Kapitel 8

DIFFERENZIERBARKEIT

In diesem Paragraph ist J ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Fassung vom 17. Juli 2002

8.1 Der Begriff der Ableitung

DEFINITION Seien $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $x \in J$. Man sagt, daß f in x *differenzierbar* ist, wenn

$$\lim_{x\neq y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. In diesem Fall heißt diese Zahl die *Ableitung* von f in x und wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

Die Funktion f heißt *(in J) differenzierbar* , falls f in jedem Punkt von J differenzierbar ist. Die Funktion

$$f' : J \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto f'(x)$$

heißt die *Ableitung* von f .

Man sagt, daß f *stetig differenzierbar* ist, wenn f differenzierbar und f' stetig ist. Man bezeichnet mit $\mathcal{C}^{(1)}(J)$ die Menge aller dieser Funktionen, und setzt

$$\partial : \mathcal{C}^{(1)}(J) \longrightarrow \mathcal{C}(J) : f \longmapsto f' \ .$$

BEMERKUNG 1 Man bezeichnet noch (zu oft) $f'(x)$ durch $\frac{d}{dx}f(x)$ oder $(f(x))'$. Die erste Notation ist zu kompliziert; die zweite kann zu Verwechslung führen, falls im Ausdruck von f Parametern vorkommen und die Funktion, die man betrachtet, nicht präzisiert wurde, z.B. $(a^s)'$. Um die Variable bzgl. der man ableitet zu kennzeichnen, kann man schreiben

$$\partial_a (a^s) \ .$$

BEMERKUNG 2 Die Differenzierbarkeit von f in x bedeutet, daßdie Funktion

$$y \longmapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x} : J \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

der Differentialquotienten in x sich stetig in x fortsetzen läßt.

HAUPTSATZ *Genau dann ist eine Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ in $x \in J$ differenzierbar, wenn ein $a \in \mathbb{C}$ existiert, so daß die Funktion $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{C}$, die durch*

$$f(y) = f(x) + a \cdot (y - x) + \varphi(y) \quad \text{für alle } y \in J$$

definiert ist, die Bedingung

$$\lim_{x\neq y\to x} \frac{\varphi(y)}{y - x} = 0$$

erfüllt. In diesem Fall ist a die Ableitung von f in x .

KOROLLAR *Ist f in x differenzierbar, so ist f in x stetig. Insbesondere gilt*

$$\mathcal{C}^{(1)}(J) \subset \mathcal{C}(J) \ .$$

BEMERKUNG 3 Ist f in x differenzierbar, so ist der Graph der affinen Funktion

$$y \longmapsto f(x) + f'(x) \cdot (y - x)$$

die Tangente am Graphen von f in $(x, f(x))$. Sie liefert die beste affine Approximation von f in der Nähe von x :

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so daß

$$|\varphi(y)| \leqslant \varepsilon \cdot |y - x| \quad \text{für alle } y \in J \text{ mit } |y - x| \leqslant \delta \ .$$

Ersetzt man $f'(x)$ durch $a \neq f'(x)$ und wählt man $\delta_0 > 0$, so daß

$$|\varphi(y)| \leqslant \frac{|f'(x) - a|}{2} \cdot |y - x| \quad \text{für alle } y \in J \text{ mit } |y - x| \leqslant \delta_0 \ ,$$

so ist für diese y der Fehler größer als

$$\frac{|f'(x) - a|}{2} \cdot |y - x| \ .$$

Manchmal schreibt man

$$f(y) \simeq f(x) + f'(x) \cdot (y - x) \ ,$$

aber dies gibt keine Auskunft, wie groß der Fehler ist.

BEISPIEL 1 Die konstanten Funktionen sind in jedem Intervall differenzierbar, und deren Ableitung ist 0 .

BEISPIEL 2 Für alle $a \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $x \longmapsto a \cdot x$ in jedem Intervall differenzierbar, und ihre Ableitung ist a .

BEISPIEL 3 Für alle $a \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $x \longmapsto \exp(a \cdot x)$ in jedem Intervall differenzierbar, und ihre Ableitung in x ist $a \cdot \exp(a \cdot x)$.

BEISPIEL 4 Die Funktion $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x|$ ist in 0 nicht differenzierbar, aber in jedem Punkt von $\mathbb{R}^*$ mit

$$|\cdot|' : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{signum} x := \frac{x}{|x|} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & & x > 0 \\ & \text{falls} & \\ -1 & & x < 0 \end{array} \right. .$$

8.2 Rechnen mit differenzierbaren Funktionen

HAUPTSATZ *Seien $f, g : J \longrightarrow \mathbb{C}$ Funktionen, $x \in J$ und $a \in \mathbb{C}$.*

(i) Sind f, g differenzierbar in x , dann sind die Funktionen $a \cdot f$, $f + g$ und $\bar{f}$ in x differenzierbar und es gilt

$$(a \cdot f)'(x) = a \cdot f'(x) \quad , \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{und} \quad \bar{f}'(x) = \overline{f'(x)} \ .$$

(ii) ***Produktregel*** *Sind f, g differenzierbar in x , so ist $f \cdot g$ in x differenzierbar und es gilt*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \ .$$

(iii) ***Quotientenregel*** *Sind f, g differenzierbar in x und ist $g \neq 0$ überall in J , so ist $\frac{f}{g}$ in x differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \ .$$

(iv) Seien I ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $I \subset J$ und $x \in I$. Ist f in x differenzierbar, so ist $f_{|I}$ in x differenzierbar mit

$$\left(f_{|I}\right)'(x) = f'(x) \ .$$

(v) Sei $x \in J$. Genau dann ist f in x differenzierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *in x differenzierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i \cdot (\operatorname{Im} f)'(x) \ .$$

BEISPIEL 1 Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die Funktion

$$\mathrm{id}^n : x \longmapsto x^n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{falls } n \geqslant 0 \text{ , bzw.} \quad \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{falls } n < 0 \ ,$$

differenzierbar mit Ableitung

$$n \cdot \mathrm{id}^{n-1} : x \longmapsto n \cdot x^{n-1} \ .$$

BEISPIEL 2 Die Funktionen $\cos$, $\sin$, $\tan$ und $\cot$ sind differenzierbar mit

$$\cos' = -\sin \quad , \quad \sin' = \cos \quad , \quad \tan' = \frac{1}{\cos^2} \quad \text{und} \quad \cot' = \frac{-1}{\sin^2} \ .$$

DEFINITION Man sagt, daß $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ in $x \in J$ *links* bzw. *rechts differenzierbar* ist, wenn die Einschränkung von f auf $J \cap]-\infty, x]$ bzw. auf $J \cap [x, \infty[$ in x differenzierbar ist. Man schreibt in diesem Fall

$$f_l'(x) := \left(f_{|J \cap]-\infty, x]}\right)'(x) \quad \text{und} \quad f_r'(x) := \left(f_{|J \cap [x, \infty[}\right)'(x)$$

und nennt diese Zahlen *linksseitige* bzw. *rechtsseitige Ableitung* von f in x .

SATZ *Genau dann ist f in x differenzierbar, wenn f in x links und rechts differenzierbar ist, und $f_l'(x) = f_r'(x)$ gilt.*

BEISPIEL 3 Für die Funktion $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x|$ gilt

$$|\cdot|_g'(0) = -1 \quad \text{und} \quad |\cdot|_d'(0) = 1 \ .$$

Dies zeigt nochmals, daß sie in 0 nicht differenzierbar ist.

BEISPIEL 4 Die Funktion

$$|\cdot|^3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x^3 & & x \geqslant 0 \\ & \text{falls} & \\ -x^3 & & x < 0 \end{array} \right.$$

ist in 0 differenzierbar. Es gilt

$$\left(|\cdot|^3\right)_l'(0) = -3 \cdot \mathrm{id}^2(0) = 0 \quad \text{und} \quad \left(|\cdot|^3\right)_l'(0) = 3 \cdot \mathrm{id}^2(0) = 0 \ .$$

Aufgabe Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} x^5 - 2x^3 + 2x & & x < 1 \\ & \text{falls} & \\ x & & x \geqslant 1 \end{array} \right.$$

auf (evtl. einseitige) Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit.

8.3 Kettenregel und Ableitung der Umkehrfunktion

HAUPTSATZ

(i) ***Kettenregel*** *Seien $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$, I ein Intervall in $\mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $g(I) \subset J$ und $u \in I$. Sind g in u und f in $g(u)$ differenzierbar, so ist $f \circ g : I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ in u differenzierbar, und es gilt*

$$(f \circ g)'(u) = f'(g(u)) \cdot g'(u) \ .$$

(ii) ***Ableitung der Umkehrfunktion*** *Seien $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, streng wachsende bzw. fallende Funktion und $\overset{-1}{f} : f(J) \longrightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion. Ist f in $x \in J$ differenzierbar, dann ist $\overset{-1}{f}$ in $f(x)$ genau dann differenzierbar, wenn $f'(x) \neq 0$. In diesem Fall ist dann*

$$\left(\overset{-1}{f}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

oder

$$\left(\overset{-1}{f}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(\overset{-1}{f}(y)\right)} \ ,$$

wobei $y := f(x)$.

BEMERKUNG Das Schreiben von

$$\frac{f(g(v)) - f(g(u))}{v - u} = \frac{f(g(v)) - f(g(u))}{g(v) - g(u)} \cdot \frac{g(v) - g(u)}{v - u}$$

führt nicht zu einem richtigen Beweis der Kettenregel, außer wenn g injektiv ist.

BEISPIEL 1 Ist $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, und ist für $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u \longmapsto a \cdot u + b : I \longrightarrow J$$

wohl definiert, dann ist

$$u \longmapsto f(a \cdot u + b) : I \longrightarrow \mathbb{C}$$

differenzierbar mit Ableitung

$$u \longmapsto a \cdot f'(a \cdot u + b) \ .$$

BEISPIEL 2 Für alle $x > 0$ gilt $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, d.h.

$$\ln' = \frac{1}{\mathrm{id}} \ .$$

BEISPIEL 3 Für alle $s \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$\mathrm{id}^s : x \longmapsto x^s : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar mit Ableitung

$$s \cdot \mathrm{id}^{s-1} : x \longmapsto s \cdot x^{s-1} \ .$$

BEISPIEL 4 Ist $s > 0$, so ist die stetige Fortsetzung von id^s durch 0 in 0 genau dann differenzierbar, wenn $s \geqslant 1$. Die Formel von Beispiel 2 ist noch gültig mit den Konventionen

$$0^s = 0 \text{ falls } s > 0 \quad \text{und} \quad 0^0 = 1 \ .$$

Die Funktion

$$\mathrm{id}^s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist also stetig differenzierbar wenn $s \geqslant 1$.

BEISPIEL 5 Die Funktion

$$\sqrt{1+\cdot} : x \longmapsto \sqrt{1+x} : \left]-1,\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

ist differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+\cdot}} : x \longmapsto \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}} \ .$$

ANWENDUNG Es gilt

$$\lim\nolimits_k \left(\sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k} \right) = \left(\sqrt{1+\cdot} \right)' (0) = \frac{1}{2} \ .$$

BEISPIEL 6 Die Funktion $\ln|\cdot| : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung $\frac{1}{\mathrm{id}}$.

ANWENDUNG Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim\nolimits_{y\to\infty} \left(1 + \frac{x}{y} \right)^y = \exp\left(\left[\ln \left| \frac{1}{x} + \cdot \right| \right]' (0) \right) = e^x \ .$$

BEISPIEL 7 Die Funktion $\arcsin : \left]-1,1\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{id}^2}} \ .$$

Analog gilt (Übung)

$$\arccos' = -\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{id}^2}} \quad , \quad \arctan' = \frac{1}{1+\mathrm{id}^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{arccot}' = \frac{-1}{1+\mathrm{id}^2} \ .$$

Aufgabe 1 Für $s \in \mathbb{R}_+$ sei

$$f_s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f_s(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ x^s \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x > 0 \end{cases} .$$

In Abhängigkeit der Werte von s untersuche man die jeweilige Funktion f_s auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit.

Aufgabe 2

(a) Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie die Formel $f' = f \cdot (\ln f)'$.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto x^x$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) Für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \exp\left(a \cdot x^2 + b \cdot x + c\right) .$$

(b)
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin(x \cdot \sin x) + \cos\left(\sin x^2\right) .$$

(c)
$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto (x^x)^x .$$

(d)
$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^{(x^x)} .$$

8.4 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

DEFINITION 1 Seien $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in J$. Man sagt, daß f *in* x *ein lokales Maximum* bzw. *Minimum* besitzt, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so daß gilt

$$f(y) \leqslant f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(y) \geqslant f(x) \quad \text{für alle } y \in J \text{ mit } |y - x| \leqslant \delta \ .$$

Zur Vereinfachung sagt man *lokales Extremum* , wenn man nicht präzisieren will.

Dieses lokale Maximum bzw. Minimum heißt *strikt* oder *isoliert* , wenn gilt

$$f(y) < f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(y) > f(x) \quad \text{für alle } y \in J \text{ mit } 0 < |y - x| \leqslant \delta \ .$$

BEMERKUNG 1 Jeder Punkt, in dem f ihr Maximum bzw. Minimum annimmt, ist ein lokales Maximum bzw. Minimum.

DEFINITION 2 Ist J ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$, so definiert man

$$J^\circ :=]\inf J, \sup J[$$

und nennt es das *Innere* des Intervalls J .

SATZ *Ist f in $x \in J^\circ$ differenzierbar und besitzt f in x ein lokales Extremum, so gilt $f'(x) = 0$.*

DEFINITION 3 Ist f in $x \in J$ differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$, so nennt man x einen *kritischen Punkt* von f .

BEMERKUNG 2 Ein lokales Extremum von f im Inneren des Intervalls ist ein kritischer Punkt. Die Umkehrung ist falsch, wie das Beispiel der Funktion

$$x \longmapsto x^3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

betrachtet in 0 , zeigt.

BEMERKUNG 3 Der Satz ist falsch, falls x ein Endpunkt des Intervalls ist, da die Funktion

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x \ ,$$

in 1 ihr Maximum und in 0 ihr Minimum annimmt.

8.5 Satz von Rolle

HAUPTSATZ *Seien $[a,b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $a \neq b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Ist f in $]a,b[$ differenzierbar, dann existiert ein $\xi \in\,]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.*

BEISPIEL 1 Ein reelles Polynom vom Grade n und $\neq 0$ besitzt höchstens n Nullstellen in $\mathbb{R}$.

KOROLLAR (Mittelwertsatz) *Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die in $]a,b[$ differenzierbar sind. Dann gilt*

(i) *Es existiert ein $\xi \in\,]a,b[$ mit*

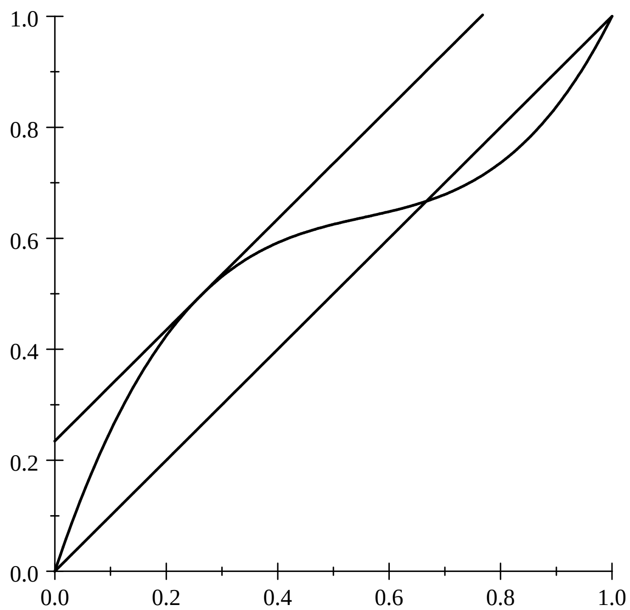
$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(\xi) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(\xi) \ .$$

Ist $g' \neq 0$ auf $]a,b[$, so gilt $g(a) \neq g(b)$ und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \ .$$

(ii) *Insbesondere existiert ein $\xi \in\,]a,b[$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) \ .$$



$$x \longmapsto 3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$\xi = \tfrac{5-\sqrt{7}}{9} \quad \text{und} \quad f(\xi) = \tfrac{155}{243} - \tfrac{13}{243}\sqrt{7}$$

BEISPIEL 2 Es gilt

$$\ln x < x - 1 \text{ falls } x > 0 \text{ und } x \neq 1 \ .$$

Analog gilt

$$\sin x < x \quad \text{und} \quad \arctan x < x \quad \text{für alle } x > 0 \ .$$

SATZ (Mittelwertungleichung) *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und differenzierbar in $]a,b[$, so gilt*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sqrt{2} \cdot (b-a) \cdot \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| \ .$$

BEMERKUNG Wir werden mit Hilfe der Integralrechnung (vgl. 9.9) zeigen, daß man die Konstante $\sqrt{2}$ weglassen kann.

Aufgabe 1 Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes folgende Ungleichungen:

(a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist

$$e^a \cdot (b-a) < e^b - e^a < e^b \cdot (b-a) \ .$$

(b) Für $0 < x < 1$ gilt

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \cdot \left(1 - x^2\right)^{-1} \ .$$

Aufgabe 2 Seien $a \in J^\circ$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ in $J \setminus \{a\}$ differenzierbar sowie in a stetig. Man nehme an,

$$f'(a-) := \lim_{x \to a-} f'(x) \quad \text{und} \quad f'(a+) := \lim_{x \to a+} f'(x)$$

existieren. Zeigen Sie:

f ist in a genau dann differenzierbar, wenn $f'(a+) = f'(a-)$. In diesem Fall gilt $f'(a) = f'(a-)$.

Aufgabe 3 Jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die ein lokales, aber kein absolutes Minimum besitzt, besitzt zusätzlich ein lokales Maximum.

8.6 Monotonie

DEFINITION Seien X eine Menge und $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen. Man schreibt $f \leqslant g$, falls $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \in X$.

Man verifiziert sofort, daß dies eine Ordnungsrelation auf der Menge $\overline{\mathbb{R}}^X$ aller Funktionen von X nach $\overline{\mathbb{R}}$ definiert. Es sei daran erinnert, daß man

$$f < g \quad \text{durch} \quad f \leqslant g \text{ und } f \neq g$$

definiert, d.h. $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \in X$, und es existiert ein $u \in X$ mit $f(u) < g(u)$.

Aber Achtung, ist A eine Teilmenge von X , so schreiben wir

$$f < g \text{ in } A \quad \text{falls} \quad f(x) < g(x) \text{ für alle } x \in A .$$

SATZ *Sei $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und in J° differenzierbare Funktion. Dann gilt*

(i)

$$f' \geqslant 0 \textit{ bzw. } \leqslant 0 \textit{ in } J^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad f \textit{ ist wachsend bzw. fallend .}$$

(ii)

$$f' > 0 \textit{ bzw. } < 0 \textit{ in } J^\circ \quad \Longrightarrow \quad f \textit{ ist streng wachsend bzw. fallend .}$$

BEMERKUNG Die Umkehrung von (ii) ist falsch, wie das Beispiel der Funktion

$$x \longmapsto x^3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zeigt.

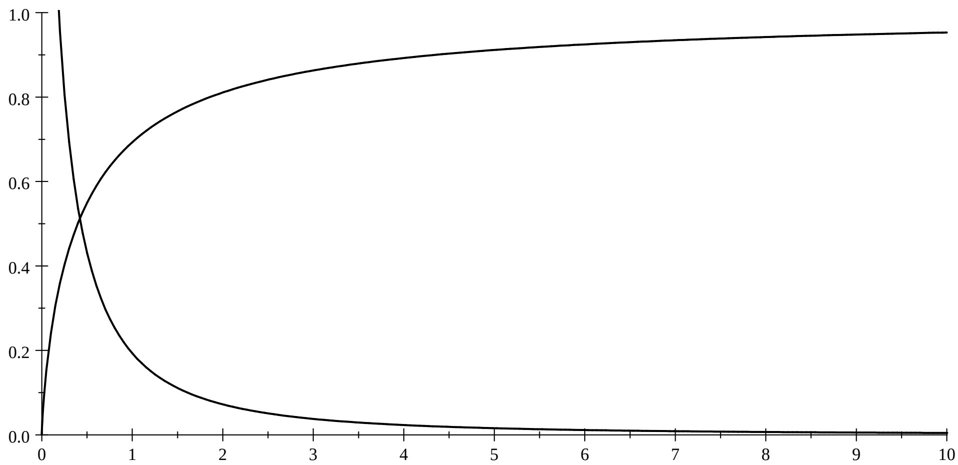
KOROLLAR *Ist $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige und in J° differenzierbare Funktion, so gilt*

$$f' = 0 \textit{ in } J^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad f \textit{ ist konstant .}$$

BEISPIEL 1 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) .$$

BEISPIEL 2 Die Funktion $x \longmapsto x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng wachsend, und ihr Bild ist $]0, 1[$.



$$\mathrm{id} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{id}}\right) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \left]0,1\right[$$
$$\ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{id}}\right) - \frac{1}{1+\mathrm{id}} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

Aufgabe Seien $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $a \in J^\circ$ mit $f'(a) > 0$.

(a) Zeigen Sie: Es existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(a)$$

und

$$a \leqslant x \leqslant a + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad f(a) \leqslant f(x) \ .$$

(b) Kann man auch auf die Existenz eines ε schließen mit $f_{|[a-\varepsilon,a+\varepsilon]}$ streng monoton wachsend ? Beweis oder Gegenbeispiel !

8.7 Stammfunktionen

DEFINITION Sei $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine (stetige) Funktion. Eine *Stammfunktion* von f ist eine differenzierbare Funktion $F : J \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F' = f \ .$$

BEMERKUNG Eine Stammfunktion wird oft geraten und man verifiziert es durch Differenzieren. Um zu zeigen, daß jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt, benötigt man aber die Integrationstheorie

HAUPTSATZ (Eindeutigkeit) *Seien $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $F_0 : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f . Genau dann ist $F : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f , wenn*

$$F = F_0 + c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C} \ .$$

BEISPIEL 1 Die Differentialgleichung der Exponentialfunktion

$$f' = c \cdot f \ .$$

SATZ *Seien $\tau \in J$ und $c, \eta \in \mathbb{C}$. Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$, die Lösung des Anfangswertproblems*

$$f' = c \cdot f \quad \text{und} \quad f(\tau) = \eta$$

ist. Diese Lösung ist

$$f = \eta \cdot e^{c \cdot (\diamond - \tau)} \ .$$

BEISPIEL 2 Kohlenstoff C^{14} Datierung

Der Zerfall eines radioaktiven Materials mit Masse (oder Konzentration) $m(t)$ zur Zeit t wird durch

$$m' = -\lambda \cdot m$$

beschrieben, wobei λ die Zerfallskonstante ist. Ist m_0 die Masse zur Zeit t_0 , so gilt

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot (t - t_0)} \ .$$

Ist τ die *Halbwertzeit* , z.B. 5568 a für C^{14} , so ist per definitionem

$$\frac{1}{2} \cdot m_0 = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \ ,$$

d.h.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \ .$$

Daraus folgt

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau} \cdot (t - t_0)} \ .$$

Das Verhältnis v_0 vom radioaktiven C^{14} zum nicht radioaktiven C^{12} bei lebenden Organismen bleibt konstant durch das Aufnehmen aus der Luft. Nach dem Absterben gilt nach T Jahren

$$v(T) = v_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau} \cdot T} \ ,$$

d.h.

$$T = \frac{\tau}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{v_0}{v(T)}\right) \ .$$

8.8 De l'Hospital Regeln

SATZ (Die elementare Regel) *Seien $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $c \in J$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J \smallsetminus \{c\}$.*

Gilt $f(c) = g(c) = 0$ und $g'(c) \neq 0$, so ist

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ .$$

HAUPTSATZ *Seien $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und c ein Endpunkt von J , der nicht zu J gehört. Wir nehmen an, daß $g, g' \neq 0$ auf J und daß*

(i)

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$$

oder

(ii)

$$\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$$

gilt.

Falls $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert, so existiert $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und es gilt

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

BEISPIEL 1 Man kann die Formeln aus 7.16.3 neu beweisen.

BEISPIEL 2 Es ist

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \left(\frac{\pi}{2} - y\right) \cdot \tan y = 1 \ .$$

BEMERKUNG 1 Die elementare Regel ist äquivalent zur affinen Approximation der Funktionen f und g , da

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c) \cdot (x-c) + \varphi(y)}{g'(c) \cdot (x-c) + \psi(y)} = \frac{f'(c) + \frac{\varphi(y)}{x-c}}{g'(c) + \frac{\psi(y)}{x-c}}$$

(siehe Hauptsatz 8.1). Dies kann man mit der Taylorformel 8.9 verallgemeinern.

BEMERKUNG 2 Die Regel kann man nicht immer direkt anwenden. Z.B. für

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} \ ,$$

darf man nicht $\sqrt{1-\cos}$ ableiten, da der Ausdruck komplizierter wird. Man soll folgendermaßen vorgehen

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \sqrt{\lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{2x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Aufgabe 1 Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}} \ .$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie

$$\lim_{0\neq x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

mit Hilfe der Regel von l'Hospital und mit Hilfe der Restgliedabschätzung für den Sinus. Welche Methode ist die beste ?

Analog für

$$\lim_{0\neq x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \ ,$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^3 \cdot \sin \frac{1}{x} - x^2 \right)$$

und

$$\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}}{x^7} \ .$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie

$$\lim_k k \cdot \left(k^{\frac{1}{k}} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \lim_k \sqrt{k} \cdot \left(k^{\frac{1}{k}} - 1 \right) \ .$$

8.9 Taylorformel

DEFINITION 1 Eine Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *zweimal differenzierbar* (in J) falls f differenzierbar ist und ihre Ableitung f' auch differenzierbar ist. Die Funktion

$$f'' := (f')'$$

heißt die *zweite Ableitung von* f .

Analog definiert man für $k \in \mathbb{N}$ den Begriff k*-mal differenzierbar* durch Induktion. Wir setzten

$$f^{(0)} := f \quad \text{und} \quad f^{(l+1)} := \left(f^{(l)}\right)' \quad \text{für } l \in \mathbb{N} \text{ mit } l < k \ ;$$

$f^{(k)}$ heißt die k*-te Ableitung von* f .

Man sagt, daß f k*-mal stetig differenzierbar* ist, falls f k-mal differenzierbar ist und $f^{(k)}$ stetig ist. Man bezeichnet mit $\mathcal{C}^{(k)}(J)$ die Menge aller dieser Funktionen und definiert die Abbildung

$$\partial^k : \mathcal{C}^{(k)}(J) \longrightarrow \mathcal{C}(J) : f \longmapsto f^{(k)} \ .$$

Man beachte, daß $\mathcal{C}(J) := \mathcal{C}^{(0)}(J)$ die Menge aller stetigen Funktionen auf J ist.

Die Funktion f heißt *unendlich oft differenzierbar* , wenn sie k-mal differenzierbar für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.

BEMERKUNG 1 Ist eine Funktion f k-mal differenzierbar, so ist ihre l-te Ableitung $f^{(l)}$ stetig für alle $l < k$ und es ist

$$\partial^l : \mathcal{C}^{(k)}(J) \longrightarrow \mathcal{C}^{(k-l)}(J) : f \longmapsto f^{(l)} \ .$$

Alle Ableitungen einer unendlich oft differenzierbaren Funktion sind stetig.

DEFINITION 2 Ist f k-mal differenzierbar und $x \in J$, dann heißt

$$T_k f := \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (\cdot - x)^l$$

das *Taylorpolynom vom Grade* k von f in x .

Für alle $j = 0, \ldots, k$ gilt

$$(T_k f)^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) \ ,$$

da

$$(T_k f)^{(j)} = \sum_{l=j}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{(l-j)!} \cdot (\cdot - x)^{l-j} \ .$$

HAUPTSATZ (Taylorformel mit Lagrange-Rest) *Seien $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion, so daß $f^{(k)}$ in J° differenzierbar ist, und $x \in J$.*

Für alle $y \in J$ mit $y \neq x$ existiert ein ξ strikt zwischen x und y mit

$$f(y) = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y-x)^l + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot (y-x)^{k+1} \ .$$

KOROLLAR *Seien $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine $k+1$-mal differenzierbare Funktion und $x \in J$. Dann gilt*

$$f^{(k+1)} = 0 \text{ in } J \quad \Longleftrightarrow \quad f = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (\cdot - x)^l \ .$$

BEMERKUNG 2 Ein Polynom vom Grade k stimmt mit seinem Taylorpolynom vom Grade k überein. Dies kann man bei der Entwicklung von Polynomen benutzen.

BEMERKUNG 3 Schreibt man für $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f(y) = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y-x)^l + R_{k+1}(y) \ ,$$

so zeigt die Taylorformel, daß

$$R_{k+1}(y) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot (y-x)^{k+1}$$

für ein ξ strikt zwischen x und y gilt. Ist $\left|f^{(k+1)}\right| \leqslant M$ in J° , so folgt

$$|R_{k+1}(y)| \leqslant \frac{M}{(k+1)!} \cdot |y-x|^{k+1} \quad \text{für alle } y \in J \ ,$$

also insbesondere

$$\lim\nolimits_{x \neq y \to x} \frac{R_{k+1}(y)}{(y-x)^j} = 0 \quad \text{für alle } j = 0, 1, \ldots, k \ .$$

Dies ist insbesondere erfüllt, falls $J = [a, b]$ und f $(k+1)$-mal stetig differenzierbar in $[a, b]$ ist, da $f^{(k+1)}$ nach dem Satz von Weierstrass 7.10 beschränkt ist.

BEISPIEL Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\cos x = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \cdot x^{2l} + R_{2k+2}(x) \quad \text{und} \quad \sin x = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \cdot x^{2l+1} + R_{2k+3}(x)$$

mit

$$|R_k(x)| \leqslant \frac{|x|^k}{k!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \ .$$

Aufgabe 1 Seien $k \in \mathbb{N}^*$, $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine $(k-1)$-mal differenzierbare Funktion und $x \in J$. Ist $f^{(k-1)}$ in x differenzierbar und schreibt man

$$f(y) = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y-x)^l + R_{k+1}(y) \ ,$$

so gilt

$$\lim_{x \neq y \to x} \frac{R_{k+1}(y)}{(y-x)^k} = 0 \ .$$

Beschreiben Sie den Unterschied zwischen dieses Resultat und dasjenige aus obige Bemerkung 3.

Hinweis : Benutzen Sie die elementare de l'Hospital Regel.

Aufgabe 2 Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{C}^{(n)}(J)$.

(a) Zeigen Sie: $f \cdot g \in \mathcal{C}^{(n)}(J)$ und es gilt die *Leibnizsche Differentiationsformel*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \ .$$

(b) Sei $f := \sin \cdot \cosh$. Berechnen Sie $f^{(2n)}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Leibnizschen Differentiationsformel.

Aufgabe 3

(a) Seien $c_1, c_2, \eta \in \mathbb{C}$, $c_1 \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Ansatzes $f = g \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}}$, dass

$$f = \frac{c_2}{c_1} + \left(\eta - \frac{c_2}{c_1}\right) \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}}$$

die einzige Lösung des Anfangswertproblems

$$f' + c_1 \cdot f = c_2 \quad , \quad f(0) = \eta$$

ist.

(b) Seien $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{C}$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f'' + f = 0 \quad , \quad f(0) = \eta_0 \quad , \quad f'(0) = \eta_1 \ .$$

Hinweis : Machen Sie dazu den Ansatz $f = g \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}}$ und zeigen Sie, dass $g'' + 2i \cdot g' = 0$ ist.

(c) Geben Sie die Lösungen für die Paare $(\eta_0, \eta_1) = (1, 0)$ und $(0, 1)$ an.

8.10 Hinreichende Bedingung für strikte lokale Extrema

HAUPTSATZ *Sei $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion, so daß*

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(k-1)}(x) = 0 \quad \textit{und} \quad f^{(k)}(x) \neq 0$$

für ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $x \in J^{\circ}$ gilt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

(i) *f besitzt ein striktes lokales Minimum bzw. Maximum in x .*

(ii) *f besitzt ein lokales Minimum bzw. Maximum in x .*

(iii) *k ist gerade und es gilt $f^{(k)}(x) > 0$ bzw. $f^{(k)}(x) < 0$.*

KOROLLAR *Wir nehmen an, daß f zweimal stetig differenzierbar ist.*

(i) *Besitzt f ein lokales Minimum bzw. Maximum in x , so gilt*

$$f'(x) = 0 \quad \textit{sowie} \quad f''(x) \geqslant 0 \textit{ bzw. } f''(x) \leqslant 0 \ .$$

(ii) *Gilt*

$$f'(x) = 0 \quad \textit{sowie} \quad f''(x) > 0 \textit{ bzw. } f''(x) < 0 \ ,$$

so besitzt f ein striktes lokales Minimum bzw. Maximum in x .

BEISPIEL 1 Die Umkehrung des Korollars (i) ist falsch wie das Beispiel von id^3 zeigt. Es gilt

$$\left(\mathrm{id}^3\right)'(0) = 3\,\mathrm{id}^2(0) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\mathrm{id}^3\right)''(0) = 6\,\mathrm{id}(0) = 0 \ .$$

Dies ist kein Widerspruch zum Satz, da

$$\left(\mathrm{id}^3\right)^{(3)}(0) = 6$$

und 3 ungerade ist.

BEISPIEL 2 In manchen Fällen kann man nicht mit Hilfe des Satzes über ein lokales Minimum bzw. Maximum entscheiden, wie z.B. falls f unendlich oft differenzierbar ist mit $f^{(k)}(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls} \quad x \neq 0 \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} p_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls} \quad x \neq 0 \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad x = 0 \end{cases} \ ,$$

wobei p_k ein Polynom ist.

Aufgabe Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & & x > 0 \\ & \text{falls} & \\ 0 & & x \leqslant 0 \end{array} \right.$$

unendlich oft differenzierbar ist.

8.11 Konvexität

DEFINITION Eine Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex* , falls für alle $x, y \in J$ mit $x \neq y$ gilt

$$f(\alpha \cdot x + [1-\alpha] \cdot y) \leqslant \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) \cdot f(y) \quad \text{für alle } \alpha \in [0,1] \ ,$$

oder

$$f(z) \leqslant \frac{y-z}{y-x} \cdot f(x) + \frac{z-x}{y-x} \cdot f(y) \quad \text{für alle } z \text{ zwischen } x \text{ und } y \ ,$$

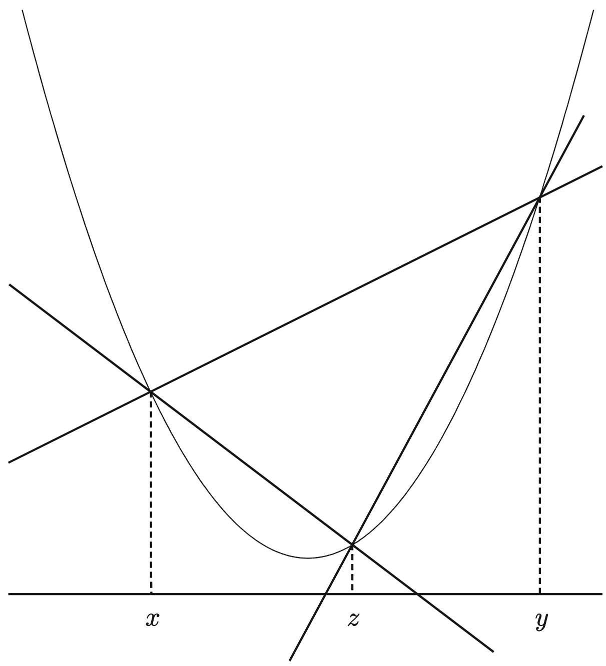
wobei

$$z = \alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{y-z}{y-x}$$

gesetzt ist.

Die Funktion f heißt *konkav* falls $-f$ konvex ist.

SATZ *Ist $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in J° differenzierbar, dann ist f genau dann konvex, wenn $f' : J^\circ \longrightarrow \mathbb{R}$ wachsend ist.*



KOROLLAR *Ist f stetig und zweimal in J° differenzierbar, so ist f genau dann konvex, wenn $f'' \geqslant 0$ in J° gilt.*

BEISPIEL 1 Die reelle Exponentialfunktion ist konvex.

BEISPIEL 2 Die logarithmische Funktion ist konkav.

ANWENDUNG Für alle $p, q \in \left]1, \infty\right[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \ .$$

Diese Ungleichung verallgemeinert diejenige zwischen dem *geometrischen* und *arithmetischen Mittel* :

$$\sqrt{x \cdot y} \leqslant \frac{x+y}{2} \ .$$

BEMERKUNG Ist $f'' > 0$ auf J , so ist $\{f = c\}$ für $c \in \mathbb{R}$ höchstens zweielementig.

Ist f nur konvex (d.h. $f'' \geqslant 0$), so ist dieses Resultat falsch, wie das Beispiel der Funktion

$$[-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ & \text{falls} & \\ x^3 & & 0 < x \leqslant 1 \end{array} \right. ,$$

die 2-mal stetig differenzierbar ist, zeigt. Die zweite Ableitung ist $6 \cdot \max(\cdot, 0)$.

Aufgabe Seien J ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) Ist f konvex, so ist f stetig.

Hinweis : Für alle $x \in J$ et $a, b \in J$ mit $a < x < b$ schätzen Sie $f(x)$ für $y \in [a, b]$ ab durch

$$f(y) \leqslant f(x) + M(y - x) \quad \text{bzw.} \quad f(y) \geqslant f(x) + m(y - x)$$

für geignete Konstanten $m, M \in \mathbb{R}$ getrennt für $y \leqslant x$ und $y \geqslant x$.

(b) Ist $f \in \mathcal{C}^{(2)}(J)$, so ist f genau dann konvex, wenn der Graph von f oberhalb jeder seiner Tangenten liegt, dh. wenn für alle $x, y \in J$ gilt

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y - x) \ .$$

8.12 Diskussion einer Funktion

Wir errinern an die Punkte die bei der Diskussion einer Funktion von Bedeutung sein können :

(a) Grenzwert am Rand.

(b) Stetige Fortsetzbarkeit und Differenzierbarkeit.

(c) Nullstellen oder andere charakteristische Werte.

(d) Monotonie.

(e) Kritischen Punkte : $\{f' = 0\}$, Vorzeichenwechsel von f' , lokale Extrema.

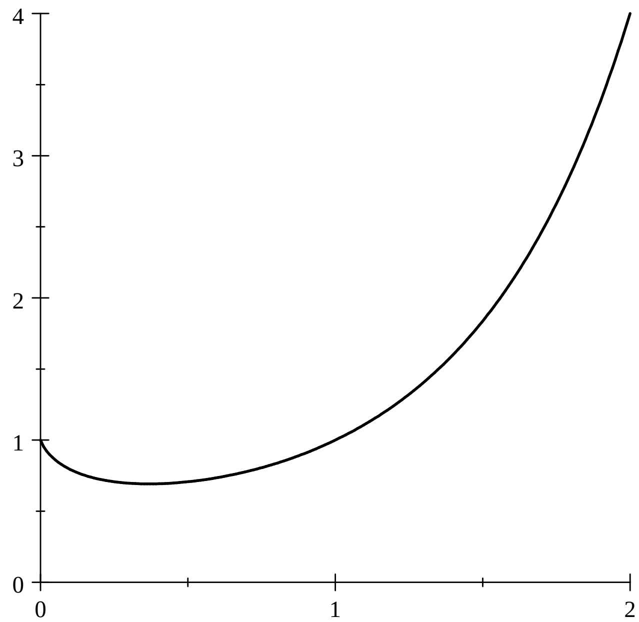
(f) $\{f'' = 0\}$, Vorzeichenwechsel von f'' : *Wendepunkte*.

(g) Konvexität.

BEISPIEL Diskussion der Funktion

$$\mathrm{id}^{\mathrm{id}} := \exp \circ (\mathrm{id} \cdot \ln) = \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^x \ ,$$

wobei $\mathrm{id} \cdot \ln$ stetig in 0 durch 0 fortgesetzt wurde.



Sie ist stetig, insbesondere gilt

$$\lim_{x \to 0+} x^x = 1 = 0^0 \ ,$$

sowie

$$\lim_{x \to \infty} x^x = \infty \ .$$

Sie ist unendlich oft differenzierbar in $]0,\infty[$ und in 0 nicht differenzierbar. Es ist

$$\partial x^x = x^x \cdot (\ln x + 1) \quad \text{und} \quad \partial^2 x^x = x^x \cdot \left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\right] > 0 \text{ für alle } x > 0 \ .$$

Sie ist strikt positiv und

$$\{x^x = 1\} = \{0, 1\} \ .$$

Es gilt

$$\{\partial x^x = 0\} = \left\{\frac{1}{e}\right\} \quad , \quad \frac{1}{e} \simeq 0,3678\ldots \ .$$

Sie besitzt in $\frac{1}{e}$ ein Minimum mit Wert $e^{-\frac{1}{e}} \simeq 0,6922\ldots$, da sie links von $\frac{1}{e}$ streng fallend und rechts von $\frac{1}{e}$ streng wachsend ist. Sie ist konvex.

Aufgabe Diskutieren Sie die Funktionen

(a)

$$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \ .$$

(b)

$$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln^2 x - \ln x^2 \ .$$

(c)

$$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{\ln x}{x} \ .$$

8.13 Taylorreihen

DEFINITION 1 Seien $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion und $x \in J$. Man sagt, daß

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (\mathrm{id} - x)^l$$

die *Taylorreihe von* f *in der Nähe von* x ist. Für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert man das $(k+1)$-te Restglied $R_{k+1} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(y) = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y-x)^l + R_{k+1}(y) \quad \text{für alle } y \in J \ .$$

Die Taylorformel zeigt, daß für alle $k \in \mathbb{N}^*$, wenn f reell ist, das Restglied ausgewertet in $y \in J$ die Form

$$R_k(y) = \frac{f^{(k)}(\xi_k)}{k!} \cdot (y-x)^k$$

für ein ξ_k zwischen y und x hat.

SATZ *Die Taylorreihe von* f *in der Nähe von* x *ist genau dann in* $y \in J$ *konvergent, und es gilt*

$$f(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y-x)^l \ ,$$

wenn

$$\lim_{k \geqslant 1} R_k(y) = 0 \ .$$

DEFINITION 2 In diesem Fall sagt man, daß die Taylorreihe die Funktion f in y darstellt.

BEISPIEL 1 Die Taylorreihe von $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in der Nähe von 0 ist

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \cdot x^l$$

und stellt diese Funktion dar. Man braucht nur zu benutzen, daß exp die Lösung des Anfangswertproblems

$$f' = f \quad \text{und} \quad f(0) = 1$$

ist, und daß$\left(\frac{|x|^l}{l!}\right)$ eine Nullfolge ist.

Analog kann man die Taylorreihe von $\exp(i \cdot \mathrm{id}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ in der Nähe von 0 bestimmen. Dies führt zu den bekannten Potenzreihen von cos und sin .

BEISPIEL 2 Die Taylorreihe der Funktion aus Beispiel 11.12 ist die Nullreihe. Sie stellt diese Funktion nur in 0 dar, da

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) > 0 \quad \text{für alle } x \neq 0$$

gilt.

BEISPIEL 3 Die Ableitungen der Funktion $\ln(1+\mathrm{id}) : \left]-1,\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ sind

$$\partial^l \ln(1+\mathrm{id}) = (-1)^{l-1} \cdot \frac{(l-1)!}{(1+\mathrm{id})^l} \text{ für } l \geqslant 1 \ .$$

Die Taylorreihe von $\ln(1+\mathrm{id})$ in der Nähe von 0 ist somit

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \cdot \mathrm{id}^l \ .$$

Sie stellt diese Funktion in allen Punkten aus $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ dar. Insbesondere gilt

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^l = \ln 2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \ .$$

Mit Hilfe der Integraldarstellung des Restglieds werden wir später sehen, daß $\ln(1+\mathrm{id})$ durch diese Reihe auf $\left]-1,1\right]$ dargestellt wird.

Aufgabe

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$f : \left]-1,\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{1+x}$$

im Nullpunkt.

(b) Geben Sie ein Intervall an, auf welches diese Reihe die Funktion darstellt. Zeigen Sie für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ und jedes $\delta \in \left[0,1\right[$ die Restgliedabschätzung

$$|R_k(y)| \leqslant \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} k\,(k-1)!^2} \cdot |1-\delta|^{\frac{1}{2}-k} \cdot |y|^k \quad \text{für alle } y \in \left[-\delta,\infty\right[\ .$$

Hinweis: Benutzen Sie

$$\prod_{j=1}^{k-1} (2j-1) = \frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!} \ .$$

8.14 Newtonverfahren : konvexer Fall

HAUPTSATZ *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare und konvexe Funktion mit*

$$f(a) < 0 \quad \textit{und} \quad f(b) > 0 \ .$$

(i) f besitzt genau eine Nullstelle $\xi \in \left]a, b\right[$.

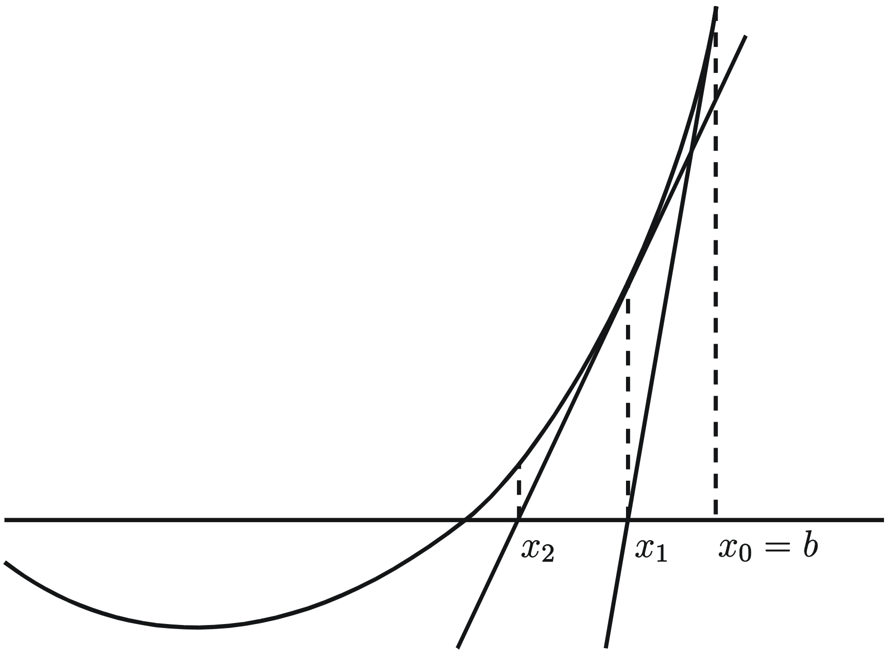
(ii) Für jedes $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \geqslant 0$ wird durch die Rekursionsformel

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

eine fallende Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert, die gegen ξ konvergiert.

(iii) Ist $f'(\xi) \geqslant m > 0$ et $f''(x) \leqslant M$ für alle $x \in \left]\xi, b\right[$, dann gilt

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leqslant |\xi - x_{k+1}| \leqslant \frac{M}{2m} \cdot |x_{k+1} - x_k|^2 \ .$$



BEMERKUNG Es gilt ein analoges Resultat falls $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. In diesem Fall ist die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wachsend. Man kann auch die Konvexität durch die Konkavität ersetzen, aber man muß dann x_0 so wählen, daß $f(x_0) \leqslant 0$ gilt.

BEISPIEL 1 Sei $p \in \mathbb{N}^*$. Ist $a \in \mathbb{R}_+$ und $a \neq 0, 1$, dann erfüllt die Funktion

$$x \longmapsto x^p - a$$

die Voraussetzungen des Satzes auf dem Intervall $[0, \max(1, a)]$. Man findet wieder die definierende Folge für die p-te Wurzel von a (vgl. 5.6).

BEISPIEL 2 Berechnung von $\ln 2$ mit Hilfe approximativer Werte für e^x .

Man wendet das Newtonverfahren auf die Funktion

$$x \longmapsto e^x - 2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Es ist

$$x_{k+1} = x_k - 1 + 2 \cdot e^{-x_k} \ .$$

Man erhält

$$x_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 2 \cdot e^{-1} \quad , \quad x_2 = 2 \cdot e^{-1} - 1 + 2 \cdot e^{\frac{2}{e}} = 0,694\ldots \ ,$$

$$x_3 = 0,6931475\ldots \quad , \quad x_4 = 0,69314718\ldots \ .$$

Die Konvergenz dieser Verfahren ist viel schneller als die Benutzung der Reihe

$$\ln 2 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \ .$$

Man braucht da 100 Terme, um einen Fehler kleiner als 10^{-2} zu haben !

Aufgabe Sei $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit einer Nullstelle $\xi \in J$ mit $f(\xi) = f'(\xi) = 0$. Ferner gebe es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $0 < f'' \leqslant M$. Zeigen Sie für $x_0 \in J \setminus \{\xi\}$:

(a) Durch die Newtonsche Rekursion

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

wird eine streng monoton gegen ξ konvergierende Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert.

(b) Ist f'' stetig in ξ , so existiert ein $c \in \left]0,1\right[$ derart, dass $|x_{k+1} - \xi| \leqslant c \cdot |x_k - \xi|$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Man führe es auf den Fall $x_0 > \xi$ zurück. Für die Funktionen

$$\varphi = \mathrm{id} - \frac{f}{f'} \quad \text{und} \quad \Phi := \frac{\varphi - \xi}{\mathrm{id} - \xi}$$

ist die stetige Fortsetzbarkeit in ξ (l'Hospital) und die Eigenschaft $\Phi < 1$ auf $[\xi, x_0]$ zu zeigen.

8.15 Newtonverfahren : lokaler Fall

BEMERKUNG Die Folge des Newtonverfahrens ist nicht immer konvergent, wie das Beispiel der Funktion arctan mit $x_0 := 1,4$ zeigt.

Nähert man sich aber genug der Nullstelle, so wird diese Folge konvergent, z.B. schon wenn $x_0 := 1,3917$.

Dies wird durch den folgenden Satz bestätigt.

HAUPTSATZ *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare Funktion mit*

$$f(a) < 0 \quad , \quad f(b) > 0 \quad , \quad f' \neq 0 \quad \text{in } [a,b] \ ,$$

so daß ein $M \in \mathbb{R}_+$ existiert mit $|f''(x)| \leqslant M$ für alle $x \in [a,b]$.

(i) Dann existiert $m > 0$ mit $f' \geqslant m$ und f besitzt genau eine Nullstelle $\xi \in \left]a,b\right[$

(ii) Wählt man $\tilde{a}, \tilde{b} \in [a,b]$ mit $\tilde{a} < \tilde{b}$, so daß

$$\xi \in \left[\tilde{a}, \tilde{b}\right] \quad , \quad \kappa := \frac{M}{m} \cdot \left(\tilde{b} - \tilde{a}\right) \leqslant 1$$

und

$$\left[\tilde{a} - \frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{b} - \tilde{a}\right), \tilde{b} + \frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{b} - \tilde{a}\right)\right] \subset [a,b] \ ,$$

dann definiert für jedes $x_0 \in \left[\tilde{a}, \tilde{b}\right]$ die Rekursionsformel

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\left[\tilde{a} - \frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{b} - \tilde{a}\right), \tilde{b} + \frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{b} - \tilde{a}\right)\right]$, die gegen ξ konvergiert.

Zusätzlich gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$|x_{k+1} - \xi| \leqslant \frac{M}{2 \cdot m} \cdot |x_k - \xi|^2$$

und

$$|x_k - \xi| \leqslant \frac{2 \cdot m}{M} \cdot \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2^k} \ .$$