Chapitre 2

THÉORIE DES ENSEMBLES

Nous donnons dans ce chapitre une introduction rapide à la théorie des ensembles permettant de fonder toute la mathématique. Nous verrons que tout objet mathématique est un ensemble.

Version du 15 octobre 2005

2.1 Ensembles et appartenance

La théorie des ensembles est une théorie égalitaire dont l'alphabet contient en plus le *signe d'appartenance* $\in$. On a en outre la règle de construction des expressions bien formées supplémentaire suivante :

R_6 Si x, y sont des lettres, alors $x \in y$ est une relation.

Tous les termes de cette théorie sont interprétés comme des *ensembles* . Nous verrons en effet que tout objet mathématique peut être représenté par un ensemble. La relation

$$x \in y \quad \text{signifie} \quad \text{l'ensemble } x \text{ est un élément de l'ensemble } y \ .$$

Les axiomes de cette théorie seront introduits successivement dans ce paragraphe et le suivant.

DEFINITION 1 Nous écrirons $x \notin y$, et nous dirons que x *n'appartient pas à* y , si l'on a

$$\neg (x \in y) \ .$$

Nous écrirons $x \subset y$, et nous dirons que x *est contenu dans* y ou que x *est une partie de* y , si

$$\forall z \, (z \in x \Rightarrow z \in y) \ .$$

Axiome d'extensionalité

$$\forall x \forall y \left[(x \subset y \wedge y \subset x) \Rightarrow x = y \right]$$

Cela signifie que si x est une partie de y et y une partie de x , i.e. si tout élément de x est un élément de y et réciproquement, alors x et y sont égaux. La réciproque est triviale ; il suffit d'utiliser l'axiome $E_2 \, (x \subset y \wedge y \subset x, x, y)$.

Remarquons que par le principe de généralisation 1.5 on peut supprimer les signes de quantification dans cet axiome.

Axiome de l'ensemble vide

$$\exists x \forall y \, (y \notin x)$$

Cela signifie qu'il existe un ensemble ne contenant aucun élément.

THEOREME *Il existe au plus un ensemble x tel que $\forall y \, (y \notin x)$.*

En effet si u, v sont deux tels ensembles, on a $\forall y \, (y \notin u)$ et $\forall y \, (y \notin v)$. On en déduit que, quel que soit y , la relation $y \in u$ entraîne $y \in v$, puisque $y \in u$ est fausse. Ceci montre que $u \subset v$. On montre de même que $v \subset u$. Par l'axiome d'extensionalité on obtient finalement $u = v$. $\square$

DEFINITION 2 L'ensemble ainsi caractérisé est noté $\emptyset$ et s'appelle l' *ensemble vide* . On a

$$x = \emptyset \Leftrightarrow \forall y\,(y \notin x) \ .$$

Nous travaillons donc dans une nouvelle théorie, où $\emptyset$ est une constante satisfaisant à l'axiome

$$\forall y\,(y \notin \emptyset)$$

remplaçant l'axiome d'existence de l'ensemble vide.

PROPOSITION *Pour tout x , on a $x \subset x$ et $\emptyset \subset x$.*

La première partie est évidente, puisque $z \in x$ entraîne $z \in x$ (exercice 1.2.1.i). Quant à la seconde, nous devons montrer que $y \in \emptyset \Rightarrow y \in x$ est vraie ; mais cela est clair puisque $y \in \emptyset$ est fausse. □

2.2 Ensembles à un ou deux éléments

Axiome des paires non-ordonnées

$$\forall x \forall y \exists z \forall w \left[w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y) \right]$$

Cela signifie que, quel que soit les ensembles x et y , il existe un ensemble z dont les éléments sont x ou y .

THEOREME *Etant donné des ensemble x, y , il existe au plus un ensemble z tel que*

$$\forall w \left[w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y) \right] \ .$$

En effet si u, v sont de tels ensembles, on a

$$w \in u \Leftrightarrow (w = x \vee w = y) \Leftrightarrow w \in v \ ,$$

donc $u = v$ par l'axiome d'extensionalité. □

DEFINITION 1 Nous pouvons donc introduire un nouveau terme, noté $\{x, y\}$, satisfaisant à l'axiome

$$w \in \{x, y\} \Leftrightarrow (w = x \text{ ou } w = y) \ .$$

Pour tout x , on pose $\{x\} := \{x, x\}$.

On a $w \in \{x\}$ si, et seulement si, $w = x$. En particulier si X est un ensemble, alors $x \in X$ est équivalent à $\{x\} \subset X$.

DEFINITION 2 On dit que $\{x\}$ est un *ensemble à un élément* , en l'occurence x . Si $x \neq y$, on dit que $\{x, y\}$ est un *ensemble à deux éléments* .

EXERCICE 1 Si $\{x, y\} = \{x, z\}$, alors $y = z$.

En effet on a $y = x$ ou $y = z$. Dans le premier cas, il vient $\{x\} = \{x, z\}$, et par suite $z = x$. Ainsi $y = x = z$, donc $y = z$ dans les deux cas. □

DEFINITION 3 On dit que $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ est une *paire ordonnée* ou un *couple* .

EXERCICE 2 Si $(x, y) = (u, v)$, alors $x = u$ et $y = v$.

Si $x \neq u$, alors $\{x\} \neq \{u\}$, et comme

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\} \ ,$$

il vient $\{x\} = \{u, v\}$, donc $u = x$, ce qui est absurde. On a donc bien $x = u$. Par l'exercice 1, on obtient alors $\{x, y\} = \{u, v\} = \{x, v\}$, puis $y = v$. □

2.3 L'ensemble des parties

Axiome de l'ensemble des parties

$$\forall x \exists z \forall y \, (y \in z \Leftrightarrow y \subset x)$$

L'ensemble z est évidemment univoquement déterminé.

DEFINITION Nous pouvons donc introduire un nouveau terme, noté $\mathfrak{P}(x)$, satisfaisant à l'axiome

$$y \in \mathfrak{P}(x) \text{ si, et seulement si, } y \subset x \ .$$

On dit que c'est l' *ensemble des parties de* x .

EXEMPLE On a $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ et $\mathfrak{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

On a $\emptyset \subset \emptyset$ par la proposition 2.1. D'autre part, soit $y \subset \emptyset$; si $z \in y$, on a $z \in \emptyset$, ce qui est absurde. Ceci montre que l'on a $\forall z \, (z \notin y)$, donc que $y = \emptyset$. Ceci prouve la première partie. Pour la seconde, remarquons que l'on a $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset\}$ et $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ par la proposition 2.1. Soit maintenant $y \subset \{\emptyset\}$. Si $y \neq \emptyset$, il existe $z \in y$, ce qui nous permet d'utiliser la méthode de la constante auxiliaire. On obtient alors $z \in \{\emptyset\}$, donc $z = \emptyset$, et par suite $\emptyset \in y$. Ceci prouve que $\{\emptyset\} \subset y$, donc que $y = \{\emptyset\}$, ce qu'il fallait démontrer. □

2.4 L'ensemble réunion d'ensembles

Axiome de la réunion $\forall x \exists y \forall z \left[z \in y \Leftrightarrow \exists t \left(t \in x \wedge z \in t \right) \right]$

L'ensemble y est évidemment univoquement déterminé.

DEFINITION 1 Nous pouvons donc introduire un nouveau terme, noté $\bigcup_{t \in x} t$, satisfaisant à l'axiome

$$z \in \bigcup_{t \in x} t \text{ si, et seulement si, il existe } t \in x \text{ tel que } z \in t \ .$$

On dit que c'est la *réunion de tous les ensembles qui appartiennent à* x .

Les éléments de $\bigcup_{t \in x} t$ sont tous les éléments des ensembles t qui appartiennent à x .

DEFINITION 2 Si X et Y sont des ensembles, on pose

$$X \cup Y := \bigcup_{t \in \{X,Y\}} t \ ,$$

et on dit que c'est la *réunion des ensembles* X *et* Y .

Par définition, on a

$$z \in X \cup Y \text{ si, et seulement si, } z \in X \text{ ou } z \in Y \ .$$

EXEMPLE Soient X, Y des ensembles. Si $x \in X$ et $y \in Y$, on a

$$\{x\} \in \mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(X \cup Y) \ \text{ et } \ \{x, y\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y) \ ,$$

donc

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \ .$$

2.5 Intersection et produit de deux ensembles

DEFINITION 1 Si une relation A contient au moins une lettre x , et si l'on ne s'intéresse qu'à celle-ci, on écrit $A(x)$ et on dit que c'est une *propriété de* x .

Axiome de compréhension ou sélection Soit $A(x)$ une propriété. Alors

$$\forall X \exists Y \forall x \left[x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge A(x) \right]$$

est un axiome implicite.

On peut montrer que l'ensemble Y est univoquement déterminé.

DEFINITION 2 L'ensemble ainsi défini s'écrit

$$\{ x \in X \mid A(x) \} \ ,$$

et on dit que c'est l' *ensemble des* $x \in X$ *satisfaisant à* $A(x)$.

REMARQUE 1 Cet axiome entraîne l'existence de l'ensemble vide, en l'occurence

$$\{ x \in X \mid x \neq x \} \ ,$$

qui ne dépend pas de X !

REMARQUE 2 On dit aussi que $Y = \{ x \in X \mid A(x) \}$ est une *description externe* de l'ensemble Y et que " $x \in X$ et $A(x)$ est vraie" est l' *équation* de Y dans X .

Mais attention la formule $\{ x \mid x \notin x \}$ n'a pas de sens. Elle conduit aux fameuses antinomies de la théorie des ensembles, popularisées par exemples par le catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas.

EXEMPLE 1 Soit x un ensemble. L'ensemble

$$\bigcap_{t \in x} t := \left\{ y \in \bigcup_{t \in x} t \;\middle|\; \text{pour tout } t \in x \text{ , on a } y \in t \right\}$$

s'appelle l'*intersection* des ensembles appartenant à x .

EXEMPLE 2 Soient X, Y des ensembles. On dit que

$$X \cap Y := \{ z \in X \cup Y \mid z \in X \text{ et } z \in Y \} \ ,$$

est l' *intersection* des ensembles X et Y . On dit que X et Y sont *disjoints* si $X \cap Y = \emptyset$.

Nous dirons également qu'une réunion $X \cup Y$ est disjointe si X et Y sont disjoints.

EXEMPLE 3 Soient X, Y des ensembles. On pose

$$X \smallsetminus Y := \{z \in X \mid z \notin Y\} \ .$$

Si A est une partie de X , i.e. $A \subset X$, à la place de $X \smallsetminus A$ on écrit $\complement_X A$, ou plus simplement $\complement A$ s'il n'y a pas de confusion possible, et on dit que c'est l' *ensemble complémentaire* de A dans X .

EXERCICE Soient A , B et C trois ensembles. Montrer que

(a) $A \cup B = (A \smallsetminus B) \cup B$ et $(A \smallsetminus B) \cap B = \emptyset$.

(b) $A = (A \smallsetminus B) \cup (A \cap B)$ et $(A \smallsetminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

(c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

EXEMPLE 4 On dit que l'ensemble

$$X \times Y := \{z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \in X \text{ et } \exists y \in Y \text{ tels que } z = (x, y)\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \mid x \in X \text{ et } y \in Y\}$$

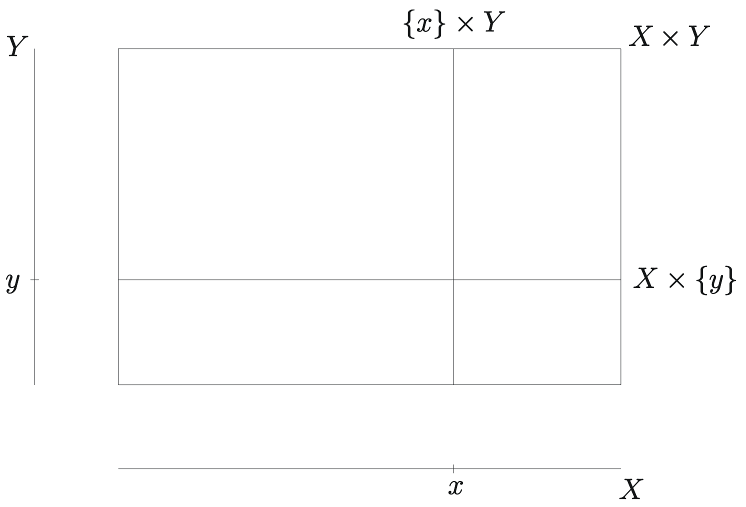
est l' *ensemble produit* de X et Y .

Dans ce qui suit nous oublierons la construction explicite que nous venons de donner de l'ensemble produit, seulement nécessaire pour en prouver l'existence. Nous en retiendrons que

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ et } y \in Y\}$$

et que, pour tout $z \in X \times Y$, il existe $x \in X$ et $y \in Y$, univoquement déterminés (cf. proposition 2.2), tels que $z = (x, y)$. On dit que x est la *première* et y la *seconde composante* de z .

Pour tout $x \in X$ et $y \in Y$, les ensembles $\{x\} \times Y$ et $X \times \{y\}$ sont des parties de $X \times Y$.



On vérifie immédiatement que $\emptyset \times Y = X \times \emptyset = \emptyset$.

DEFINITION 3 Pour tout x, y, z , on dit que

$$(x, y, z) := ((x, y), z)$$

est un *triplet* et, si X, Y, Z sont des ensembles, on pose

$$X \times Y \times Z := (X \times Y) \times Z \ .$$

DEFINITION 4 Si une relation R contient au moins deux lettres distinctes x et y , et si l'on ne s'intéresse qu'à celles-ci, on écrit $R(x, y)$ et on dit que c'est une *relation* entre x et y .

Nous utiliserons également l'axiome plus fort suivant. En particulier on en déduit l'existence de la paire non-ordonnée. On peut en donner une version encore plus forte contenant l'axiome de la réunion.

Axiome de substitution Soit $R(x, y)$ une relation. Alors

$$[\forall x \exists ! y \ R(x, y)] \Rightarrow \forall X \exists Y \forall y \, (y \in Y \Leftrightarrow \exists x \, [x \in X \wedge R(x, y)])$$

est un axiome implicite.

On peut montrer que l'ensemble Y est univoquement déterminé. Cela signifie que si $R(x, y)$ est une relation entre x et y telle que, pour tout x , il existe un unique y satisfaisant à R , alors :

Quel que soit l'ensemble X , il existe un unique ensemble Y tel que l'on ait

$$y \in Y \quad \Longleftrightarrow \quad \text{il existe } x \in X \text{ tel que } R(x, y) \ .$$

Il est noté

$$\{y \mid \exists x \, (x \in X \wedge R(x, y))\} \ .$$

On écrit aussi

$$\{y \mid \text{il existe } x \in X \text{ tel que } R(x, y)\} \ .$$

REMARQUE 3 L'axiome de sélection en découle en considérant la relation

$$R(x, y) \quad : \quad (y = x) \wedge A(x) \ .$$

2.6 La notion d'application

DEFINITION 1 Soient X et Y des ensembles. Une *application* f de X dans Y est un triplet $f = (X, Y, G)$, où G est une partie de $X \times Y$, i.e.

$$G \subset X \times Y \ ,$$

ayant la propriété suivante :

$$\text{Pour tout } x \in X \text{ , il existe un unique } y \in Y \text{ tel que } (x, y) \in G \ .$$

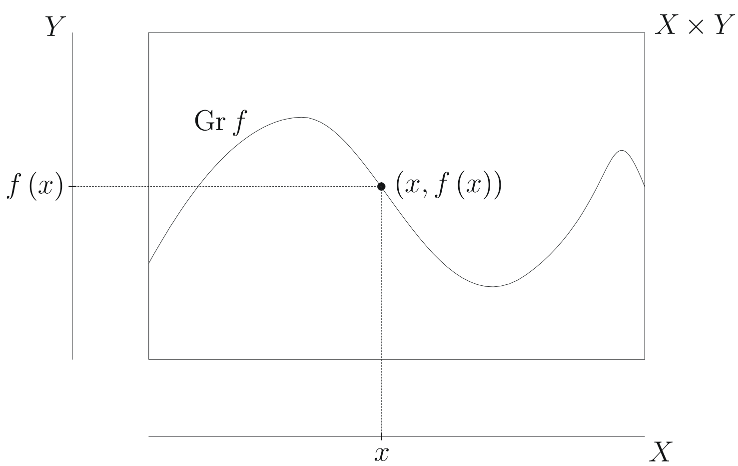
On dit que la partie G est *fonctionnelle* , et que c'est le *graphe* de f . On désigne cette partie aussi par $\operatorname{Gr} f$. Les ensembles X et Y s'appellent respectivement le *domaine de définition* et l' *ensemble d'arrivée* de f .

Pour tout $x \in X$, l'unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in \operatorname{Gr} f$ se note $f(x)$. On écrira aussi

$$f : X \longrightarrow Y : x \longmapsto f(x) \ .$$

Pour tout $x \in X$, on a

$$\{x\} \times Y \cap \operatorname{Gr} f = \{(x, f(x))\} \ .$$



On a

$$\operatorname{Gr} f = \{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \in \operatorname{Gr} f\} = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \ .$$

DEFINITION 2 On dit que

$$y = f(x)$$

est l' *équation du graphe* de f .

Soit A une partie de X , i.e. $A \subset X$. On pose

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} \ ,$$

et on dit que c'est l' *image* de A par f . On dit que $f(X)$ est l' *image de l'application* f .

Pour tout $x \in X$, on a
$$f(\{x\}) = \{f(x)\} \ .$$

REMARQUE Si une partie B de Y s'écrit sous la forme $B = f(A)$, on dit que c'est une *description interne* ou un *paramétrage* de l'ensemble B . On dit que A est l' *ensemble des paramètres* décrivant B à l'aide de f .

DEFINITION 3 Soit B une partie de Y , i.e. $B \subset Y$. On pose
$$\overset{-1}{f}(B) := \{x \in X \mid \exists y \in B \text{ tel que } f(x) = y\} \ ,$$
et on dit que c'est l' *image réciproque* de B par f .

EXEMPLE 1 Si X et Y sont des ensembles, alors
$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \longrightarrow X : (x, y) \longmapsto x$$
et
$$\mathrm{pr}_2 : X \times Y \longrightarrow Y : (x, y) \longmapsto y$$
sont des applications. On a
$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{pr}_1 = \{((x, y), z) \in (X \times Y) \times Z \mid z = x\}$$
et
$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{pr}_2 = \{((x, y), z) \in (X \times Y) \times Z \mid z = y\} \ .$$

EXEMPLE 2 Si X, Y, Z sont des ensembles et
$$f : X \longrightarrow Y \quad , \quad g : X \longrightarrow Z$$
des applications, alors
$$(f, g) : X \longrightarrow Y \times Z : x \longmapsto (f(x), g(x))$$
est une application.

EXEMPLE 3 Si X est un ensemble, alors on dit que
$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X : x \longmapsto x$$
est l' *application identique* dans X et on a
$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{id}_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\} \ .$$
On dit que cet ensemble est la *diagonale* de $X \times X$.

EXEMPLE 4 Soient X, Y, Z des ensembles et
$$f : X \longrightarrow Y \ , \ g : Y \longrightarrow Z$$

des applications. On dit que

$$g \circ f : X \longrightarrow Z : x \longmapsto g\left(f\left(x\right)\right)$$

est l'*application composée* de f et g .

Si X, Y sont des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application, alors on a

$$\mathrm{pr}_1 \circ (\mathrm{id}_X, f) = \mathrm{id}_X \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}_2 \circ (\mathrm{id}_X, f) = f \ .$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (x,y) & \longmapsto & x \\
 & & & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & X \\
X & \xrightarrow{(\mathrm{id}_X, f)} & X \times Y & & \\
x & \longmapsto & (x, f(x)) & & \\
 & & & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & Y \\
 & & (x,y) & \longmapsto & y
\end{array}$$

EXEMPLE 5 Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application, $A \subset X$ et $B \subset Y$ tels que $B \supset f(A)$. Il est clair que $\mathrm{Gr}\, f \cap A \times B$ est une partie fonctionnelle de $A \times B$. On dit que l'application $(A, B, \mathrm{Gr}\, f \cap A \times B)$, notée $f_{|A,B}$, ou plus simplement $f_{|A}$ si $B = Y$, ou encore

$$f_{|A} : A \longrightarrow B : x \longmapsto f(x) \ ,$$

est la *restriction* de f à A (et à valeurs dans B) .

On dit que la restriction de id_X à A

$$\iota_A := \mathrm{id}_{X|A} : A \longrightarrow X : x \longmapsto x$$

est l' *injection canonique* de A dans X .

EXEMPLE 6 Le triplet $(\emptyset, Y, \emptyset)$, l' *application vide* , est l'unique application de $\emptyset$ dans Y .

EXERCICE 1 Soient X, Y des ensembles et $f, g : X \longrightarrow Y$ des applications. Montrer que l'on a $f = g$ si, et seulement si, pour tout $x \in X$, on a $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 2 Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des applications.

(a) Décrire le graphe de $g \circ f$ seulement à l'aide des graphes $\mathrm{Gr}\, f$ et $\mathrm{Gr}\, g$.

(b) Montrer que, pour toute partie $C \subset Z$, on a

$$(g \circ f)^{-1}(C) = \overset{-1}{f}\left(\overset{-1}{g}(C)\right) \ .$$

(c) Déterminer l'image de X par l'application $(\mathrm{id}_X, f) : X \longrightarrow X \times Y$ et montrer que l'application

$$X \longrightarrow (\mathrm{id}_X, f)(X) : x \longmapsto (\mathrm{id}_X, f)(x)$$

est bijective (cf. définition 2.7.1). Remarquer que les deux applications ne se distinguent que par l'ensemble d'arrivée.

2.7 Application réciproque

DEFINITION 1 Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est *injective* si, pour tout $u, v \in X$, la relation $u \neq v$ entraîne $f(u) \neq f(v)$. On dit que f est *surjective* si, pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On dit que f est *bijective* si f est injective et surjective.

REMARQUE Par contraposition, pour que f soit injective, il faut et il suffit que, pour tout $u, v \in X$, la relation $f(u) = f(v)$ entraîne $u = v$.

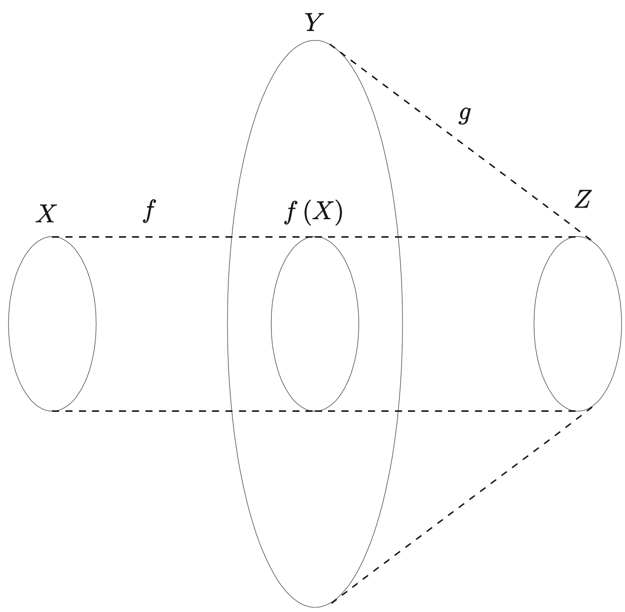
EXEMPLE 1 Si X est un ensemble, l'application identique id_X est bijective.

C'est immédiat.

PROPOSITION *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des applications.*

(i) Si f et g sont des applications injectives (resp. surjectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective).

(ii) Si $g \circ f$ est injective, respectivement surjective, alors f est injective, respectivement g est surjective.



Démonstration de (i) En effet dans le premier cas, pour tout $u, v \in X$, si $g \circ f(u) = g \circ f(v)$, ce qui signifie $g(f(u)) = g(f(v))$, on obtient $f(u) = f(v)$, puisque g est injective, et par suite $u = v$, puisqu'il en est de même de f . Ceci prouve que $g \circ f$ est injective.

Dans le second cas, étant donné $z \in Z$, il existe $y \in Y$ tel que $g(y) = z$, puisque g est surjective. Comme il en est de même de f , il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$, d'où l'on tire

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z \ .$$

Ceci prouve que $g \circ f$ est surjective.

Démonstration de (ii) Dans le premier cas, pour tout $u, v \in X$, si $f(u) = f(v)$, on obtient immédiatement $g(f(u)) = g(f(v))$, donc $u = v$, puisque $g \circ f$ est injective.

Dans le second cas, étant donné $z \in Z$, il existe $x \in X$ tel que $g(f(x)) = z$. En posant $y := f(x)$, on a $g(y) = z$, ce qui montre que g est surjective. □

EXEMPLE 2 L'application

$$S : X \times Y \longrightarrow Y \times X : (x, y) \longmapsto (y, x)$$

est bijective.

En effet soit $T : Y \times X \longrightarrow X \times Y : (y, x) \longmapsto (x, y)$. On a immédiatement $T \circ S = \mathrm{id}_{X \times Y}$ et $S \circ T = \mathrm{id}_{Y \times X}$. Utilisant l'exemple 1 on en déduit, par le théorème (ii), que S et T sont bijectives. □

THEOREME *Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application bijective, alors*

$$\{(f(x), x) \mid x \in X\} = S(\mathrm{Gr}\, f) \subset Y \times X$$

est une partie fonctionnelle.

Pour montrer que $S(\mathrm{Gr}\, f)$ est fonctionnelle, il nous suffit de prouver que, pour tout $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que $(y, x) \in S(\mathrm{Gr}\, f)$. Mais puisque f est surjective, il exite tout d'abord un $x \in X$ tel que $f(x) = y$ et on a

$$(y, x) = (f(x), x) = S(x, f(x)) \in S(\mathrm{Gr}\, f) \ .$$

Il nous reste à montrer que x est univoquement déterminé par cette condition. Si $u, v \in X$ sont tels que

$$(y, u), (y, v) \in S(\mathrm{Gr}\, f) \ ,$$

on a

$$(u, y), (v, y) \in T(S(\mathrm{Gr}\, f)) = \mathrm{Gr}\, f \ ,$$

donc

$$f(u) = y = f(v) \ .$$

Comme f est injective, on obtient bien $u = v$. □

DEFINITION 2 Si f est bijective, on pose

$$\overset{-1}{f} := (Y, X, S(\mathrm{Gr}\, f))$$

et on dit que c'est l' *application réciproque* de f .

COROLLAIRE *Pour qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ soit bijective, il faut et il suffit que, pour tout $y \in Y$, l'équation $f(\cdot) = y$ soit univoquement résoluble.*

Dans ce cas, son unique solution est $\overset{-1}{f}(y)$ *et on a*

$$f \circ \overset{-1}{f} = \mathrm{id}_Y \quad \text{et} \quad \overset{-1}{f} \circ f = \mathrm{id}_X \ .$$

La première partie est évidente par la remarque, car f est bijective si, et seulement si, pour tout $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Cet élément est évidemment $\overset{-1}{f}(y)$, puisque $(x, y) \in \mathrm{Gr}\, f$, donc $(y, x) \in S(\mathrm{Gr}\, f)$ et par suite $x = \overset{-1}{f}(y)$.

Finalement, pour tout $y \in Y$, comme $\overset{-1}{f}(y)$ est solution de $f(\cdot) = y$, on a

$$f \circ \overset{-1}{f}(y) = f\left(\overset{-1}{f}(y)\right) = y = \mathrm{id}_Y(y) \ .$$

D'autre part, pour tout $x \in X$, en posant $y := f(x)$, il est clair que x est solution de l'équation $f(\cdot) = y$. On a donc $x = \overset{-1}{f}(y)$ par l'unicité, donc

$$\overset{-1}{f} \circ f(x) = \overset{-1}{f}(f(x)) = \overset{-1}{f}(y) = x \ .$$

□

EXERCICE Soit X un ensemble. Montrer qu'il n'existe aucune application surjective

$$f : X \longrightarrow \mathfrak{P}(X) \ .$$

Considérer la relation $x \notin f(x)$.

2.8 La notion de famille

DEFINITION 1 Soient X et Y des ensembles. Une application de X dans Y , notée

$$X \longrightarrow Y : x \longmapsto y_x$$

ou $(y_x)_{x\in X}$, s'appelle une *famille* d'éléments de Y *indexée* par X . L'ensemble de toutes ces familles, i.e. l'ensemble de toutes les applications de X dans Y , est désigné par Y^X .

C'est un ensemble, car on peut l'écrire sous la forme

$$\{(X,Y,G) \in \{X\} \times \{Y\} \times \mathfrak{P}(X \times Y) \mid G \text{ est fonctionnelle}\} \ .$$

Dans certaines situations on ne précise pas l'ensemble d'arrivée et on utilise souvent J comme ensemble d'indices. Par exemple on dit que $(X_j)_{j\in J}$ est une *famille* d'ensembles.

L'image de J par l'application $j \longmapsto X_j$ se note $\{X_j \mid j \in J\}$. La réunion des ensembles de cet ensemble est alors désignée par

$$\bigcup_{j\in J} X_j \ ,$$

et on dit que c'est la *réunion* de la famille $(X_j)_{j\in J}$. On a

$$x \in \bigcup_{j\in J} X_j \quad \Longleftrightarrow \quad \exists j \in J \text{ tel que } x \in X_j \ .$$

Si $J = \emptyset$, alors $\bigcup_{j\in J} X_j = \emptyset$.

Si $(X_j)_{j\in J}$ est une famille de parties d'un ensemble X , on pose

$$\bigcap_{j\in J} X_j := \{x \in X \mid \forall j \in J \text{ , on a } x \in X_j\} \ ,$$

et on dit que c'est l' *intersection* de la famille $(X_j)_{j\in J}$. Pour tout $x \in X$, on a

$$x \in \bigcap_{j\in J} X_j \quad \Longleftrightarrow \quad \forall j \in J \text{ , on a } x \in X_j \ .$$

Si $J = \emptyset$, alors $\bigcap_{j\in J} X_j = X$.

REMARQUE Si A est une propriété et X un ensemble, la relation

$$\forall x \, (x \in X \Rightarrow A(x))$$

s'exprime sous la forme :

$$\text{pour tout } x \in X \text{ , on a } A(x) \ .$$

DEFINITION 2 Soit $(X_j)_{j\in J}$ une famille d'ensembles. L'ensemble de toutes les familles $(x_j)_{j\in J}$ telles que $x_j \in X_j$ pour tout $j \in J$, i.e. l'ensemble de toutes les applications

$$f : J \longrightarrow \bigcup_{j\in J} X_j : j \longmapsto f(j)$$

telles que $f(j) \in X_j$ pour tout $j \in J$, est désigné par

$$\prod_{j \in J} X_j$$

et on dit que c'est l' *ensemble produit* de la famille $(X_j)_{j \in J}$.

Axiome du choix Si, pour tout $j \in J$, on a $X_j \neq \emptyset$, alors $\prod_{j \in J} X_j \neq \emptyset$.

EXERCICE 1 Soient J, X, Y des ensembles, $f : X \longrightarrow Y$ une application, $(A_j)_{j \in J}$ et $(B_j)_{j \in J}$ des familles de parties de X et Y respectivement. Alors $(f(A_j))_{j \in J}$ et $\left(\overset{-1}{f}(B_j)\right)_{j \in J}$ sont des familles de parties de Y et X respectivement et on a les formules

(i)
$$\overset{-1}{f}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} \overset{-1}{f}(B_j)$$

(ii)
$$\overset{-1}{f}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} \overset{-1}{f}(B_j)$$

(iii)
$$f\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \bigcup_{j \in J} f(A_j)$$

(iv)
$$f\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \subset \bigcap_{j \in J} f(A_j) \ .$$

Trouver un exemple qui montre que l'inclusion dans (iv) peut être stricte.

EXERCICE 2 Soient X, Y des ensembles, $a, b \in X$ et $u, v \in Y$ tels que $a \neq b$ et $u \neq v$. Montrer que les deux applications

$$\mathrm{pr}_a : Y^X \longrightarrow Y : f \longmapsto f(a) \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}_b : Y^X \longrightarrow Y : f \longmapsto f(b)$$

sont différentes.

EXERCICE 3 Soient X, Y, Z des ensembles. Montrer que l'application

$$\Phi : Z^{X \times Y} \longrightarrow \left(Z^Y\right)^X : \ f \longmapsto \Phi(f)$$

définie par

$$[\Phi(f)(x)](y) := f(x, y)$$

est bijective. Quelle est l'application décrite par $\Phi(f)(x)$?