

INHALTSVERZEICHNIS

INHALTSVERZEICHNIS	iii
SACHVERZEICHNIS	xiii
1 FORMALE THEORIEN	1
1.1 Formale Theorien	2
1.2 Logische Theorien oder Aussagenlogik	3
1.3 Interpretation einer logischen Theorie	5
1.4 Beweismethoden	6
1.5 Theorien mit Quantoren oder Prädikatenkalkül	8
1.6 Theorien mit Gleichungen	11
2 MENGENLEHRE	13
2.1 Mengen und Zugehörigkeit	14
2.2 Mengen mit ein oder zwei Elementen	15
2.3 Die Menge aller Teilmengen	16
2.4 Die Vereinigung von Mengen	17
2.5 Durchschnitt und Produkt von zwei Mengen	18
2.6 Der Begriff Abbildung	21
2.7 Umkehrabbildung	25

INHALTSVERZEICHNIS

2.8	Der Begriff Familie	27
3	NATÜRLICHE ZAHLEN	29
3.1	Induktionsprinzip	30
3.2	Elementare Eigenschaften von \mathbb{N}	32
3.3	Ordnungsrelationen	33
3.4	Endliche und unendliche Mengen	35
3.5	Verallgemeinerung des Induktionsprinzips	36
3.6	Addition in \mathbb{N}	37
3.7	Das Zählen	39
3.8	Multiplikation in \mathbb{N}	40
3.9	Summe und Produkt einer Folge	41
3.10	Permutationen	43
3.11	Binomialkoeffizienten	45
3.12	Binomische Formel und geometrische Summe	46
4	KONSTRUKTION DER REELLEN ZAHLEN	49
4.1	Partitionen	50
4.2	Äquivalenzrelationen	51
4.3	Gruppen	52
4.4	Konstruktion der ganzen Zahlen	54
4.5	Ringe und Körper	56
4.6	Konstruktion der rationalen Zahlen	59
4.7	Konstruktion der reellen Zahlen	61
4.8	Suprema und der Satz von Dedekind	64
4.9	Satz von Archimedes	66
4.10	Bernoulli Ungleichung	68
4.11	Rechnen mit Suprema und Infima	69
4.12	Existenz der Quadratwurzel	71
4.13	Konstruktion der komplexen Zahlen	72

4.14	Absolutbetrag in \mathbb{C}	74
5	KONVERGENZ	75
5.1	Metrische Räume	76
5.2	Definition der Konvergenz	79
5.3	Konvergenz einer wachsenden Folge	81
5.4	Rechnen mit Nullfolgen	83
5.5	Grenzwertsätze in \mathbb{C}	84
5.6	Existenz der p -ten Wurzeln	88
5.7	Absolute und relative Fehler	90
5.8	Konvergenz in einem Produkt	92
5.9	Konvergenz in \mathbb{R}_+	93
5.10	Teilfolgen	94
5.11	Satz von Bolzano-Weierstraß	95
5.12	Cauchy-Folgen	96
5.13	Folge von Fibonacci	97
6	REIHEN	99
6.1	Der Begriff der Reihe	100
6.2	Reihen mit positiven Termen	102
6.3	Entwicklungen in der Basis p	104
6.4	Cauchy-Kriterium	106
6.5	Majoranten-Kriterium	107
6.6	Quotienten-Kriterium	108
6.7	Leibniz-Kriterium	109
6.8	Wurzel-Kriterium	111
6.9	Limes superior und Limes inferior	112
6.10	Konvergenzradius einer Potenzreihe	114
6.11	Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	116
6.12	Abzählbarkeit von \mathbb{Q}	117

INHALTSVERZEICHNIS

6.13	Überabzählbarkeit von \mathbb{R}	118
6.14	Umordnung	119
6.15	Produkt von zwei Reihen	120
6.16	Die Exponentialfunktion	122
6.17	Funktionalgleichung der Exponentialfunktion	124
6.18	Die trigonometrischen Funktionen	125
6.19	Reihenentwicklung der Funktionen \cos und \sin	127
7	STETIGKEIT	129
7.1	Der Begriff Stetigkeit	130
7.2	Beispiele von stetigen Abbildungen	132
7.3	Rechnen mit stetigen Abbildungen	133
7.4	Links- und rechtsseitige Stetigkeit	136
7.5	Satz von Bolzano	137
7.6	Die Zahl π	139
7.7	Periodizität der trigonometrischen Funktionen	141
7.8	Grenzwerte einer Funktion	144
7.9	Konvergenz in $\overline{\mathbb{R}}$	146
7.10	Satz von Weierstraß	149
7.11	Umkehrfunktionen	151
7.12	Der natürliche Logarithmus	154
7.13	Reelle Potenzen	156
7.14	Die Funktionen \arccos und \arcsin	158
7.15	Die Funktionen \tan und \arctan	160
7.16	Einige Anwendungen	162
7.17	Komplexe Potenzen	163
7.18	n -te Einheitswurzeln	165
8	DIFFERENZIERBARKEIT	167
8.1	Der Begriff der Ableitung	168

8.2	Rechnen mit differenzierbaren Funktionen	170
8.3	Kettenregel und Ableitung der Umkehrfunktion	172
8.4	Notwendige Bedingung für lokale Extrema	175
8.5	Satz von Rolle	176
8.6	Monotonie	178
8.7	Stammfunktionen	180
8.8	De l’Hospital Regeln	182
8.9	Taylorformel	184
8.10	Hinreichende Bedingung für strikte lokale Extrema	187
8.11	Konvexität	189
8.12	Diskussion einer Funktion	191
8.13	Taylorreihen	193
8.14	Newtonverfahren : konvexer Fall	195
8.15	Newtonverfahren : lokaler Fall	197
9	DAS RIEMANNSCHE INTEGRAL	199
9.1	Treppenfunktionen	200
9.2	Das elementare Integral	201
9.3	Das Darboux’sche Oberintegral	203
9.4	Gleichmäßige Stetigkeit	204
9.5	Riemann’sche Integrierbarkeit	205
9.6	Mittelwertsatz der Integralrechnung	208
9.7	Integration von komplexwertigen Funktionen	209
9.8	Unbestimmte Integrale	210
9.9	Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	213
9.10	Substitutionsregel	215
9.11	Partielle Integration	218
9.12	Taylorformel mit Integralrestglied	220
9.13	Wallis-Formel	221

INHALTSVERZEICHNIS

9.14	Trapez-Regel	222
9.15	Differentialgleichungen mit getrennten Variablen	223
9.16	Lemma von Riemann-Lebesgue	227
9.17	Uneigentliche Integrale	228
9.18	Stirling-Formel	231
10	NORMIERTE RÄUME UND TOPOLOGIE	233
10.1	Normierte Räume	234
10.2	p -Norm auf \mathbb{K}^n	236
10.3	Punktweise Konvergenz	238
10.4	Supremumsnorm	240
10.5	Räume stetiger Funktionen	242
10.6	Integration, Differentiation und glm. Konv.	243
10.7	Weierstraß-Kriterium	245
10.8	Potenzreihen	246
10.9	Dirichletkriterium	248
10.10	Abelkriterium	249
10.11	Die Taylorreihe von \arctan	250
10.12	Die Topologie eines metrischen Raumes	251
10.13	Äquivalente metrische Räume	254
10.14	Konvergenz und Topologie	256
10.15	Stetigkeit und Topologie	257
10.16	Abschluß einer Menge	259
10.17	Kompaktheit	261
10.18	Satz von Heine-Borel	264
10.19	Bild einer kompakten Menge	265
10.20	Homöomorphismen	266
10.21	Gleichmäßig stetige Abbildungen	268

11	FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHER	269
11.1	Parametrisierte Kurven	270
11.2	Länge einer Kurve	274
11.3	Partielle Ableitungen	277
11.4	Gradient	280
11.5	Divergenz	281
11.6	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	283
11.7	Laplace-Operator	285
11.8	Norm einer linearen Abbildung	287
11.9	Totale Differenzierbarkeit	289
11.10	Stetig differenzierbare Abbildungen	291
11.11	Beispiele	292
11.12	Kettenregel	294
11.13	Richtungsableitungen	296
11.14	Mittelwertungleichung	298
11.15	Taylorformel	300
11.16	Lokale Diskussion einer Funktion	302
11.17	Extremum mit Bedingung	307
12	GEW. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	313
12.1	Die gewöhnlichen Differentialgleichungen	314
12.2	Die lipschitzstetigen Abbildungen	316
12.3	Eindeutigkeitssatz	318
12.4	Einige Beispiele von Differentialgleichungen	319
12.5	Der Fixpunktsatz	321
12.6	Globale Existenzsätze	323
12.7	Vektorw. lin. Dgl. 1. Ord. : hom. Fall	325
12.8	Vektorw. lin. Dgl. mit konst. Koeff.	327
12.9	Vektorw. lin. Dgl. 1. Ord. : inhom. Fall	332

INHALTSVERZEICHNIS

12.10	Vektorw. Dgl. m -ter Ord.	334
12.11	Lin. Dgl. n -ter Ord.	336
12.12	Das Reduktionsverfahren von d'Alembert	338
12.13	Lineare Differentialgleichungen 2-ter Ordnung	339
12.14	Lin. Dgl. 2-ter Ord. mit konst. Koeff.	341
12.15	Lokaler Existenzsatz	343
13	UNTERMANNIGFALTIGKEITEN DES \mathbb{R}^n	345
13.1	Diffeomorphismen	346
13.2	Satz über die Umkehrfunktion	347
13.3	Satz über implizite Funktionen	350
13.4	Offene Menge mit Rand	351
13.5	Reguläre Parametrisierungen	354
13.6	Der Begriff von Untermannigfaltigkeit	357
13.7	Der Tangentialraum	361
14	RADON-INTEGRALE	365
14.1	Die Additionen in $\overline{\mathbb{R}}$	366
14.2	N.u.h. Funktionen	370
14.3	Der Satz von Dini	372
14.4	Vollständig reguläre und lokal kompakte Räume	373
14.5	Radon-Integrale	375
14.6	Radon-Integrale auf lokal kompakten Räumen	376
14.7	Das Lebesgue-Integral in \mathbb{R}^n	378
14.8	Integrierbarkeit	380
14.9	Der Zusammenhang zwischen Lebesgue- und Riemann-Integral	382
14.10	Die Eigenschaften des Oberintegrals	384
14.11	Die Daniell Eigenschaft	385
14.12	Der Satz von Beppo Levi	386
14.13	Der Raum der integrierbaren Funktionen	387

15 SATZ VON LEBESGUE	389
15.1 Nullmengen	390
15.2 Fast überall	392
15.3 Satz von Lebesgue	393
15.4 Absolut konvergente Integrale	394
15.5 Abhängigkeit von einem Parameter	395
15.6 Approximationssatz	397
15.7 Integrierbare Teilmengen	398
15.8 Der Begriff σ -Algebra	399
15.9 Meßbare Mengen	401
15.10 Integrierbarkeitskriterium	402
15.11 Meßbarkeit im Sinne von Lusin	403
15.12 Moderate Funktionen	404
15.13 L^p -Räume	405
15.14 Satz von Riesz-Fischer	406
15.15 Dichtheitssatz	407
15.16 Hilberträume	408
15.17 Fourier-Koeffizienten	410
15.18 Hilbertsche Basen	411
15.19 Lokal integrierbare und absolut stetige Funktionen	413
16 SATZ VON FUBINI	415
16.1 Zerlegung eines Radon-Integrals	416
16.2 Integrierbarkeitssatz	418
16.3 Die Sätze von Fubini und Tonelli	419
16.4 Fall von \mathbb{R}^n	422
16.5 Die Transformationsformel	423
16.6 Beispiele	424
16.7 μ -dichte Familien von Funktionen	427

INHALTSVERZEICHNIS

16.8	Integration einer Familie von Integralen	428
16.9	Integration von Punktmassen	430
16.10	Operationen auf Radon-Integralen	432
16.11	Produkt zweier Radon-Integrale	434
17	DER DIVERGENZSATZ	437
17.1	Das Lebesgue-Integral auf einem affinen Unterraum	438
17.2	Das Lebesgue-Integral auf eine Untermannigfaltigkeit	439
17.3	Das Lebesgue-Integral auf dem Rand	441
17.4	Teilung der Eins	443
17.5	Der Gradient	445
17.6	Die Divergenz	446
17.7	Der Divergenzsatz	448
17.8	Der Satz von Gauß	449
17.9	Rotation und Vektorprodukt	451

SACHVERZEICHNIS

Fassung vom 23. Februar 2006

- Abbildung, 21
 - (lokal) lipschitzstetige —, 316
 - auf X stetige —, 132
 - Einschränkung einer —, 23
 - gleichmäßig stetige —, 204
 - identische —, 22
 - in einem Punkt stetige —, 130
 - injektive, surjektive, bijektive —, 25
 - leere —, 23
 - Lusin-meßbare —, 430
 - ν -eigentliche —, 432
 - Quotienten—, 51
 - Umkehr—, 26
 - Verkettung von —en, 23
- Abel
 - scher Grenzwertsatz, 249
 - Kriterium, 249
- abelsch, 52
- abgeschlossen
 - e Kugel, 77
 - e Menge, 251
 - er Halb-Raum, 351
 - es Intervall, 67
- Ableitung, 353
 - einer Funktion, 168
 - einer Kurve, 272
 - in einer Richtung, 296
 - in Richtung, 445
 - linksseitige, rechtsseitige —, 170
 - Ordnung einer partielle —, 283
 - partielle —, 277
 - totale —, 289
 - zweite, k -te —, 184
- Abschluß, 259
- absolut
 - e Fehler, 90
 - konvergente Reihe, 107, 119
- Absolutbetrag
 - einer komplexen Zahl, 74
 - einer reellen Zahl, 70
- abzählbar
 - e Menge, 35
- Abzählung
 - endliche, unendliche —, 35
- Achilles und die Schildkröte, 100
- Addition
 - sätze, 126
- Algebra
 - σ - —, 399
- algebraisch
 - e Multiplizität, 327
 - e Zahl, 118
- Allquantor, 8
- Alphabet, 2
- Anfang
 - sbedingung, —wertproblem, 314, 315
- Annahme
 - Induktions—, 30
- Antisymmetrie
 - einer Ordnungsrelation, 33
- Anzahl

der Elemente einer Menge, 35
 aperiodische
 Oszillation, 341
 Approximation
 —seigenschaft, 64
 —ssatz, 397
 im quadratischen Mittel, 408
 Methode der sukzessiven —en, 321
 äquivalent
 —e Metriken, 254
 Äquivalenz, 5
 —relation, 51
 modulo n , 55
 Repräsentant einer —klasse, 51
 Archimedes
 —ische Prinzip, 449
 Satz von —, 66
 Argument
 einer komplexen Zahl, 141
 arithmetisch
 —en Mittel, 190
 Assoziativität, 37, 40
 asymptotisch
 äquivalenten Folgen, 231
 Attraktion
 —sgesetz von Newton oder Coulomb, 285
 Ausdruck, 2
 wohlgeformter —, 2
 Aussage, 3
 äußer
 —e Maß, 390
 —er Normalvektor, 361
 Auswahlaxiom, 28
 Axiom
 —enschemata, 2
 Auswahl—, 28
 der leeren Menge, 14
 der Potenzmenge, 16
 der Vereinigung, 17
 des ungeordneten Paares, 15
 Existenz einer unendlichen Menge, 30
 explizites, implizites —, 2
 Extensionalitäts—, 14
 Selektions—, 18
 Substitutions—, 20
 Banach
 —raum, 235
 Satz von — -Caccioppoli, 321
 Basis
 Entwicklung in der — p , 104
 hilbertsche —, 411
 Bernoulli
 -Differentialgleichung, 320
 -Ungleichung, 68
 Berührungspunkt, 259
 beschränkt, 64
 —e Menge, 264
 μ - —, 405
 nach oben, nach unten —, 64
 total, 262
 Beschreibung
 externe — einer Menge, 18, 350
 interne — einer Menge, 22, 350
 Bessel
 -Differentialgleichung, -Funktion, 339
 -Ungleichung, 409
 Betrag
 einer komplexen Zahl, 74
 einer reellen Zahl, 70
 Beweis, 2
 Beweismethode
 Deduktionsprinzip, 6
 der Hilfskonstante, 9
 durch Widerspruch, 6
 Fallunterscheidung, 6
 Kontraposition, 6
 bijektiv, 25
 Bild, 22
 eines Radon-Integrals, 432
 binomial
 -Koeffizient, 45
 -Reihe, 247
 binomische
 Formel, 46
 Bolzano
 -Weierstraß Eigenschaft, 262
 Satz von —, 137
 Satz von — -Weierstraß, 95
 Borel
 Satz von Heine- —, 264
 Buchstabe, 8
 Caccioppoli
 Satz von Banach- —, 321
 Cauchy
 —produkt, 121

- Folge, 96
- Schwarz-Ungleichung, 237
- Cavalieri
 - -Prinzip, 416
- charakteristisch
 - e Funktion, 200
 - es Polynom, 327, 337
- Coulomb
 - Attraktionsgesetz von —, 285
- Dämpfung
 - skoeffizient, 341
- Darboux
 - sche Ober-, Unterintegral, 203
- Darstellung
 - Gleitpunkt- —, 104
- Datierung
 - Kohlenstoff C^{14} —, 180
- Dedekind
 - scher Schnitt, 61
 - Satz von —, 64
- Deduktionskriterium, 6
- Definitionsbereich, 21
- Determinant
 - Gramsche —e, 439
- Determinante
 - Wronski- —, 326
- dezimal
 - e Entwicklung, 104
- Diagonale, 22
- dicht
 - e Menge, 268
 - heitssatz, 407
 - μ - —e Familie von Funktionen, 427
- Dichte
 - Radon-Integral mit —, 432
- Diffeomorphismus, 346
- Differentialausdruck
 - Laplaceschen —, 285, 448
- Differentialgleichung
 - Bernoulli- —, 320
 - der Exponentialfunktion, 180
 - eines gedämpften und angeregten Oszillators, 341
 - erster Ordnung, 314
 - homogene —, 319
 - Legendre-, Hermite-, Laguerre-, Bessel- —, 339
 - lineare —, 210
 - logistische —, 319
 - Maxwell- —, 450, 453
 - mit getrennten Variablen, 223
 - Riccati- —, 320
 - vektorwertige — erster Ordnung, 315
 - vektorwertige — m -ter Ordnung, 334
 - vektorwertige lineare, 325
- differenzierbar
 - e Kurve, 272
 - e, stetig —e Funktion, 168
 - links, rechts —e Funktion, 170
 - partiell —, 277, 281
 - stetig —, 291, 353, 443
 - stetig partiell —, 277
 - total —, 289
 - zweimal, k -mal partiell —, 283
 - zweimal, k -mal total —, 300
 - zweimal, k -mal, unendlich oft, stetig —, 184
- Dini
 - Satz von —, 262
- direkte
 - Konsequenz, 2
- Dirichlet
 - Kriterium, 248
- disjunkt
 - e Mengen, 18
- Disjunktion, 5
- diskret
 - e Metrik, 252
 - e Teilmenge, 357
- Distanz, 76
- Distributivität, 40
- divergent
 - e Folge, 79
 - e Reihe, 100
 - uneigentliches —es Integral, 228
- Divergenz, 281, 447
 - satz, 448
- Dreieck
 - Pascalschen —, 45
- Dreiecksungleichung, 74
- Durchmesser, 261
- Durchschnitt, 18
 - einer Familie, 27
 - von zwei Mengen, 18
- Eigen
 - wert, —raum, —vektor, 327

Eigenschaft, 18
 Approximations—, 64
 eigentlich
 ν - —e Abbildung, 432
 Eins
 Ring mit —, 56
 Teilung der —, 444
 Einschränkung, 23
 Element
 das größte —, 64
 das kleinste —, 64
 neutrales —, 52
 Volumen—, 424, 439
 endlich
 —e Folge, 37
 —e Menge, Abzählung, 35
 Entwicklung
 in der Basis p , dezimale —, 104
 Euler
 —formel, 125
 —sche Zahl, 102, 122
 Existenzquantor, 8
 Exponential
 —reihe, —funktion, 122
 Differentialgleichung der —funktion,
 180
 Extensionalitätsaxiom, 14
 extern
 —e Beschreibung einer Menge, 18, 350
 Extremum, 149
 lokales —, 175, 302
 lokales — mit Bedingung, 307

 Fakultät, 43
 fallend
 —e Folge, 68
 —e Funktion, 138
 Fallunterscheidung, 6
 Familie, 27
 summierbare —, 119
 von Mengen, 27
 fast überall, 392
 Fatou
 Lemma von —, 393
 Fehler, 79
 absolute —, 90
 relative —, 90
 Feinheit, 274
 Feld
 Vektor—, 281
 von Tangentialvektoren, 446
 Fibonacci
 —Folge, 97
 Fischer
 Satz von Riesz- —, 406
 Fixpunkt, 321
 —satz von Banach, 322
 Fluß, 450
 Folge
 asymptotisch äquivalenten —n, 231
 Cauchy- —, 96
 der Partialsummen, 100
 endliche, unendliche —, 37
 Fibonacci- —, 97
 gleichmäßig konvergente —, 240
 induktiv definierte —, 37
 konvergente, divergente —, 79
 Null—, 79
 Produkt einer endlichen —, 41
 punktweise konvergente —, 238
 Summe einer endlichen —, 41
 Teil—, 94
 wachsende, fallende —, 68
 Formel
 binomische —, 46
 Differentiations— von Leibniz, 186
 Euler—, 125
 Green—, 448
 Hadamard—, 114
 Riemann- —, 452
 Stirling- —, 231
 Stokes- —, 452
 Taylor—
 mit Integralrestglied, 220
 mit Lagrange-Rest, 184
 mit mehreren Variablen, 301
 Transformations—, 423
 von Machin, 250
 Wallis- —, 221
 Fortsetzung
 stetige — in einem Punkt, 144
 Fourier
 —Koeffizient, 410
 frei
 —er Buchstabe, 8
 Frequenz
 Kreis—, 341
 Fubini

- Satz von —, 419
- Fundamental
 - system von Lösungen, 326, 336
- Funktion, 130
 - Ableitung einer —, 168
 - Bessel- —, 339
 - charakteristische —, 200
 - differenzierbare —, 168
 - Exponential—, 122
 - Grenzwert einer —, 144
 - harmonische —, 285
 - konvexe, konkave —, 189
 - Kotangens—, 161
 - Logarithmus—, 154
 - lokal absolut stetige —, 413
 - Potential—, 283, 396
 - rationale —, 134
 - Riemann-integrierbare —
 - komplexe —, 209
 - reelle —, 205
 - Riemannsche Zeta- —, 102, 164, 229
 - rotationsinvariante —, 426
 - Satz über implizite —en, 350
 - Sinuskardinal —, 145
 - Stamm—, 180
 - stückweise stetige —, 206
 - Tangens—, 160
 - Treppen—, 200, 407
 - trigonometrische —, Kosinus—, Sinus—, 125
 - wachsende, fallende —, 138
- funktional
 - e Teilmenge, 21
- ganz
 - e Zahl, 54
- Gauß
 - klammer, 66
 - Satz von —, 449
- gebunden
 - er Buchstabe, 8
- gedämpfte
 - Oszillation, 341
- geometrisch
 - e Multiplizität, 327
 - e Reihe, 100
 - e Summe, 46
 - en Mittel, 190
- geordnet
 - e Gruppe, 52
 - er Ring, 56
- Geschwindigkeitsvektor, 272
- getragen, 417
- Gleichheitszeichen, 11
- gleichmäßig
 - konvergente Folge, 240
 - konvergierte Reihe, 245
 - stetige Abbildung, 204
- Gleichung
 - des Graphen, 21
 - Differential—
 - Bernoulli- —, 320
 - der Exponentialfunktion, 180
 - erster Ordnung, 314
 - homogene —, 319
 - lineare —, 210
 - logistische —, 319
 - mit getrennten Variablen, 223
 - Riccati- —, 320
 - vektorwertige — erster Ordnung, 315
 - vektorwertige — m -ter Ordnung, 334
 - von Laplace, 285
 - Wellen—, Schwingungs—, Wärmeleitungs—, 285
 - einer Kurve, 272
 - einer Menge, 18
 - Parseval- —, 411
- Gleitpunkt
 - Darstellung, 104
- goldener Schnitt, 97
- Grad
 - des Taylorpolynoms, 184
 - eines Polynoms, 134, 293
- Gradient, 280, 445
 - ensatz, 450
- Gram
 - sche Determinante, 439
- Graph, 21
 - einer Relation, 33
- Green
 - formel, 448
- Grenze, 259
- Grenzwert, 79
 - Abelscher —satz, 249
 - einer Funktion, 144
- größ

—er oder gleich, —er als, 33
 das —te Element, 64
 Gruppe, 52
 Hadamard
 —formel, 114
 Halb-Raum
 abgeschlossener —, 351
 Halbwertzeit, 180
 harmonisch
 —e Funktion, 285
 Häufungspunkt, 95
 Haupt
 —raum, —vektor, 327
 Heine
 Satz von —, 204, 268
 Satz von — -Borel, 264
 Hermite
 -Differentialgleichung, -Polynom, 339
 Hesse
 -Matrix, 300
 Hilbert
 —raum, 408
 —sche Basis, 411
 Hölder
 -Ungleichung, 236, 244, 405
 homogen
 —e Differentialgleichung, 319
 lineare —e Differentialgleichung, 325
 Homöomorphismus, 266
 Hospital
 de l'— Regel, 182
 identische
 Abbildung, 22
 Imaginärteil
 einer Funktion, 133
 einer komplexen Zahl, 72
 Implikation, 5
 indefinit
 —e Matrix, 302
 Index
 Multi- —, 283
 Induktion
 —sprinzip, 30
 —sprinzip ab m , 36
 induktiv
 definierte Folge, 37
 induziert
 —e Metrik, 76
 —es Radon-Integral, 432
 inferior
 Limes —, 112
 Infimum, 64
 inhomogen
 lineare —e Differentialgleichung, 325
 injektiv, 25
 Innere
 einer Menge, —r Punkt, 251
 eines Intervall, 175
 Integral
 Darboux'sche Ober—, Unter—, 203
 elementares —, 201
 Radon- —
 Bild eines —s, — mit Dichte, induziertes —, 432
 moderates —, 429
 Riemann- —
 einer komplexen Funktion, 209
 einer matrizenwertige Funktion, 298
 einer reellen Funktion, 205
 einer vektorwertigen Funktion, 274
 Stieltjes- —, 201
 unbestimmtes —, 210
 uneigentliches konvergentes —, 228
 von Punktmassen, 430
 Integration
 partielle —, 218, 422, 448
 sukzessive —, 417
 integrierbar
 —e Menge, 390
 —e Mengen, 398
 —keitskriterium, 402
 auf jedem Kompaktum —, 401
 lokal —, 413
 p -fach —, 405
 Riemann- —e
 komplexe Funktion, 209
 reelle Funktion, 205
 vernünftig —, 428
 intern
 —e Beschreibung einer Menge, 22, 350
 Intervall, 67
 invariant
 rotations—, 426
 Inverse, 52
 isoliert

- es Maximum, Minimum, Extremum, 175, 302
- Jacobi
 - matrix, 289
- kanonische Injektion, 23
- Karte, 356
- Ketten
 - regel, 172, 294
 - schluß, 3
- Klammer
 - Gauß—, 66
- Klasse
 - Äquivalenz—, 51
 - Untermannigfaltigkeit der — $\mathcal{C}^{(2)}$, 446
- klein
 - er oder gleich, —er als, 33
 - das —ste Element, 64
- Koeffizient
 - Binomial- —, 45
 - Fourier- —, 410
- Kohlenstoff
 - C^{14} Datierung, 180
- kommutativ
 - e Gruppe, 52
 - er Ring, 56
- Kommutativität, 37, 40
- kompakt, 261
- Komplement, 19
- komplex
 - e Funktion, 130
 - e Zahl, 72
 - es Polynom, 134
- Komponente
 - erste, 19
 - zweite, 19
- konjugiert
 - komplex- — Zahl, 72
- Konjunktion, 5
- konkav
 - e Funktion, 189
- Konsequenz
 - direkte, 2
- Konstante, 8
 - Einführung einer —, 11
 - Methode der Hilfs—, 9
 - Methode der Variation der —n, 211, 332
- Kontraktion, 322
- Kontraposition, 6
- konvergent
 - e Folge, 79
 - e Reihe, 100
 - absolut —e Reihe, 107, 119
 - gleichmäßig —e Folge, 240
 - punktweise —e Folge, 238
 - punktweise, gleichmassig, normal —e Reihe, 245
 - uneigentliches —es Integral, 228
- Konvergenzradius, 114
- konvex
 - e Funktion, 189
 - e Menge, 298
- Koordinaten
 - krummlinige —, 424, 439
 - System von lokalen —, 356
- Körper, 56
- Kosinus
 - funktion, 125
- Kovektor, 280
- Kreis
 - frequenz, 341
- Kriterium
 - Abel- —, 249
 - Dirichlet- —, 248
 - Weierstraß- —, 245
- kritisch
 - er Punkt, 175, 302
- krummlinige
 - Koordinaten, 424, 439
- Kugel
 - abgeschlossene —, 77
- Kurve, 270
 - differenzierbare —, 272
- Kürzbarkeit, 37, 40
- Lagrange
 - Taylorformel mit — -Rest, 184
- Laguerre
 - Differentialgleichung, -Polynom, 339
- Länge
 - einer Kurve, 274
 - eines Bogens, 139
- Laplace
 - schen Differentialausdruck, 285, 448
 - Gleichung, -Operator, 285
- Lebesgue
 - zahl, 444

- Lemma von Riemann- —, 227
- Satz der dominierten Konvergenz von —, 393
- leer
 - e Abbildung, 23
 - e Menge, 14
- Legendre
 - Differentialgleichung, -Polynom, 339
- Leibniz
 - Differentiationsformel von —, 186
- Limes, 79
 - superior, inferior, 112
- Lindelöf
 - Satz von Picard- —, 323
- linear
 - vektorwertige —e Differentialgleichung, 325
- Linearform
 - wachsende, positive —, 201
- lipschitzstetig
 - (lokal) —e Abbildung, 316
- logarithmisch
 - e Spirale, 275
- Logarithmus
 - einer reellen Zahl > 0 , 154
- logistisch
 - e Differentialgleichung, 319
- lokal
 - es Maximum, Minimum, Extremum, 175, 302
 - es Maximum, Minimum, Extremum mit Bedingung, 307
 - absolut stetige Funktion, 413
 - integrierbar, 413
- Lösung
 - einer Differentialgleichung durch Substitution, 319
 - einer Differentialgleichung erster Ordnung, 314
 - einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen, 223
 - einer vektorwertigen Differentialgleichung erster Ordnung, 315
 - einer vektorwertigen Differentialgleichung m -ter Ordnung, 334
- Lusin
 - meßbar, 403, 430
 - Satz von —, 403
- Machin
 - Formel von —, 250
- Mächtigkeit
 - einer Menge, 35
- Mannigfaltigkeit
 - orientierbare —, 452
 - Unter— der Klasse $\mathcal{C}^{(2)}$, 446
 - Unter— mit Rand, 357
- Maß, 390, 398
- Masse
 - Integral von Punkt—n, 430
- Matrix
 - Hesse- —, 300
 - Jacobi- —, 289
 - positiv, negativ definite bzw. semidefinite, indefinite —, 302
- maximal
 - e Lösung, 223, 343
- Maximum, 64
 - einer Funktion, 149
 - lokales —, 175, 302
 - lokales — mit Bedingung, 307
- Maxwell
 - Differentialgleichung, 450, 453
- Menge, 14
 - Anzahl der Elemente, Mächtigkeit einer —, 35
 - beschränkte —, 264
 - der — Zahlen
 - ganzen : \mathbb{Z} , 54
 - komplexen : \mathbb{C} , 72
 - natürlichen : \mathbb{N} , 30
 - rationalen : \mathbb{Q} , 59
 - reellen : \mathbb{R} , 61
 - dichte —, 268
 - disjunkte —n, 18
 - einelementige —, 15
 - endliche, unendliche, abzählbare —, 35
 - Existenz einer unendlichen —, 30
 - funktionale Teil—, Ziel—, 21
 - integrierbare, Null—, 390
 - kompakte —, 261
 - Komplement einer —, 19
 - konvexe —, 298
 - leere —, 14
 - nachfolgende —, 30
 - offene, abgeschlossene —, 251
 - Parameter—, 22

- Potenz—, 16
- präkompakte, total beschränkte —, 262
- Teil—, 14
- zweielementige —, 15
- meßbar
 - e Teilmenge, Funktion, 399, 401
 - keitssatz, 430
 - Lusin- —, 403, 430
 - vernünftig —, 428
- Methode
 - der sukzessiven Approximationen, 321
 - der Variation der Konstanten, 332
- Metrik, 76
 - äquivalente —en, 254
 - diskrete —, 252
- metrisch
 - er Tensor, 439
 - Topologie eines —en Raumes, 251
- Minimum, 64
 - einer Funktion, 149
 - lokales —, 175, 302
 - lokales — mit Bedingung, 307
- Minkowski
 - Ungleichung, 236, 244, 405
- Mittel
 - geometrischen und arithmetischen —, 190
- Mittelwert
 - satz, 176, 298
 - ungleichung, 177, 298
 - zweite —ungleichung, 274
- moderat
 - e Funktion, 404
 - es Radon-Integral, 429
- modulo
 - Äquivalenz — n , 55
- Modus ponens, 3
- Monom, 293
- Multiplizität
 - sfunktion, 337
 - geometrische, algebraische —, 327
- nachfolgend
 - e Menge, 30
- Nachfolger, 30
- natürlich
 - e Zahl, 30
- Negation, 5
- negativ
 - definite, semidefinite Matrix, 302
- Neil
 - sche Parabel, 273
- neutral
 - es Element, 52
- Neutralität, 37, 40
- Newton
 - Attraktionsgesetz von —, 285
 - verfahren, 195, 197
- Norm, 234
 - einer linearen Abbildung, 287
 - Supremums—, 240
- normal
 - konvergente Reihe, 245
- Normalvektor
 - äußerer —, 361
- Notation
 - wissenschaftliche —, 104
- Null
 - folge, 79
 - menge, 390
- obere
 - Schranke, 64
- Oberintegral
 - Darboux'sche —, 203
- offen
 - e Menge, 251
 - e Menge mit Rand, 351
 - e Überdeckung, 261
 - es Intervall, 67
- Operator
 - norm, 287
 - Laplace- —, 285
- Ordnung
 - srelation, 33
 - einer partiellen Ableitung, 283
 - eines Eigenwertes, 327
 - totale —srelation, 33
- Orientierung, 452
- orthonormiert, 408
- Ostrogradzky
 - Satz von —, 448
- Oszillation
 - mit Kreisfrequenz; gedämpfte, aperi-
odische —, 341
- Paar
 - geordnetes, 15

- ungeordnetes, 15
- Parabel
 - Neilsche —, 273
- Parametermenge, 22
- Parametrisierung, 22, 350
 - einer Kurve, 270
 - lokale reguläre —, 355
- Parseval
 - -Gleichung, 411
- partial
 - Summe, 100
- partiell
 - e Integration, 218, 422, 448
 - differenzierbar, 277, 281
 - Ordnung einer —e Ableitung, 283
 - zweimal, k -mal — differenzierbar, 283
- Partition, 50
- Pascal
 - schen Dreieck, 45
- Permutation, 43
- Picard
 - Satz von — -Lindelöf, 323
- Polynom, 134, 293
 - charakteristisches —, 327, 337
 - Legendre-, Hermite-, Laguerre- —, 339
 - Taylor—, 184
 - trigonometrisches —, 408
- positiv
 - e Linearform, 201
 - definite, semidefinite Matrix, 302
- Potential
 - -Gleichung, 285
 - funktion, 283
- Potentialfunktion, 396
- Potenz
 - einer reellen Zahl > 0 , 156
- Potenzmenge
 - Axiom der —, 16
- Potenzreihe, 111
- Prädikat, 8
- präkompakt, 262
- Prinzip
 - Archimedische —, 449
 - Induktions—, 30
 - Induktions— ab m , 36
- Problem
 - Anfangswert—, 314, 315
- Produkt
 - regel, 445, 447
- Diagonale des —es, 22
- einer endlichen Folge, 41
- einer Familie, 27
- regel, 280, 281
- Vektor—, 451
- von zwei Mengen, 19
- Punkt
 - Berührungs—, 259
 - Fix—, 321
 - innerer —, 251
 - Integral von —massen, 430
 - kritischer —, 175, 302
 - Wende—, 191
- punktweise
 - konvergente Folge, 238
 - konvergente Reihe, 245
- quadratisch
 - Approximation im —en Mittel, 408
- Quadratwurzel, 71
- Quotient
 - enabbildung, —enraum, 51
- Radius
 - einer Kugel, 77
 - Konvergenz—, 114
- Radon
 - Integral
 - Bild eines —s, — mit Dichte, induziertes —, 432
 - moderates —, 429
- Rand
 - einer offenen Menge, 351
 - einer Untermannigfaltigkeit, 357
 - topologischer —, 259
- rational
 - e Zahl, 59
 - e Funktion, 134
- Raum
 - Banach—, 235
 - Eigen—, Haupt—, 327
 - Hilbert—, 408
 - metrischer —, 76
 - Quotienten—, 51
 - Tangential—, 361
 - Topologie eines metrischen —es, 251
- Realteil
 - einer Funktion, 133
 - einer komplexen Zahl, 72

- reell
 - e Funktion, 130
 - e Zahl, 61
 - es Polynom, 134
- Reflexivität
 - einer Äquivalenzrelation, 51
 - einer Ordnungsrelation, 33
- Regel
 - de l'Hospital —, 182
 - Deduktions—, 2, 3
 - Ketten—, 172, 294
 - Konstruktions—, 2, 3, 8
 - Produkt—, 170, 280, 281, 445, 447
 - Quotienten—, 170
 - Substitutions—, 215, 433
 - Trapez- —, 222
- Reihe
 - absolut konvergente —, 107, 119
 - Binomial—, 247
 - Exponential—, 122
 - geometrische —, 100
 - konvergente, divergente —, 100
 - Potenz—, 111
 - punktweise, gleichmäßig, normal konvergente —, 245
 - summierbare —, 411
 - Taylor—, 193
 - Umordnung einer —, 119
- rektifizierbar, 274
- Relation, 3, 20
 - Äquivalenz—, 51
 - auf einer Menge, 33
 - Graph einer —, 33
 - Ordnungs—, 33
 - totale Ordnungs—, 33
- relativ
 - e Fehler, 90
- Repräsentant
 - einer Äquivalenzklasse, 51
 - einer Äquivalenzklasse in $\mathbf{L}^p(\mu)$, 406
- Riccati
 - Differentialgleichung, 320
- Richtung
 - Ableitung in —, 445
- Riemann
 - -Formel, 452
 - sche Zeta-Funktion, 102, 164, 229
 - Integral
 - einer komplexen Funktion, 209
 - einer matrizenwertige Funktion, 298
 - einer reellen Funktion, 205
 - einer vektorwertige Funktion, 274
 - elementares —sches Integral, 201
 - Lemma von — -Lebesgue, 227
- Riesz
 - Satz von — -Fischer, 406
- Ring, 56
 - geordneter —, 56
- Rolle
 - Satz von —, 176
- Rotation
 - sinvariant, 426
 - ssatz, 451
 - eines Vektorfeldes, 283
- Satz, 2
 - Abelscher Grenzwert—, 249
 - Additionssätze, 126
 - Approximations—, 397
 - der dominierten Konvergenz von Lebesgue, 393
 - Dichtheits—, 407
 - Divergenz—, — von Ostrogradzky, 448
 - Fundamental— der Differential- und Integralrechnung, 213, 414
 - Gradienten—, 450
 - Integrierbarkeitskriterium, 402
 - Lemma von Fatou, 393
 - Lemma von Riemann-Lebesgue, 227
 - Lemma von Urysohn, 260
 - Meßbarkeits—, 430
 - Mittelwert—, 176, 298
 - partielle Integration, 422
 - Rotations—, 451
 - Substitutionsregel, 433
 - Sukzessive Integration, 417
 - Transformationsformel, 423
 - über die Umkehrfunktion, 347
 - über implizite Funktionen, 350
 - über partielle Integration, 218, 448
 - von Archimedes, 66
 - von Banach-Cacciopoli, 321
 - von Bolzano, 137
 - von Bolzano-Weierstraß, 95
 - von Dedekind, 64
 - von Dini, 262

von Fubini, 419
 von Gauß, 449
 von Heine, 204, 268
 von Heine-Borel, 264
 von Lusin, 403
 von Picard-Lindelöf, 323
 von Riesz-Fischer, 406
 von Rolle, 176
 von Tonelli, 419
 Zwischenwert—, 137
 Schnitt
 Dedekindscher —, 61
 goldener —, 97
 Schranke
 obere, untere —, 64
 Schritt
 Induktions—, 30, 36
 Schwarz
 Cauchy- — -Ungleichung, 237
 Schwingung
 —sgleichung, 285
 Selektionsaxiom, 18
 semantisch
 —er Standpunkt, 1
 Sinus
 funktion, 125
 Sinuskardinal, 145
 Spaltenvektor, 280
 Sphäre
 n - —, 276
 Spirale
 logarithmische —, 275
 Spitze, 273
 Stammfunktion, 180
 Standpunkt
 syntaktischer, semantischer —, 1
 stetig
 —e Fortsetzung in einem Punkt, 144
 auf X —e Abbildung, 132
 differenzierbar, 168, 272, 291, 353, 443
 gleichmäßig —e Abbildung, 204
 in einem Punkt —e Abbildung, 130
 k -mal — differenzierbar, 184
 links—, rechts—, 136
 lokal absolut — Funktion, 413
 partiell differenzierbar, 278
 stückweise —e Funktion, 206
 Stieltjes
 -Integral, 201
 Stirling
 -Formel, 231
 Stokes
 -Formel, 452
 streng
 wachsende, fallende Folge, 68
 wachsende, fallende Funktion, 138
 strikt
 —e Entwicklung, 104
 —es Maximum, Minimum, Extre-
 mum, 175, 302
 kleiner, größer als, 33
 stückweise
 stetige Funktion, 206
 Substitution
 —saxiom, 20
 —sregel, 215, 433
 Lösung einer Differentialgleichung
 durch —, 319
 Summe
 einer endlichen Folge, 41
 einer Reihe, 100
 geometrische —, 46
 Partial—, 100
 summierbar, 411
 —e Familie, 119
 superior
 Limes —, 112
 Supremum, 64
 —snorm, 240
 surjektiv, 25
 Syllogismus, 3
 Symmetrie
 einer Äquivalenzrelation, 51
 syntaktisch
 —er Standpunkt, 1
 System
 Fundamental— von Lösungen, 326,
 336
 Tangens
 einer reellen Zahl, 160
 Tangential
 —raum, 361
 vektor, 272
 tangential
 Feld von —vektoren, 446
 Taylor
 —formel

- mit Integralrestglied, 220
- mit Lagrange-Rest, 184
- mit mehreren Variablen, 301
- polynom, 184
- reihe, 193
- Teil
 - folge, 94
 - funktionale —menge, 21
 - menge, 14
 - Real—, Imaginär— einer komplexen Zahl, 72
- Teilen
 - mit Rest, 40
- Teilung
 - der Eins, 444
- Tensor
 - metrischer —, 439
- Term, 8
- Theorem, 2
- Theorie
 - formale, 2
 - logische —, 3
 - mit Gleichung, 11
 - mit Quantoren, 8
 - widersprüchliche —, 3
- Tonelli
 - Satz von —, 419
- Topologie
 - eines metrischen Raumes, 251
- total, 411
 - e Ordnungsrelation, 33
 - differenzierbar, 289
- Transformation
 - sformel, 423
- Transitivität
 - einer Äquivalenzrelation, 51
 - einer Ordnungsrelation, 33
- transzendent
 - e Zahl, 118
- Trapez
 - -Regel, 222
- Treppenfunktion, 200, 407
- trigonometrisch
 - e Funktion, 125
 - es Polynom, 408
- Tripel, 19
- Überdeckung, 261
- Umgebung, 251
- Umkehr
 - abbildung, 26
 - Satz über die —funktion, 347
- Umordnung
 - einer Reihe, 119
- unbestimmt
 - es Integral, 210
- unendlich
 - e Abzählung, 35
 - e Folge, 37
 - e Menge, 35
 - Existenz einer —en Menge, 30
 - oft differenzierbar, 184
- Ungleichung
 - Bernoulli-, 68
 - Bessel- —, 409
 - Cauchy-Schwarz- —, 237
 - Dreiecks—, 74
 - Hölder-, Minkowski- —, 236, 244, 405
 - Mittelwert—, 177, 298
 - zweite Mittelwert—, 274
- untere
 - Schranke, 64
- Unterintegral
 - Darbouxsche —, 203
- Untermannigfaltigkeit
 - der Klasse $\mathcal{C}^{(2)}$, 446
 - mit Rand, 357
 - orientierbare —, 452
- Unterteilung, 200
- Urbild, 22
- Urysohn
 - Lemma von —, 260
- Variable, 8
 - änderung, 151, 215, 294, 423
- Variation
 - Methode der — der Konstanten, 211, 332
- Vektor
 - produkt, 451
 - verband, 200
 - Eigen—, Haupt—, 327
 - feld, 281
 - Feld von Tangential—en, 446
 - normierter —raum, 234
 - Spalten—, Ko—, Zeilen—, 280
 - Tangential—, Geschwindigkeits—, 272

- Verallgemeinerungsprinzip, 9
- Vereinigung, 17
 - Axiom der —, 17
 - einer Familie, 27
 - von zwei Mengen, 17
- Verfahren
 - Newton—, 195, 197
- Verkettung
 - von Abbildungen, 23
- vernünftig
 - meßbar, integrierbar, 428
- Verträglichkeit, 38, 40
- vollständig, 96
- Volum
 - enelement, 424, 439
- Voraussetzung
 - Induktions—, 30
- wachsend
 - e Folge, 68
 - e Funktion, 138
 - e Linearform, 201
- Wallis
 - Formel, 221
- Wärme
 - leitungsgleichung, 285
- Weierstraß
 - Bolzano- — Eigenschaft, 262
 - Satz von Bolzano- —, 95
- Weierstraß
 - Kriterium, 245
- Wellen
 - gleichung, 285
- Wendepunkt, 191
- widersprüchlich, 3
- Widerspruch
 - Beweis durch —, 6
- wissenschaftlich
 - e Notation, 104
- Wronski
 - Determinante, 326
- Zahl
 - algebraische —, 118
 - Eulersche —, 102, 122
 - ganze —, 54
 - komplexe —, 72
 - Lebesgue—, 444
 - natürliche, 30
 - rationale —, 59
 - reelle —, 61
 - transzendente —, 118
- Zahlengerade, 61
 - erweiterte —, 66
- Zeilenvektor, 280
- Zenon, 100
- Zentrum
 - einer Kugel, 77
- Zerlegung
 - eines Radon-Integrals, 416
- Zeta
 - Riemannsche — -Funktion, 102, 164, 229
- Zielmenge, 21
- Zugehörigkeitszeichen, 14
- Zwischenwertsatz, 137
- Zykloide, 275