Kapitel 17

DAS LEBESGUE-INTEGRAL AUF EINER UNTERMANNIGFALTIGKEIT UND DER DIVERGENZSATZ

Im weiteren bezeichne X eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension m in $\mathbb{R}^n$.

Fassung vom 23. Februar 2006

17.1 Das Lebesgue-Integral auf einem affinen Unterraum

Seien E ein m-dimensionaler affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$, $b \in E$ und $\vartheta : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung derart, daß $(\vartheta e_j - b)_{j=1,\ldots,m}$ eine orthonormierte Basis in $E - b$ ist. Man definiert das Lebesgue-Integral λ_E auf E durch

$$\lambda_E := \vartheta\left(\lambda^m\right) \ .$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl von ϑ ab. Allgemeiner, ist $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine andere reguläre Parametrisierung von E , so gilt

$$\lambda_E = \gamma\left(\left[\det D\gamma\left(u\right)^{\intercal} D\gamma\left(u\right)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_U\right) \ .$$

BEISPIEL In der Zerlegung $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda^{n+1} = \lambda \otimes \lambda^n = \int \lambda_x^n \, d\lambda\left(x\right) \ ,$$

wobei λ_x^n das Lebesgue-Integral auf der Hyperebene $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ ist.

17.2 Das Lebesgue-Integral auf eine Untermannigfaltigkeit

DEFINITION 1 Sei $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale reguläre Parametrisierung von X . Für $k, l = 1, \ldots, m$ definiert man

$$g_{k,l}^{\gamma} : U \longrightarrow \mathbb{R} : u \longmapsto \left(D\gamma(u)^{\intercal} D\gamma(u) e_k \middle| e_l \right) = \left(\partial_k \gamma(u) \middle| \partial_l \gamma(u) \right) .$$

Die Abbildung

$$G := \left(g_{k,l}^{\gamma} \right) : u \longmapsto D\gamma(u)^{\intercal} D\gamma(u) = \left(g_{k,l}^{\gamma}(u) \right) : U \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times m)$$

heißt *metrischer Tensor* bzgl. der Parametrisierung γ . Man bezeichnet

$$g^{\gamma}(u) := \det D\gamma(u)^{\intercal} D\gamma(u) = \det G(u)$$

als *Gramsche Determinante* bzgl. der Parametrisierung γ .

LEMMA *Es gilt* $D\gamma(u)^{\intercal} D\gamma(u) \in \mathbb{GL}_{\mathbb{R}}(m)$ *und*

$$[g^{\gamma}(u)]^{\frac{1}{2}} = \lambda_{T_X(x)} \left(P \left[\partial_1 \gamma(u), \ldots, \partial_m \gamma(u) \right] \right) > 0 .$$

Analog zur Bemerkung 16.6 nennt man $[g^{\gamma}]^{\frac{1}{2}}$ das *Volumenelement* von X bzgl. der *krummlinigen Koordinaten* , die durch die Parametrisierung γ definiert sind.

SATZ *Sind* $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *und* $\vartheta : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *lokale reguläre Parametrisierungen von* X *mit* $\gamma(U) = \vartheta(V)$ *, dann gilt*

$$\gamma \left([g^{\gamma}]^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_U \right) = \vartheta \left([g^{\vartheta}]^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_V \right) .$$

HAUPTSATZ *Es gibt genau ein Radon-Integral* λ_X *auf* X *, so daß für jede lokale reguläre Parametrisierung* $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *von* X *gilt*

$$(\lambda_X)_{\gamma(U)} = \gamma \left([g^{\gamma}]^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_U \right) .$$

BEMERKUNG 1 Für jede nicht-leere offene Menge O in X gilt $\lambda_X(O) > 0$.

BEMERKUNG 2 Der Rand ∂X ist eine λ_X-Nullmenge.

BEMERKUNG 3 In manchen Situationen existiert eine lokale reguläre Parametrisierung $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von X , so daß $X \setminus \gamma(U)$ eine λ_X-Nullmenge ist. In diesem Fall gilt

$$\lambda_X = \gamma \left([g^{\gamma}]^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_U \right) .$$

BEMERKUNG 4 Ist Y eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit Dimension $< m$ und $Y \subset X$, so ist Y eine λ_X-Nullmenge.

BEISPIEL Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve wie in Beispiel 13.6.4. Die Kurve $\gamma(J)$ ist also eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist

$$D\gamma^{\intercal} D\gamma = (\gamma' | \gamma') = |\gamma'|^2 \ ,$$

also

$$[g^{\gamma}]^{\frac{1}{2}} = |\gamma'| \ .$$

Daher gilt für alle $a, b \in J$ mit $a < b$

$$\lambda_{\gamma(I)}(\gamma([a,b])) = \int_a^b |\gamma'| = L \ ,$$

wobei L die Bogenlänge der Kurve $\gamma([a,b])$ bezeichnet (vgl. 11.2).

17.3 Das Lebesgue-Integral auf dem Rand

LEMMA *Seien $(v_j)_{j=1,\ldots,m}$ eine Basis eines m-dimensionalen Untervektorraums T des $\mathbb{R}^n$, $\widetilde{T}$ der von $(v_j)_{j=2,\ldots,m}$ erzeugte $(m-1)$-dimensionale Untervektorraum und $w \in T$ mit $|w| = 1$ und $w \perp \widetilde{T}$. Dann gilt*

$$\lambda_T \left(P\left[v_1, \ldots, v_m\right] \right) = \left| \left(v_1 \middle| w \right) \right| \cdot \lambda_{\widetilde{T}} \left(P\left[v_2, \ldots, v_m\right] \right) \ .$$

BEMERKUNG $\left| \left(v_1 \middle| w \right) \right|$ ist die Höhe des Parallelotops

$$P\left[v_1, \ldots, v_m\right]$$

über der Basis $P\left[v_2, \ldots, v_m\right]$.

KOROLLAR *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, U offen in H_α und $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale reguläre Parametrisierung von X . Es gilt*

$$g^\gamma (\alpha, \cdot) = \left[\left(\partial_1 \gamma (\alpha, \cdot) \middle| \mathfrak{n} \circ \gamma^\partial \right) \right]^2 \cdot g^{\gamma^\partial} \quad \text{auf } U^\partial \ .$$

BEISPIEL **Bestimmung des Lebesgue-Integral auf** $\mathbb{S}^{n-1}(r)$

Mit den Notationen aus Beispiel 13.6.2 ist der äußere Normalenvektor an $\mathbb{B}^n(r)$ in x mit $|x| = r$ gegeben durch

$$\mathfrak{n}(x) = \frac{x}{|x|} \ ,$$

und

$$g^{\gamma_n^\partial} (\varphi_2, \ldots, \varphi_n) = r^{n-1} \cdot \cos^{n-2} \varphi_n \cdot \cos^{n-3} \varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \cos\ \varphi_3 \ ,$$

d.h.

$$\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} = r^{n-1} \cdot \gamma_n^\partial \left(\lambda_{]-\pi,\pi[} \otimes \bigotimes_{j=3}^{n} \cos^{j-2} \cdot \lambda_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} \right)$$

oder

$$d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} (x) = r^{n-1} \cdot \cos^{n-2} \varphi_n \cdot \cos^{n-3} \varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \cos\ \varphi_3 \, d (\varphi_2, \ldots, \varphi_n) \ .$$

Insbesondere ist die Fläche dieser Sphäre gleich

$$r^{n-1} \cdot \int_{]-\pi,\pi[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[^{n-2}} \cos^{n-2} \varphi_n \cdot \cos^{n-3} \varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \cos\ \varphi_3 \, d (\varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot r^{n-1} \ .$$

Die Transformationsformel in Beispiel 16.6.5 zeigt

HAUPTSATZ *Es gilt*

$$\lambda^n = \int_0^\infty \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} \, dr \ .$$

SATZ *Sei $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale reguläre Parametrisierung von X mit U offen in H_α und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\mathfrak{n} \circ \gamma^\partial = \left| D\gamma\left(\alpha, \cdot\right) \overset{-1}{G}(\alpha, \cdot) e_1 \right|^{-1} \cdot D\gamma\left(\alpha, \cdot\right) \overset{-1}{G}(\alpha, \cdot) e_1 \ ,$$

sowie

$$g^\gamma\left(\alpha, \cdot\right) = \left| D\gamma\left(\alpha, \cdot\right) \overset{-1}{G}(\alpha, \cdot) e_1 \right|^{-2} \cdot g^{\gamma^\partial} \ .$$

17.4 Teilung der Eins

SATZ *Sei Y ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede lokale reguläre Parametrisierung γ von X die Abbildung $f \circ \gamma$ stetig ist.*

Daher die

DEFINITION Eine Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^p$ heißt *stetig differenzierbar* , wenn $f \circ \gamma$ für jede lokale reguläre Parametrisierung γ von X stetig differenzierbar ist.

BEMERKUNG Es genügt für die Stetigkeit wie für die Differenzierbarkeit nur eine reguläre Parametrisierung in einer Umgebung jedes Punktes zu betrachten.

BEISPIEL Sind W eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $X \subset W$ und $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^p$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so ist $f_{|X}$ stetig differenzierbar.

Wir werden jetzt eine sogenannte stetig differenzierbare Teilung der Eins auf X konstruieren. Wir werden sie als Einschränkung einer solchen auf $\mathbb{R}^n$ bekommen.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die unendlich oft differenzierbar sind und kompakten Träger besitzen. Definiert man zum Beispiel $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\rho(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & & |x| < 1 \\ & \text{wenn} & \\ 0 & & |x| \geqslant 1 \end{array} \right. ,$$

so ist $\rho \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R})$.

Die Funktion σ definiert durch

$$\sigma(x) := \sum_{z \in \mathbb{Z}} \rho(x - z) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

ist unendlich oft differenzierbar und > 0 auf $\mathbb{R}$.

SATZ *Setze $\rho_1 := \frac{\rho}{\sigma}$. Es gilt*

$$\rho_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \textit{und} \quad \sum_{z \in \mathbb{Z}} \rho_1(\cdot - z) = 1 \ .$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ und $z \in \mathbb{Z}^n$ sei $\rho_{\varepsilon,z} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\rho_{\varepsilon,z}(x) := \prod_{j=1}^{n} \rho_1\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot x_j - z_j\right) \ .$$

Es gilt

$$\rho_{\varepsilon,z} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \operatorname{supp} \rho_{\varepsilon,z} \subset \varepsilon \cdot (z + [-1,1]^n) \quad \textit{und} \quad \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \rho_{\varepsilon,z} = 1 \ .$$

In der Nähe jedes Punktes enthält diese Summe höchstens $2^n + 1$ *Terme, die dort nicht Null sind.*

DEFINITION Man sagt, daß $\left(\rho_{\varepsilon,z}\right)_{z\in\mathbb{Z}^n}$ eine unendlich oft differenzierbare *Teilung der Eins* auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Oft führt man die Untersuchung einer Funktion f auf X auf eine lokale Untersuchung mittels $f = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \rho_{\varepsilon,z|X} \cdot f$ zurück. Die Wahl des ε wird mit Hilfe des folgenden Lemmas getroffen.

LEMMA *Sei* X *ein metrischer Raum,* K *eine kompakte Teilmenge von* X *und* $(U_j)_{j\in J}$ *eine offene Überdeckung von* K *. Dann existiert ein* $\varepsilon > 0$ *(die Lebesguezahl), so daß für jede Menge* $A \subset X$ *mit* $diam\,(A) \leqslant \varepsilon$ *und* $A \cap K \neq \emptyset$ *gilt* $A \subset U_j$ *für ein gewisses* $j \in J$ *.*

17.5 Der Gradient

LEMMA *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^p$ eine stetig differenzierbare Abbildung, $x \in X$ und $\mathfrak{t} \in T_X(x)$. Für jedes Intervall J in $\mathbb{R}$ mit $J^\circ \neq \emptyset$ und jede stetig differenzierbare parametrisierte Kurve*

$$\vartheta : J \longrightarrow X \quad \text{mit } 0 \in J \quad , \quad \vartheta(0) = x \quad , \quad \vartheta'(0) = \mathfrak{t} \quad \text{und} \quad \vartheta(J) \subset X \ ,$$

hängt der Vektor $(f \circ \vartheta)'(0) \in \mathbb{R}^p$ nicht von ϑ , sondern nur von f , x und $\mathfrak{t}$ ab.

DEFINITION 1 Der Vektor

$$\partial_{\mathfrak{t}} f(x) := (f \circ \vartheta)'(0) \ .$$

heißt die *Ableitung* von f in x in *Richtung* $\mathfrak{t}$.

Er beschreibt die Variation von f in Richtung von $\mathfrak{t}$, d.h. entlang jedes adäquaten ϑ .

HAUPTSATZ *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $x \in X$. Es gibt genau einen Tangentialvektor $\mathfrak{s} \in T_X(x)$ mit*

$$\partial_{\mathfrak{t}} f(x) = (\mathfrak{s}|\,\mathfrak{t}) \quad \textit{für jedes } \mathfrak{t} \in T_X(x) \ .$$

DEFINITION 2 Man nennt den durch

$$\partial_{\mathfrak{t}} f(x) = (\operatorname{grad}_X f(x)|\,\mathfrak{t}) \quad \text{für alle } \mathfrak{t} \in T_X(x)$$

eindeutig bestimmten Tangentialvektor $\operatorname{grad}_X f(x)$ den *Gradient* von f in x .

BEMERKUNG 1 $\operatorname{grad}_X f(x)$ zeigt in Richtung des größten Wachstums von f .

BEMERKUNG 2 Ist γ eine lokale reguläre Parametrisierung von X , so gilt

$$(\operatorname{grad}_X f) \circ \gamma = D\gamma \circ \overset{-1}{G} \operatorname{grad}_U (f \circ \gamma) \ .$$

Insbesondere ist

$$\operatorname{grad}_X f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetige Abbildung.

SATZ (Produktregel) *Sind $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, so gilt für alle $x \in X$ und $\mathfrak{t} \in T_X(x)$*

$$\partial_{\mathfrak{t}} (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot \partial_{\mathfrak{t}} g(x) + \partial_{\mathfrak{t}} f(x) \cdot g(x) \ .$$

Insbesondere gilt

$$\operatorname{grad}_X (f \cdot g) = f \cdot \operatorname{grad}_X g + \operatorname{grad}_X f \cdot g \ .$$

17.6 Die Divergenz

Das Ziel dieses Paragraphen ist die Definition der Divergenz auf einer Untermannigfaltigkeit X sowie der Beweis einer Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung :

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a) \ .$$

DEFINITION 1 Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}^{(1)}(X)$ die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger.

LEMMA *Seien*

$$Q =]a_1, b_1] \times \prod_{j=2}^m]a_j, b_j[\ ,$$

ein offener Quader mit Rand der Dimension m *und* $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *eine stetig differenzierbare Funktion.*

(i) Für alle $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(Q^\circ)$ *gilt*

$$\int \varphi \cdot \operatorname{div}_Q f \ d\lambda_Q = -\int \left(\operatorname{grad}_Q \varphi \middle| f\right) \ d\lambda_Q \ .$$

(ii) Ist f *mit kompaktem Träger in* Q *, so gilt*

$$\int \operatorname{div}_Q f \ d\lambda_Q = \int \left(f(b_1, \cdot) \middle| e_1\right) d\lambda_{Q^\partial} \ .$$

DEFINITION 2 Eine Abbildung $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ein *Feld von Tangentialvektoren* , falls $v(x) \in T_X(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

BEISPIEL Ist f eine stetig differenzierbare Funktion auf X , so ist $\operatorname{grad}_X f$ ein stetiges Feld von Tangentialvektoren.

DEFINITION 3 Eine Untermannigfaltigkeit X heißt von der *Klasse* $\mathcal{C}^{(2)}$, falls jeder Punkt in X eine lokale reguläre Parametrisierung besitzt, die zweimal stetig differenzierbar ist.

Im folgenden sei X stets eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Klasse $\mathcal{C}^{(2)}$.

HAUPTSATZ *Sei* $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *ein stetig differenzierbares Feld von Tangentialvektoren. Dann gibt es genau eine stetige Funktion* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit*

$$\int \varphi \cdot f \ d\lambda_X = -\int \left(\operatorname{grad}_X \varphi \middle| v\right) \ d\lambda_X \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(X \setminus \partial X) \ .$$

DEFINITION 4 Man nennt die durch

$$\int \varphi \cdot \operatorname{div}_X v \, d\lambda_X = -\int (\operatorname{grad}_X \varphi | v) \, d\lambda_X \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(X \smallsetminus \partial X)$$

eindeutig bestimmte stetige Funktion $\operatorname{div}_X v$ die *Divergenz* von v .

BEMERKUNG Ist γ eine zweimal stetig differenzierbare lokale reguläre Parametrisierung von X , so gilt

$$(\operatorname{div}_X v) \circ \gamma = [g^\gamma]^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{div}_U \left([g^\gamma]^{\frac{1}{2}} \cdot \overset{-1}{G} D\gamma \, (v \circ \gamma)^\intercal \right) \ .$$

SATZ (Produktregel) *Sind* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine stetig differenzierbare Funktion und* $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *ein stetig differenzierbares Feld von Tangentialvektoren, so gilt*

$$\operatorname{div}_X (f \cdot v) = f \cdot \operatorname{div}_X v + (\operatorname{grad}_X f | v) \ .$$

17.7 Der Divergenzsatz

HAUPTSATZ (Divergenzsatz oder Satz von Ostrogradzky) *Sei* $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *ein stetig differenzierbares Feld von Tangentialvektoren mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int \operatorname{div}_X v \ d\lambda_X = \int (v|\, \mathfrak{n}) \ d\lambda_{\partial X} \ .$$

SATZ (Partielle Integration) *Seien* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine stetig differenzierbare Funktion und* $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *ein stetig differenzierbares Feld von Tangentialvektoren, so daß* $f \cdot v$ *kompakten Träger hat. Dann gilt*

$$\int f \cdot \operatorname{div}_X v \ d\lambda_X = \int (f \cdot v|\, \mathfrak{n}) \ d\lambda_{\partial X} - \int (\operatorname{grad}_X f|\, v) \ d\lambda_X \ .$$

DEFINITION Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so definiert man den *Laplaceschen Differentialausdruck* von f auf X durch

$$\Delta_X f := \operatorname{div}_X \operatorname{grad}_X f \ .$$

HAUPTSATZ (Greenformel) *Seien* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbare Funktionen, so daß* $f \cdot g$ *kompakten Träger besitzt. Dann gilt*

$$\int (\Delta_X f \cdot g - f \cdot \Delta_X g)\, d\lambda_X = \int (\partial_{\mathfrak{n}} f \cdot g - f \cdot \partial_{\mathfrak{n}} g)\, d\lambda_{\partial X} \ .$$

17.8 Der Satz von Gauß

Im folgenden ist stets
X eine n-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit Rand des $\mathbb{R}^n$ der Klasse $\mathcal{C}^{(2)}$
und
$v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung.

HAUPTSATZ *Es ist*

$$\partial X = X \smallsetminus X^\circ = \mathrm{Fr}\, X$$

und ist v mit kompaktem Träger so gilt

$$\int \mathrm{div}_X\, v \; d\lambda_X = \int (v|\, \mathfrak{n}) \; d\lambda_{\partial X} \ .$$

Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so daß $f \cdot v$ kompakten Träger hat, so gilt die Formel der partiellen Integration

$$\int f \cdot \mathrm{div}\, v \; d\lambda_X = \int (\, f \cdot v|\, \mathfrak{n}) \; d\lambda_{\partial X} - \int (\mathrm{grad}\, f|\, v) \; d\lambda_X \ .$$

BEISPIEL 1 Wendet man, falls X kompakt ist, den Satz von Gauss auf $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ an, so bekommt man

$$\lambda^n (X) = \frac{1}{n} \cdot \int (\mathrm{id}|\, \mathfrak{n}) \; d\lambda_{\partial X} \ .$$

Mit Hilfe von Beispiel 17.3 folgt

$$\lambda^n (\mathbb{B}^n (r)) = \frac{r}{n} \cdot \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \ .$$

BEISPIEL 2 Das Archimedische Prinzip Ein fester Körper X befinde sich in einer Flüssigkeit der Dichte c , deren Oberfläche auf Höhe 0 ist . Im Punkt $x \in \partial X$ übt die Flüssigkeit den Druck

$$p(x) = c \cdot x_3 \cdot \mathfrak{n}(x)$$

aus. Die gesamte resultierende Kraft ist

$$F = \int p \; d\lambda_{\partial X} \ .$$

Mit Hilfe des Satzes von Gauss folgt

$$(\, e_j|\, F) = \begin{cases} c \cdot \lambda^3 (X) & \text{si } j = 3 \\ 0 & \text{si } j \neq 3 \end{cases} \ ,$$

d.h.

$$F = c \cdot \lambda^3 (X) \cdot e_3 \ .$$

Also erfährt der Körper einen Auftrieb gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

BEISPIEL 3 Für $x \in X^{\circ}$ gilt

$$\operatorname{div} v\,(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\lambda^n\left(\mathbb{B}^n\,(x,\varepsilon)\right)} \cdot \int (v|\,\mathfrak{n})\ d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(x,\varepsilon)}$$

Das Integral $\int (v|\,\mathfrak{n})\ d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(x,\varepsilon)}$ nennt man *Fluß* der aus $\mathbb{B}^n\,(x,\varepsilon)$ tritt. Der Limes ist also die Dichte des Flußes der aus x tritt. Man interpretiert $\operatorname{div} v\,(x)$ als die Intensität der Quelle in x die v erzeugt, in Anlehnung an das folgende Beispiel aus der Physik.

Eine der Differentialgleichungen von Maxwell lautet

$$\rho = \operatorname{div}(\varepsilon E)\ ,$$

wobei ρ die Ladungsdichte ist, E das elektrische Feld und ε der Dielektrizitäts-Tensor. Aus dem Satz von Gauss folgt

$$\int \rho\ d\lambda_X = \int (\varepsilon E|\,\mathfrak{n})\ d\lambda_{\partial X}\ ,$$

d.h. der Fluß der elektrischen Verschiebung, die aus ∂X tritt, ist gleich der Ladung in X .

KOROLLAR (Gradientensatz) *Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int \operatorname{grad}_X f\ d\lambda_X = \int f \cdot \mathfrak{n}\ d\lambda_{\partial X}\ .$$

17.9 Rotation und Vektorprodukt

Im folgenden ist stets
X eine 3-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit Rand des $\mathbb{R}^3$ der Klasse $\mathcal{C}^{(2)}$
und
$v : X \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Abbildung.

Oft betrachtet man folgende anti-symmetrische Matrix

$$Dv - Dv^{\intercal} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 & \partial_3 v_2 - \partial_2 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 & 0 & \partial_3 v_2 - \partial_2 v_3 \\ \partial_1 v_3 - \partial_3 v_1 & \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 & 0 \end{pmatrix} .$$

DEFINITION 1 Für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ definiert man

$$a \wedge b := \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} .$$

und nennt $a \wedge b$ das *Vektorprodukt* von a und b .

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$a \wedge b = -b \wedge a \perp a, b \quad \text{und} \quad |a \wedge b| = \lambda^2 \left(P\,[a, b] \right) ,$$

sowie

$$\left(a \wedge b \right| c) = \left(a \right| b \wedge c) \quad \text{und} \quad a \wedge (b \wedge c) = \left(a \right| c) \cdot b - \left(a \right| b) \cdot c .$$

Mit diesen Notationen gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$

$$\left(Dv - Dv^{\intercal} \right) \xi = \operatorname{rot} v \wedge \xi \quad \text{und} \quad \left(\operatorname{rot} v \right| \xi) = \operatorname{div} \left(v \wedge \xi \right) ,$$

wobei (vgl. Beispiel 11.6)

$$\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} .$$

HAUPTSATZ (Rotationssatz) *Es gilt*

$$\int \operatorname{rot} v \; d\lambda_X = \int \mathfrak{n} \wedge v \; d\lambda_{\partial X} .$$

Im folgenden ist stets
X eine 2-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit Rand des $\mathbb{R}^3$ der Klasse $\mathcal{C}^{(2)}$,
W eine offene Menge in $\mathbb{R}^3$, die X enthält,
und
$v : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Abbildung.

LEMMA *Lokal kann man ein Normalvektor $\nu(x)$ zu X in $x \in X$, d.h. normal zum Tangentialraum $T_X(x)$, wählen, der normalisiert ist und stetig von x abhängt.*

Ist $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine lokale reguläre Parametrisierung um x , so kann man diesen Normalvektor durch

$$\nu \circ \gamma : u \longmapsto [g^\gamma(u)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial_1\gamma(u) \wedge \partial_2\gamma(u) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definieren.

BEMERKUNG 1 Man sollte diesen Vektor nicht mit den äußeren Normalvektor $\mathfrak{n}(x)$ an ∂X in $x \in \partial X$ verwechseln.

DEFINITION 2 Existiert eine stetige Abbildung $\nu : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\nu(x) \perp T_X(x)$ und $|v(x)| = 1$ für alle $x \in X$, so heißt X *orientierbar* und man sagt, daß ν eine *Orientierung* auf X definiert.

BEISPIEL $\mathbb{S}^2(r)$ und $\mathbb{S}^2_+(r)$ sind orientierbar (vgl. Beispiele 13.6, 2 und 3). Als Orientierung kann man

$$\nu : x \longmapsto \frac{x}{r}$$

wählen. Das Möbiusband ist nicht orientierbar.

DEFINITION 3 Ist X durch ν orientiert, so definiert man ein Feld von normalisierten Tangentialvektoren zu ∂X durch

$$\tau : \partial X \longrightarrow \mathbb{R}^3 : x \longmapsto \nu(x) \wedge \mathfrak{n}(x) \in T_{\partial X}(x) \ .$$

Man beachte, daß ∂X eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 ist.

HAUPTSATZ (Stokes-Formel) *Hat $v_{|X}$ einen kompakten Träger, so gilt*

$$\int (v|\,\tau)\ d\lambda_{\partial X} = \int (\operatorname{rot} v|\,\nu)\ d\lambda_X \ .$$

Im folgenden ist stets
X eine 2-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit Rand des $\mathbb{R}^2$ der Klasse $\mathcal{C}^{(2)}$
W eine offene Menge in $\mathbb{R}^2$, die X enthält,
und
$v : W \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Abbildung.

BEMERKUNG 2 Durch die konstante Orientierung $\nu := e_3$ ist X eine 2-dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit mit Rand in $\mathbb{R}^3$.

KOROLLAR (Riemann-Formel) *Hat $v_{|X}$ einen kompakten Träger, so gilt*

$$\int (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)\ d\lambda_X = \int (v|\,\tau)\ d\lambda_{\partial X}\ .$$

BEMERKUNG 3 Ist $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lokale reguläre Parametrisierung von ∂X , die mit der Orientierung auf X verträglich ist, d.h. $\tau \circ \gamma = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$, und setzt man

$$v : (x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y))\ ,$$

so gilt

$$\int_{\gamma(J)} (v|\,\tau)\ d\lambda_{\partial X} = \int_J [P(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + Q(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)]\ dt\ .$$

Die Riemann-Formel wird dann abkürzend in folgender Form geschrieben :

$$\int\int_X [\partial_x Q(x, y) - \partial_y P(x, y)]\ d(x, y) = \int_{\partial X} [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy]\ .$$

BEISPIEL 1 Betrachtet man die Abbildung

$$v : (x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\ ,$$

so folgt die **Leibniz-Formel**

$$\lambda^2(X) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\partial X} (x\ dy - y\ dx)\ .$$

BEISPIEL 2 Eine der Differentialgleichungen von Maxwell ist

$$\operatorname{rot} E + \partial_t B = 0\ ,$$

wobei E das elektrische und B das magnetische Feld bezeichnet. Wendet man die Stokes-Formel an, so erhält man das Induktionsgesetz . Ist

$$\Phi(t) := \int (B(\cdot, t)|\,\nu)\ d\lambda_X$$

der magnetische Fluß durch die Fläche X , so folgt

$$-\partial_t \Phi = -\int (\partial_t B(\cdot, t)|\,\nu)\ d\lambda_X = \int (\operatorname{rot} E|\,\nu)\ d\lambda_X = \int (E(\cdot, t)|\,\tau)\ d\lambda_{\partial X}\ ;$$

die rechte Seite ist die elektromotorische Kraft (induzierte Spannung).