow \quad \|f\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty \ .$$

Les démonstrations sont immédiates. Par exemple, pour la deuxième, on peut écrire

$$\|\alpha \cdot f\|_\infty = \sup_{x\in X} |(\alpha \cdot f)(x)| = \sup_{x\in X} |\alpha| \cdot |f(x)| = |\alpha| \cdot \sup_{x\in X} |f(x)| = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty \ .$$

Quant à la troisième, pour tout $x \in X$, il vient

$$|(f+g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \ ,$$

d'où le résultat en prenant le supremum. □

PROPOSITION *$\ell^\infty(X)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^X$ et*

$$\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : f \longmapsto \|f\|_\infty$$

*est une norme, dite **norme uniforme** . Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $\ell^\infty(X)$, alors cette suite converge ponctuellement.*

La première partie découle immédiatement du lemme. Quant à la seconde, posons $f := \lim_k f_k \in \ell^\infty(X)$. Pour tout $x \in X$, on a

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant \|f_k - f\|_\infty \ ;$$

comme $\lim_k \|f_k - f\|_\infty = 0$, on en déduit que $f(x) = \lim_k f_k(x)$. □

DEFINITION 2 Une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\ell^\infty(X)$ convergente vers $f \in \ell^\infty(X)$ est dite *uniformément convergente* . On écrit

$$f = \lim_k f_k \quad \text{uniformément sur } X \ .$$

REMARQUE Répétons les propriétés qui lui sont équivalentes :

$$\lim_k \|f_k - f\|_\infty = 0 \ ,$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ (k \geqslant N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|f_k - f\|_\infty \leqslant \varepsilon) \ ,$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ \ (k \geqslant N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon) \ .$$

Cette dernière propriété s'interprète géométriquement de la manière suivante : si l'on considère le tube de rayon ε dont l'âme est le graphe de f , i.e. l'ensemble

$$T_{f,\varepsilon} := \{(x,y) \in X \times \mathbb{K} \mid \ |y - f(x)| \leqslant \varepsilon\} \ ,$$

alors

$$\operatorname{Gr} f_k \subset T_{f,\varepsilon} \ .$$

Par contre

$$f = \lim_k f_k \quad \text{ponctuellement sur } X$$

si, et seulement si,

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ (k \geqslant N_{x,\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad |f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon) \ .$$

Ceci explique bien le terme de convergence uniforme : le choix de N dépend de ε , mais est uniforme en x au contraire de la convergence ponctuelle.

EXEMPLE 1 Une suite ponctuellement convergente ne converge pas nécessairement uniformément comme le montre les exemples 13.3. On a

$$\left(\operatorname{id}^k - 1_{\{1\}}\right)(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^k & & x \in [0,1[\\ & \text{si} & \\ 0 & & x = 1 \end{array} \right. ,$$

donc

$$\left\|\operatorname{id}^k - 1_{\{1\}}\right\|_{\infty,[0,1]} = 1 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

D'autre part

$$\left\|k^2 \cdot \operatorname{id} \cdot e^{-k \cdot \operatorname{id}}\right\|_{\infty,[0,1]} = \frac{k}{e} \ .$$

En effet, on a

$$\left(k^2 \cdot \operatorname{id} \cdot e^{-k\cdot\operatorname{id}}\right)'(x) = k^2 \cdot e^{-k\cdot x} - k^3 \cdot x \cdot e^{-k \cdot x} = 0$$

si, et seulement si, $x = \frac{1}{k}$, ce qui montre que $k^2 \cdot \operatorname{id} \cdot e^{-k\cdot\operatorname{id}}$ atteint son maximum en $\frac{1}{k}$, dans $\mathbb{R}$ comme dans $[0,1]$, puisque

$$\lim_{x\to\infty} k^2 \cdot \operatorname{id} \cdot e^{-k\cdot x} = 0 \ .$$

□

EXEMPLE 2 Etudions à nouveau l'exemple 13.3.1, mais en changeant l'ensemble de base. Considérons tout d'abord $[0,1[$. On a

$$\lim_k \operatorname{id}^k = 0 \quad \text{ponctuellement sur } [0,1[\ ,$$

mais

$$\left\|\mathrm{id}^k\right\|_{\infty,[0,1[} = 1 \ .$$

Soit $r \in [0,1[$ donné et considérons l'intervalle $[0,r]$. On a

$$\left\|\mathrm{id}^k\right\|_{\infty,[0,r]} = r^k \ ,$$

donc

$$\lim_k \left\|\mathrm{id}^k\right\|_{\infty,[0,r]} = 0 \ .$$

Ceci montre que

$$\lim_k \mathrm{id}^k = 0 \quad \text{uniformément sur } [0,r] \ .$$

THEOREME *$\ell^\infty(X)$ est un espace de Banach.*

Il suffit de prouver que $\ell^\infty(X)$ est complet. Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\ell^\infty(X)$, nous devons montrer qu'il existe une fonction $f \in \ell^\infty(X)$ telle que

$$\lim_k \|f_k - f\|_\infty = 0 \ .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leqslant \|f_k - f_l\|_\infty \leqslant \varepsilon \ , \tag{$*$}$$

pour tout $x \in X$ et tout $k,l \in \mathbb{N}$ tels que $k,l \geqslant N(\varepsilon)$. Ceci montre en particulier que $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Elle est donc convergente, puisque $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach (exemple 10.1). On pose

$$f(x) := \lim_k f_k(x) \ ,$$

ce qui définit une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$.

Prenons maintenant $\varepsilon = 1$. Pour tout $k \geqslant N(1)$, on a

$$|f_k(x)| \leqslant \left|f_k(x) - f_{N(1)}(x)\right| + \left|f_{N(1)}(x)\right| \leqslant 1 + \left\|f_{N(1)}\right\|_\infty \ .$$

On en déduit, en passant à la limite sur k , que

$$|f(x)| = \lim_k |f_k(x)| \leqslant 1 + \left\|f_{N(1)}\right\|_\infty \quad \text{pour tout } x \in X \ ,$$

ce qui montre que $f \in \ell^\infty(X)$.

En passant maintenant à la limite sur l dans l'inégalité $(*)$, on obtient

$$|f_k(x) - f(x)| = \lim_{l \geqslant N(\varepsilon)} |f_k(x) - f_l(x)| \leqslant \varepsilon$$

pour tout $x \in X$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tels que $k \geqslant N(\varepsilon)$, donc

$$\|f_k - f\|_\infty \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \geqslant N(\varepsilon) \ ,$$

ce qui finit de prouver le théorème. □

COROLLAIRE *$(\mathbb{K}^n, |\cdot|_\infty)$ est un espace de Banach.*

C'est immédiat, puisque

$$(\mathbb{K}^n, |\cdot|_\infty) = \ell^\infty(\{1,\ldots,n\}) \ .$$

□

Nous verrrons plus tard (proposition 11.6) que $\left(\mathbb{K}^n, |\cdot|_p\right)$ est un espace de Banach pour tout $p \in [1,\infty]$.

10.5 Espaces de fonctions continues

DEFINITION 1 Soit X un espace métrique. Nous désignerons par $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}^b(X)$ l'ensemble des fonctions continues, respectivement continues et bornées sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Il est clair, par le corollaire 7.3, que $\mathcal{C}^b(X)$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(X)$.

THEOREME *Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues bornées sur X et $f = \lim_k f_k$ uniformément sur X , alors f est continue.*

En particulier $\left(\mathcal{C}^b(X), \|\cdot\|_\infty\right)$ est un espace de Banach.

Soit $x \in X$. Pour tout $y \in X$, on a

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |f(y) - f_k(y)| + |f_k(y) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \|f_k - f\|_\infty + |f_k(y) - f_k(x)| \ .$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_N - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \ ,$$

ce qui est possible puisque $\lim_k \|f_k - f\|_\infty = 0$. Comme f_N est continue, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in X$ tel que $d_X(y, x) \leqslant \delta$, on ait

$$|f_N(y) - f_N(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Il vient alors

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon \ .$$

Ceci finit de prouver que f est continue en x .

Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^b(X)$, alors c'est une suite de Cauchy dans $\ell^\infty(X)$, donc converge uniformément vers une fonction f . Mais cette fonction est continue par ce qui précède, ce qui montre que $\mathcal{C}^b(X)$ est complet. ☐

REMARQUE 1 La continuité de $\lim_k f_k$ en $x \in X$ signifie que

$$\lim_{y\to x} \lim_k f_k(y) = \lim_k f_k(x) = \lim_k \lim_{y\to x} f_k(y) \ ,$$

donc que l'on peut permuter les deux limites!

REMARQUE 2 Si $f \in \mathcal{C}(X)$ et $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de X , alors f est bornée sur $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$.

C'est évident, puisque $(f(x_l))_{l\in\mathbb{N}}$ est convergente. ☐

REMARQUE 3 Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}(X)$ ponctuellement convergente sur X vers une fonction f , et $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une suite de X convergente vers $x \in X$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, en posant $Y := \{x\} \cup \{x_l \mid l \in \mathbb{N}\}$, on a

$$\lim_k \|f_k - f\|_{\infty,Y} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_k \|f_k - f\|_{\infty,(x_l)_{l\geqslant m}} = 0 \ .$$

En effet, on a

$$\|f_k - f\|_{\infty,Y} = \max\left\{|f_k(x) - f(x)|, \max_{l=0,\ldots,m-1} |f_k(x_l) - f(x_l)|, \|f_k - f\|_{\infty,(x_l)_{l\geqslant m}}\right\} ,$$

d'où le résultat, puisque

$$\lim_k |f_k(x) - f(x)| = \lim_k \max_{l=0,\ldots,m-1} |f_k(x_l) - f(x_l)| = 0$$

par la convergence ponctuelle. □

Ces deux dernières remarques nous permettent de formuler et de prouver le résultat suivant :

COROLLAIRE *Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}(X)$. Si la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur toute suite convergente de X , alors $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement sur X vers une fonction f et f est continue.*

Une suite constante étant convergente, la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers une fonction f sur X . Pour montrer que f est continue, il nous suffit de montrer que, pour toute suite $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ convergente vers x dans X , on a $f(x) = \lim_l f(x_l)$. Mais cela revient à montrer que la restriction de f à $Y := \{x\} \cup \{x_l \mid l \in \mathbb{N}\}$, considérée comme une partie de X , donc comme un espace métrique, est continue. Puisque $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur Y , le théorème précédent prouve cette assertion. □

10.6 Intégration, dérivation et convergence uniforme

THEOREME *Soit* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite uniformément convergente de fonctions continues sur un intervalle* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *. Alors*

$$\int_a^b \lim_k f_k = \lim_k \int_a^b f_k \ .$$

Soit $f := \lim_k f_k$. On a alors

$$\left|\int_a^b f_k - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_k - f)\right| \leqslant \int_a^b |f_k - f| \leqslant \|f_k - f\|_\infty \cdot (b-a) \ ,$$

d'où le résultat. □

EXEMPLE 1 On considère la suite de fonctions $\left(\frac{1}{k}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{k}}\right)_{k\geqslant 1}$ définies sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\lim_k \frac{1}{k}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{k}} = 0 \quad \text{uniformément dans } \mathbb{R}_+ \ ,$$

car $\frac{1}{k}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{k}}$ est décroissante, donc atteint son maximum en 0 , i.e.

$$\|\frac{1}{k}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{k}}\|_\infty = \frac{1}{k} \ .$$

Mais

$$\int_0^\infty \frac{1}{k}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{k}} = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{1}{k}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{k}} = \lim_{x\to\infty}\left[-e^{-\frac{\mathrm{id}}{k}}\right]_0^x = 1 \ ,$$

ce qui montre que le théorème est faux si l'intervalle n'est pas borné.

COROLLAIRE *Soient* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *,* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continûment dérivables dans* J *et* $\xi\in J$ *. Si* $(f_k(\xi))_{k\in\mathbb{N}}$ *est convergente et si* $(f_k')_{k\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout intervalle* $[a,b]\subset J$ *, alors* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout intervalle* $[a,b]\subset J$ *, en particulier ponctuellement sur* J *, vers une fonctions continûment dérivable dans* J *et on a*

$$(\lim_k f_k)' = \lim_k \ f_k' \ .$$

Comme tout point de J est contenu dans un intervalle de la forme $[a,b]\subset J$, la suite $(f_k')_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement sur J vers une fonction g . En outre, toute suite $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ convergente dans J est contenue dans un intervalle de la forme $[a,b]\subset J$; en effet, il existe une boule dans J de rayon >0 et de centre $\lim_l x_l$ de la forme $\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]\subset J$, et on a $x_l\in\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]$ pour tout $l\in\mathbb{N}$ sauf un nombre fini, d'où le résultat. Le corollaire 10.5 montre alors que g est continue. D'autre part, pour tout $x\in J$, on a

$$f_k(x) = f_k(\xi) + \int_\xi^x f_k' \ .$$

On en déduit que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers la fonction f définie par

$$f(x) := \lim_k f_k(x) = \lim_k f_k(\xi) + \lim_k \int_\xi^x f_k' = f(\xi) + \int_\xi^x \lim_k f_k' = f(\xi) + \int_\xi^x g \ .$$

Ceci montre aussi que f est continûment dérivable. Il nous reste à prouver que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle $[a,b] \subset J$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$|f_k(x) - f(x)| = |f_k(x) - f_k(a) + f_k(a) - f(a) + f(a) - f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |f_k(a) - f(a)| + \left| \int_a^x f_k' - \int_a^x f' \right| \leqslant |f_k(a) - f(a)| + \int_a^x |f_k' - f'| \leqslant$$

$$\leqslant |f_k(a) - f(a)| + \|f_k' - f'\|_{\infty,[a,x]} \cdot (x-a) \ ,$$

donc

$$\|f_k - f\|_{\infty,[a,b]} \leqslant |f_k(a) - f(a)| + \|f_k' - f'\|_{\infty,[a,b]} \cdot (b-a) \ ,$$

ce qui finit de prouver le corollaire. □

EXEMPLE 2 La convergence uniforme de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'entraîne pas celle de $(f_k')_{k\in\mathbb{N}}$, comme le montre l'exemple suivant :

La suite $\left(\frac{\sin(k\cdot\mathrm{id})}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$, puisque

$$\left\| \frac{\sin(k\cdot\mathrm{id})}{k} \right\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{k} \ ,$$

mais $(\cos(k\cdot\mathrm{id}))_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge même pas ponctuellement.

Nous allons maintenant introduire d'autres normes sur $\mathcal{C}([a,b])$.

DEFINITION Pour tout $p \in [1,\infty[$ et tout $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on pose

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Comme en 10.2, en remplaçant $\sum$ par $\int$, on prouve la

PROPOSITION *Soient $p,q \in [1,\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i.e. $q = \frac{p}{p-1}$.*

(i) ***Inégalité de Hölder*** *Pour tout $f,g \in \mathcal{C}([a,b])$, on a*

$$\left| \int_a^b f\cdot g \right| \leqslant \int_a^b |f\cdot g| = \|f\cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \ .$$

(ii) ***Inégalité de Minkowsky*** *Pour tout $f,g \in \mathcal{C}([a,b])$, on a*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \ .$$

(iii) $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b])$.

Le seul point à traiter explicitement est la propriété de séparation dans (iii). Si $f \neq 0$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $|f(x)| > 0$ et, par continuité, un $\delta > 0$ tel que

$$y \in [a,b] \ , \ |y-x| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(y)| \geqslant \frac{1}{2} \cdot |f(x)| \ .$$

Il vient alors

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(y)|^p \, dy \geqslant \int_{\max(x-\delta,a)}^{\min(x+\delta,b)} \left(\frac{1}{2}\cdot|f(x)|\right)^p dy = 2\delta\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot|f(x)|\right)^p > 0 \ .$$

□

REMARQUE On définit un produit scalaire dans $\mathcal{C}([a,b])$ par

$$(f|\, g) := \int \overline{f}\cdot g \ .$$

On a donc

$$(f|\, f) = \int_a^b |f|^2 = \|f\|_2^2 \ .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz prend donc la forme

$$|(f|\, g)| \leqslant \|f\|_2\cdot\|g\|_2 \qquad \text{, i.e.} \qquad \left|\int_a^b \overline{f}\cdot g\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

EXERCICE 1 Pour $c\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}$, on considère la fonction

$$f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{n^c\cdot x}{1+k^2\cdot x^2} \ .$$

Déterminer l'ensemble des $c\in\mathbb{R}$ tels que l'on ait

(a) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement sur $[0,1]$.

(b) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(c) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement sur $[0,1]$ et

$$\lim_k \int_0^1 f_k(x)\, dx = \int_0^1 \lim_k f_k(x)\, dx \ .$$

EXERCICE 2 Pour $c\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}$, on considère la fonction

$$f_k : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto n^c\cdot x\cdot e^{-\frac{x}{k}} \ .$$

Déterminer l'ensemble des $c\in\mathbb{R}$ tels que l'on ait

(a) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement sur $\mathbb{R}_+$.

(b) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

(c) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\lim_k \int_0^\infty f_k(x)\, dx = \int_0^\infty \lim_k f_k(x)\, dx \ .$$

(d) $(f_k')_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ pour $a\in\mathbb{R}_+$.

(e) $(f_k')_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

(f) $\lim_k f_k' = (\lim_k f_k)'$ ponctuellement sur $\mathbb{R}_+$.

Discuter ces résultats en relation avec le corollaire 10.6.

EXERCICE 3 Soit $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ convergente vers 1 . Montrer que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_k(x) := \frac{\exp(-x) - \exp(-\beta_k \cdot x)}{\beta_k - 1}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Quel est le lien entre $\lim_k f_k$ et l'exercice 8.7.2 ?

EXERCICE 4 Soit $\mathcal{R}([0,1])$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions intégrables au sensde Riemann sur $[0,1]$. On considère la fonction

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{R}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : f \longmapsto \int_0^1 |f(t)| \ dt \ .$$

Montrer :

(a) $\|\cdot\|_1$ est une norme sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1])$ de $\mathcal{R}([0,1])$, mais pas sur $\mathcal{R}([0,1])$.

(b) Une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uniformément convergente de $\mathcal{C}([0,1])$ converge aussi par rapport à la norme $\|\cdot\|_1$ et les fonctions limites sont égales.

(c) L'application

$$I : (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) : f \longmapsto f$$

n'est pas continue. On remarquera l'application réciproque est continue d'après (b) !

(d) $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas un espace de Banach. On montrera que la suite $(f_k)_{k\geqslant 2}$ définie par

$$f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \begin{cases} 0 & & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ k \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{falls} & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right[\\ 1 & & t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{k}, 1\right] \end{cases}$$

est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1)$ qui ne converge pas.

EXERCICE 5 On considère sur $\mathcal{C}^{(1)}([a,b])$ la fonction

$$\|\cdot\|_{(1)} : \mathcal{C}^{(1)}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : f \longmapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \ .$$

Montrer :

(a) $\|\cdot\|_{(1)}$ est une norme sur $\mathcal{C}^{(1)}([a,b])$.

(b) $\left(\mathcal{C}^{(1)}([a,b]), \|\cdot\|_{(1)}\right)$ est un espace de Banach.

(c) L'application

$$\partial : \left(\mathcal{C}^{(1)}([a,b]), \|\cdot\|_{(1)}\right) \longrightarrow (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty) : f \longmapsto f'$$

est continue.

(d) Les assertions (b) et (c) ne sont plus valables si l'on considère la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^{(1)}([a,b])$ à la place de $\|\cdot\|_{(1)}$.

10.7 Critère de Weierstraß

DEFINITION 1 Nous dirons qu'une série de fonctions $\sum_{l=0}^{\infty} f_l$ sur un ensemble X *converge ponctuellement* , respectivement *uniformément* sur X , s'il en est de même de la suite des sommes partielles.

REMARQUE Plus généralement, on peut définir la notion de série dans tout espace normé F , la suite des sommes partielles étant définie. Toute assertion formulée en terme de convergence d'une suite possède donc une version pour les séries.

Si F est un espace de Banach, les critères de Cauchy pour les suites 5.12 et les séries 6.4 sont valables en remplaçant $\mathbb{C}$ par F et la valeur absolue $|\cdot|$ par la norme $\|\cdot\|$.

DEFINITION 2 Nous dirons qu'une série $\sum_{l=0}^{\infty} f_l$ dans un espace normé F est *normalement convergente* si la série des normes $\sum_{l=0}^{\infty} \|f_l\|$ est convergente.

THEOREME *Une série $\sum_{l=0}^{\infty} f_l$ dans un espace de Banach F qui est normalement convergente est convergente, et on a*

$$\left\| \sum_{l=0}^{\infty} f_l \right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \|f_l\| \ .$$

Il nous suffit de montrer que $\sum_{l=0}^{\infty} f_l$ satisfait au critère de Cauchy pour les séries. Etant donné $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| \sum_{l=p}^{q} f_l \right\| \leqslant \sum_{l=p}^{q} \|f_l\| \ ,$$

d'où l'on tire la première partie en appliquant le critère de Cauchy à la série convergente $\sum_{l=0}^{\infty} \|f_l\|$. L'inégalité en découle aussi en posant $p = 0$, car

$$\left\| \sum_{l=0}^{\infty} f_l \right\| = \lim_q \left\| \sum_{l=0}^{q} f_l \right\| \leqslant \lim_q \sum_{l=0}^{q} \|f_l\| = \sum_{l=0}^{\infty} \|f_l\|$$

par la continuité de $\|\cdot\|$. $\square$

Nous allons essentiellement appliquer ce critère aux séries de fonctions bornées sur un ensemble X , respectivement continues et bornées sur un espace métrique X , puisque $\ell^{\infty}(X)$ et resp. $\mathcal{C}^b(X)$ sont des espaces de Banach (théorèmes 10.4 et 10.5).

EXEMPLE Les séries de fonctions

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{il\cdot \mathrm{id}}}{l^2} \quad , \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(l \cdot \mathrm{id})}{l^2} \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(l \cdot \mathrm{id})}{l^2}$$

sont uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$ et définissent des fonctions continues.

En effet, on a convergence normale, puisque

$$\left\| \frac{e^{il\cdot \mathrm{id}}}{l^2} \right\|_{\infty,\mathbb{R}} = \left\| \frac{\cos(l\cdot \mathrm{id})}{l^2} \right\|_{\infty,\mathbb{R}} = \left\| \frac{\sin(l\cdot \mathrm{id})}{l^2} \right\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{l^2}$$

et $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ est convergente. □

EXERCICE

(a) Montrer pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$ que

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\cdot u} \cdot u^k \cdot du = \frac{(-1)^k}{\alpha^{k+1}} \cdot k! \ .$$

(b) Prouver l'identité

$$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{id}^{\mathrm{id}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} \ ,$$

en écrivant l'intégrant à l'aide de la série de l'exponentielle.

10.8 Séries entières

Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\mathbb{B}(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$$

et

$$\mathbb{D}(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\} \ .$$

THEOREME *Soit $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \mathrm{id}^l$ une série entière dont le rayon de convergence est R . Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R$, les séries de fonctions*

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \mathrm{id}^l \quad \textit{et} \quad \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot c_l \cdot \mathrm{id}^{l-1}$$

converge uniformément sur $\mathbb{B}(r)$ et elles définissent des fonctions continues sur $\mathbb{D}(R)$.

Comme

$$\left\| c_l \cdot \mathrm{id}^l \right\|_{\infty,\mathbb{B}(r)} \leqslant |c_l| \cdot r^l$$

et puisque la série $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot r^l$ est absolument convergente (proposition 6.10.(i)), la première série est normalement convergente, donc uniformément convergente sur $\mathbb{B}(r)$ par le critère de Weierstrass 10.7. Remarquons que nous travaillons dans l'espace de Banach $\left(\mathcal{C}^b(\mathbb{B}(r)), \|\cdot\|_\infty\right)$. Nous verrons (corollaire 10.19) que $\mathcal{C}^b(\mathbb{B}(r)) = \mathcal{C}(\mathbb{B}(r))$, puisque $\mathbb{B}(r)$ est une partie compacte (théorème de Heine-Borel 10.18).

Pour traiter la seconde série, on choisit $\rho \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < \rho < R$. On obtient alors

$$\left\| l \cdot c_l \cdot \mathrm{id}^{l-1} \right\|_{\infty,\mathbb{B}(r)} \leqslant l \cdot |c_l| \cdot r^{l-1} = \frac{l}{r} \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^l \cdot |c_l| \cdot \rho^l \ .$$

Puisque $\frac{r}{\rho} < 1$, on a

$$\lim_l \frac{l}{r} \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^l = 0\,;$$

il existe donc un $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\frac{l}{r} \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^l \leqslant M$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\left\| l \cdot c_l \cdot \mathrm{id}^{l-1} \right\|_{\infty,\mathbb{B}(r)} \leqslant M \cdot |c_l| \cdot \rho^l \ ,$$

d'où notre assertion concernant la seconde série.

Ces séries convergent ponctuellement sur $\mathbb{D}(R)$, donc définissent des fonctions sur $\mathbb{D}(R)$ et elles sont continues par le corollaire 10.5, car toute suite convergente dans $\mathbb{D}(R)$ est contenu dans $\mathbb{B}(r)$ pour un certain $r < R$. □

REMARQUE Les deux séries entières

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \mathrm{id}^l \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot c_l \cdot \mathrm{id}^{l-1}$$

ont même rayon de convergence.

COROLLAIRE *La fonction*

$$f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot x^l$$

est indéfiniment dérivable et on a

$$f^{(k)} = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{l!}{(l-k)!} \cdot c_l \cdot \mathrm{id}^{l-k} \ .$$

En particulier

$$c_l = \frac{1}{l!} \cdot f^{(l)}(0)$$

et la série de Taylor de f au voisinage de 0 *est* $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \mathrm{id}^l$.

C'est immédiat, par récurrence, en utilisant le corollaire 10.6. □

EXEMPLE 1 Le corrollaire précédent nous permet de traiter d'une autre manière la série de Taylor de $\ln(1+\cdot)$ au voisinage de 0 (cf. exemples 8.13.3 et 9.12).

La série entière $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \cdot \mathrm{id}^l$ a un rayon de convergence égal à 1 et définit une fonction indéfiniement dérivable dans $]-1, 1[$ satisfaisant au problème avec condition initiale

$$f' = \frac{1}{1+\mathrm{id}} \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \ .$$

On a donc

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \cdot x^l = \ln(1+x) \quad \text{pour tout } x \in]-1, 1[\ .$$

En effet, en posant $f := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \cdot \mathrm{id}^l$, le corollaire montre que

$$f' = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \cdot \mathrm{id}^{l-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (-\mathrm{id})^l = \frac{1}{1+\mathrm{id}} \ ,$$

donc

$$f = \ln(1+\cdot) + c$$

pour un certain $c \in \mathbb{R}$. Mais $c = f(0) = 0$, d'où le résultat. □

Pour obtenir le résulat complet sur l'intervalle $]-1, 1]$ il faut être un peu plus fin et utiliser le théorème de la limite d'Abel 10.10.

EXEMPLE 2 Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\sum_{l=1}^{\infty} l \cdot x^l = x \cdot \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot x^{l-1} = x \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} x^l \right)' = x \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \ .$$

Nous avons déjà obtenu de tels résultats à l'aide de la méthode de Cauchy pour multiplier les séries (cf. exercice 6.15).

EXERCICE 1 Série binomiale Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{l=1}^{k} \frac{\alpha - l + 1}{l} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!} \ .$$

On dit que c'est le *coefficient binomial généralisé* .

(a) Montrer que la rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{l=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{l} \cdot \mathrm{id}^l$$

est 1 .

(b) On considère la fonction $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} \cdot x^l \ .$$

Montrer que f est solution du problème avec condition initiale

$$(1 + \mathrm{id}) \cdot f' = \alpha \cdot f \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \ . \tag{$*$}$$

(c) Montrer que le problème avec condition initiale $(*)$ possède une unique solution. En déduire que l'on a

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} \cdot x^l \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[\ .$$

EXERCICE 2 Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$ et $x \in [0,1[$, on a

$$1 - \alpha x - \frac{x^2}{1 - x} \leqslant (1 - x)^\alpha \ .$$

EXERCICE 3 Déterminer la série de Taylor de arcsin au voisinage de 0 et montrer qu'elle représente cette fonction sur $[-1,1]$ en utilisant le premier exercice.

On montrera par récurrence que

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} \leqslant \frac{1}{(k+1)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

Que peut-on dire de la série de Taylor de arccos au voisinage de 0 ?

10.9 Critère de Dirichlet

THEOREME *Soient X un ensemble et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}, (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions bornées sur X . On suppose que*

(i)

$$\sup_k \left\|\sum_{l=0}^{k} g_l\right\|_\infty < \infty \ .$$

(ii)

$$\lim_k f_k = 0 \quad \textit{uniformément sur } X \ .$$

(iii)

$$\sum_{l=0}^{\infty} |f_l - f_{l+1}| \quad \textit{converge uniformément sur } X \ .$$

Alors $\sum_{l=0}^{\infty} f_l \cdot g_l$ converge uniformément sur X .

En posant $s_k := \sum_{l=0}^{k} g_l$, l'hypothèse (i) signifie que

$$M := \sup_k \|s_k\|_\infty = \sup_k \left\|\sum_{l=0}^{k} g_l\right\|_\infty < \infty \ .$$

En outre $g_l = s_l - s_{l-1}$, donc

$$\sum_{l=p}^{q} f_l \cdot g_l = \sum_{l=p}^{q} f_l \cdot (s_l - s_{l-1}) = \sum_{l=p}^{q} f_l \cdot s_l - \sum_{l=p-1}^{q-1} f_{l+1} \cdot s_l =$$

$$= \sum_{l=p}^{q} (f_l - f_{l+1}) \cdot s_l + f_{q+1} \cdot s_q - f_p \cdot s_{p-1} \ .$$

On en déduit que

$$\left|\sum_{l=p}^{q} f_l \cdot g_l\right| \leqslant \sum_{l=p}^{q} |f_l - f_{l+1}| \cdot |s_l| + |f_{q+1}| \cdot |s_q| - |f_p| \cdot |s_{p-1}| \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \left(\sum_{l=p}^{q} |f_l - f_{l+1}| + |f_{q+1}| + |f_p|\right) \ .$$

Il vient alors

$$\left\|\sum_{l=p}^{q} f_l \cdot g_l\right\|_\infty \leqslant M \cdot \left(\left\|\sum_{l=p}^{q} |f_l - f_{l+1}|\right\|_\infty + \|f_{q+1}\|_\infty + \|f_p\|_\infty\right) \ ,$$

ce qui montre que la série $\sum_{l=0}^{\infty} f_l \cdot g_l$ satisfait au critère de Cauchy. Le résultat en découle, puisque $\ell^\infty(X)$ est complet (théorème 10.4). □

REMARQUE 1 Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui converge uniformément vers 0 sur X , alors la condition (iii) est satisfaite.

En effet, on a

$$\sum_{l=0}^{k} |f_l - f_{l+1}| = \sum_{l=0}^{k} (f_l - f_{l+1}) = f_0 - f_{k+1} \ ,$$

donc

$$\lim_k \left\| \sum_{l=0}^{k} |f_l - f_{l+1}| - f_0 \right\|_\infty = \lim_k \|f_{k+1}\|_\infty = 0 \ .$$

□

EXEMPLE Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de $\mathbb{R}_+$ convergente vers 0 . Alors la série entière $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \mathrm{id}^l$ converge uniformément sur

$$Z_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1 \text{ et } |z-1| \geqslant \varepsilon\} \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 \ ,$$

et définit une fonction continue sur $\mathbb{B}(1) \setminus \{1\}$.

En particulier, les séries

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\cdot l\cdot \mathrm{id}}}{l} \quad , \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\cdot l\cdot \mathrm{id})}{l} \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\cdot l\cdot \mathrm{id})}{l}$$

convergent uniformément sur $[\delta, 1-\delta]$ pour tout $\delta > 0$, et définissent des fonctions continues sur $]0,1[$.

La première partie découle de l'estimation

$$\left\| \sum_{l=0}^{k} \mathrm{id}^l \right\|_{\infty,Z_\varepsilon} = \left\| \frac{1-\mathrm{id}^{k+1}}{1-\mathrm{id}} \right\|_{\infty,Z_\varepsilon} \leqslant \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$

et du corollaire 10.5.

Quant à la seconde, il suffit de constater que, pour $x \in [0,1]$, on a $e^{2\pi i\cdot x} \in Z_\varepsilon$ si, et seulement si,

$$\varepsilon \leqslant \left| e^{2\pi i\cdot x} - 1 \right| = 2\cdot \sin \pi x \ .$$

Mais ceci est équivalent à $x \in [\delta, 1-\delta]$ en définissant

$$\delta := \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

□

APPLICATION On a

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\cdot l\cdot \mathrm{id})}{l^2} = \pi^2 \left[\left(\mathrm{id} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \right] \quad \text{sur } [0,1] \ .$$

En particulier

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l^2} = -\frac{\pi^2}{12} \ .$$

Le corollaire 10.6 et l'application 9.16 montrent que sur $]0,1[$ on a

$$\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi\cdot l\cdot\mathrm{id})}{l^2}\right)' = -2\pi\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi\cdot l\cdot\mathrm{id})}{l} = 2\pi^2\left(\mathrm{id}-\frac{1}{2}\right)\ ,$$

donc que

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi\cdot l\cdot\mathrm{id})}{l^2} = \pi^2\left(\mathrm{id}-\frac{1}{2}\right)^2 + c$$

pour un certain $c\in\mathbb{R}$. Comme ces fonctions sont continues, on a l'égalité sur $[0,1]$. Il vient alors d'une part

$$\int_0^1\left(\pi^2\left(\mathrm{id}-\frac{1}{2}\right)^2 + c\right) = \left[\frac{\pi^2}{3}\left(\mathrm{id}-\frac{1}{2}\right)^3 + c\cdot\mathrm{id}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{12}+c\ ,$$

et d'autre part

$$\int_0^1\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi\cdot l\cdot\mathrm{id})}{l^2}\right) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}\int_0^1\cos(2\pi\cdot l\cdot\mathrm{id}) = 0$$

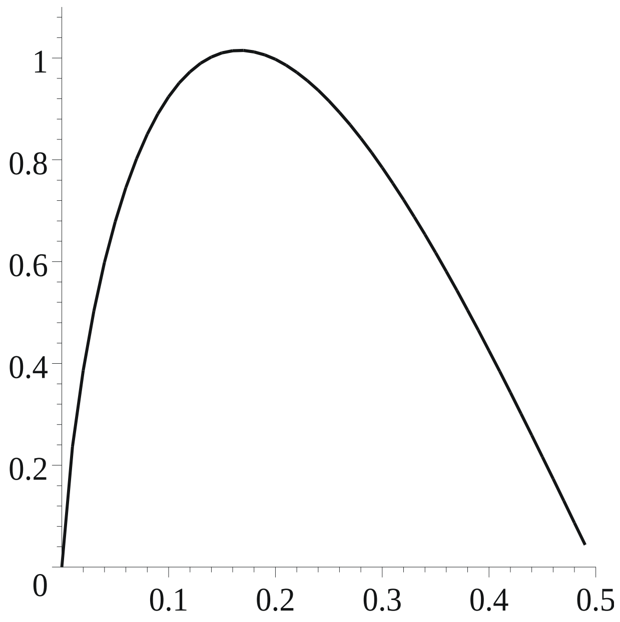
en ayant utilisé le théorème 10.6, d'où le résultat.

Les formules s'obtiennent en évaluant cette série aux points 0 et $\frac{1}{2}$. □

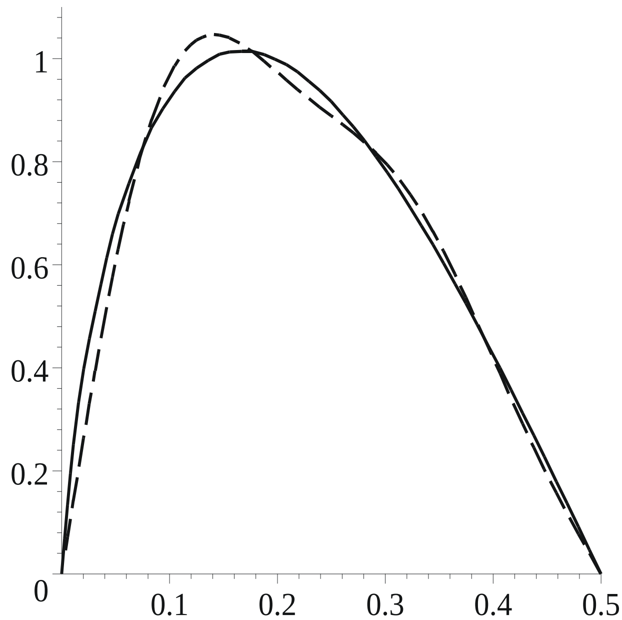
REMARQUE 2 Comme ci-dessus on obtient

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi\cdot l\cdot x)}{l^2} = -2\pi\cdot\int_0^x\ln(2\cdot\sin\pi t)\ dt\ .$$

La fonction définie par le membre de droite s'appelle l' *intégrale de Clausen* .



$x\longmapsto -2\pi\cdot\int_0^x\ln(2\sin\pi t)\ dt$



$x\longmapsto \begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4}\frac{\sin 2\pi kx}{k^2}\ (\text{- -})\\ \sum_{k=1}^{20}\frac{\sin 2\pi kx}{k^2}\ (\text{—})\end{array}$

L'intégrale de Clausen atteint son maximum en $\frac{1}{6}$ et vaut

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{6} \cdot l\right)}{l^2} = -2\pi \cdot \int_0^{\frac{1}{6}} \ln\left(2 \cdot \sin \pi t\right)\, dt \in \left]1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[\subset]1, 1.155[\ .$$

La suite $\left(\sin\left(\frac{2\pi}{6} \cdot l\right)\right)_{l \in \mathbb{N}}$ est 6-périodique, les 6 premiers termes étant $1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ -1\ ,\ -1\ ,\ 0$.

En effet $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\sin \pi t = \frac{1}{2}$ est équivalent à $t = \frac{1}{6}$. Sur $\left[0, \frac{1}{6}\right]$ on a

$$\cos \pi t \leqslant 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \cos \pi t \ ,$$

donc

$$-2\pi \int_0^{\frac{1}{6}} \ln\left(2 \cdot \sin \pi t\right) \cdot \cos \pi t\, dt \leqslant -2\pi \int_0^{\frac{1}{6}} \ln\left(2 \cdot \sin \pi t\right)\, dt \leqslant -\frac{4\pi}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{6}} \ln\left(2 \cdot \sin \pi t\right) \cdot \cos \pi t\, dt\, ;$$

mais en faisant le changement de variable $s = 2 \cdot \sin \pi t$, il vient

$$-2\pi \int_0^{\frac{1}{6}} \ln\left(2 \cdot \sin \pi t\right) \cdot \cos \pi t\, dt = -\int_0^{2 \cdot \sin \frac{\pi}{6}} \ln s\, ds = -\int_0^1 \ln = 1 \ ,$$

d'où le résultat. □

Utilisant un ordinateur on voit que cette valeur est $1.014\,941\,606\ldots$

10.10 Critère d'Abel

THEOREME *Soient X un ensemble et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}, (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions bornées sur X . On suppose que*

(i)
$$\sum_{l=0}^{\infty} g_l \quad \text{converge uniformément sur } X \ .$$

(ii)
$$\sum_{l=1}^{\infty} |f_{l+1} - f_l| \quad \text{définit ponctuellement une fonction bornée sur } X \ .$$

Alors $\sum_{l=0}^{\infty} f_l \cdot g_l$ converge uniformément sur X .

La démonstration est analogue à celle du critère de Dirichlet 10.9, mais en posant
$$t_l := \sum_{j=l}^{\infty} g_j \ .$$

On a alors
$$\sum_{l=p}^{q} f_l \cdot g_l = \sum_{l=p}^{q} f_l \cdot (t_l - t_{l+1}) = \sum_{l=p-1}^{q-1} f_{l+1} \cdot t_{l+1} - \sum_{l=p}^{q} f_l \cdot t_{l+1} =$$
$$= \sum_{l=p}^{q} (f_{l+1} - f_l) \cdot t_{l+1} + f_p \cdot t_p - f_{q+1} \cdot t_{q+1} \ ,$$

donc
$$\left|\sum_{l=p}^{q} f_l \cdot g_l\right| = \sum_{l=p}^{q} |f_{l+1} - f_l| \cdot |t_{l+1}| + |f_p| \cdot |t_p| + |f_{q+1}| \cdot |t_{q+1}| \leqslant$$
$$\leqslant \sup\nolimits_{k\geqslant p} \|t_k\|_\infty \cdot \left(\sum_{l=p}^{q} |f_{l+1} - f_l| + |f_p| + |f_{q+1}|\right) \leqslant$$
$$\leqslant 3 \cdot \sup\nolimits_{k\geqslant p} \|t_k\|_\infty \cdot \left\| |f_0| + \sum_{l=0}^{\infty} |f_{l+1} - f_l| \right\|_\infty \ ,$$

car pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$|f_k| = \left| f_0 + \sum_{l=0}^{k-1} (f_{l+1} - f_l) \right| \leqslant |f_0| + \sum_{l=0}^{\infty} |f_{l+1} - f_l| \ .$$

Il vient alors
$$\left\| \sum_{l=p}^{q} f_l \cdot g_l \right\|_\infty \leqslant 3 \cdot \sup\nolimits_{k\geqslant p} \|t_k\|_\infty \cdot \left(|f_0| + \sum_{l=0}^{\infty} |f_{l+1} - f_l| \right) \ ,$$

et comme $\lim_p \sup_{k\geqslant p} \|t_k\|_\infty = \lim_k \|t_k\|_\infty = 0$, la série $\sum_{l=0}^\infty f_l \cdot g_l$ satisfait au critère de Cauchy. Le résultat en découle, puisque $\ell^\infty(X)$ est complet (théorème 10.4). $\square$

COROLLAIRE (Théorème de la limite d'Abel) *Si $\sum_{l=0}^\infty c_l$ est une série convergente de $\mathbb{C}$, alors la série $\sum_{l=0}^\infty c_l \cdot \mathrm{id}^l$ converge uniformément sur $[-1+\varepsilon, 1]$ pour tout $\varepsilon > 0$, et définit une fonction continue sur $]-1,1]$.*

En particulier, on a

$$\sum_{l=0}^\infty c_l = \lim_{x\to 1-} \sum_{l=0}^\infty c_l \cdot x^l \ .$$

Les hypothèse sont évidemment satisfaites, car

$$\sum_{l=1}^\infty \left|x^l - x^{l-1}\right| = \sum_{l=1}^\infty \left(x^{l-1} - x^l\right) = 1 - \lim_k x^k = \left\{\begin{array}{lcc} 1 & & x \in [0,1[\\ & \text{si} & \\ 0 & & x = 1 \end{array}\right.$$

et

$$\sum_{l=1}^\infty \left|x^l - x^{l-1}\right| \leqslant \sum_{l=1}^\infty \left|x^l\right| + \left|x^{l-1}\right| \leqslant \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{si } x \in [-1+\varepsilon, 0] \ .$$

$\square$

10.11 Série de Taylor de arctan

PROPOSITION *On a*

$$\arctan = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \cdot \mathrm{id}^{2l+1} \quad \textit{uniformément sur } [-1,1] \ .$$

En particulier

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = \frac{\pi}{4} \ .$$

Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, les théorèmes 10.6 et 10.8 montrent que l'on a

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \cdot t^{2l} \right) dt = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \cdot \int_0^x t^{2l} dt =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \cdot \left[\frac{t^{2l+1}}{2l+1} \right]_0^x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \cdot x^{2l+1} \ .$$

D'autre part arctan est une fonction continue sur $[-1,1]$, et il en est de même de la fonction définie par $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \cdot \mathrm{id}^{2l+1}$, car le critère d'Abel montre que cette série converge uniformément ; en effet la série de fonctions constantes $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1}$ converge évidemment uniformément par le critère de Leibniz 6.7, p. 142, et on a

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left| \mathrm{id}^{2l+1} - \mathrm{id}^{2(l-1)+1} \right| = \sum_{l=1}^{\infty} |\mathrm{id}|^{2l-1} - |\mathrm{id}|^{2l+1} =$$

$$= |\mathrm{id}| - \lim_k |\mathrm{id}|^{2k+1} = 1_{]-1,1[} \cdot |\mathrm{id}|$$

ponctuellement sur $[-1,1]$. □

REMARQUE La série ci-dessus ne converge pas assez vite. On utilise la formule suivante qui découle de l'équation fonctionnelle de arctan :

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-x\cdot y} \quad \text{si } \ |\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2} \ .$$

COROLLAIRE (Formule de Machin) [2] *On a*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} =$$

$$= 4 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2l+1} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \cdot \left(\frac{1}{239}\right)^{2l+1} \ .$$

[2] John Machin, 1680 - 1752.

L'erreur en ne prenant que k termes peut être estimée grâce à

$$\left|\sum_{l=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2l+1}\cdot x^{2l+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{2k+3}}{2k+3}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}|x|^{2l} = \frac{|x|^{2k+3}}{2k+3}\cdot\frac{1}{1-|x|^2} \ .$$

On obtient 8 décimales exactes à l'aide de 5 termes. Pour 100 décimales exactes on a besoin de 87 termes. En 1873 Shanks a obtenu 707 décimales exactes de π en utilisant cette formule !

10.12 La topologie d'un espace métrique

Rappelons (cf. définition 5.1.2) que pour tout $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on dit que

$$B(x,r) := \{y \in X \mid d(y,x) \leqslant r\}$$

est la boule fermée de centre x et de rayon r .

DEFINITION Soient $x \in X$ et V une partie de X . Nous dirons que V est un *voisinage* de x (dans X) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset V$.

Soit A une partie de X . On dit que $x \in X$ est un *point intérieur* de A (dans X) si A est un voisinage de x . On désigne par A° l'ensemble des points intérieurs de A ; on l'appelle l' *intérieur* de A (dans X) .

Une partie U de X est dite *ouverte* (dans X) si U est voisinage de chacun de ses points, i.e. si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$, ou encore si U est égal à son intérieur, i.e. $U = U^\circ$.

L'ensemble $\mathfrak{T}(X,d)$ des parties ouvertes dans X s'appelle la *topologie de l'espace métrique* X . On dit aussi que ce sont les ouverts de X . On a

$$\mathfrak{T}(X,d) \subset \mathfrak{P}(X) \ .$$

Une partie A de X est dite *fermée* (dans X) si son complémentaire dans X

$$\complement A = X \setminus A$$

est un ouvert de X .

PROPOSITION *La topologie de X satisfait aux propriétés suivantes :*

(i) $\emptyset$ *et* X *sont des ouverts de* X *.*

(ii) *Si* U *et* V *sont des ouverts de* X *, alors* $U \cap V$ *est un ouvert de* X *.*

(iii) *Si* $(U_j)_{j\in J}$ *est une famille quelconque d'ouverts de* X *, alors* $\bigcup_{j\in J} U_j$ *est un ouvert de* X *.*

Montrons par exemple (ii). Etant donné $x \in U \cap V$, il existe $\varepsilon, \delta > 0$ tels que

$$B(x,\varepsilon) \subset U \quad \text{et} \quad B(x,\delta) \subset V \ ,$$

puisque U et V sont ouverts. Mais alors $\min(\varepsilon,\delta) > 0$ et

$$B(x,\min(\varepsilon,\delta)) \subset U \cap V \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Par complémentarité, on obtient le

COROLLAIRE

(i) $\emptyset$ *et* X *sont des fermés de* X *.*

(ii) *Si* A *et* B *sont des fermés de* X *, alors* $A \cup B$ *est un fermé de* X *.*

(iii) *Si* $(A_j)_{j\in J}$ *est une famille quelconque de fermés de* X *, alors* $\bigcap_{j\in J} A_j$ *est un fermé de* X *.*

EXEMPLE 1 Pour tout $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a \leqslant b$, l'intervalle ouvert $]a, b[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$. Si $a, b \in \mathbb{R}$, les intervalles fermés $[a, b]$, $]-\infty, b]$ et $[a, \infty[$ sont fermés dans $\mathbb{R}$. L'intervalle $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ est à la fois ouvert et fermé.

Pour tout $x \in]a, b[$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$B(x, \varepsilon) = [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset]a, b[\ .$$

D'autre part

$$\complement [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, \infty[\ .$$

□

EXEMPLE 2 Pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$ son intérieur J° est $]\inf J, \sup J[$; ceci concorde avec la notation introduite en 8.4. En particulier, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, l'intervalle $[a, b[$ n'est pas ouvert. Il n'est pas fermé non-plus.

EXEMPLE 3 Pour tout $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$, la boule fermée $B(x, r)$ est une fermée dans X .

Il nous suffit de montrer que $\complement B(x, r)$, i.e. l'ensemble de $y \in X$ tel que $d(y, x) > r$, est ouvert : on a

$$B\left(y, \frac{d(y, x) - r}{2}\right) \subset \complement B(x, r) \ .$$

En effet, pour tout $z \in X$ tel que

$$d(z, y) \leqslant \frac{d(y, x) - r}{2} \ ,$$

on a

$$d(z, x) \geqslant d(y, x) - d(y, z) \geqslant d(y, x) - \frac{d(y, x) - r}{2} = \frac{d(y, x) + r}{2} > r \ .$$

□

EXEMPLE 4 Pour tout $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$, la *boule ouverte* de centre x et rayon r

$$D(x, r) := \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$$

est ouverte dans X .

En effet, pour tout $y \in D(x, r)$, on a

$$B\left(y, \frac{r - d(y, x)}{2}\right) \subset D(x, r) \ ,$$

car si $z \in X$ et

$$d(z, y) \leqslant \frac{r - d(y, x)}{2} \ ,$$

alors

$$d(z, x) \leqslant d(z, y) + d(y, x) \leqslant \frac{r - d(y, x)}{2} + d(y, x) = \frac{r + d(y, x)}{2} < r \ .$$

□

REMARQUE Pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset D(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon) \ .$$

Dans la définition d'un voisinage de x on peut donc remplacer $B(x,\varepsilon)$ par $D(x,\varepsilon)$.

EXEMPLE 5 Pour tout $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on a $D(x,r) \subset B(x,r)^\circ$.

C'est évident, puisque tout $y \in D(x,r)$ est un point intérieur de $D(x,r)$, donc aussi un point intérieur de $B(x,r)$. □

EXEMPLE 6 On n'a pas nécessairement l'égalité $D(x,r) = B(x,r)^\circ$ comme le montre l'exemple suivant :

Si X est un ensemble, alors

$$X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x,y) \longmapsto \begin{cases} 1 & x \neq y \\ & \text{si} \\ 0 & x = y \end{cases}$$

est une métrique sur X , dite la *métrique discrète* . Pour tout $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on a

$$B(x,r) = \begin{cases} X & r \geqslant 1 \\ & \text{si} \\ \{x\} & r < 1 \end{cases} ,$$

et

$$D(x,r) = \begin{cases} X & r > 1 \\ & \text{si} \\ \{x\} & r \leqslant 1 \end{cases} ,$$

donc

$$B(x,r)^\circ = B(x,r) \ ,$$

ce qui montre que $B(x,r)$ est à la fois ouverte et fermée. En outre

$$D(x,1) = \{x\} \neq X = B(x,1)^\circ \ ,$$

pour autant que X ait au moins deux éléments.

EXEMPLE 7 Par récurrence, une intersection finie d'ouverts de X est un ouvert de X , mais une intersection non-finie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert comme le montre l'exemple

$$[0,1] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right[$$

dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 8 Pour tout $a, b \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tels que $a \leqslant b$ les intervalles de la forme $[0,b[$ et $]a,b[$ sont ouverts dans $\mathbb{R}_+$. Si $b \in \mathbb{R}_+$, alors $[a,b]$ est fermé dans $\mathbb{R}_+$. Il en est de même de $[a,\infty[$.

EXERCICE 1 Soient Y est une partie de X et d_Y la métrique sur Y induite par celle de X (cf. exemple 5.1.2). Montrer

(a) Pour tout $y \in Y$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on a

$$B\left(y, r, d_Y\right) = B\left(y, r, d_X\right) \cap Y \ .$$

(b) Une partie V de Y est ouverte dans Y si, et seulement si, il existe une partie ouverte U dans X telle que $V = U \cap Y$.

(c) Une partie A de Y est fermée dans Y si, et seulement si, il existe une partie fermée B dans X telle que $A = B \cap Y$.

(d) Mais attention, les ouverts de Y ne sont pas les ouverts de X contenus dans Y . Donner un exemple.

(e) Si Y est ouvert dans X , alors une partie V de Y est ouverte dans Y si, et seulement si, elle est ouverte dans X .

EXERCICE 2 Montrer que la diagonale

$$\Delta_X := \{(x, y) \in X \times X \mid y = x\}$$

est une partie fermée de $X \times X$.

10.13 Espaces métriques équivalents

DEFINITION 1 Soit X un ensemble muni de deux métriques d et $\widetilde{d}$. On dit que les métriques d et $\widetilde{d}$ sont *équivalentes* si les topologies associées sont égales, i.e.

$$\mathfrak{T}(X,d) = \mathfrak{T}\left(X,\widetilde{d}\right) \ .$$

PROPOSITION *Pour que l'on ait $\mathfrak{T}(X,d) \subset \mathfrak{T}\left(X,\widetilde{d}\right)$, il faut et il suffit que, pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$B\left(x,\delta,\widetilde{d}\right) \subset B(x,\varepsilon,d) \ .$$

La condition est nécessaire, car $D(x,\varepsilon,d)$ étant ouvert dans (X,d) , donc aussi dans $\left(X,\widetilde{d}\right)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$B\left(x,\delta,\widetilde{d}\right) \subset D(x,\varepsilon,d) \subset B(x,\varepsilon,d) \ .$$

Réciproquement, si U est ouvert dans (X,d) , pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$, puis $\delta > 0$ tels que

$$B\left(x,\delta,\widetilde{d}\right) \subset B(x,\varepsilon,d) \subset U \ ,$$

ce qui prouve que U est ouvert dans $\left(X,\widetilde{d}\right)$. □

THEOREME *Pour tout $p \in [1,\infty]$, on a*

$$|\cdot|_\infty \leqslant |\cdot|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}} \cdot |\cdot|_\infty \quad \textit{sur } \mathbb{K}^n \ .$$

En particulier, les métriques sur $\mathbb{K}^n$ associées aux normes $|\cdot|_p$ sont équivalentes entre elles.

Pour tout $z \in \mathbb{K}^n$, on a

$$|z_k| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |z|_p \quad \text{pour tout } k = 1,\ldots,n \ ,$$

donc

$$|z|_\infty \leqslant |z|_p \ .$$

D'autre part

$$|z|_p = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |z|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \cdot |z|_\infty \ .$$

Ces inégalités montrent alors que

$$B\left(0, n^{-\frac{1}{p}}, |\cdot|_\infty\right) \subset B\left(0,1,|\cdot|_p\right) \subset B\left(0,1,|\cdot|_\infty\right) \ ,$$

d'où l'égalité des différentes topologies par la remarque 10.1.2 . ☐

REMARQUE 1 Les métriques d_1 , d_2 et d_∞ définies sur un produit d'espaces métriques (cf. exemple 5.1.4) sont équivalentes entre elles.

Cela découle du lemme 5.8, p. 116. ☐

REMARQUE 2 Dans ce qui suit nous allons voir que la plupart des notions rencontrées jusqu'à présent en liaison avec un espace métrique ne dépendent en fait que de la topologie, i.e. on peut les formuler en ne faisant intervenir que les ouverts de X . Elles sont donc identiques si les métriques sont équivalentes.

DEFINITION 2 Un espace topologique est un ensemble X muni d'un ensemble de parties $\mathfrak{T}$, i.e. $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(X)$, satisfaisant aux propriétés de la proposition 10.12.

C'est dans ce cadre général que l'on peut traiter les notions de convergence et de continuité.

REMARQUE 3 Par contre la notion de complétion d'un espace métrique dépend essentiellement de la métrique. Ce n'est donc pas une notion topologique.

EXEMPLE On peut montrer (exercice) que

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x,y) \longmapsto |\arctan x - \arctan y|$$

est une métrique sur $\mathbb{R}$ équivalent à la métrique habituelle, mais telle que $\mathbb{R}$ ne soit pas complet. En effet la suite $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour cette métrique, mais elle ne converge évidemment pas dans $\mathbb{R}$.

COROLLAIRE $\left(\mathbb{K}^n, |\cdot|_p\right)$ *est complet.*

Les inégalités du théorème montrent que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour $|\cdot|_p$ si, et seulement si, c'est une suite de Cauchy pour $|\cdot|_\infty$. Le résultat découle alors du corollaire 10.4. On peut aussi le prouver directement en utilisant le corollaire 10.14 qui suit. ☐

10.14 Convergence et topologie

Remarquons tout d'abord que la notion de voisinage ne dépend que de la topologie :

LEMME *Soient $x \in X$ et $V \subset X$. Pour que V soit un voisinage de x , il faut et il suffit qu'il existe un ouvert U de X tel que*

$$x \in U \subset V \ .$$

C'est immédiat, puisqu'un voisinage de x contient une boule ouverte $D(x, \varepsilon)$, et puisqu'un ouvert contenant x contient une boule fermée $B(x, \varepsilon)$. ☐

PROPOSITION *Soient $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de X et $x \in X$. Pour que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x , il faut et il suffit que, pour tout voisinage V de x , on ait $x_k \in V$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ sauf un nombre fini.*

C'est immédiat, puisqu'un voisinage de x contient une boule fermée $B(x, \varepsilon)$ et qu'une telle boule est un voisinage. ☐

COROLLAIRE *La convergence d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^n$ ne dépend pas de la norme $|\cdot|_p$ choisie.*

Pour que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit convergente dans $\left(\mathbb{K}^n, |\cdot|_p\right)$, il faut et il suffit que les suites des composantes $(x_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$, pour $j = 1, \ldots, n$, soient convergentes dans $\mathbb{K}$. On a alors

$$\lim_k x_k = (\lim_k x_{k,j})_{j=1,\ldots,n} \ .$$

La première partie découle du théorème 10.13. Quant à la seconde, il suffit de constater que, pour $x \in \mathbb{K}^n$, on a

$$|x_k - x|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_{k,j} - x_j| \ .$$

Cela découle aussi par récurrence du théorème 5.8, p. 116. ☐

10.15 Continuité et topologie

PROPOSITION *Soient X, Y des espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.*

(i) Pour que f soit continue en $x \in X$, il faut et il suffit que, pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que

$$f(U) \subset V \ .$$

(ii) Pour que f soit continue, il faut et il suffit que pour tout ouvert, resp. tout fermé B de Y , la partie $\overset{-1}{f}(B)$ soit ouverte, resp. fermée dans X .

Démonstration de (i) Ce n'est qu'une reformulation de la définition 7.1.2, p. 172, et de celle d'un voisinage.

Démonstration de (ii) Supposons tout d'abord que f est continue et soit B un ouvert de Y . Si $x \in \overset{-1}{f}(B)$, on a $f(x) \in B$, donc B est un voisinage de $f(x)$. Ainsi $f(U) \subset B$ pour un certain voisinage U de x , donc $U \subset \overset{-1}{f}(B)$, ce qui montre que $\overset{-1}{f}(B)$ est un voisinage de x . Ceci prouve que $\overset{-1}{f}(B)$ est ouverte.

Réciproquement, soit $x \in X$ et V un voisinage de $f(x)$. Par le lemme 10.14 on peut supposer que V est ouvert. Mais $x \in \overset{-1}{f}(V)$ et comme $\overset{-1}{f}(V)$ est ouvert, c'est un voisinage de x et $f\left(\overset{-1}{f}(V)\right) \subset V$. Ceci prouve que f est continue en x .

Finalement, il suffit de constater que

$$\overset{-1}{f}(\complement B) = \complement \overset{-1}{f}(B) \ .$$

□

EXEMPLE 1 Les parties

$$B(x,r) = d_X(x,\cdot)^{-1}([0,r]) \quad \text{et} \quad D(x,r) = d_X(x,\cdot)^{-1}([0,r[)$$

sont respectivement fermée et ouverte dans X .

En effet $[0,r]$ est fermé, $[0,r[$ est ouvert dans $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in X$, la fonction

$$d_X(x,\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : y \longmapsto d_X(x,y) \ ,$$

est continue (cf. exemple 7.3.6).

EXEMPLE 2 Si $A \subset X$ et $B \subset Y$ sont des parties ouvertes, resp. fermées, alors

$$A \times Y \quad , \quad X \times B \quad \text{et} \quad A \times B$$

sont ouvertes, resp. fermées dans $X \times Y$.

D'après l'exemple 7.2.3, p. 174, les applications

$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \longrightarrow X : (x,y) \longmapsto x \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}_2 : X \times Y \longrightarrow Y : (x,y) \longmapsto y$$

sont continues et on a

$$A \times Y = \overset{-1}{\mathrm{pr}_1}(A) \quad , \quad X \times B = \overset{-1}{\mathrm{pr}_2}(B) \quad \text{et} \quad A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \ .$$

□

EXEMPLE 3 $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{C}$.

En effet, on a

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\} = \overset{-1}{\operatorname{Im}}(\{0\}) = \overset{-1}{\operatorname{Im}}(B(0,0)) \ .$$

□

EXERCICE Soient X, Y des espaces métriques et $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{C}$, $h : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions continues.

(a) Montrer que, pour toute partie fermée A de $X \times Y$ l'ensemble

$$\{(x,y) \in A \mid f(x) \cdot g(y) = h(x,y)\}$$

est fermé dans $X \times Y$.

(b) Montrer que pour toute partie ouverte O de $X \times Y$ les parties $\mathrm{pr}_1(O)$ et $\mathrm{pr}_2(O)$ sont ouvertes dans X respectivement dans Y .

(c) Construire une partie fermée H de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{pr}_1(H) = \mathrm{pr}_2(H) = \mathbb{R}_+^*$.

10.16 Adhérence d'une partie

DEFINITION Pour toute partie A de X et $x \in X$, on dit que x est *adhérent* à A si, pour tout voisinage V de x (dans X) , on a $V \cap A \neq \emptyset$. On désigne par $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A et on dit que c'est l' *adhérence* de A . On désigne par $\operatorname{Fr}(A)$ l'ensemble des points de X qui sont à la fois adhérent à A et $\complement A$, et on dit que c'est la *frontière* de A .

On a

$$\complement\overline{A} = \left(\complement A\right)^{\circ} \quad \text{et} \quad \operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement A} \ .$$

PROPOSITION *Soit A une partie de X .*

(i) *A° est le plus grand ouvert de X contenu dans A .*

(ii) *L'adhérence $\overline{A}$ de A est le plus petit fermé contenant A .*

(iii) *Pour qu'une partie A de X soit fermée, il faut et il suffit que $A = \overline{A}$.*

Démonstration de (i) On a évidemment $A^{\circ} \subset A$. Montrons que A° est ouvert. Si $x \in A^{\circ}$, il existe par le lemme 10.14 un voisinage ouvert V de x contenu dans A . Comme V est voisinage de chacun de ses points, on a $V \subset A^{\circ}$, ce qui montre que A° est un voisinage de x à nouveau par le lemme 10.14.

Finalement, si U est un ouvert contenu dans A , alors tout point de U est un point intérieur de U , donc aussi de A , ce qui montre que $U \subset A^{\circ}$.

Démonstration de (ii) C'est évident par complémentarité, puisque

$$\complement\overline{A} = \left(\complement A\right)^{\circ} .$$

Démonstration de (iii) C'est immédiat. □

THEOREME *Soit A une partie de X . Pour que A soit fermée, il faut et il suffit que, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de A convergente dans X , on ait $\lim_k x_k \in A$.*

Si A est fermée et si $\lim_k x_k \in \complement A$, on a $x_k \in \complement A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ sauf un nombre fini par la proposition 10.14, puisque $\complement A$ est ouvert, donc un voisinage de $\lim_k x_k$.

Réciproquement nous devons montrer que $\complement A$ est ouvert, donc par contraposition que si $\complement A$ n'est pas un voisinage de x , alors $x \in A$. Mais, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la boule fermée $B\left(x, \frac{1}{k}\right)$ n'étant pas contenue dans $\complement A$, il existe $x_k \in B\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap A$. La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est contenue dans A et $d(x_k, x) \leqslant \frac{1}{k}$, donc $x = \lim_k x_k \in A$. □

REMARQUE Cette proposition généralise la proposition et le corollaire 5.9, p. 118. En effet, $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{C}$, et $\mathbb{R}_+$, ainsi que $[a, b]$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$, sont fermés dans $\mathbb{R}$.

COROLLAIRE *Toute partie fermée d'un espace métrique complet est un espace métrique complet pour la métrique induite.*

C'est immédiat. □

EXERCICE 1 Montrer que pour toutes parties A, B de X , on a

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad (A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ} \ .$$

EXERCICE 2 Construire deux ensembles A et B dans $\mathbb{R}$ tels que les parties

$$A \cap B \ , \ \overline{A} \cap B \ , \ A \cap \overline{B} \ , \ \overline{A} \cap \overline{B} \ , \ \overline{A \cap B} \ , \ A^{\circ} \cap B \ , \ A \cap B^{\circ} \text{ et } A^{\circ} \cap B^{\circ}$$

soient toutes différentes.

EXERCICE 3 Soient A, B des parties de X . Montrer

(a) La fonction

$$d(\cdot, A) : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto d(x, A) := \inf\nolimits_{y \in A} d(x, y)$$

est uniformément continue.

(b) **Lemme d'Urysohn** Si A et B sont des parties fermées disjointes, il existe une fonction continue

$$f : X \longrightarrow [0, 1]$$

telle que

$$f = 0 \quad \text{sur } A \quad \text{et} \quad f = 1 \quad \text{sur } B \ .$$

(c) Soient Y un espace métrique et $\mathcal{C}(X, Y) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ continue}\}$. Si $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ et $f = g$ sur A , alors

$$f = g \quad \text{sur } \overline{A} \ .$$

(d) Les quatre parties suivantes

$$\overline{A}$$

$$\{x \in X \mid d(x, A) = 0\} \ ,$$

$$\left\{x \in X \mid \exists\, (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A \text{ tel que } x = \lim\nolimits_k x_k\right\}$$

et

$$\{x \in X \mid f(x) \leqslant \sup f(A) \ \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})\}$$

sont égales.

10.17 Compacité

Le but de ce paragraphe est de déterminer les parties fermées d'un espace métrique qui satisfont au théorème de Bolzano-Weierstrass 5.11, i.e. telles que toute suite d'une telle partie possède une sous-suite convergente. Dans le cas de $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{R}$, ce sont les parties fermées bornées qui ont cette propriété.

DEFINITION 1 Soit K une partie de X . On dit qu'une famille $(U_j)_{j\in J}$ de parties de X est un *recouvrement* de K si l'on a

$$K \subset \bigcup_{j\in J} U_j \ .$$

On dit que c'est un *recouvrement ouvert* si en plus chaque U_j est ouvert.

On dit que K est *compacte* si tout recouvrement ouvert $(U_j)_{j\in J}$ de K contient un sous-recouvrement fini de K , i.e. s'il existe une partie finie $I \subset J$ telle que

$$K \subset \bigcup_{j\in I} U_j \ .$$

REMARQUE 1 La notion de compacité ne dépend que de la topologie de X .

EXEMPLE 1 Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de X convergente vers x . Alors

$$\{x\} \cup \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

est une partie compacte.

Soit $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de cette partie. Il existe un $j_0 \in J$ tel que $x \in U_{j_0}$, et comme U_{j_0} est ouvert, donc un voisinage de x , on a $x_k \in U_{j_0}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ sauf un nombre fini par la proposition 10.14. Mais l'ensemble fini des $x_k \notin U_{j_0}$ est évidemment recouvert par un ensemble fini de U_j , d'où notre assertion. $\square$

EXEMPLE 2 Soient K une partie compacte de X et L une partie fermée de X contenue dans K . Alors L est compacte.

Soit $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de L . Puisque L est fermée dans X , l'ensemble $\complement L$ est ouvert. Comme $(U_j)_{j\in J} \cup \left\{\complement L\right\}$ est un recouvrement ouvert de K , il contient un sous-recouvrement $(U_j)_{j\in I} \cup \left\{\complement L\right\}$ fini de K , puisque cette partie est compacte. Il est alors clair que $(U_j)_{j\in I}$ est sous-recouvrement fini de L . $\square$

EXEMPLE 3 Si $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante des parties ouvertes de X , alors $U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ n'est pas compacte. Par exemple tout intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

En effet $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de U , mais pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, on a

$$\bigcup_{k\in I} U_k \subset U_{\max I} \neq U_{1+\max I} \subset U \ ,$$

donc $(U_k)_{k\in I}$ n'est pas un sous-recouvrement. Pour l'exemple il suffit de constater que

$$]a,b[= \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left]a+\frac{1}{k}, b-\frac{1}{k}\right[\ .$$

□

EXERCICE 1 Soient X, Y des espaces métriques et $K \subset X$, $L \subset Y$. Montrer que $K \times L$ est une partie compacte dans $X \times Y$ si K et L sont des parties compactes. La réciproque est vraie si K et L sont des parties non-vide.

DEFINITION 2 Si A est une partie de X , on dit que

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y\in A} d(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

est le *diamètre* de A .

Si A est contenue dans une boule fermée de rayon r , alors $\operatorname{diam}(A) \leqslant 2r$. Si A est de diamètre $d \in \mathbb{R}_+$, alors A est contenue dans une boule de rayon d .

Cette dernière assertion ne peut pas être améliorée comme le montre l'exemple d'un espace métrique discret X (cf. exemple 10.12.6) ; on a $\operatorname{diam}(X) = 1$ et $B(x,1)$ est la plus petite boule qui contienne X , quel que soit $x \in X$.

DEFINITION 3 On dit qu'une partie K de X est *précompacte* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini $(A_k)_{k=0,\ldots,m}$ de K tel que $\operatorname{diam}(A_k) \leqslant \varepsilon$ pour tout $k = 0,\ldots,m$.

Il est équivalent de dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite finie de points $(x_k)_{k=0,\ldots,m}$ dans X telle que $(B(x_k,\varepsilon))_{k=0,\ldots,m}$ soit un recouvrement de K , i.e.

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{m} B(x_k,\varepsilon) \ .$$

REMARQUE 2 Une partie compacte est précompacte.

En effet la famille $(D(x,\varepsilon))_{x\in K}$ est trivialement un recouvrement ouvert de K . Il existe donc une suite finie de points $(x_k)_{k=0,\ldots,m}$ dans K telle que $(D(x_k,\varepsilon))_{k=0,\ldots,m}$ soit encore un recouvrement de K . Il est alors clair que $(B(x_k,\varepsilon))_{k=0,\ldots,m}$ est un recouvrement de K . □

REMARQUE 3 Une partie précompacte est de diamètre fini.

Il existe une suite finie $(x_k)_{k=0,\ldots,m} \subset X$ telle que $(B(x_k,1))_{k=0,\ldots,m}$ soit un recouvrement de K . Pour tout $x,y \in K$, il existe $k,l \in \{0,\ldots,m\}$ tels que

$$x \in B(x_k,1) \quad \text{et} \quad y \in B(x_l,1) \ .$$

On en déduit que

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_k) + d(x_k,x_l) + d(x_l,y) \leqslant 2 + \max_{p,q=0,\ldots,m} d(x_p,x_q) < \infty \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

THEOREME *Soit K une partie de X . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) K est compacte.

(ii) ***Propriété de Bolzano-Weierstraß*** *Toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de K possède une sous-suite convergente dans K .*

(iii) K est un espace métrique complet (pour la métrique induite) et précompact.

(i)⇒(ii) Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de K , il nous suffit de montrer qu'il existe $x \in K$ tel que, pour tout voisinage ouvert V de K , on ait $x_k \in V$ pour une infinité de $k \in \mathbb{N}$. En effet, on peut alors construire par récurrence une sous-suite convergente vers x , car pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité de x_k dans $B\left(x, \frac{1}{l}\right)$.

Nous allons prouver cette assertion par l'absurde. Admettons donc que, pour tout $x \in K$, il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que $x_k \in V_x$ seulement pour un nombre fini de k . Mais comme $K \subset \bigcup_{x\in K} V_x$, car $x \in V_x$, il existe une partie finie $I \subset K$ telle que $K \subset \bigcup_{x\in I} V_x$, puisque K est compacte. On a donc $x_k \in K$ seulement pour un nombre fini de k , ce qui est absurde.

(ii)⇒(iii) Montrons tout d'abord que K est complet. Soit donc $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans K . Par (ii) il existe une sous-suite $\left(x_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ convergente vers $x \in K$. Il nous suffit de prouver que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_k,x_l) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k,l \geqslant N \ ,$$

donc $d\left(x_k, x_{\alpha(l)}\right) \leqslant \varepsilon$ pour tout $k,l \geqslant N$, puisque $\alpha(l) \geqslant l \geqslant N$. On a alors

$$d(x_k,x) = \lim_l d\left(x_k, x_{\alpha(l)}\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geqslant N$$

puisque $d(x_k,\cdot)$ est continue (cf. exemple 7.3.6).

Si K n'est pas précompacte, il existe $\varepsilon > 0$ tel que K ne puisse pas être recouvert par un nombre fini d'ensemble de diamètre $\leqslant \varepsilon$. Par récurrence il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$d(x_l,x_k) > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } l > k \ .$$

En effet, pour tout $l \in \mathbb{N}$, si $(x_k)_{k=0,\ldots,l}$ est déjà construite, $\left(B\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)_{k=0,\ldots,l}$ n'est pas un recouvrement de K ; il existe donc

$$x_{l+1} \in K \smallsetminus \bigcup_{k=0}^{l} B\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right) \ ,$$

donc tel que $d(x_{l+1},x_k) > \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $k < l+1$. Par (ii) il existe alors une sous-suite $\left(x_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ convergente. C'est donc une suite de Cauchy (proposition 5.12), ce qui est absurde, puisque $d\left(x_{\alpha(l+1)}, x_{\alpha(l)}\right) > \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

(iii)⇒(i) Soit $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de K ne contenant aucun sous-recouvrement fini. Nous allons construire une suite décroissante $(A_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de parties de K telle que chaque A_l ne possède pas de sous-recouvrement fini de $(U_j)_{j\in J}$ et

$$\operatorname{diam}(A_l) \leqslant 2^{-l} \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{N}^* \ .$$

On pose $A_0 := K$. Supposons maintenant que, pour $l \in \mathbb{N}$, la partie A_l ait été construite. Puisque K est précompacte, donc aussi $A_l \subset K$, il existe un recouvrement fini $(A_{l,k})_{k=0,\ldots,m_l}$ de A_l tel que $\operatorname{diam}(A_{l,k}) \leqslant 2^{-l-1}$. Comme A_l ne possède pas par hypothèse de sous-recouvrement fini dans $(U_j)_{j \in J}$, il existe un indice $\alpha(l)$ tel qu'il en soit de même de $A_{l+1} := A_{l,\alpha(l)} \cap A_l$. On a évidemment

$$\operatorname{diam}(A_{l+1}) \leqslant \operatorname{diam}\left(A_{l,\alpha(l)}\right) \leqslant 2^{-l-1} .$$

Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_l \in A_l$, puisque $\emptyset$ possède un sous-recouvrement fini de $(U_j)_{j \in J}$! Comme $A_{l+1} \subset A_l$, on a $a_{l+1}, a_l \in A_l$, donc

$$d(a_{l+1}, a_l) \leqslant 2^{-l} .$$

Pour tout $l > k \geqslant 1$, on a alors

$$d(a_l, a_k) \leqslant \sum_{j=k}^{l-1} d(a_{j+1}, a_j) \leqslant \sum_{j=k}^{l-1} 2^{-j} \leqslant 2^{-k} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-k+1} .$$

Ceci montre que $(a_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans K . Puisque K est complet, soit

$$a := \lim_l a_l \in K .$$

Mais $a \in U_{j_\infty}$ pour un certain $j_\infty \in J$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset U_{j_\infty}$. Soit alors $l_\infty \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(a_{l_\infty}, a) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad 2^{-l_\infty} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Pour tout $b \in A_{l_\infty}$, on a

$$d(b, a_{l_\infty}) \leqslant \operatorname{diam}(A_{l_\infty}) \leqslant 2^{-l_\infty} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} ,$$

donc

$$d(b, a) \leqslant d(b, a_{l_\infty}) + d(a_{l_\infty}, a) \leqslant \varepsilon ,$$

i.e. $A_{l_\infty} \subset B(a, \varepsilon) \subset U_{j_\infty}$, ce qui est absurde, puisque A_{l_∞} ne possède pas de sous-recouvrement fini de $(U_j)_{j \in J}$. ☐

COROLLAIRE *Une partie compacte K est fermée.*

Si une suite de K est convergente dans X , alors c'est une suite de Cauchy (proposition 5.12). Elle est donc convergente dans K , puisque K est complète par (iii). ☐

EXERCICE 2 Théorème de Dini Soient K une partie compacte dans un espace métrique X et $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues sur X . Si cette suite converge ponctuellement vers 0 sur K , alors elle converge uniformément sur K vers 0 .

EXERCICE 3 On dit qu'une famille de parties $(A_j)_{j \in J}$ possède la *propriété d'intersection finie* si, pour toute partie finie $I \subset J$, on a

$$\bigcap_{j \in I} A_j \neq \emptyset .$$

(a) Montrer que la suite $\left(\left]0, \frac{1}{k}\right]\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ possède la propriété d'intersection finie, mais que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{k}\right] = \emptyset \ .$$

(b) Soient K une partie compacte d'un espace métrique X et $(A_j)_{j\in J}$ une famille de parties fermées dans K ayant la propriété d'intersection finie. Montrer que

$$\bigcap_{j\in I} A_j \neq \emptyset \ .$$

EXERCICE 4 Soient Y une partie d'un espace métrique X , munie de la métrique induite, et K une partie de Y . Montrer que K est une partie compacte de Y si, et seulement si, elle est compacte dans X .

10.18 Théorème de Heine-Borel

DEFINITION Une partie A d'un espace normé F est dite *bornée* si l'on a

$$\sup_{f\in A} \|f\| < \infty \ ,$$

i.e. s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que l'on ait $\|f\| \leqslant M$ pour tout $f \in A$.

Tenant compte de la caractérisation d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstraß (théorème 10.17) le théorème qui suit généralise le théorème de Bolzano-Weierstraß 5.11.

THEOREME *Pour qu'une partie $K \subset \mathbb{K}^n$ soit compacte, il faut et il suffit que K soit fermée et bornée (pour l'une des normes $|\cdot|_p$).*

La condition est nécessaire par le corollaire 10.17 et la remarque 10.17.3, car si $z_0 \in K$ on a

$$|z|_p \leqslant |z - z_0|_p + |z_0|_p \leqslant \operatorname{diam}_p(K) + |z_0|_p < \infty \quad \text{pour tout } z \in K \ .$$

Réciproquement soit $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de K . D'après le théorème 10.13 on a

$$\sup_k |z_{k,j}| \leqslant \sup_k |z_k|_\infty \leqslant \sup_{z\in K} |z|_\infty \leqslant \sup_{z\in K} |z|_p < \infty \quad \text{pour tout } j = 0, \ldots, n \ .$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass 5.11 la suite $(z_{k,1})_{k\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite $\left(z_{\alpha_1(l),1}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ convergente. La suite $\left(z_{\alpha_1(l),2}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ possède elle aussi une sous-suite $\left(z_{\alpha_1\circ\alpha_2(l),2}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ convergente et la suite $\left(z_{\alpha_1\circ\alpha_2(l),1}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ est convergente. Par récurrence on obtient ainsi une sous-suite α de $\mathbb{N}$ telle que les suites $\left(z_{\alpha(l),j}\right)_{l\in\mathbb{N}}$, pour $j = 0, \ldots, n$, soient convergentes. Le corollaire 10.14 montre alors que la sous-suite $\left(z_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ de $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. On a en outre $\lim_l z_{\alpha(l)} \in K$ puisque K est fermée (théorème 10.16). Ceci finit de prouver la condition de Bolzano-Weierstrass du théorème 10.17, donc que K est compacte . $\square$

EXEMPLE Les boules fermées $B\left(z, r, |\cdot|_p\right)$ de $\mathbb{K}^n$ pour $z \in \mathbb{K}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$ sont compactes. Il en est de même des intervalles fermés $[a, b]$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$.

COROLLAIRE *Soit K une partie compacte non-vide de $\mathbb{R}$. Alors*

$$\sup K \ , \ \inf K \in K \quad \textit{et} \quad K \subset [\inf K, \sup K] \ .$$

Puisque K est bornée, on a

$$-\infty > \inf K \leqslant \sup K < \infty \ .$$

D'autre part il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croissante (resp. décroissante) de K telle que

$$\sup K = \sup_k x_k = \lim_k x_k \quad , \text{resp.} \quad \inf K = \inf_k x_k = \lim_k x_k \ .$$

Puisque K est fermée, on a $\lim_k x_k \in K$, d'où le résultat. $\square$

REMARQUE Ce théorème est faux pour tout espace de Banach de dimension infinie. On peut montrer que si la boule unité d'un espace de Banach est compacte, alors cet espace est de dimension finie (théorème de Riesz, cf. Analyse fonctionnelle). Dans certains cas particuliers il est facile de montrer que la boule unité n'est pas compacte (cf. exercice 2 ci-dessous).

EXERCICE 1 Montrer que la partie

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \text{ et } x_n \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

est compacte.

EXERCICE 2 Voici un exemple simple montrant que le théorème de Heine-Borel n'est pas valable en dimension infinie.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}([0,1])$ telle que

$$\|f_k\|_\infty = 1 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

et

$$\|f_k - f_l\|_\infty = 1 \quad \text{pour tout } k, l \in \mathbb{N} \text{ tels que } k \neq l \ .$$

(b) Montrer que la boule unité

$$\{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \|f\|_\infty \leqslant 1\}$$

n'est pas compacte dans l'espace normé $\mathcal{C}([0,1])$, bien qu'elle soit fermée et bornée.

10.19 Image d'une partie compacte

THEOREME *Soient X, Y des espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si K est une partie compacte de X , alors $f(K)$ est une partie compacte de Y .*

Si $(U_j)_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de $f(K)$, alors $\left(\overset{-1}{f}(U_j)\right)_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de K d'après la proposition 10.15.(ii). Il contient donc un sous-recouvrement fini $\left(\overset{-1}{f}(U_j)\right)_{j\in I}$. Comme $f\left(\overset{-1}{f}(U_j)\right) \subset U_j$, il est clair que $(U_j)_{j\in I}$ est un sous-recouvrement fini de $f(K)$. □

Nous pouvons maintenant généraliser le théorème de Weierstraß 7.10.

COROLLAIRE *Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et K une partie compacte non-vide de X . Alors f est bornée sur K et atteint son maximum, ainsi que son minimum dans K , i.e. il existe $x, y \in K$ tels que*

$$f(x) = \sup f(K) \quad \textit{et} \quad f(y) = \inf f(K) \ .$$

Si K est vide le résultat est trivial. Si $K \neq \emptyset$, la partie $f(K)$ est compacte dans $\mathbb{R}$ par la proposition, d'où le résultat par le corollaire 10.18. □

EXEMPLE Soit K une partie compacte non-vide de X . Alors il existe $x, y \in K$ tels que

$$\operatorname{diam}(K) = d(x, y) \ .$$

Rappelons tout d'abord que la fonction

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \longmapsto d(x, y)$$

est continue (cf. exemple 7.3.6).

Comme $K \times K$ est compacte par l'exercice 10.17.1, la fonction d y atteint son maximum, i.e. il existe $x, y \in K$ tels que

$$\operatorname{diam}(K) = \sup_{u,v\in K} d(u, v) = d(x, y) \ .$$

□

EXERCICE 1 On dit qu'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tend vers 0 à l'infini , si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K de X telle que l'on ait

$$|f| \leqslant \varepsilon \quad \text{sur } X \setminus K \ .$$

On désigne par $\mathcal{C}^0(X)$ l'ensemble de ces fonctions. Montrer que $\mathcal{C}^0(X)$ est une partie fermée de $\mathcal{C}^b(X)$.

EXERCICE 2 Soient $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue telle que $\{F = 0\} \neq \emptyset$ et $p \in [1, \infty]$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un $y \in \{F = 0\}$ tel que

$$|x - y|_p = d_p\left(x, \{F = 0\}\right) \ .$$

On utilisera l'exercice 10.16.3.a, ainsi qu'une boule fermée suffisamment grande.

10.20 Homéomorphismes

DEFINITION Soient X, Y des espaces métriques. On dit qu'une application bijective $f : X \longrightarrow Y$ est un *homéomorphisme* si f et $\overset{-1}{f}$ sont continues.

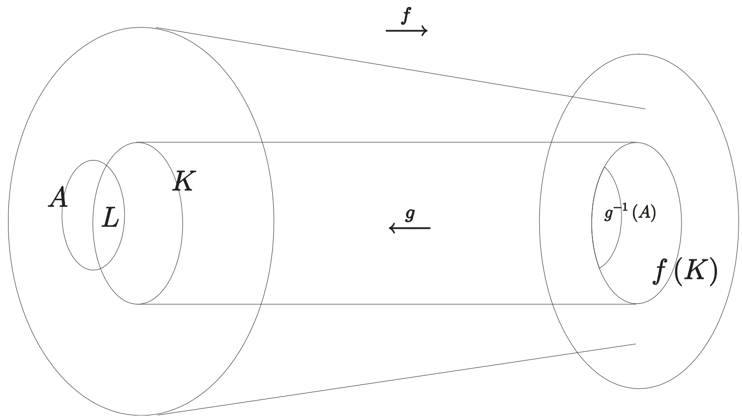
D'après la proposition 10.15.ii cela signifie que les parties ouvertes, resp. fermées, de X et Y sont en correspondance biunivoque grâce à f et $\overset{-1}{f}$.

THEOREME *Soient X, Y des espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ une application continue et K une partie compacte de X telle que $f_{|K}$ soit injective. Alors*

$$\left(f_{|K}\right)^{-1} : f(K) \longrightarrow X$$

est continue. En particulier $f : K \longrightarrow f(K)$ est un homéomorphisme.

Posons $g := \left(f_{|K}\right)^{-1} : f(K) \longrightarrow X$. D'après la proposition 10.15.(ii), il nous suffit de montrer que, pour toute partie fermée A de X , la partie $g^{-1}(A)$ est fermée dans $f(K)$.



La partie

$$L := A \cap K$$

est fermée dans X , puisque K est fermée dans X par le corollaire 10.17. Comme L est contenue dans K , c'est une partie compacte de X par l'exemple 10.17.2. Le théorème 10.19 montre alors que $f(L)$ est une partie compacte de Y , et par suite fermée dans Y par le corollaire 10.17. Il suffit alors de remarquer que

$$g^{-1}(A) = f(L) = f(L) \cap f(K)$$

est une partie fermée de $f(K)$ par l'exercice 10.12.1.c. □

Plus simplement

SCOLIE *Si X est compact et $f : X \longrightarrow Y$ est une application bijective continue, alors l'image $Y = f(X)$ est compacte et $\overset{-1}{f} : Y \longrightarrow X$ est continue.*

Nous pouvons maintenant généraliser le théorème de la fonction réciproque 7.11.

COROLLAIRE *Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application continue bijective et $(K_j)_{j\in J}$ une famille de parties compactes de X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un homéomorphisme et on a $X = \bigcup_{j\in J} K_j^\circ$.*

(ii) *On a $X = \bigcup_{j\in J} K_j^\circ$ et chaque partie $f(K_j^\circ)$ est ouverte dans Y .*

(iii) *On a $Y = \bigcup_{j\in J} f(K_j)^\circ$.*

(i) ⇒ (ii) En effet $\overset{-1}{f}$ est continue, $f(K_j^\circ) = \left(\overset{-1}{f}\right)^{-1}(K_j^\circ)$ et K_j° est ouvert dans X .

(ii) ⇒ (iii) On a évidemment

$$Y = f(X) = \bigcup_{j\in J} f(K_j^\circ) \subset \bigcup_{j\in J} f(K_j)^\circ \subset Y \ .$$

(iii) ⇒ (i) Remarquons tout d'abord que, pour tout $j \in J$, l'application f est un homéomorphisme de K_j sur $f(K_j)$, donc que

$$\overset{-1}{f}_{|f(K_j)} : f(K_j) \longrightarrow K_j$$

est continue. Pour prouver la continuité de $\overset{-1}{f}$ soit $y \in Y$. Pour toute suite convergente $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de Y avec $y = \lim_k y_k$, il existe $j \in J$ tel que l'on ait $y \in f(K_j)^\circ$. Ceci montre que $f(K_j)$ est un voisinage de y et la proposition 10.14 montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait $y_k \in f(K_j)$ pour tout $k \geqslant N$. On a alors

$$\lim_k \overset{-1}{f}(y_k) = \lim_{k\geqslant N} \overset{-1}{f}_{|f(K_j)}(y_k) = \overset{-1}{f}_{|f(K_j)}(y) = \overset{-1}{f}(y) \ .$$

□

EXERCICE Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \longmapsto (e^x + y, e^y + y)$.

(a) Montrer que Φ est continue et injective.

(b) Déterminer l'image par Φ des parties de $\mathbb{R}^2$ définies par les équations

(i)
$$x = a \quad \text{pour } a \in \mathbb{R} \ .$$

(ii)
$$y = b \text{ pour } b \in \mathbb{R} \ .$$

(iii) Déterminer l'image $Y := \Phi(\mathbb{R}^2)$ de Φ .

(iv) Montrer que Φ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur Y .

On montrera tout d'abord que la fonction

$$f := \exp + \mathrm{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto e^x + x$$

est un homéomorphisme.

10.21 Applications uniformément continues

Voici une généralisation du théorème de Heine 9.4.

PROPOSITION *Soient X, Y des espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si K est une partie compacte de X , alors $f_{|K}$ est uniformément continue.*

Etant donné $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in K$, il existe $\delta_x > 0$ tel que

$$y \in X \ , \ d(y, x) \leqslant \delta_x \quad \Rightarrow \quad d(f(y), f(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Comme $\left(D\left(x, \frac{1}{2} \cdot \delta_x\right)\right)_{x \in K}$ est un recouvrement ouvert de K , il existe une suite finie $(x_k)_{k=0,\ldots,m}$ de K telle que

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{m} B\left(x_k, \frac{1}{2} \cdot \delta_{x_k}\right) \ .$$

Posons $\delta := \frac{1}{2} \cdot \min_{k=0,\ldots,m} \delta_{x_k}$. Pour tout $x, y \in K$ tels que $d(x, y) \leqslant \delta$, il existe $k \in \{0, \ldots, m\}$ tel que $x \in B\left(x_k, \frac{1}{2} \cdot \delta_{x_k}\right)$ et on a $d(x, y) \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2} \cdot \delta_{x_k}$. Ainsi

$$d(y, x_k) \leqslant d(y, x) + d(x, x_k) \leqslant \delta_{x_k}$$

et

$$d(x, x_k) \leqslant \frac{1}{2} \cdot \delta_{x_k} \leqslant \delta_{x_k} \ ,$$

donc

$$d(f(y), f(x_k)), d(f(x), f(x_k)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

On en déduit que

$$d(f(x), f(y)) \leqslant d(f(x), f(x_k)) + d(f(x_k), f(y)) \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. ——— □

DEFINITION On dit qu'une partie A de X est *dense* (dans X) si $\overline{A} = X$.

D'après l'exercice 10.16.2.(c), cela signifie que pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de A telle que $x = \lim_k x_k$.

EXEMPLE 1 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Plus généralement, $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{Q}^n + i \cdot \mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{C}^n$.

L'ensemble $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est aussi dense dans $\mathbb{R}$. En particulier

$$\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \ .$$

EXEMPLE 2 Pour tout $p \in [1, \infty]$, $z \in \mathbb{K}^n$ et $r > 0$, la boule ouverte $D\left(z, r, |\cdot|_p\right)$ est dense dans la boule fermée $B\left(z, r, |\cdot|_p\right)$. En particulier, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, l'intervalle ouvert $]a, b[$ est dense dans l'intervalle fermé $[a, b]$.

On a

$$\mathrm{Fr}\left(D\left(z,r,|\cdot|_p\right)\right)=\mathrm{Fr}\left(B\left(z,r,|\cdot|_p\right)\right)=\left\{w\in\mathbb{K}^n\ \middle|\ |w|_p=r\right\}\quad\text{dans }\mathbb{K}^n$$

et

$$\mathrm{Fr}\left(]a,b[\right)=\mathrm{Fr}\left([a,b]\right)=\{a,b\}\quad\text{dans }\mathbb{R}\ .$$

LEMME *Soient X,Y des espaces métriques et $f:X\longrightarrow Y$ une application uniformément continue. Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X , alors $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans Y .*

C'est immédiat. □

THEOREME *Soient X,Y des espaces métriques, Z une partie dense de X et $f:Z\longrightarrow Y$ une application uniformément continue. Si Y est complet, alors il existe une unique application continue $\widetilde{f}:X\longrightarrow Y$ qui prolonge f et cette application est uniformément continue.*

Si $g:X\longrightarrow Y$ est une application continue qui prolonge f , pour tout $x\in X$ et toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de Z convergente vers x , on a

$$g(x)=\lim_k g(x_k)=\lim_k f(x_k)\ .$$

Ceci prouve l'unicité. On peut aussi le prouver en remarquant que si g_1 et g_2 sont deux applications continues qui prolongent f , alors l'ensemble

$$E:=\{x\in X\mid g_1(x)=g_2(x)\}=(g_1,g_2)^{-1}(\Delta_Y)$$

est un ensemble fermé contenant Z , puisque Δ_Y est une partie fermée de $Y\times Y$ (cf. exercice 10.12.2). On a donc

$$X=\overline{Z}\subset E\subset X\ ,$$

i.e. $g_1=g_2$.

Pour l'existence, remarquons qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de Z convergente vers $x\in X$, puisque Z est dense dans X . Une telle suite est une suite de Cauchy par la proposition 6.3. Le lemme montre donc que $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans Y . Puisque Y est complet, on peut définir

$$\widetilde{f}(x):=\lim_k f(x_k)\ ,$$

car ceci ne dépend pas du choix de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En effet, si $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une autre suite de Z telle que $\lim_k y_k=x$, on a $\lim_k d(y_k,x_k)=0$ et la continuité uniforme de f montre que $\lim_k d(f(y_k),f(x_k))=0$. Si $x\in Z$, on a évidemment

$$\widetilde{f}(x)=f(x)\ .$$

Il suffit alors de passer à la limite dans les inégalités définissant la continuité uniforme pour finir de prouver le théorème. □