

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg



ANALYSE

Claude Portenier

Marburg,

Semestre d'hiver 2001/02,
Semestre d'été 2002,
Semestre d'hiver 2002/03 et 2005/2006.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iii
INDEX	xiii
1 THÉORIES FORMELLES	1
1.1 Théories formelles	2
1.2 Théories logiques ou calcul des propositions	3
1.3 Interprétation d'une théorie logique	7
1.4 Méthodes de démonstration	8
1.5 Théories quantifiées ou calcul des prédicats	12
1.6 Théories égalitaires	15
2 THÉORIE DES ENSEMBLES	17
2.1 Ensembles et appartenance	18
2.2 Ensembles à un ou deux éléments	20
2.3 L'ensemble des parties	21
2.4 L'ensemble réunion d'ensembles	22
2.5 Intersection et produit de deux ensembles	23
2.6 La notion d'application	26
2.7 Application réciproque	29

TABLE DES MATIÈRES

2.8	La notion de famille	32
3	NOMBRES ENTIERS NATURELS	35
3.1	Principe de récurrence	36
3.2	Propriétés élémentaires de \mathbb{N}	38
3.3	Relations d'ordre	40
3.4	Ensembles finis et infinis	42
3.5	Généralisation du principe de récurrence	44
3.6	Addition dans \mathbb{N}	45
3.7	Le comptage	48
3.8	Multiplication dans \mathbb{N}	50
3.9	Somme et produit d'une suite	52
3.10	Permutations	54
3.11	Coefficients binomiaux	56
3.12	Formule du binôme et somme géométrique	58
4	CONSTRUCTION DES NOMBRES RÉELS	61
4.1	Partitions	62
4.2	Relations d'équivalence	63
4.3	Groupes	65
4.4	Construction des nombres entiers relatifs	67
4.5	Anneaux et corps	70
4.6	Construction des nombres rationnels	73
4.7	Construction des nombres réels	75
4.8	Bornes supérieures et théorème de Dedekind	79
4.9	Théorème d'Archimède	81
4.10	Inégalité de Bernoulli	83
4.11	Calcul avec les bornes supérieures et inférieures	85
4.12	Existence de la racine carrée	88

4.13	Construction des nombres complexes	90
4.14	Valeur absolue dans \mathbb{C}	93
5	CONVERGENCE	95
5.1	Espaces métriques	96
5.2	Définition de la notion de convergence	100
5.3	Convergence d'une suite monotone	102
5.4	Calcul avec les zéro-suites	104
5.5	Calcul avec les limites dans \mathbb{C}	106
5.6	Existence des racines p -ièmes	111
5.7	Erreur absolue et erreur relative	113
5.8	Convergence dans un produit	116
5.9	Convergence dans \mathbb{R}_+	118
5.10	Sous-suites	120
5.11	Théorème de Bolzano-Weierstraß	122
5.12	Suites de Cauchy	124
5.13	Suite de Fibonacci	126
6	SÉRIES	129
6.1	La notion de série	130
6.2	Séries à termes positifs	133
6.3	Développement en base p	136
6.4	Critère de Cauchy	138
6.5	Critère de la majorante ou principe de comparaison	139
6.6	Critère du quotient	140
6.7	Critère de Leibniz	142
6.8	Critère de la racine	144
6.9	Limites supérieures et inférieures	146
6.10	Le rayon de convergence d'une série entière	149

TABLE DES MATIÈRES

6.11	Dénombrabilité de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	151
6.12	Dénombrabilité de \mathbb{Q}	153
6.13	Non-dénombrabilité de \mathbb{R}	154
6.14	Réarrangement	155
6.15	Produit de deux séries	157
6.16	La fonction exponentielle	160
6.17	Equation fonctionnelle de l'exponentielle	163
6.18	Les fonctions trigonométriques	165
6.19	Développement en série des fonctions cos et sin	168
7	CONTINUITÉ	171
7.1	La notion de continuité	172
7.2	Exemples d'applications continues	174
7.3	Calcul avec les applications continues	176
7.4	Continuité à gauche et à droite	180
7.5	Théorème de Bolzano	181
7.6	Le nombre π	184
7.7	Périodicité des fonctions trigonométriques	188
7.8	Valeurs limites d'une fonction	191
7.9	Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$	193
7.10	Théorème de Weierstraß	197
7.11	Fonctions réciproques	199
7.12	Le logarithme naturel	202
7.13	Puissances réelles	204
7.14	Les fonctions arccos et arcsin	206
7.15	Les fonctions tan et arctan	208
7.16	Quelques applications	210
7.17	Puissances complexes	212

7.18	Racines n -ièmes de l'unité	214
8	DÉRIVABILITÉ	217
8.1	La notion de dérivée	218
8.2	Calcul avec les fonctions dérivables	221
8.3	Dérivation des fonctions composées et réciproques	224
8.4	Condition nécessaire d'extremum local	229
8.5	Théorème de Rolle	231
8.6	Monotonie	234
8.7	Primitives	238
8.8	Règle de l'Hospital	241
8.9	Formule de Taylor	245
8.10	Condition suffisante d'extremum local strict	249
8.11	Convexité	251
8.12	Discussion d'une fonction	254
8.13	Séries de Taylor	256
8.14	Méthode de Newton : cas convexe	259
8.15	Méthode de Newton : cas local	263
9	INTÉGRALE DE RIEMANN	265
9.1	Fonctions en escalier	266
9.2	Intégrale élémentaire	268
9.3	Intégrale supérieure de Darboux	270
9.4	Continuité uniforme	272
9.5	Intégrabilité au sens de Riemann	273
9.6	Théorème de la moyenne	278
9.7	Intégration des fonctions à valeurs complexes	279
9.8	Intégrales indéfinies	280
9.9	Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral	284

TABLE DES MATIÈRES

9.10	Règle de substitution	286
9.11	Intégration par parties	290
9.12	Formule de Taylor avec reste intégral	292
9.13	Formule de Wallis	294
9.14	Règle du trapèze	296
9.15	Equations différentielles à variables séparées	298
9.16	Lemme de Riemann-Lebesgue	304
9.17	Intégrales impropres	306
9.18	Formule de Stirling	310
10	ESPACES NORMÉS ET TOPOLOGIE	313
10.1	Espaces normés	314
10.2	Norme p -ième sur \mathbb{K}^n	316
10.3	Convergence ponctuelle	319
10.4	Norme uniforme	321
10.5	Espaces de fonctions continues	324
10.6	Intégration, dérivation et convergence uniforme	326
10.7	Critère de Weierstraß	330
10.8	Séries entières	332
10.9	Critère de Dirichlet	335
10.10	Critère d'Abel	339
10.11	Série de Taylor de \arctan	341
10.12	La topologie d'un espace métrique	343
10.13	Espaces métriques équivalents	347
10.14	Convergence et topologie	349
10.15	Continuité et topologie	350
10.16	Adhérence d'une partie	352
10.17	Compacité	354

10.18	Théorème de Heine-Borel	359
10.19	Image d'une partie compacte	361
10.20	Homéomorphismes	363
10.21	Applications uniformément continues	365
11	FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES	367
11.1	Courbes paramétrées	368
11.2	Longueur d'une courbe	373
11.3	Dérivées partielles	378
11.4	Gradient	382
11.5	Divergence	383
11.6	Dérivées partielles d'ordre supérieur	385
11.7	Opérateur de Laplace	388
11.8	Norme d'une application linéaire	390
11.9	Dérivabilité totale	394
11.10	Applications continûment dérivables	397
11.11	Exemples	399
11.12	Dérivation des applications composées	402
11.13	Dérivées directionnelles	405
11.14	Inégalité de la moyenne	407
11.15	Formule de Taylor	409
11.16	Discussion locale d'une fonction	413
11.17	Minimum et maximum avec condition	420
12	ÉQUATIONS DIFF. ORD.	427
12.1	Les équations différentielles ordinaires	428
12.2	Les applications lipschitziennes	430
12.3	Théorème d'unicité	432
12.4	Quelques exemples d'équations différentielles	435

TABLE DES MATIÈRES

12.5	Le théorème du point fixe	437
12.6	Théorème d'existence globale	442
12.7	Equa. diff. lin. vect. du 1 ^e ordre : cas homogène	446
12.8	Equa. diff. lin. vect. à coeff. constants	449
12.9	Equa. diff. lin. vect. du 1 ^e ordre : cas inhomogène	455
12.10	Equa. diff. lin. vect. d'ordre m	457
12.11	Equa. diff. lin. d'ordre n	460
12.12	Le procédé de réduction de d'Alembert	463
12.13	Equa. diff. lin. d'ordre 2	465
12.14	Equa. diff. lin. d'ordre 2 à coeff. constants	467
12.15	Théorème d'existence locale	470
13	SOUS-VARIÉTÉS DE \mathbb{R}^n	473
13.1	Difféomorphismes	474
13.2	Théorème de la fonction réciproque	477
13.3	Théorème des fonctions implicites	483
13.4	Ouverts avec bord	486
13.5	Paramétrages réguliers	490
13.6	La notion de sous-variété avec bord	497
13.7	Sous-espace vectoriel tangent	504
14	INTEGRALES DE RADON	511
14.1	Les additions dans $\overline{\mathbb{R}}$	513
14.2	Fonctions s.c.i.	517
14.3	Théorème de Dini	520
14.4	Espaces complètement réguliers et localement compacts	521
14.5	Intégrales de Radon	524
14.6	Intégrales de Radon sur un espace localement compact	526
14.7	Intégrale de Lebesgue dans \mathbb{R}^n	530

14.8	La notion d'intégrabilité	534
14.9	La relation entre les intégrales de Lebesgue et Riemann	537
14.10	Les propriétés de l'intégrale supérieure	541
14.11	La propriété de Daniell	544
14.12	Le théorème de Beppo Levi	546
14.13	L'espace des fonctions intégrables	548
15	THÉORÈME DE LEBESGUE	551
15.1	Parties négligeables	552
15.2	Presque partout	556
15.3	Théorème de Lebesgue	558
15.4	Intégrales absolument convergentes	561
15.5	Dépendance d'un paramètre.	562
15.6	Théorème d'approximation	567
15.7	Parties intégrables	569
15.8	La notion de tribu	573
15.9	Ensembles et fonctions mesurables	577
15.10	Critère d'intégrabilité	580
15.11	Mesurabilité au sens de Lusin	582
15.12	Fonctions et intégrales modérées	583
15.13	Espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$	586
15.14	Théorème de Riesz-Fischer	589
15.15	Théorèmes de densité	592
15.16	Espaces de Hilbert	595
15.17	Coefficients de Fourier	598
15.18	Bases hilbertiennes	600
15.19	Fonctions localement intégrables et absolument continues	603

16 THÉORÈME DE FUBINI	609
Introduction	611
16.1 Décomposition d'une intégrale de Radon	612
16.2 Théorème d'intégrabilité	615
16.3 Les théorèmes de Fubini et Tonelli	617
16.4 Cas de \mathbb{R}^n	623
16.5 Changement de variables	627
16.6 Exemples	631
16.7 Famille μ -dense de fonctions	637
16.8 Intégration d'une famille d'intégrales	638
16.9 Intégration de masses ponctuelles	642
16.10 Intégrale de Radon image, avec densité et induite	646
16.11 Produit de deux intégrales de Radon	651
17 THÉORÈME DE LA DIVERGENCE	657
17.1 Intégrale de Lebesgue sur un sous-espace affine	658
17.2 Intégrale de Lebesgue sur une sous-variété	659
17.3 L'intégrale de Lebesgue sur le bord	662
17.4 Partition de l'unité	664
17.5 Le gradient	666
17.6 La divergence	668
17.7 Théorème de la divergence	672
17.8 Théorème de Gauß	674
17.9 Rotationnel et produit vectoriel	676

INDEX

Version du 10 décembre 2005

- Abel
 - critère d'—, 339
 - théorème de la limite d'—, 340
- abélien, 65
- absolu
 - erreur —e, 113
 - série —ment convergente, 139, 156
 - valeur —e d'un nombre complexe, 93
 - valeur —e d'un nombre réel, 86
- absurde
 - méthode de réduction à l'—, 9
- accroissement
 - formule des —s finis, 231, 407
- accumulation
 - point d'—, 122
- Achille et la tortue, 130
- actuel
 - infini —, 41
- addition
 - théorème d'—, 166
- additive
 - fonctionnelle —, 524
- adhérent
 - point —, 352
- algébrique
 - multiplicité — d'une valeur propre, 449
 - nombre —, 154
- alphabet, 2
- amorti
 - coefficient d'—ssement, oscillation —e, 467
- anneau, 70
 - ordonné, 70
- antipodal, 190
- antisymétrie
 - d'une relation d'ordre, 40
- apériodique
 - oscillation, 467
- application, 26
 - (localement) lipschitzienne, 430
 - composée, 28
 - continue en un point, 172
 - continue sur X , 174
 - identique, 27
 - injective, surjective, bijective, 29
 - ν -propre, 646
 - quotient, 63
 - réciproque, 30
 - restriction d'une —, 28
 - uniformément continue, 272
 - vide, 28
- approximation
 - en moyenne quadratique, 596
 - méthode des — successives, 437
 - propriété d'—, 79
 - pyramidale, 580
 - théorème d'—, 567
- Archimède
 - principe d'—, 674
 - théorème d'—, 81
- argument
 - d'un nombre complexe, 189
- arithmétique
 - moyenne —, 252
- associativité, 45, 50
- asymptotique
 - suites —ment équivalentes, 310
- attraction
 - loi d'— de Newton et Coulomb, 388
- axiome
 - d'extensionnalité, 18
 - de compréhension ou sélection, 23
 - de l'ensemble des parties, 21
 - de l'ensemble vide, 18
 - de la réunion, 22
 - de substitution, 25
 - des paires non-ordonnées, 20
 - du choix, 33
 - existence d'un ensemble infini, 36
 - explicite, 2, 15
 - implicite, 2, 3, 12, 15
- Banach
 - espace de —, 315
 - théorème de — -Cacciopoli, 438
- base

- développement en $— p$, 137
- hilbertienne, 600
- Bernoulli
 - équation différentielle de $—$, 436
 - inégalité de $—$, 83
- Bessel
 - équation différentielle, fonction de $—$, 465
 - inégalité de $—$, 596
- bijective, 29
- binôme
 - formule du $—$, 58
- binomial
 - coefficient $—$, 56
 - série $—e$, 334
- Bolzano
 - condition de $—$ -Weierstraß, 356
 - théorème de $—$, 181
 - théorème de $—$ -Weierstraß, 122
- bord
 - d'un ouvert, 486
 - d'une sous-variété, 497
- Borel
 - théorème de Heine- $—$, 359
- borne
 - supérieure, inférieure, 79
- borné
 - fonction μ - $—$, 586, 587
 - partie $—e$, 79, 359
 - suite $—e$, 122
- boule
 - fermée, 98
 - ouverte, 344
- Bourbaki
 - propriété de $—$, 524
- Caccioppoli
 - théorème de Banach- $—$, 438
- caractéristique
 - fonction $—$, 266
 - polynôme $—$, 449, 461
- carbone
 - datation au $— C^{14}$, 239
- cardinal
 - fonction sinus $—$, 191
- cardinalité
 - d'un ensemble, 43
- carte, 495
- Cauchy
 - inégalité de $—$ -Schwarz, 317
 - méthode de $—$, 158
 - suite de $—$, 124
- Cavalieri
 - principe de $—$, 612
- centre
 - d'une boule, 98
- chaleur
 - équation différentielle de la $—$, 389
- champ
 - de vecteurs, 383
 - de vecteurs tangents, 669
- changement
 - de variable, 200, 286
 - de variables, 403
 - formule du $—$ de variables, 629
- choix
 - axiome du $—$, 33
- clan
 - δ - $—$, 571
- classe
 - d'équivalence, 63
 - sous-variété de $— C^{(2)}$, 669
- Clausen
 - intégrale de $—$, 338
- coefficient
 - binomial, 56
 - binomial généralisé, 334
 - d'amortissement, 467
 - de Fourier, 598
- colonne
 - vecteur $—$, 382
- commutatif
 - anneau $—$, 70
 - groupe $—$, 65
 - série $—$ vement convergente, 601
- commutativité, 46, 50
- compact
 - localement $—$, 521
 - partie $—e$, 354
- compatibilité
 - addition-ordre, 46, 66
 - multiplication-ordre, 50, 70
- complémentaire
 - ensemble $—$, 24
- complet, 124
- complètement
 - régulier, 521
- complexe

INDEX

- fonction —, 172
- nombre —, 90
- polynôme —, 178
- composante
 - première, seconde —, 24
- composée
 - application —, 28
 - dérivée d'une application —, 402
- compréhension
 - axiome de —, 23
- comptage
 - intégrale de —, 528
- concave
 - fonction —, 251
- condition
 - problème avec — initiale, 428, 429
- congru
 - modulo n , 69
- conjonction, 7
- conjugué
 - nombre complexe —, 91
- conoïde, 514
- conséquence directe, 2
- constante, 12
 - d'Euler-Mascheroni, 561
 - introduction d'une —, 15
 - méthode de la — auxiliaire, 13
 - méthode de la variation des —s, 281, 455
- continu
 - ûment dérivable, 218, 370, 397, 488, 664
 - ûment partiellement dérivable, 379
 - application —e à gauche, à droite, 180
 - application —e en un point, 172
 - application —e sur X , 174
 - application uniformément —e, 272
 - deux fois, k -fois —ûment dérivable, 245
 - fonction —e par morceaux, 277
 - fonction localement absolument —e, 605
 - prolongement par —ité en un point, 191
 - semi- — inférieurement, 517
- contraction, 439
- contradictoire, 3
- contraposition, 9
- convenable
 - ment mesurable, intégrable, 638
- convergence
 - rayon de —, 149
- convergent
 - intégrale impropre —e, 306
 - série —e, 130
 - série absolument —e, 139, 156
 - série commutativement —e, 601
 - série ponctuellement, uniformément —e, 330
 - suite —e, 100
 - suite ponctuellement —e, 319
 - suite uniformément —e, 321
- convexe
 - fonction —, 251
 - partie —, 407
- coordonnée
 - s curviligne, 632
 - système de —s locales, 495
- corps, 70
- cosinus
 - fonction —, 165
- Coulomb
 - loi d'attraction de —, 388
- couple, 20
- coupure
 - de Dedekind, 75
- courbe, 368
 - dérivable, 370
- covecteur, 382
- critère
 - d'Abel, 339
 - de Dirichlet, 335
 - de la déduction, 8
 - de Weierstraß, 330
- critique
 - point —, 229, 413
- croissant
 - filtrant —, 520
 - fonction —e, 183
 - fonctionnelle —e, 524
 - forme linéaire —e, 269
 - suite —e, 83
- curviligne
 - coordonnés —s, 632
- cycloïde, 375
- δ -clan, 571
- Daniell

- propriété de —, 544
- Darboux
 - intégrale supérieure, inférieure de —, 270
- datation
 - au carbone C^{14} , 239
- décimal
 - développement —, 137
- décomposition
 - d'une intégrale de Radon, 612
 - pyramidale, 572
- décroissant
 - fonction —e, 183
 - suite —e, 83
- Dedekind
 - coupure de —, 75
 - théorème de —, 80
- degré
 - d'un polynôme, 178, 400
 - du polynôme de Taylor, 245
- demi-espace
 - fermé, 486
- demi-vie, 239
- démonstration, 2
 - méthode de — :
 - contraposition, 9
 - de la constante auxiliaire, 13
 - déduction, 8
 - disjonction des cas, 10
 - réduction à l'absurde, 9
- dénégation alternative, 6
- dénombrable
 - ensemble —, 43
 - énumération infinie —, 43
 - sous-additivité —, 545
- dense
 - famille μ - — de fonctions, 637
 - partie —, 365
 - théorème de —ité, 592
- densité
 - intégrale de Radon avec —, 646
- dérivable/dérivée, 218
 - à gauche, à droite, 222
 - continûment —, 397, 488, 664
 - courbe paramétrée —, 370
 - d'une application composée, 402
 - dans une direction, 405, 666
 - deux fois, k -fois partiellement —, 385
 - deux fois, k -fois totalement —, 409
 - deux fois, k -fois, indéfiniment, continûment —, 245
 - ordre d'une — partielle, 386
 - partiellement —, 378, 383
 - totalement —, 394
- description
 - externe d'un ensemble, 23, 484
 - interne d'un ensemble, 27, 484
- déterminant
 - de Gram, 659
 - de Wronski, 447
- développement
 - en base p , décimal, 137
- diagonale, 27
- diamètre, 355
- difféomorphisme, 474
- Dini
 - théorème de —, 357, 520
- Dirac
 - intégrale de —, 524
- Dirichlet
 - critère de —, 335
 - fonction de —, 178
- discret
 - métrique —ète, 345
 - partie —ète, 497
- disjoint
 - ensembles —s, 23
- disjonction, 7
 - des cas, 10
- distance, 96
- distributivité, 50
- divergence, 383, 670
 - théorème de la —, 672
- divergent
 - intégrale impropre —e, 306
 - série —e, 130
 - suite —e, 100
- division
 - avec reste, 50
- domaine de définition, 26
- droite numérique, 75
 - achevée, 82
- égalité
 - de Parseval, 600
- élément
 - de volume, 632, 659
 - neutre, 65

INDEX

- plus petit, plus grand —, 79
- ensemble, 18
 - s disjoints, 23
 - à deux éléments, 20
 - à un élément, 20
 - cardinalité d'un —, 43
 - complémentaire, 24
 - d'arrivée d'une application, 26
 - dénombrable, 43
 - des nombres
 - complexes : \mathbb{C} , 90
 - entiers naturels : \mathbb{N} , 36
 - entiers relatifs : \mathbb{Z} , 67
 - rationnels : \mathbb{Q} , 73
 - réels : \mathbb{R} , 75
 - des paramètres, 27
 - des parties, 21
 - fini, 43
 - infini, 43
 - existence d'un —, 36
 - nombre d'éléments d'un —, 43
 - partie d'un —, 18
 - produit, 33
 - successeur, 36
 - vide, 19
- entier
 - nombre —, 36
 - nombre — relatif, 67
 - partie —ière, 81
- énumération
 - finie, 43
 - infinie dénombrable, 43
- enveloppe
 - supérieure, inférieure, 513
- équation
 - d'un ensemble, 23
 - d'un graphe, 26
 - d'une courbe, 370
 - de Maxwell, 675, 679
 - différentielle
 - à variables séparées, 298
 - d'un oscillateur amorti entretenu, 467
 - de Bernouilli, 436
 - de l'exponentielle, 238
 - de Laplace, du potentiel, 388
 - de Legendre, d'Hermite, de Laguerre, de Bessel, 465
 - de Riccati, 436
 - des ondes, de la chaleur, 389
 - du premier ordre, 428
 - homogène, 435
 - linéaire, 281
 - linéaire vectorielle, 446
 - logistique, 435
 - vectorielle d'ordre m , 457
 - vectorielle du premier ordre, 429
- équivalence, 7
 - congruence modulo n , 69
 - relation d'—, 63
 - représentant d'une classe d'—, 64
- équivalent
 - métriques —es, 347
- erreur, 100, 113
- escalier
 - fonction en —, 266, 593
- espace
 - de Banach, 315
 - de Hilbert, 595
 - métrique, 96
 - normé, 314
 - quotient, 63
 - topologie d'un — métrique, 343
- essentiel
 - partie —lement μ -intégrable, intégrale supérieure, inférieure —le, 535
 - partie —lement μ -intégrable, μ -négligeable, 554
- Euler
 - constante d'— -Mascheroni, 561
 - formule d'—, 165
 - nombre d'—, 134, 160
- exponentiel
 - équation différentielle de l'—le, 238
 - série, fonction —le, 160
- expression, 2
 - bien formée, 2
- extensionnalité
 - axiome d'—, 18
- extérieur
 - mesure —e, 552
 - mesure —e essentielle, 554
 - normale —e, 505
- externe
 - description — d'un ensemble, 23, 484
- extremum, 197
 - local, 229, 413
 - local avec condition, 420

- factorielle, 54
- famille
 - d'éléments, d'ensembles, 32
 - sommable, 156
- Fatou
 - lemme de —, 558
- fermé
 - boule —e, 98
 - demi-espace —, 486
 - intervalle —, 82
 - partie —e, 343
- Fibonacci
 - nombres de —, 47
 - suite de —, 126
- filtrant
 - croissant, 520
- finesse
 - d'une subdivision, 374, 528
- fini
 - ensemble —, 43
 - énumération —e, 43
 - suite —e, 45
- Fischer
 - théorème de Riesz- —, 589
- fixe
 - point —, 437
- flottant
 - notation en virgule —e, 137
- flux, 675
- fonction, 172
 - réciproque, 199
 - caractéristique, 266
 - continue par morceaux, 277
 - convexe, concave, 251
 - croissante, décroissante, 183
 - de Bessel, 465
 - de Dirichlet, 178
 - de répartition, 528
 - dérivable/dérivée, 218
 - en escalier, 266, 593
 - exponentielle, 160
 - gamma, 538
 - harmonique, 388
 - invariante par rotation, 634
 - localement absolument continue, 605
 - logarithmique naturelle, 202
 - maximum, minimum, extremum d'une —, 197
 - modérée, 583
 - potentielle, 386, 564
 - primitive d'une —, 238
 - rationnelle, 178
 - Riemann intégrable
 - complexe, 279
 - réelle, 273
 - sinus cardinal, 191
 - support d'une —, 522
 - tangente, 208
 - théorème des —s implicites, 483
 - trigonométrique, cosinus, sinus, 165
 - valeur limite d'une —, 191
 - zéta de Riemann, 133, 213, 308
- fonctionnel
 - le linéaire, positivement homogène, additive, croissante, régulière, 524
 - partie —le, 26
- fondamental
 - système — de solutions, 447, 460
- forme
 - linéaire positive, 526
- formule
 - d'Euler, 165
 - d'Hadarnard, 149
 - de Green, 673
 - de Machin, 341
 - de Riemann, 678
 - de Stirling, 310
 - de Stokes, 677
 - de Taylor
 - à plusieurs variables, 410
 - avec reste de Lagrange, 245
 - avec reste intégral, 292
 - de Wallis, 294
 - des accroissements finis, 231, 407
 - du binôme, 58
 - du changement de variables, 629
- Fourier
 - coefficient de —, 598
- fréquence
 - propre, 467
- frontière, 352
- Fubini
 - théorème de —, 617
- gamma
 - fonction —, 538
- Gauß
 - théorème de —, 674

INDEX

- géométrique
 - moyenne —, 252
 - multiplicité — d'une valeur propre, 449
 - série —, 130
 - somme —, 59
- gradient, 382, 667
 - théorème du —, 675
- Gram
 - déterminant de —, 659
- grand
 - plus — élément, 79
 - plus — que, strictement plus — que, 40
- graphe
 - d'une application, 26
 - d'une relation, 40
- Green
 - formule de —, 673
- groupe, 65
 - ordonné, 66
- Hadamard
 - formule d'—, 149
- harmonique
 - fonction —, 388
- Heine
 - théorème de —, 272, 365
 - théorème de — -Borel, 359
- Hermite
 - équation différentielle, polynôme d' —, 465
- hessien
 - matrice —ne, 409
- Hilbert
 - base —ienne, 600
 - espace de —, 595
- Hölder
 - inégalité de —, 316, 327, 586
- homéomorphisme, 363
- homogène
 - équation différentielle —, 435
 - équation différentielle linéaire —, 446
 - fonctionnelle positivement —, 524
- Hospital
 - règle de l'—, 241
- hypothèse
 - de récurrence, 37
- identique
 - application —, 27
- image, 26
 - d'une intégrale de Radon, 646
 - réciproque, 27
- imaginaire
 - partie —
 - d'un nombre complexe, 91
 - d'une fonction, 177
- implication, 7
- indéfini
 - intégrale —e, 281
 - matrice —e, 413
- indéfiniment
 - dérivable, 245
- indice
 - multi- —, 386
- induit
 - intégrale de Radon —e, 647
 - métrique —e, 96
- inégalité
 - de Bernouilli, 83
 - de Bessel, 596
 - de Cauchy-Schwarz, 317
 - de Hölder, de Minkowski, 316, 327, 586
 - de la moyenne, 232, 285, 408
 - seconde — de la moyenne, 373
- inférieur
 - borne —e, 79
 - enveloppe —e, 513
 - intégrale —e, 534
 - intégrale —e de Darboux, 270
 - intégrale —e essentielle, 535
 - limite —e, 146
 - semi-continu —ement, 517
- infimum, 79
- infini
 - actuel, 41
 - ensemble —, 43
 - existence d'un ensemble —, 36
 - potentiel, 41
 - suite —e, 45
- inflexion
 - point d'—, 254
- inhomogène
 - équation différentielle linéaire —, 446
- initial
 - problème avec condition —e, 428, 429
- injection canonique, 28
- injective, 29

- intégrable
 - convenablement —, 638
 - critère d'—ilité, 580
 - de puissance p -ième —, 586, 587
 - fonction —, 534
 - fonction essentiellement —, 535
 - fonction Riemann —
 - complexe, 279
 - réelle, 273
 - localement —, 603
 - partie —, 569
 - partie essentiellement μ - —, 554
 - partie μ - —, 552
 - sur tout compact, 577
 - théorème d'—ilité, 615
- intégrale
 - de Clausen, 338
 - de comptage, 528
 - de Dirac, 524
 - de Lebesgue, 527, 532
 - sur \mathbb{S}^{n-1} , 662
 - sur un sous-espace affine, 658
 - de Lebesgue-Stieltjes, 528
 - de masses ponctuelles, 643
 - de Radon, 512, 524
 - image, avec densité, induite, 646
 - modérée, 583, 639
 - de Riemann
 - d'une fonction matricielle, 407
 - d'une fonction vectorielle, 373
 - de Stieltjes, 269
 - élémentaire, 268
 - impropre convergente, 306
 - indéfinie, 281
 - supérieure, inférieure, 534
 - supérieure, inférieure de Darboux, 270
 - supérieure, inférieure essentielle, 535
- intégration
 - s successives, 613
 - par parties, 290, 624, 672
- intérieur
 - d'un ensemble, point —, 343
 - d'un intervalle, 229
- interne
 - description — d'un ensemble, 27, 484
- intersection, 23
 - d'une famille, 32
 - de deux ensembles, 23
- intervalle, 82
- invariant
 - fonction —e par rotation, 634
- inverse, 65
- involutif
 - espace vectoriel —, 516
- isolé
 - maximum, minimum, extremum —, 229, 413
- jacobien
 - matrice —ne, 395
- Lagrange
 - formule de Taylor avec reste de —, 245
 - multiplicateur de —, 421
- Laguerre
 - équation différentielle, polynôme de —, 465
- Laplace
 - opérateur, équation de —, 388
- laplacien, 388, 673
- Lebesgue
 - intégrale de —, 527, 532
 - sur \mathbb{S}^{n-1} , 662
 - sur un sous-espace affine, 658
 - intégrale de —-Stieltjes, 528
 - lemme de Riemann- —, 304
 - nombre de —, 665
 - théorème de la convergence dominée de —, 558
- Legendre
 - équation différentielle, polynôme de —, 465
- Leibniz
 - règle de —, 247
- lettre, 12
 - liée, libre, 12
- Levi
 - théorème de Beppo —, 546
- ligne
 - vecteur —, 382
- limite, 100
 - supérieure, inférieure, 146
 - théorème de la — d'Abel, 340
 - valeur — d'une fonction, 191
- Lindelöf
 - théorème de Picard- —, 442
- linéaire
 - équation différentielle —, 281

INDEX

- équation différentielle — vectorielle, 446
- fonctionnelle —, 524
- lipschitzien
 - application (localement) —ne, 430
- local
 - ment intégrable, 603
 - fonction —ment absolument continue, 605
 - maximum, minimum, extremum —, 229, 413
 - maximum, minimum, extremum — avec condition, 420
- localement
 - compact, 521
 - partie — μ -négligeable, 554
- logarithme
 - naturel d'un nombre réel > 0 , 202
- logarithmique
 - spirale —, 376
- logique, 3
- logistique
 - équation différentielle —, 435
- longueur
 - d'un arc, 186
 - d'une courbe, 374
- Lusin
 - mesurabilité au sens de —, 582
 - théorème de —, 582
- Machin
 - formule de —, 341
- majorant, 79
- majoré
 - partie —e, 79
- Mascheroni
 - constante d'Euler- —, 561
- masse
 - intégrales de —s ponctuelles, 643
 - ponctuelle, 524
- matrice
 - définie, resp. semidéfinie, indéfinie, positive, négative, 413
 - hessienne, 409
 - jacobienne, 395
- maximal
 - solution —e d'une équation différentielle, 299, 470
- maximum, 79
 - d'une fonction, 197
 - local, 229, 413
 - local avec condition, 420
- Maxwell
 - équation de —, 675, 679
- mesurabilité
 - théorème de —, 643
- mesurable
 - convenablement —, 638
 - fonction — au sens de Lusin, 582
 - partie, fonction —, 573, 577
- mesure, 571
 - (extérieure) d'une partie, 552
 - (extérieure) essentielle d'une partie, 554
 - de Radon, 571
- méthode
 - de la variation des constantes, 281, 455
 - de Newton, 259, 263
 - des approximations successives, 437
- métrique, 96
 - s équivalentes, 347
 - discrète, 345
 - induite, 96
 - tenseur —, 659
 - topologie d'un espace —, 343
- minimum, 79
 - d'une fonction, 197
 - local, 229, 413
 - local avec condition, 420
- Minkowski
 - inégalité de —, 316, 327, 587
- minorant, 79
- minoré
 - partie —e, 79
- modéré
 - fonction, partie, intégrale de Radon — e, 583
 - intégrale de Radon —e, 639
- modulo
 - congruence — n , 69
- modus ponens, 3
- monôme, 400
- morceau
 - fonction continu par —x, 277
- moyenne
 - arithmétique, géométrique, 252
 - inégalité de la —, 232, 285, 408
 - seconde inégalité de la —, 373

- multiplicateur
 - de Lagrange, 421
- multiplicité
 - fonction —, 461
 - géométrique, algébrique d'une valeur propre, 449
- naturel
 - nombre entier —, 36
- négatif
 - élément — d'un groupe, 66
 - matrice définie, resp. semidéfinie, — ve, 413
- négation, 7
- négligeable
 - partie essentiellement, localement μ - —, 554
 - partie μ - —, 552
- Neil
 - parabole de —, 371
- népérien
 - logarithme —, 202
- neutralité, 46, 50
- neutre
 - élément, 65
- Newton
 - loi d'attraction de —, 388
 - méthode de —, 259, 263
- nombre
 - complexe, 90
 - entier naturel, 36
 - entier relatif, 67
 - rationnel, 73
 - réel, 75
 - s de Fibonacci, 47
 - algébrique, 154
 - d'éléments d'un ensemble, 43
 - d'Euler, 134, 160
 - de Lebesgue, 665
 - transcendant, 154
- normal
 - série —ement convergente, 330
- normale
 - extérieure, 505
- norme, 314
 - d'une application linéaire, 390
 - uniforme, 321
- notation
 - scientifique, en virgule flottante, 137
- onde
 - équation différentielle des —s, 389
- opérateur
 - de Laplace, 388
 - norme —, 391
- opposé, 66
- ordonné
 - anneau —, 70
 - conoïde —, 514
 - groupe —, 66
- ordre
 - d'une dérivation, 386
 - d'une valeur propre, 449
 - relation d'—, 40
 - relation d'— totale, 40
- orientation, 677
- orthonormé, 595
- oscillation
 - de fréquence propre, amortie, apériodique, 467
- Ostrogradzky
 - théorème d'—, 672
- ouvert
 - avec bord, 486
 - intervalle —, 82
 - partie —e, 343
 - recouvrement —, 354
- paire
 - axiome des —s non-ordonnées, 20
 - ordonnée, 20
- parabole
 - de Neil, 371
- paramétrage, 27
 - d'un ensemble, 484
 - d'une courbe, 368
 - régulier local, 494
- Parseval
 - égalité de —, 600
- partie, 18
 - axiome de l'ensemble des —s, 21
 - bornée, 359
 - compacte, 354
 - convexe, 407
 - dense, 365
 - entière, 81
 - fonctionnelle, 26
 - intégration par —s, 290, 624, 672
 - modérée, 583

INDEX

- ouverte, fermée, 343
- précompacte, 355
- réelle, imaginaire
 - d'un nombre complexe, 91
 - d'une fonction, 177
- partiel
 - lement dérivable, 378, 383
 - deux fois, k -fois —lement dérivable, 385
 - ordre d'une dérivée —le, 386
 - suite des sommes —les, 130
- partition, 62
 - de l'unité, 665
- pas
 - de récurrence, 37, 44
- Pascal
 - triangle de —, 56
- permutation, 54
- petit
 - plus — élément, 79
 - plus — que, strictement plus — que, 40
- Picard
 - théorème de — -Lindelöf, 442
- point
 - adhérent, 352
 - critique, 229, 413
 - d'accumulation, 122
 - d'inflexion, 254
 - de rebroussement, 371
 - fixe, 437
 - théorème du point — de Banach, 439
 - intérieur, 343
- point de vue
 - syntactique, sémantique, 1
- polynôme, 178, 400
 - caractéristique, 449, 461
 - de Legendre, d'Hermite, de Laguerre, 465
 - de Taylor, 245
 - trigonométrique, 595
- ponctuel
 - intégrale de masses —les, 643
 - masse —le, 524
 - série —lement convergente, 330
 - suite —lement convergente, 319
- porté, 613
- positif
 - élément — d'un groupe, 66
 - forme linéaire —ve, 526
 - forme linéaire —ive, 269
 - matrice définie, resp. semidéfinie, —ve, 413
- positivement
 - fonctionnelle — homogène, 524
- potentiel
 - équation du —, 388
 - fonction —, 386
 - fonction —le, 564
 - infini —, 41
- précompact
 - partie —e, 355
- prédicat, 12
- presque-partout, 556
 - essentiellement μ - —, 557
- primitive
 - d'une fonction, 238
- principal
 - sous-espace, vecteur —, 449
- principe
 - d'Archimède, 674
 - de généralisation, 13
 - de récurrence, 37
 - de récurrence à partir de m , 44
 - du tiers exclu, 7
- problème
 - avec condition initiale, 428, 429
- produit, 33
 - d'intégrales de Radon, 653
 - d'une suite finie, 52
 - de deux ensembles, 24
 - diagonale d'un —, 27
 - règle du —, 671
 - règle du —, 221, 382, 383, 667
 - vectériel, 676
- prolongement
 - par continuité en un point, 191
- proposition, 3
- propre
 - application ν - —, 646
 - développement —, 137
 - fréquence —, 467
 - valeur, sous-espace, vecteur —, 449
- propriété, 23
 - d'approximation, 79
 - de Bourbaki, 524
 - de Danielle, 544

- puissance
 - réelle d'un nombre > 0 , 204
- pyramidal
 - approximation —e, 580
 - décomposition —e, 572
- quadratique
 - approximation en moyenne —, 596
- quantificateur
 - universel, d'existence, 12
- quotient
 - application, espace —, 63
 - règle du —, 221
- racine
 - carrée, 88
 - de l'unité, 214
- Radon
 - intégrale de —, 512, 524
 - image d'une —, — avec densité, induite, 646
 - modérée, 583, 639
 - produit, 653
 - mesure de —, 571
- rationnel
 - fonction —le, 178
 - nombre —, 73
- rayon
 - d'une boule, 98
 - de convergence, 149
- réarrangement
 - d'une série, 155
- rebroussement
 - point de —, 371
- réciproque
 - application —, 30
 - fonction —, 199
 - théorème de la fonction —, 477
- recouvrement, 354
- rectifiable, 374
- récurrance
 - hypothèse de —, 37
 - pas de —, 37, 44
 - principe de —, 37
 - principe de — à partir de m , 44
- récurrent
 - suite —e, 45
- réel
 - fonction —le, 172
 - nombre —, 75
- partie —le
 - d'un nombre complexe, 91
 - d'une fonction, 177
- polynôme —, 178
- réflexivité
 - d'une relation d'équivalence, 63
 - d'une relation d'ordre, 40
- règle
 - d'inférence, 2, 3
 - de construction, 2, 3, 12, 15
 - de l'Hospital, 241
 - de Leibniz, 247
 - de substitution, 286, 647
 - des signes, 70
 - du produit, 221, 382, 383, 667, 671
 - du quotient, 221
 - du trapèze, 296
- régulier
 - complètement —, 521
 - fonctionnelle —ère, 524
- relatif
 - erreur —ve, 113
 - nombre entier —, 67
- relation, 3, 25
 - d'équivalence, 63
 - d'ordre, 40
 - totale, 40
 - graphe d'une —, 40
 - sur un ensemble, 40
- répartition
 - fonction de —, 528
- représentant
 - d'une classe d'équivalence, 64
 - d'une classe de $\mathbf{L}^p(\mu)$, 589
- restriction, 28
- réticulé
 - sous-espace vectoriel —, 266, 516
- réunion, 22
 - axiome de la —, 22
 - d'une famille, 32
 - de deux ensembles, 22
- Riccati
 - équation différentielle de —, 436
- Riemann
 - fonction zéta de —, 133, 213, 308
 - formule de —, 678
 - intégrale de —
 - d'une fonction complexe, 279
 - d'une fonction réelle, 273

- intégrale élémentaire de —, 268
- lemme de — -Lebesgue, 304
- Riesz
 - théorème de — -Fischer, 589
- Rolle
 - théorème de —, 231
- rotation
 - fonction invariante par —, 634
- rotationnel
 - d'un champ de vecteurs, 386
 - théorème du —, 676
- Schwarz
 - inégalité de Cauchy- —, 317
 - théorème de —, 385
- scientifique
 - notation, 137
- section d'or, 126
- sélection
 - axiome de —, 23
- sémantique
 - point de vue —, 1
- série
 - absolument convergente, 139, 156
 - binomiale, 334
 - convergente, divergente, 130
 - de puissance, 144
 - de Taylor, 256
 - exponentielle, 160
 - géométrique, 130
 - ponctuellement, uniformément, normale-
ment convergente, 330
 - réarrangement d'une —, 155
 - sommable, 601
- signe
 - d'égalité, 15
 - d'appartenance, 18
 - règle des —s, 70
- simplification, 46, 50
- sinus
 - fonction —, 165
 - fonction — cardinal, 191
- solution
 - d'une équation différentielle à variables
séparées, 298
 - d'une équation différentielle vectorielle
d'ordre m , 457
 - d'une équation différentielle du premier
ordre, 428
 - d'une équation différentielle vectorielle
du premier ordre, 429
- sommable
 - famille —, 156
 - série —, 601
- somme
 - d'une série, 130
 - d'une suite finie, 52
 - géométrique, 59
 - partielle, 130
- sous
 - additivité dénombrable, 545
 - additivité, -modularité, 541
- sous-espace
 - propre, principal, 449
 - tangent, 504
- sous-suite, 120
- sous-variété
 - avec bord, 497
 - de classe $\mathcal{C}^{(2)}$, 669
 - orientable, 677
- sphère
 - n - —, 376
- spirale
 - logarithmique, 376
- Stieltjes
 - intégrale de —, 269
 - intégrale de Lebesgue- —, 528
- Stirling
 - formule de —, 310
- Stokes
 - formule de —, 677
- strict
 - ement plus petit, plus grand que, 40
 - élément —ment positif, négatif d'un
groupe, 66
 - fonction —ement croissante, décrois-
sante, 183
 - maximum, minimum, extremum —,
229, 413
 - suite —ement croissante, décroissante,
83
- subdivision, 266, 528
- substitution
 - axiome de —, 25
 - règle de —, 286, 647
 - résolution d'une équation différentielle
par —, 435
- successeur

- ensemble —, 36
- suite
 - s asymptotiquement équivalentes, 310
 - convergente, 100
 - croissante, 83
 - de Cauchy, 124
 - de Fibonacci, 126
 - décroissante, 83
 - des sommes partielles, 130
 - divergente, 100
 - finie, infinie, 45
 - ponctuellement convergente, 319
 - produit d'une — fine, 52
 - récurrente, 45
 - somme d'une — finie, 52
 - uniformément convergente, 321
 - zéro- —, 100
- supérieur
 - borne —e, 79
 - enveloppe —e, 513
 - intégrale —e, 534
 - intégrale —e de Darboux, 270
 - intégrale —e essentielle, 535
 - limite —e, 146
- support
 - d'une fonction, 522
- supremum, 79
- sur
 - additivité, —modularité, 541
- surjective, 29
- syllogisme, 3
 - hypothétique, 4
- symétrie
 - d'une relation d'équivalence, 63
- syntactique
 - point de vue —, 1
- système
 - fondamental de solutions, 447, 460
- tangent
 - champ de vecteurs —s, 669
 - sous-espace —, 504
 - vecteur — à une courbe, 370
- tangente
 - d'un nombre réel, 208
- Taylor
 - formule de —
 - à plusieurs variables, 410
 - avec reste de Lagrange, 245
 - avec reste intégral, 292
 - polynôme de —, 245
 - série de —, 256
- tenseur
 - métrique, 659
- terme, 12
- théorème, 2
 - (de la convergence dominée) de Lebesgue, 558
 - (lemme) de Fatou, 558
 - (lemme) de Riemann-Lebesgue, 304
 - s d'addition, 166
 - critère d'intégrabilité, 580
 - d'approximation, 567
 - d'Archimède, 81
 - d'intégrabilité, 615
 - de Banach-Cacciopoli, 438
 - de Beppo Levi, 546
 - de Bolzano, 181
 - de Bolzano-Weierstraß, 122
 - de Dedekind, 80
 - de densité, 592
 - de Dini, 357, 520
 - de Fubini, 617
 - de Gauß, 674
 - de Heine, 272, 365
 - de Heine-Borel, 359
 - de la divergence, d'Ostrogradzky, 672
 - de la fonction réciproque, 477
 - de la limite d'Abel, 340
 - de la valeur intermédiaire, 181
 - de Lusin, 582
 - de mesurabilité, 643
 - de Picard-Lindelöf, 442
 - de Riesz-Fischer, 589
 - de Rolle, 231
 - de Schwarz, 385
 - de Tonelli, 617
 - de Weierstraß, 197
 - des fonctions implicites, 483
 - du gradient, 675
 - du rotationnel, 676
 - fondamental du calcul différentiel et intégral, 284, 606
 - intégration par parties, 290, 624, 672
 - intégrations successives, 613
 - règle de substitution, 286, 647
- théorie

INDEX

- contradictoire, 3
- égalitaire, 15
- formelle, 2
- logique, 3
- quantifiée, 12
- tiers exclu
 - principe du —, 7
- Tonelli
 - théorème de —, 617
- topologie
 - d'un espace métrique, 343
- total
 - ment dérivable, 394
 - partie —e, 592, 600
 - relation d'ordre —e, 40
- transcendant
 - nombre —, 154
- transitivité
 - d'une relation d'équivalence, 63
 - d'une relation d'ordre, 40
- trapèze
 - règle du —, 296
- triangle
 - de Pascal, 56
- tribu, 573
- trigonométrique
 - fonction —, 165
 - polynôme —, 595
- triplet, 25
- unifère
 - anneau, 70
- uniforme
 - application —ément continue, 272
 - norme —, 321
 - série —ément convergente, 330
 - suite —ément convergente, 321
- unité
 - partition de —, 665
 - racine de l'—, 214
- valeur
 - absolue d'un nombre complexe, 93
 - absolue d'un nombre réel, 86
 - limite d'une fonction, 191
 - propre, 449
 - théorème de la — intermédiaire, 181
- variable, 12
 - changement de —, 200, 286
 - changement de —s, 403
 - formule du changement de —s, 629
- variation
 - méthode de la — des constantes, 281, 455
- variété
 - orientable, 677
 - sous- — avec bord, 497
 - sous- — de classe $C^{(2)}$, 669
- vecteur
 - champ de —s, 383
 - champ de —s tangents, 669
 - colonne, ligne ; co—, 382
 - propre, principal, 449
 - tangent à une courbe, — vitesse, 370
- vectorel
 - produit —, 676
- vide
 - application —, 28
 - ensemble —, 19
- virgule
 - notation en — flottante, 137
- vitesse
 - vecteur —, 370
- voisinage, 343
- volume
 - élément de —, 632, 659
- Wallis
 - formule de —, 294
- Weierstraß
 - condition de Bolzano- —, 356
 - critère de —, 330
 - théorème de —, 197
 - théorème de Bolzano- —, 122
- Wronski
 - déterminant de —, 447
- Zénon, 130
- zéro-suite, 100
- zéta
 - fonction — de Riemann, 133, 308