Kapitel 5

KONVERGENZ

Fassung vom 21. April 2002

5.1 Metrische Räume

DEFINITION 1 Sei X eine Menge. Eine Abbildung

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

heißt *Metrik* oder *Distanz (auf X)*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(a) Dreiecksungleichung

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

(b) Symmetrie

$$d(x,y) = d(y,x)$$

(c) Trennung

$$d(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \ .$$

Man sagt, daß das Paar (X,d) oder einfach X , wenn die Metrik d klar bestimmt ist, ein *metrischer Raum* ist.

BEISPIEL 1 Die Abbildung

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (z,w) \longmapsto |z-w|$$

ist eine Metrik auf $\mathbb{C}$.

BEISPIEL 2 Ist (X,d) ein metrischer Raum und Y eine Teilmenge von X , dann ist

$$d_Y := d_{|Y \times Y} : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (y,z) \longmapsto d(y,z)$$

eine Metrik auf Y , und heißt die von X auf Y *induzierte Metrik* .

BEISPIEL 3 Die Mengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ oder $\mathbb{Q}$, ein Intervall , z.B. $[a,b]$ oder $[a,b[$, oder die Vereinigung von disjunkten Intervallen in $\mathbb{R}$ sind mit der von $\mathbb{R}$ induzierte Metrik metrische Räume.

BEISPIEL 4 Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume. Auf $X \times Y$ kann man verschiedene Metriken definieren :

$$d_1 : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : ((x,y),(u,v)) \longmapsto d_X(x,u) + d_Y(y,v) \ ,$$

$$d_2 : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : ((x, y), (u, v)) \longmapsto \sqrt{d_X (x, u)^2 + d_Y (y, v)^2}$$

oder

$$d_\infty : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : ((x, y), (u, v)) \longmapsto \max (d_X (x, u), d_Y (y, v)) \ .$$

BEISPIEL 5 Versehen mit einer der folgenden Metriken ist $\mathbb{R}^2$ ein metrischer Raum :

$$d_1 : ((x, y), (u, v)) \longmapsto |x - u| + |y - v| \ ,$$

$$d_2 : ((x, y), (u, v)) \longmapsto \sqrt{|x - u|^2 + |y - v|^2}$$

oder

$$d_\infty : ((x, y), (u, v)) \longmapsto \max (|x - u|, |y - v|) \ .$$

BEISPIEL 6 Sind in der Darstellung $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ die Punkte $z = (x, y)$ und $w = (u, v)$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ gegeben, so gilt

$$|z - w| = \sqrt{|x - u|^2 + |y - v|^2} = d_2 ((x, y), (u, v)) \ .$$

DEFINITION 2 Seien (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_+$. Man sagt, daß

$$B (x, r, d) := \{y \in X \mid d (y, x) \leqslant r\}$$

die *(abgeschlossene) Kugel mit Zentrum* x *und Radius* r ist.

Aufgabe 1 Seien d_1 und d_∞ die in der Vorlesung definierten Metriken auf $\mathbb{R}^2$.

(a) Skizzieren Sie die Mengen

$$B ((2, 2), 1, d_1) \quad , \quad B ((2, 2), 1, d_\infty) \ ,$$

und versuchen Sie, eine andere Beschreibung der Mengen zu finden.

(b) Zeigen Sie, daß zu jedem $a \in \mathbb{R}_+^*$ manche $b, c \in \mathbb{R}_+^*$ existieren mit

$$B (x, b, d_1) \subset B (x, a, d_\infty)$$

und

$$B (x, c, d_\infty) \subset B (x, a, d_1)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

Existieren maximale b, c mit dieser Eigenschaft?

(c) Durch $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \longmapsto (x - y, x + y)$ ist eine lineare Abbildung gegeben. Beschreiben Sie das Bild von $B ((0, 0), 1, d_\infty)$ und $B ((2, 2), 1, d_\infty)$ unter T durch die Metrik d_1

Aufgabe 2 Man betrachte auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Metriken d_k für $k = 1, 2, \infty$. Skizzieren Sie für ein festes $r > 0$ die Kugeln $B (0, r, d_k)$ und zeigen Sie, daß

$$B (0, r, d_1) \subset B (0, r, d_2) \subset B (0, r, d_\infty) \subset B (0, 2r, d_1) \ .$$

Wie groß kann man eine Zahl $\rho = \rho(r)$ maximal wählen, damit noch gilt

$$B(0, \rho, d_2) \subset B(0, r, d_1) \ ?$$

Aufgabe 3 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie:

(a) Für alle $x, y, z \in X$ ist

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y) \ .$$

(b) Für alle $x, y, z, w \in X$ gilt die sog. *Vierecksungleichung*

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leqslant d(x, z) + d(y, w) \ .$$

(c) Durch

$$\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \longmapsto \delta(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

wird eine weitere Metrik auf X erklärt. Was fällt an dieser Metrik auf ?

5.2 Definition der Konvergenz

Sei X ein metrischer Raum. Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $x \in X$, so heißt $d(x_k, x)$ der *Fehler* , den man macht, wenn man (bzgl. der Metrik d) x durch x_k approximiert. Wir sind an den Folgen interessiert, für die die Approximation besser, d.h. der Fehler kleiner wird, wenn k wächst.

DEFINITION 1 Eine Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ heißt *Nullfolge* , wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $k \geqslant N(\varepsilon)$ gilt

$$0 \leqslant e_k \leqslant \varepsilon \ .$$

Man sagt, daß eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eines metrischen Raumes (X, d) gegen $x \in X$ *konvergent* ist, wenn die Folge der Fehler $(d(x_k, x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, d.h. wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $k \geqslant N(\varepsilon)$ gilt

$$d(x_k, x) \leqslant \varepsilon \ .$$

Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X heißt *divergent* , falls sie gegen kein $x \in X$ konvergiert.

BEMERKUNG Eine Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ ist genau dann eine Nullfolge, wenn sie gegen 0 im metrischen Raum $\mathbb{R}_+$ konvergiert.

HAUPTSATZ *Konvergiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X gegen $x \in X$ und gegen $y \in X$, dann gilt*

$$x = y \ .$$

Dieser Satz erlaubt uns folgende Definition :

DEFINITION 2 Konvergiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eines metrischen Raumes gegen $x \in X$, dann heißt x der *Grenzwert* oder *Limes* von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X . Er wird mit

$$\lim x_k \quad , \quad \lim_k x_k \quad \text{oder} \quad \lim_{k\to\infty} x_k$$

bezeichnet.

Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}, k\geqslant n}$ von X die ab n indiziert ist, man schreibt auch $(x_k)_{k\geqslant n}$, heißt konvergent, wenn $(x_{l+n})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Für den Grenzwert schreibt man dann

$$\lim_{k\geqslant n} x_k \ .$$

SATZ *Seien $(x_k)_{k\geqslant n}$ eine Folge in X und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant n$. Genau dann ist $(x_k)_{k\geqslant n}$ konvergent, wenn $(x_k)_{k\geqslant m}$ konvergent ist. In diesem Fall haben diese Folgen den gleichen Limes.*

Insbesondere ist genau dann $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, wenn $(x_{k+n})_{k\in\mathbb{N}} = (x_k)_{k\geqslant n}$ konvergent ist und es gilt

$$\lim_k x_k = \lim_k x_{k+n} = \lim_{k\geqslant n} x_k \ .$$

BEISPIEL Eine konstante Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. $x_k = x \in X$ für alle $k \in \mathbb{N}$, ist gegen x konvergent.

Aufgabe 1 Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine in X konvergente Folge, $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion und $y_l := x_{\sigma(l)}$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent ist, wenn die Folge $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. In diesem Fall stimmen die Grenzwerte überein.

Aufgabe 2 Sind $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in X mit Grenzwerten x bzw. y , dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y) \quad \text{in } \mathbb{R}_+ .$$

Benutzen Sie Aufgabe 5.1.3.b.

5.3 Konvergenz einer wachsenden Folge

HAUPTSATZ *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine wachsende bzw. fallende Folge in $\mathbb{R}$. Genau dann ist diese Folge konvergent, wenn sie nach oben bzw. nach unten beschränkt ist. In diesem Fall gilt*

$$\lim_k x_k = \sup_{l\in\mathbb{N}} x_l \quad \textit{bzw.} \quad \lim_k x_k = \inf_{l\in\mathbb{N}} x_l \ .$$

BEISPIEL 1 Die Folge $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ ist eine Nullfolge.

BEISPIEL 2 Die Folge $\left((-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

BEISPIEL 3 Die Folge $\left(\frac{k}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1 .

BEISPIEL 4 Ist $0 \leqslant y < 1$, dann ist $\left(y^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 1 Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_0 := 2 \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + 2$$

konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3 Sei $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Zeigen Sie, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leqslant \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \ .$$

Hinweis : Benutzen Sie Aufgabe 4.7.

(b) Folgern Sie, daß gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3 \ .$$

(c) Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$ streng monoton wachsend und konvergent ist mit

$$\frac{64}{27} < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3 \ .$$

Benutzen Sie die Bernoulli-Ungleichung.

Aufgabe 4 Sei A eine in $\mathbb{R}$ nicht leere beschränkte Menge. Zeigen Sie, daß eine wachsende Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A mit

$$\sup A = \lim_k x_k$$

existiert.

5.4 Rechnen mit Nullfolgen

SATZ *Seien* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $\mathbb{R}_+$.

(i) *Ist* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge und gilt*

$$0 \leqslant y_k \leqslant x_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ ,$$

so ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

(ii) *Sind* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Nullfolgen, dann sind* $(x_k + y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(\max(x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ *Nullfolgen.*

(iii) *Ist* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge, und ist* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *nach oben beschränkt, so ist* $(x_k \cdot y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

(iv) *Ist* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge, dann ist* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *nach oben beschränkt. Sind insbesondere* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Nullfolgen, so ist* $(x_k \cdot y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

BEISPIEL Die Folge $\left(\frac{k}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Aufgabe 1 Sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+$. Zeigen Sie: Genau dann ist $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, wenn für alle $l \in \mathbb{N}^*$ ein $M(l) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß gilt

$$0 \leqslant e_k \leqslant \frac{1}{l} \quad \text{für alle } k \geqslant M(l) \ .$$

Aufgabe 2 Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}_+^*$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+$, die keine Nullfolge ist. Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\frac{y_k}{x_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist.

5.5 Grenzwertsätze in $\mathbb{C}$

HAUPTSATZ *Seien $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$. Dann gilt*

(i) $(z_k + w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und*

$$\lim_k (z_k + w_k) = \lim_k z_k + \lim_k w_k \ .$$

(ii) $(|z_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent, nach oben beschränkt und*

$$\lim_k |z_k| = |\lim_k z_k| \ .$$

(iii) $(z_k \cdot w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und*

$$\lim_k (z_k \cdot w_k) = (\lim_k z_k) \cdot (\lim_k w_k) \ .$$

(iv) Ist $\lim_k w_k \neq 0$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $w_k \neq 0$ für alle $k \geqslant n$, die Folge $\left(\frac{z_k}{w_k}\right)_{k\geqslant n}$ ist konvergent und

$$\lim_{k\geqslant n} \frac{z_k}{w_k} = \frac{\lim_k z_k}{\lim_k w_k} \ .$$

(v) $(\overline{z_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und*

$$\lim_k \overline{z_k} = \overline{\lim_k z_k} \ .$$

Aufgabe 1 Sind $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$, dann sind $(\max(x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\min(x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_k \max(x_k, y_k) = \max(\lim_k x_k, \lim_k y_k) \quad \text{und} \quad \lim_k \min(x_k, y_k) = \min(\lim_k x_k, \lim_k y_k) \ .$$

BEMERKUNG Durch Induktion beweist man Formeln, in denen endlich viele Operationen obiger Art vorkommen.

BEISPIEL 1 Man beweist

$$\lim_k \frac{3k^2 + 13k}{k^2 - 2} = \lim_{k\geqslant 1} \frac{3 + 13 \cdot \frac{1}{k}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{k^2}} = \frac{3 + 13 \cdot \lim_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}}{1 - 2 \cdot \left(\lim_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}\right)^2} = 3 \ ,$$

in dem man von rechts nach links argumentiert.

BEISPIEL 2 Für $a \in \mathbb{R}$ definiert man rekursiv

$$x_0 := a \quad \text{und} \quad x_{k+1} := x_k \cdot (1 - 2 \cdot |x_k|) \ .$$

Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt

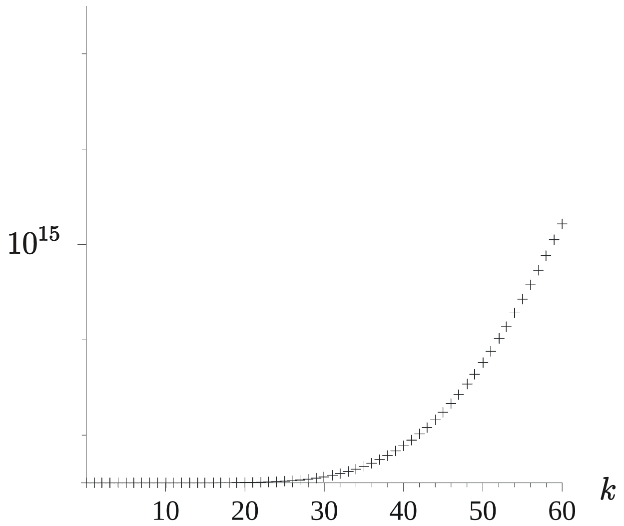
$$\lim_k x_k = 0 \ .$$

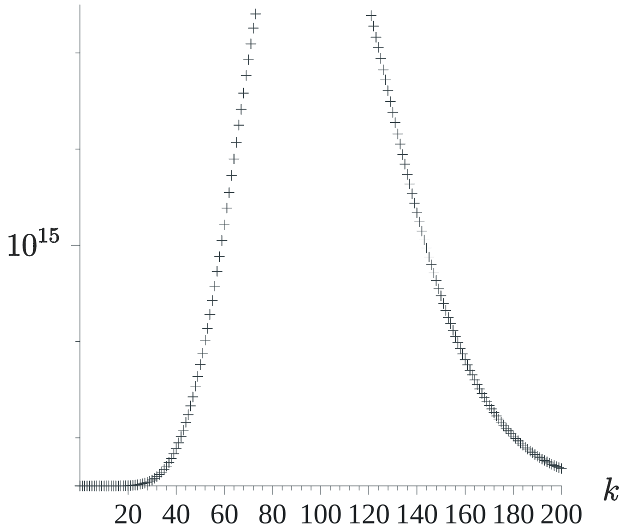
Aber für $a = 1$ ist $x_k = (-1)^k$, und die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist divergent. Dieses Beispiel zeigt, daß die Konvergenz der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein wichtiger Punkt ist (siehe die unten stehende Aufgabe).

BEISPIEL 3 Seien $a \in [0,1[$ und $l \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(k^l \cdot a^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

BEISPIEL 4 Für $x_k := k^{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^k$ gilt

$$x_{100} \simeq 2,6 \cdot 10^{15} \quad , \quad x_{600} \simeq 2 \quad \text{und} \quad x_{1000} \simeq 1,7 \cdot 10^{-16} \ .$$





BEISPIEL 5 Sei $z \in \mathbb{C}$. Genau dann ist $\left(z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, wenn

$$|z| < 1 \quad \text{oder} \quad z = 1 \ .$$

Im ersten Fall konvergiert diese Folge gegen 0 .

Aufgabe 2 Untersuchen Sie die folgenden komplexen Folgen $(x_k)_{k\geqslant 3}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(a)
$$x_k := \frac{7 \cdot k^3 + 2i \cdot k^2 + k}{3 \cdot k^3 + 4i} \ .$$

(b)
$$x_k := \frac{(3k+1)^3}{(2k-1) \cdot (2-3k)^2} \ .$$

(c)
$$x_k := \left(\frac{3k+2}{4k-1}\right)^n \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}^* \ .$$

(d)
$$x_k := (-1)^k \cdot \frac{n^2+2}{(n+1)^2} \ .$$

(e)
$$x_k := \frac{2 \cdot 6^k + k^5 \cdot 4^k}{(2^k - k^2) \cdot (3^k + k^3 + 2)} \ .$$

(f)
$$x_k := \left[(-1)^k + 3\right]^2 \cdot \frac{k^3+3}{(k^2+k)\cdot(k^2-k)} \ .$$

(g)
$$x_k := \frac{2^k + i \cdot |k^2 - 42|}{k!} + (-1)^{k!} \frac{7}{\sqrt[8]{k^4+1}} \ .$$

(h)
$$x_k := \sqrt{k} - i^n \cdot \sqrt{k+1} \ .$$

(i)
$$x_k := \frac{k+2}{\sqrt{k+1}}$$

(j)
$$x_k := \prod_{l=0}^{k} \left(1 + q^{2^l}\right) \qquad \text{mit} \quad q \in \mathbb{C} \ .$$

Hinweis: Betrachten Sie für $q \neq 1$ den Ausdruck $(1-q)\, x_k$.

(k)
$$x_k := \sqrt{k} \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \ .$$

(l)
$$x_k := k \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \ .$$

Aufgabe 3 Sei $x_k := \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l(l+1)}$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$. Berechnen Sie x_k und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4 Für $z \in \mathbb{C}$ definiert man rekursiv

$$z_0 := z \quad \text{und} \quad z_{k+1} := z_k \cdot (1 - 2 \cdot |z_k|) \ \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $|z| \geqslant 1$, so gilt $|z_k| \geqslant 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

(b) Ist $|z| < 1$, so konvergiert die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 .

Aufgabe 5 Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, nach oben beschränkt und konvergent ist. Berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 6 Zeigen Sie, daß die durch

$$x_0 := 1 \quad \text{und} \quad x_{k+1} = \frac{x_k^2}{4} + 1 \ \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, nach oben beschränkt und konvergent ist. Berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 7 Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant x \leqslant y$. Man definiere die rekursiven Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch

$$x_0 := x \ , \ y_0 := y \quad \text{und} \quad x_{k+1} := \sqrt{x_k \cdot y_k} \ , \ y_{k+1} := \frac{x_k + y_k}{2} \ \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ .$$

Zeigen Sie, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $x_k \leqslant y_k$ und daß diese Folgen monoton und konvergent sind mit $\lim_k x_k = \lim_k y_k$.

Aufgabe 8 Zeigen Sie, daß die durch

$$x_0 := 1 \quad \text{und} \quad x_{k+1} := \sqrt{x_k} + 2 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Berechnen Sie den Grenzwert.

5.6 Existenz der p-ten Wurzeln

Sei $p \in \mathbb{N}^*$ und $a \in \mathbb{R}_+$. Wir wollen die Gleichung

$$x^p = a$$

in $\mathbb{R}_+$ lösen.

LEMMA *Für alle $u, v \in \mathbb{R}_+$ gilt*

$$u \leqslant v \quad \Longrightarrow \quad u^p \leqslant v^p$$

und

$$u < v \quad \Longrightarrow \quad u^p < v^p \ .$$

HAUPTSATZ *Für alle $p \in \mathbb{N}^*$ und $a \in \mathbb{R}_+$ besitzt die Gleichung $x^p = a$ genau eine Lösung in $\mathbb{R}_+$, die man mit $\sqrt[p]{a}$ bezeichnet. Ist $a \neq 0$, so ist $\sqrt[p]{a} = \lim_k x_k$ wobei die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch*

$$x_0 := a \quad \textit{und} \quad x_{k+1} := x_k - \frac{x_k^p - a}{p \cdot x_k^{p-1}}$$

definiert ist.

KOROLLAR *Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt $\sqrt[p]{a \cdot b} = \sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b}$.*

BEMERKUNG Somit haben wir einen zweiten Beweis der Existenz der Quadratwurzel (vgl. Hauptsatz 4.12), der uns sogar ermöglicht sie zu berechnen.

Aufgabe 1 Für alle $p \in \mathbb{N}^*$ und $u, v \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$u \leqslant v \Longleftrightarrow u^p \leqslant v^p$$

und

$$u \leqslant v \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt[p]{u} \leqslant \sqrt[p]{v} \ .$$

Aufgabe 2 Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\sqrt[k]{a}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ fallend ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, daß für alle $p \in \mathbb{N}^*$ und $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\sqrt[p]{x+y} \leqslant \sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y} \quad \text{und} \quad \left|\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y}\right| \leqslant \sqrt[p]{|x-y|} \ .$$

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die folgende Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

$$x_k := \begin{cases} 13 \cdot k^2 + i \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} & \\ & \text{si} \\ \left(\sqrt[k]{k}\right) & \end{cases} \quad \begin{matrix} k \leqslant 10^{641} \\ \\ k > 10^{641} \end{matrix} \quad .$$

Hinweis : Benutzen Sie Aufgabe 4.7.

5.7 Absolute und relative Fehler

DEFINITION Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Man sagt, daß $|y - x|$ der *absolute Fehler* ist, den man macht, wenn man x durch y approximiert, und daß, falls $y \neq 0$,

$$r := \frac{|y - x|}{|y|}$$

der *relative Fehler* ist.

Ist der absolute Fehler bzw. der relative Fehler $\leqslant r$, so gilt

$$y - r \leqslant x \leqslant y + r$$

bzw.

$$y - r \cdot |y| \leqslant x \leqslant y + r \cdot |y| \ .$$

Wir benutzen die wissenschaftliche Notation, die in 6.3 behandelt wird.

SATZ *Seien $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Wir nehmen an, daß in der wissenschaftlichen Darstellung gilt*

$$y = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n \ldots \cdot 10^b \quad \text{mit } a_j \in \{0, 1, \ldots, 9\} \ , \ a_0 \neq 0 \text{ und } b \in \mathbb{Z} \ ,$$

und daß der relative Fehler r , wenn man x durch y approximiert, kleiner als 10^{-n} ist.

(i) *Ist $a_{n-1} \notin \{0, 9\}$, so gilt*

$$x = a_0, a_1 a_2 \ldots \widetilde{a_{n-1}} \ldots \cdot 10^b$$

mit $\widetilde{a_{n-1}} \in \{a_{n-1} + 1, a_{n-1}, a_{n-1} - 1\}$. Insbesondere stimmen die ersten $n - 1$ Ziffern von y mit denen von x überein.

(ii) *Sind alle Dezimalstellen von y ab a_n Null, d.h.*

$$y = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \cdot 10^b \ ,$$

so sind diese n Ziffern auch die ersten von x .

BEISPIEL 1 In (i) kann man die Anzahl der exakten Ziffern nicht verbessern. Der relative Fehler, den man macht, wenn man 5 durch $4,6$ approximiert, ist $\frac{0{,}4}{4{,}6} < 10^{-1}$ und kein Ziffer ist richtig ! Die Bedingung $a_{n-1} \neq 9$ kann man nicht weglassen, da $4,98$ approximiert $5,02$ mit einem relativen Fehler $\frac{0{,}04}{4{,}98} < 10^{-2}$.

BEMERKUNG 1 Stimmen die ersten n Ziffern von y mit denen von x überein, so ist der relative Fehler $\leqslant 10^{-(n-1)}$.

BEISPIEL 2 Wir wollen den Fehler abschätzen, den man macht, wenn man $\sqrt[p]{a}$ durch x_k , wie im Satz 5.6 definiert, approximiert. Die Folge $(x_k)_{k\geqslant 1}$ ist fallend und die Folge $\left(\frac{a}{x_k^{p-1}}\right)_{k\geqslant 1}$ ist wachsend. Es gilt

$$\frac{a}{x_k^{p-1}} \leqslant \sqrt[p]{a} \leqslant x_k \quad , \quad 0 \leqslant x_k - \sqrt[p]{a} \leqslant x_k - \frac{a}{x_k^{p-1}}$$

und

$$\lim_k \left(x_k - \frac{a}{x_k^{p-1}}\right) = 0 \ .$$

Definiert man

$$r_k := \frac{x_k - \sqrt[p]{a}}{x_k} \ ,$$

so ist im Fall $p = 2$

$$r_{k+1} \leqslant r_k^2 \ .$$

BEMERKUNG 2 Dies zeigt, daß man i.a. die Anzahl der richtigen Dezimalstellen in jedem Schritt verdoppelt.

BEMERKUNG 3 Für beliebige $p \in \mathbb{N}^*$ gilt $r_{k+1} \leqslant \frac{p}{2} \cdot r_k^2$.

5.8 Konvergenz in einem Produkt

LEMMA *Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt*

$$\max(a, b) \leqslant a + b, \sqrt{a^2 + b^2}$$

und

$$a + b \leqslant 2 \cdot \max(a, b) \quad , \quad \sqrt{a^2 + b^2} \leqslant \sqrt{2} \cdot \max(a, b) \ .$$

HAUPTSATZ *Seien X, Y metrische Räume. Eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $X \times Y$ ist genau dann konvergent bzgl. einer der Metriken d_1 , d_2 oder d_∞ , wenn die Folgen $(\mathrm{pr}_1(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\mathrm{pr}_2(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ in X bzw. in Y konvergent sind.*

In diesem Fall gilt

$$\mathrm{pr}_j(\lim_k z_k) = \lim_k \mathrm{pr}_j(z_k) \quad j = 1, 2 \ .$$

Schreibt man $z_k = (x_k, y_k)$, so bedeutet dies

$$\lim_k (x_k, y_k) = (\lim_k x_k, \lim_k y_k) \ .$$

BEMERKUNG Dieser Satz zeigt, daß die Konvergenz in $X \times Y$ unabhängig von der Wahl der Metrik d_1 , d_2 oder d_∞ . Wir werden Sie mit $d_{X \times Y}$ bezeichnen. Dies wird im Kapitel Normierte Räume und Topologie ausführlicher behandelt (siehe 10.13).

KOROLLAR *Eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ist genau dann konvergent, wenn die Folgen*

$$(\mathrm{Re}\, z_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \textit{und} \quad (\mathrm{Im}\, z_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

in $\mathbb{R}$ konvergent sind.

In diesem Fall gilt

$$\mathrm{Re}(\lim_k z_k) = \lim_k \mathrm{Re}\, z_k \quad , \quad \mathrm{Im}(\lim_k z_k) = \lim_k \mathrm{Im}\, z_k$$

und

$$\lim_k z_k = \lim_k \mathrm{Re}\, z_k + i \cdot \lim_k \mathrm{Im}\, z_k \ .$$

Aufgabe Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

stetig ist, wenn $X \times X$ mit einer der Metriken d_1 , d_2 oder d_∞ versehen ist (siehe Aufgabe 5.2.2).

5.9 Konvergenz in $\mathbb{R}_+$

SATZ *Sei* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine in* $\mathbb{C}$ *konvergente Folge . Ist* $z_k \in \mathbb{R}$ *bzw.* $z_k \in \mathbb{R}_+$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *, dann ist* $\lim_k z_k \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\lim_k z_k \in \mathbb{R}_+$ *.*

KOROLLAR *Seien* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *,* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}$ *konvergente Folgen und* $a, b \in \mathbb{R}$ *.*

(i) Gilt

$$x_k \leqslant y_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ ,$$

so ist

$$\lim_k x_k \leqslant \lim_k y_k \ .$$

(ii) Gilt

$$a \leqslant x_k \leqslant b \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ ,$$

so ist

$$a \leqslant \lim_k x_k \leqslant b \ .$$

BEISPIEL 1 Die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt[p]{k}}\right)_{k\geqslant 1}$ ist streng fallend und eine Nullfolge.

BEISPIEL 2 Für alle $k \geqslant 1$ gilt $\frac{1}{k} > 0$, aber $\lim_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} = 0$. Dieses Beispiel zeigt, daß i.a. nicht $\lim_k x_k < \lim_k y_k$ gilt, falls $x_k < y_k$ für alle k .

5.10 Teilfolgen

DEFINITION Eine streng wachsende Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, d.h. $\alpha(l+1) > \alpha(l)$ für alle $l \in \mathbb{N}$, heißt *Teilfolge* von $\mathbb{N}$.

Eine Teilfolge wird auch mit $l \longmapsto k_l : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bezeichnet, um anzudeuten, daß man Elemente aus $\mathbb{N}$ indiziert. Es gilt $k_{l+1} > k_l$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einer Menge X , dann heißt die Abbildung

$$l \longmapsto x_{\alpha(l)} : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

eine *Teilfolge von* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und wird mit $\left(x_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ oder $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.

SATZ *Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine in einem metrischen Raum X konvergente Folge, so konvergiert jede Teilfolge $\left(x_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und es gilt*

$$\lim_l x_{\alpha(l)} = \lim_k x_k \ .$$

LEMMA

(i) Jede nicht leere Teilmenge A von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

(ii) Ist A eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$, so existiert eine Teilfolge α oder $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ mit

$$A = \alpha(\mathbb{N}) = \{k_l \mid l \in \mathbb{N}\} \ .$$

KOROLLAR *Jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ besitzt eine monotone, d.h. wachsende oder fallende Teilfolge.*

5.11 Satz von Bolzano-Weierstraß

DEFINITION 1 Eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt beschränkt , wenn die Folge $(|z_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist.

HAUPTSATZ *Jede beschränkte Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

DEFINITION 2 Ein Punkt x eines metrischen Raumes X heißt *Häufungspunkt* einer Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von X , falls eine Teilfolge von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, die gegen x konvergiert.

BEMERKUNG 1 Der Satz von Bolzano-Weierstrass sagt, daß jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ einen Häufungspunkt besitzt.

BEMERKUNG 2 Satz 5.10 zeigt, daß jede konvergente Folge nur einen Häufungspunkt besitzt : ihren Limes.

Aufgabe 1 Seien $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(a) Die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen z .

(b) Die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und z ist der einzige Häufungspunkt dieser Folge.

(c) Für alle $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid |z_k - z| \geqslant \varepsilon\}$ endlich.

Aufgabe 2 Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge. Es gebe ein $z \in \mathbb{C}$, so dass für jede *konvergente* Teilfolge (z_{n_k}) von (z_n) gelte

$$\lim_k z_{n_k} = z \ .$$

Zeigen Sie: (z_n) ist konvergent mit

$$\lim_n z_n = z \ .$$

Hinweis: Beweis Sie durch Widerspruch.

5.12 Cauchy-Folgen

DEFINITION 1 Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum X heißt *Cauchy-Folge* , falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(x_k, x_l) \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } k, l \geqslant N \ .$$

SATZ *Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum X , so ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

DEFINITION 2 Ein metrischer Raum X heißt *vollständig* , wenn jede Cauchy-Folge in X konvergent (gegen ein Element in X) ist.

HAUPTSATZ (Cauchy-Kriterium) *$\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ist genau dann konvergent, wenn $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.*

KOROLLAR *$\mathbb{R}$ ist ein vollständiger metrischer Raum.*

BEISPIEL $\mathbb{Q}$ ist ein nicht-vollständiger metrischer Raum.

Aufgabe 1 Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen:

(a) Für $a < b$ gibt es eine Cauchyfolge $(c_n) \subset [a, b[$, die in $[a, b[$ nicht konvergiert.

Aufgabe 2 (a) Es gibt eine Cauchyfolge $(c_n) \subset \mathbb{R}$, für die $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ eine Teilfolge ist, die aber selbst keine Nullfolge ist.

(b) Für $a < b$ ist $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bezüglich der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik vollständig .

(c) Jede Folge mit genau einem Häufungspunkt konvergiert.

5.13 Folge von Fibonacci

DEFINITION Man definiert eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ rekursiv durch

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{k+2} = a_{k+1} + a_k \ .$$

Man nennt sie die *Fibonacci-Folge* .

Die ersten Terme dieser Folge sind:

$$1 \ , \ 1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ 5 \ , \ 8 \ , \ 13 \ , \ 21 \ , \ 34 \ , \ 55 \ , \ldots \ .$$

Setzt man

$$x_k := \frac{a_k}{a_{k+1}} \ ,$$

so gilt

$$x_0 = 1 \quad \text{und} \quad x_{k+1} = \frac{1}{1+x_k} \ .$$

Die ersten Terme sind:

$$1 \ , \ \frac{1}{2} = 0,5 \ , \ \frac{2}{3} = 0,66\ldots \ , \ \frac{3}{5} = 0,6 \ , \ \frac{5}{8} = 0,625 \ , \ \frac{8}{13} = 0,615\ldots \ ,$$

$$\frac{13}{21} = 0,619\ldots \ , \ \frac{21}{34} = 0,617\ldots \ , \ \frac{34}{55} = 0,618\ldots \ .$$

Ist die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, und definiert man $x := \lim_k x_k$, so folgt

$$x = \frac{1}{1+x} \ ,$$

also

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803\ldots$$

Man nennt diese Zahl, *goldener Schnitt* .

Man zeigt, daß $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, also konvergent ist, indem man folgende Behauptungen beweist :

(a)

$$\frac{1}{2} \leqslant x_k \leqslant 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ .$$

(b) Für alle $k \geqslant l$ gilt

$$|x_k - x_l| \leqslant \sum_{j=l}^{k-1} |x_{j+1} - x_j| \quad \text{und} \quad |x_{j+1} - x_j| \leqslant \frac{4}{9} \cdot |x_j - x_{j-1}| \ .$$

(c) Daraus folgt

$$|x_{j+1} - x_j| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^j \ ,$$

also

$$|x_k - x_l| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^l \ .$$

Aufgabe 1 Zeigen Sie, daß die durch

$$x_0 := 0 \quad , \quad x_1 := 1 \quad \text{und} \quad x_{k+2} := \frac{1}{2} \cdot (x_{k+1} + x_k) \ \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist, in dem Sie x_k als Teleskopsumme schreiben.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x_k := \sum_{l=k+1}^{2k} \frac{1}{l}$$

konvergent ist.

Hinweis : Berechnen Sie $x_{k+1} - x_k$.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, daß die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x_k := \sum_{l=1}^{2k} (-1)^l \cdot \frac{l}{l+1}$$

konvergent ist.

Hinweis : Berechnen Sie $x_{k+1} - x_k$.