Kapitel 15

SATZ VON LEBESGUE, MEßBARKEIT UND L^p-RÄUME

Im folgenden sei μ stets ein Radon-Integral auf X .

Fassung vom 16. Dezember 2002

15.1 Nullmengen

DEFINITION Für alle Teilmengen A von X nennen wir

$$\mu^*(A) := \int^* 1_A \, d\mu$$

das *äußere Maß* von A bzgl. μ .

Eine Menge A heißt *μ-integrierbar* , falls $1_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist. Man nennt dann

$$\mu(A) := \int 1_A \, d\mu$$

das *Maß* von A bzgl. μ . Mit $\mathfrak{J}(\mu)$ bezeichnen wir die Menge aller μ-integrierbaren Mengen.

Eine Menge N heißt *μ-Nullmenge* , falls

$$N \in \mathfrak{J}(\mu) \text{ und } \mu(N) = 0$$

ist. Die Menge aller μ-Nullmengen wird mit $\mathfrak{N}(\mu)$ bezeichnet.

Für jede Teilmenge A von X setzt man

$$\infty_A := \infty \cdot 1_A \ .$$

HAUPTSATZ *Seien $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ und $N \subset X$.*

(i) *Ist $\int^* f \, d\mu = 0$, so gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\int f \, d\mu = 0$.*

(ii) *Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent :*

- *(a)* $\int^* f \, d\mu = 0$.
- *(b)* $\int^* \infty_{\{f>0\}} \, d\mu < \infty$.
- *(c)* $\{f > 0\}$ *ist eine μ-Nullmenge.*

In diesem Fall ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und es gilt $\int f \; d\mu = 0$.

(iii) *Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent :*

- *(a)* *N ist eine μ-Nullmenge.*
- *(b)* $\mu^*(N) = 0$.
- *(c)* $\int^* \infty_N \, d\mu < \infty$.

In diesem Fall ist $\infty_N \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\int \infty_N \, d\mu = 0$.

KOROLLAR

(i) *Sei* (N_k) *eine Folge von* μ*-Nullmengen. Ist* $N \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ *, so ist* N *eine* μ*-Nullmenge.*

(ii) *Sei* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *mit* $\int^* f \, d\mu < \infty$ *. Dann ist* $\{f = \infty\}$ *eine* μ*-Nullmenge.*
Insbesondere ist $\{f \notin \mathbb{R}\}$ *eine* μ*-Nullmenge, falls* $\int_* f \, d\mu > -\infty$ *und* $\int^* f \, d\mu < \infty$ *sind.*

BEISPIEL 1 Jede kompakte Menge K und jede offene Menge G mit $\mu^*(G) < \infty$ sind μ-integrierbar.

BEISPIEL 2 Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$. Für alle $x \in J$ ist die Menge $\{x\}$ eine λ_J-Nullmenge. Insbesondere ist $\mathbb{Q} \cap J$ eine λ_J-Nullmenge.

BEISPIEL 3 Sei $x \in X$. Jede Menge $A \subset X$ ist ε_x-integrierbar mit

$$\varepsilon_x(A) = \begin{cases} 1 & \\ & \text{falls} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} x \in A \\ \\ x \notin A \end{matrix} .$$

Insbesondere sind

$$\varepsilon_x(\{x\}) = 1 \quad , \quad \varepsilon_x(\{y\}) = 0 \quad \text{, wenn } y \neq x \ ,$$

und

$$\varepsilon_x(X \setminus \{x\}) = 0 \ .$$

15.2 Fast überall

DEFINITION Sei P eine Aussage, die von $x \in X$ abhängt. Man sagt "P ist *μ-fast überall* ($\mu - f.ü.$) wahr", falls die Menge der $x \in X$, für die $P(x)$ falsch ist, eine μ-Nullmenge ist.

SATZ *Die Relation $f = g\ \mu - f.ü.$ definiert eine Äquivalenzrelation auf $\overline{\mathbb{R}}^X \times \overline{\mathbb{R}}^X$.*

HAUPTSATZ *Seien $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.*

(i) Ist $f \leqslant g\ \mu - f.ü.$, so gilt $\int^* f\ d\mu \leqslant \int^* g\ d\mu$ und $\int_* f\ d\mu \leqslant \int_* g\ d\mu$.

(ii) Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $g = f\ \mu - f.ü.$, so ist $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\int g\ d\mu = \int f\ d\mu$.

(iii) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f \leqslant g\ \ \mu - f.ü.$. Ist $\int f\ d\mu = \int g\ d\mu$, so ist $f = g\ \mu - f.ü.$.

(iv) Für jedes $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt

$$f_{\mathbb{R}} := 1_{\{f \in \mathbb{R}\}} \cdot f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \quad , \quad f_{\mathbb{R}} = f\ \mu - f.ü. \quad \textit{und} \quad \int f_{\mathbb{R}}\, d\mu = \int f\ d\mu\ .$$

BEMERKUNG (iv) zeigt, wie man eine integrierbare Funktion durch eine endliche integrierbare Funktion ersetzen kann. Dies erlaubt insbesondere die Betrachtung von Differenzen.

15.3 Satz von Lebesgue

LEMMA (von Fatou) *Sei $(f_k) \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ eine Folge von Funktionen, die eine μ-integrierbare Minorante besitzt. Dann gilt*

$$\int^* \liminf_k f_k \, d\mu \leqslant \liminf_k \int^* f_k \, d\mu \ .$$

BEMERKUNG Besitzt (f_k) eine μ-integrierbare Majorante, so ist

$$\int_* \limsup_k f_k \, d\mu \geqslant \limsup_k \int_* f_k \, d\mu \ .$$

HAUPTSATZ (der dominierten Konvergenz von Lebesgue) *Sei (f_k) eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mu)$ oder in $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, die punktweise μ-f.ü. gegen eine Funktion f konvergiert. Gibt es eine μ-integrierbare Funktion g , so daß für alle k*

$$|f_k| \leqslant g \quad \mu\text{-f.ü.}$$

gilt, so ist f μ-integrierbar mit

$$\int f \ d\mu = \lim_k \int f_k \, d\mu \ .$$

BEISPIEL Sind $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $A \subset X$ μ-integrierbar, dann ist $1_A \cdot f$ auch μ-integrierbar.

15.4 Absolut konvergente Integrale

SATZ *Seien J ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und f eine stetige Funktion auf J . Genau dann ist f λ_J-integrierbar, wenn das Integral $\int_{\inf J}^{\sup J} |f|$ konvergent ist. In diesem Fall ist das Integral $\int_{\inf J}^{\sup J} f$ konvergent, und es gilt*

$$\int f \, d\lambda_J = \int_{\inf J}^{\sup J} f = \lim_{a \to \inf J+, b \to \sup J-} \int_a^b f \ .$$

BEMERKUNG Es gibt konvergente Integrale, z.B. $\int_0^\infty \frac{\sin \ x}{x} dx$, wo die betrachteten Funktionen nicht im Sinne von Lebesgue integrierbar sind !

15.5 Abhängigkeit von einem Parameter

HAUPTSATZ (Stetigkeit) *Seien X, Y metrische Räume, ν ein Radon-Integral auf Y , $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $\xi \in X$. Es existiere eine Umgebung U von ξ mit*

(i) $f(x, \cdot) : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist ν-integrierbar für alle $x \in U$.*

(ii) $f(\cdot, y) : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist stetig in ξ für ν-fast alle $y \in Y$.*

(iii) Es gibt eine ν-integrierbare Funktion $g : Y \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$, so daß für alle $x \in U$ gilt

$$|f(x, \cdot)| \leqslant g \quad \nu\text{-fast überall.}$$

Dann ist die Funktion

$$\int f(\cdot, y)\, d\nu(y) : x \longmapsto \int f(x, \cdot)\, d\nu : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

in ξ stetig.

HAUPTSATZ (Differenzierbarkeit) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, Y ein metrischer Raum, ν ein Radon-Integral auf Y , $f : J \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\tau \in J$. Es existiere eine Umgebung U von τ mit*

(i) $f(t, \cdot) : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist ν-integrierbar für alle $t \in U$.*

(ii) $f(\cdot, y) : J \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist differenzierbar mit Ableitung $\partial_1 f(\cdot, y)$ für ν-fast alle $y \in Y$.*

(iii) Es gibt eine ν-integrierbare Funktion $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, so daß

$$\sup_{t \in U} |\partial_1 f(t, \cdot)| \leqslant g \quad \nu\text{-fast überall.}$$

Dann ist $\partial_1 f(t, \cdot)$ ν-integrierbar für alle $t \in U$, und die Funktion

$$\int f(\cdot, y)\, d\nu(y) : t \longmapsto \int f(t, \cdot)\, d\nu : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist in τ differenzierbar mit Ableitung

$$\partial \left(\int f(\cdot, y)\, d\nu(y) \right)(\tau) = \int \partial_1 f(\tau, \cdot)\, d\nu \ .$$

BEISPIEL 1 Die Gammafunktion ist auf $]0, \infty[$ differenzierbar mit

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \ln t \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \ .$$

Allgemeiner gilt

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^k \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \ .$$

BEISPIEL 2 Für alle $a, b > 0$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \ln \frac{b}{a} \ .$$

BEISPIEL 3 Sei $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Genau dann existiert eine stetige differenzierbare *Potentialfunktion* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zu v , d.h. $v = \operatorname{grad} f$, wenn gilt

$$\partial_j v_k = \partial_k v_j \quad \text{für alle } j, k = 1, \ldots, n \ .$$

In diesem Fall kann man

$$f(x) := \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 v_j(t \cdot x)\, dt \right) \cdot x_j$$

wählen.

Falls v auf einer nicht einfach zusammenhängenden Menge definiert ist, ist dieses Resultat falsch. Zum Beispiel erfüllt das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{|x|^2} \\ \frac{x_1}{|x|^2} \end{pmatrix}$$

die Bedingung, aber es gibt keine Potentialfunktion auf $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ zu v , da die Arbeit von v längs des Einheitskreises nicht verschwindet.

15.6 Approximationssatz

HAUPTSATZ *Für jede Funktion* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *existiert eine fallende Folge* $(s_k) \subset \mathcal{SK}(X)$ *mit*

$$\mu(s_k) < \infty \quad , \quad f \leqslant \inf_k s_k \quad \textit{und} \quad f = \inf_k s_k \ \mu\text{-}\textit{f.ü.} \ .$$

Insbesondere ist $\inf_k s_k \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und*

$$\int f \, d\mu = \int \inf_k s_k \, d\mu = \inf_k \int s_k \, d\mu \ .$$

KOROLLAR *Sei* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. *Dann ist* $\min(f, s) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *für alle* $s \in \mathcal{SK}_+(X)$.

Aufgabe Zeigen Sie, daß eine beschränkte Funktion auf $[a, b]$ genau dann Riemann integrierbar ist, wenn sie in $\lambda_{[a,b]}$-fast allen Punkten stetig ist.

15.7 Integrierbare Teilmengen

HAUPTSATZ *Seien $A, B \in \mathfrak{I}(\mu)$ und (A_k) eine Folge in $\mathfrak{I}(\mu)$.*

(i) Es gilt

$$\emptyset \ , \ A \cup B \ , \ A \cap B \ , \ A \smallsetminus B \in \mathfrak{I}(\mu)$$

und

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad , \quad \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \ .$$

(ii) Ist (A_k) wachsend bzw. disjunkt, so ist genau dann $\bigcup A_k \in \mathfrak{I}(\mu)$, wenn

$$\sup_k \mu(A_k) < \infty \quad bzw. \quad \sum \mu(A_k) < \infty$$

ist. In diesem Fall gilt

$$\mu\left(\bigcup A_k\right) = \sup_k \mu(A_k) \quad bzw. \quad \mu\left(\bigcup A_k\right) = \sum \mu(A_k) \ .$$

(iii) Es gilt $\bigcap A_k \in \mathfrak{I}(\mu)$ und ist (A_k) fallend, so folgt

$$\mu\left(\bigcap A_k\right) = \inf_k \mu(A_k) \ .$$

(iv) Eine Teilmenge $C \subset X$ ist genau dann μ-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene μ-integrierbare Menge G und eine kompakte Menge K existieren mit

$$K \subset C \subset G \quad und \quad \mu(G \smallsetminus K) \leqslant \varepsilon \ .$$

In diesem Fall existiert eine wachsende oder eine disjunkte Folge (K_l) von kompakten Teilmengen von C mit

$$\mu\left(C \smallsetminus \bigcup K_l\right) = 0 \ .$$

BEMERKUNG Sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von Teilmengen, die die gleichen Eigenschaften wie $\mathfrak{I}(\mu)$ besitzt. Eine Funktion $m : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, heißt *Maß*, falls sie die gleichen Eigenschaften wie μ erfüllt.

SATZ *Für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ sind die Mengen $\{f > \gamma\}$ und $\{f \geqslant \gamma\}$ μ-integrierbar.*

15.8 Der Begriff σ-Algebra

DEFINITION Eine Menge $\mathfrak{A}$ von Teilmengen von X heißt *σ-Algebra* , falls $\emptyset \in \mathfrak{A}$ und für alle $A \in \mathfrak{A}$ sowie für jede Folge (A_k) in $\mathfrak{A}$ gilt

$$\complement A \ , \ \bigcup A_k \in \mathfrak{A} \ .$$

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt $\mathfrak{A}$-*meßbar*, falls $A \in \mathfrak{A}$. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt $\mathfrak{A}$-*meßbar* , falls

$$\{f > \gamma\} \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle } \gamma \in \mathbb{R}$$

gilt. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt $\mathfrak{A}$-meßbar, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ $\mathfrak{A}$-meßbar sind. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{M}(\mathfrak{A}) \quad , \quad \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}) \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$$

die Mengen der Funktionen, die $\mathfrak{A}$-meßbar und deren Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind.

SATZ *Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra. Es gilt $X \in \mathfrak{A}$ und*

$$\bigcap A_k \ , \ A \setminus B \in \mathfrak{A}$$

für jede Folge (A_k) in $\mathfrak{A}$ und alle $A, B \in \mathfrak{A}$.

HAUPTSATZ *Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra.*

(i) *Es gilt genau dann $A \in \mathfrak{A}$, wenn $1_A \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ ist .*

(ii) *Ist $f, g \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, so sind*

$$\{f \geqslant \gamma\} \quad , \quad \{f \leqslant \gamma\} \quad , \quad \{f < \gamma\} \quad , \quad \{f < g\} \quad , \quad \{f \leqslant g\}$$

$$\{f = g\} \quad , \quad \{f \neq g\} \quad , \quad \{f = \infty\} \quad \textit{und} \quad \{f = -\infty\}$$

$\mathfrak{A}$-meßbar.

(iii) *Es gilt $1 \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$. Sind $f, g \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}_+^*$, so sind*

$$\alpha \cdot f \quad , \quad f +^{\bullet} g \quad , \quad f +_{\bullet} g \quad , \quad \min(f, g) \quad , \quad \max(f, g) \quad , f^{\pm} \quad , \quad f_-$$

$$|f|^p \quad , \quad \frac{1}{f} \quad , \quad f \cdot g$$

$\mathfrak{A}$-meßbar.

(iv) *Für jede Folge $(f_k) \subset \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ gilt*

$$\sup_k f_k \quad , \quad \inf_k f_k \quad , \quad \liminf_k f_k \quad , \quad \limsup_k f_k \in \mathcal{M}(\mathfrak{A}) \ .$$

Existiert $\lim_k f_k$ *, dann ist* $\lim_k f_k \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ *.*

Aufgabe Zeigen Sie : Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\mathfrak{A}$-meßbar, wenn $f^{\pm}$ $\mathfrak{A}$-meßbar sind.

Aufgabe Ist $(f_k) \subset \mathcal{M}(\mathfrak{A})$, dann ist die Funktion f , definiert durch $f(x) := \lim_k f_k(x)$, falls dieser Limes in $\mathbb{R}$ existiert, und durch 0 sonst, $\mathfrak{A}$-meßbar.

KOROLLAR *$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$ ist eine involutive Verbandsalgebra, d.h. für alle $f, g \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\alpha \cdot f \ , \ f+g \ , \ f \cdot g \ , \ |f| \ , \ \overline{f} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A}) \ .$$

Ist $f \neq 0$ überall, dann ist $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$, und für jede Folge $(f_k) \subset \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$, die punktweise konvergent ist, gilt $\lim_k f_k \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$.

15.9 Meßbare Mengen

DEFINITION 1 Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}(\mu)$ die Menge aller *μ-meßbaren Mengen* ; das sind die Teilmengen M von X , für die

$$M \cap A \in \mathfrak{I}(\mu) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{I}(\mu)$$

gilt.

BEMERKUNG Eine μ-meßbare Menge, die in einer μ-integrierbaren Menge enthalten ist, ist μ-integrierbar.

SATZ *Die Menge $\mathfrak{M}(\mu)$ der μ-meßbaren Mengen ist eine σ-Algebra, die $\mathfrak{I}(\mu)$ sowie alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X enthält.*

DEFINITION 2 Die $\mathfrak{M}(\mu)$-meßbaren Funktionen werden *μ-meßbar* genannt, und die Menge aller dieser Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ wird mit

$$\mathcal{M}(\mu) \quad , \quad \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mu) \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mu) \ .$$

bezeichnet.

Sei $\mathfrak{K}(X)$ die Menge aller kompakten Teilmengen von X . Man sagt, daß eine Funktion f *auf jedem Kompaktum μ-integrierbar* ist, wenn für alle $K \in \mathfrak{K}(X)$ gilt $1_K \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

HAUPTSATZ

(i) Eine Funktion f ist genau dann μ-meßbar, wenn $1_K \cdot f$ für alle kompakten Teilmengen K von X μ-meßbar ist. Insbesondere ist eine Menge M genau dann μ-meßbar, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ gilt $M \cap K \in \mathfrak{I}(\mu)$.

(ii) Seien $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$). Ist f μ-meßbar und ist $g = f$ $\mu - f.ü.$, so ist g auch μ-meßbar.

(iii) Eine μ-integrierbare Funktion ist μ-meßbar. Allgemeiner ist eine Funktion f , die auf jeder kompakten Teilmenge von X μ-integrierbar ist, auch μ-meßbar.

15.10 Integrierbarkeitskriterium

HAUPTSATZ *Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) ist genau dann μ-integrierbar, wenn f μ-meßbar ist und*

$$\int^* |f|\, d\mu < \infty \quad \textit{oder} \quad -\infty < \int_* f\, d\mu \leqslant \int^* f\, d\mu < \infty$$

gilt.

Für $f \geqslant 0$ beachte man die Formel $f = \sup_k f_k$ mit

$$f_k := \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{l=1}^{k \cdot 2^k} 1_{\left\{f > \frac{l}{2^k}\right\}} \ .$$

BEISPIEL 1 Das Integrierbarkeitskriterium liefert einen einfachen Beweis dafür, daß $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ ein Vektorverband ist (vgl. Hauptsatz 14.13.iii).

BEISPIEL 2 Sind $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) und $M \subset X$ μ-meßbar, so ist $1_M \cdot f$ genau dann μ-integrierbar, wenn gilt

$$\int^* 1_M \cdot |f|\, d\mu < \infty \ .$$

15.11 Meßbarkeit im Sinne von Lusin

DEFINITION Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt *μ-meßbar im Sinne von Lusin* , wenn für jede kompakte Teilmenge K von X und jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $L \subset K$ existiert, so daß

$$\mu\left(K \setminus L\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{und} \quad f_{|L} \text{ n.u.h. ist.}$$

SATZ *Eine im Sinne von Lusin μ-meßbare Funktion ist μ-meßbar.*

Insbesondere ist jede n.u.h. Funktion μ-meßbar. Allgemeiner gilt: Ist M eine μ-meßbare Menge, verschwindet $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ außerhalb von M und ist $f_{|M}$ n.u.h., dann ist f μ-meßbar.

Man kann die Umkehrung dieses Satzes beweisen (vgl. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, 41.4.):

HAUPTSATZ (von Lusin) *Genau dann ist eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) μ-meßbar, wenn sie im Sinne von Lusin μ-meßbar ist.*

BEMERKUNG Im Beweis sieht man, daß die Definition der Meßbarkeit im Sinne von Lusin verschärft werden kann, indem man “ $f_{|L}$ ist n.u.h.” durch “ $f_{|L}$ ist stetig” ersetzt.

15.12 Moderate Funktionen

DEFINITION Eine Funktion f heißt μ-*moderat* , falls eine (wachsende) Folge μ-integrierbare Mengen (A_k) existiert, so daß f außerhalb von $\bigcup A_k$ verschwindet. Eine Teilmenge A von X heißt μ-moderat wenn 1_A μ-moderat ist.

BEISPIEL 1 Eine μ-integrierbare Funktion ist μ-moderat.

BEISPIEL 2 Ist X Vereinigung einer Folge μ-integrierbarer Mengen, insbesondere existiert eine Folge (K_l) kompakter Teilmengen von X mit

$$\mu^*\left(X \smallsetminus \bigcup K_l\right) = 0 \ ,$$

so ist jede Funktion auf X μ-moderat.

Z.B. ist jede Funktion auf eine offen Menge X des $\mathbb{R}^n$ μ-moderat für jedes Radonintegral μ auf X .

SATZ *Sei f eine Funktion auf X .*

(i) Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent :

(a) f ist μ-moderat.
(b) Es gibt eine Folge (G_k) von offenen μ-integrierbaren Mengen, so daß f außerhalb von

$$\bigcup G_k$$

verschwindet.
(c) Es gibt eine Folge $(K_l) \subset \mathfrak{K}(X)$ und eine μ-Nullmenge N , so daß f außerhalb von

$$\left(\bigcup K_l\right) \cup N$$

verschwindet.

(ii) Ist f μ-moderat und $\geqslant 0$, so gilt

$$\int^* f \ d\mu = \sup\nolimits_{K \in \mathfrak{K}(X)} \int^* 1_K \cdot f \ d\mu \ .$$

(iii) Ist f μ-moderat, μ-meßbar und $\int_* f \, d\mu > -\infty$, so gilt

$$\int_* f \ d\mu = \int^* f \, d\mu \ .$$

(iv) Ist A eine μ-meßbare und μ-moderate Teilmenge von X , so gilt

$$\mu^*(A) = \sup\nolimits_{K \in \mathfrak{K}(X), K \subset A} \mu(K) \ .$$

15.13 $\mathbf{L}^p$-Räume

DEFINITION Sei $p \in [1, \infty]$. Für jede Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$), setzt man

$$\|f\|_p := \left(\int^* |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \text{falls } p \in [1, \infty[$$

und

$$\|f\|_\infty := \inf \left\{ M \in \overline{\mathbb{R}}_+ \;\middle|\; |f| \leqslant M \;\; \mu - f.ü. \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \; .$$

Man bezeichnet mit $\mathcal{L}^p(\mu)$ bzw. $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ die Menge aller μ-meßbaren Funktionen f mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathbb{C}$, für die $\|f\|_p < \infty$ gilt. Man sagt, daß f *p-fach μ-integrierbar* bzw. *μ-beschränkt* ist.

BEMERKUNG Das Integrierbarkeitskriterium 15.10 zeigt, daß im Falle $p = 1$ diese Definition mit der aus 14.8. übereinstimmt. Wir erinnern daran, daß $\mathcal{C}^b(X)$ mit der Norm

$$f \longmapsto \|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

ein Banachraum ist. Achtung ! Das Symbol $\|\cdot\|_\infty$ hat zwei Bedeutungen. Man schreibt $\|\cdot\|_{\infty,\mu}$, wenn es notwendig ist.

SATZ *Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) . Dann gilt*

(i)

$$\|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \quad \textit{für alle } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C} \textit{).}$$

(ii)

$$\|f\|_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \;\; \mu - f.ü. \; .$$

(iii)

$$|f| \leqslant |g| \;\; \mu - f.ü. \quad \Longrightarrow \quad \|f\|_p \leqslant \|g\|_p \; .$$

(iv)

$$|f| \leqslant \|f\|_\infty \quad \mu - f.ü. \; .$$

(v) Ist $\|f\|_p < \infty$, dann ist f endlich $\mu - f.ü.$.

(vi) ***Hölder-Ungleichung*** *:*

$$\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q \; .$$

(vii) ***Minkowski-Ungleichung*** *:*

$$\|f +^\bullet g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \; .$$

(viii) ***Abzählbare Subadditivität*** *: Für jede Folge (f_k) von positiven Funktionen gilt*

$$\left\| \sum f_k \right\|_p \leqslant \sum \|f_k\|_p \; .$$

KOROLLAR *$\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ ist ein Vektorraum.*

15.14 Satz von Riesz-Fischer

DEFINITION 1 Bezeichnet $\mathcal{N}(\mu)$ die Menge aller Funktionen $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f = 0$ $\mu - f.ü.$, so gilt

$$f \in \mathcal{N}(\mu) \iff \|f\|_p = 0 \ .$$

Insbesondere ist $\mathcal{N}(\mu)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ mit

$$f - g \in \mathcal{N}(\mu) \iff f = g \ \mu - f.ü. \ .$$

DEFINITION 2 Man setzt

$$\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) := \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)/\mathcal{N}(\mu) \ .$$

Es ist ein Vektorraum bestehend aus den Äquivalenzklassen

$$[f] := \{ g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) \mid g = f \ \mu - f.ü. \} = f + \mathcal{N}(\mu)$$

für $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$. Nach Definition gilt

$$g \in [f] \iff [g] = [f] \ ,$$

$$\alpha \cdot [f] = [\alpha \cdot f] \quad \text{und} \quad [f] + [g] = [f + g] \ .$$

DEFINITION 3 Man sagt, daß f ein *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $[f]$ ist und definiert

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p \ .$$

Dies ist möglich, da $\|g\|_p = \|f\|_p$ für $g \in [f]$ gilt.

HAUPTSATZ $\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ *ist mit der p-Norm*

$$[f] \longmapsto \|[f]\|_p$$

ein Banachraum. Präziser: Ist $([f_k])$ *eine Cauchy-Folge in* $\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, *dann existiert eine Teilfolge* α *von* $\mathbb{N}$ *und eine Funktion* $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, *so daß* $\left(f_{\alpha(l)}\right)$ *gegen eine Funktion* $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ *punktweise* $\mu - f.ü.$ *konvergiert und* $\left|f_{\alpha(l)}\right| \leqslant g$ *für alle* l *ist. Es gilt dann*

$$[f] = \lim_k [f_k] \quad \textit{in } \mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) \ .$$

BEMERKUNG Wir werden die Klasse einer Funktion und die Funktion selbst nicht unterscheiden, wenn das nicht erforderlich ist.

15.15 Dichtheitssatz

HAUPTSATZ *Ist X lokal kompakt und ist $p \in [1, \infty[$, dann ist $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ dicht in $\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, d.h. für jedes $f \in \mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\varphi \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ mit*

$$\|f - \varphi\|_p \leqslant \varepsilon \ .$$

BEMERKUNG Dieser Satz ist für $p = \infty$ falsch.

DEFINITION Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{C}$. Wir nennen φ eine *Treppenfunktion*, falls ein Intervall $[a, b] \subset J$ existiert, so daß $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$ und $\operatorname{Re} \varphi_{|[a,b]}$, $\operatorname{Im} \varphi_{|[a,b]} \in \mathcal{T}([a, b])$ gilt (vgl. Definition 9.1). Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}(J)$ der Vektorraum dieser Funktionen.

KOROLLAR *Ist J ein Intervall in $\mathbb{R}$, dann ist $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}(J)$ dicht in $\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\lambda_J)$ für alle $p \in [1, \infty[$.*

15.16 Hilberträume

Für $f,g \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ ist $\overline{f} \cdot g \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, und die Abbildung

$$(f,g) \longmapsto (f|\, g) := \int \overline{f} \cdot g \; d\mu : \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu) \times \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu) \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist ein Skalarprodukt.

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung stimmt mit der Hölder-Ungleichung überein, da

$$|(f|\, g)| \leqslant \left\|\overline{f} \cdot g\right\|_1 \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

ist. Die Norm des Banachraums $\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ ist von diesem Skalarprodukt erzeugt :

$$\|f\|_2 = (f|\, f)^{\frac{1}{2}} \; .$$

DEFINITION Ein Banachraum, dessen Norm von einem Skalarprodukt erzeugt wird, heißt *Hilbertraum* .

BEISPIEL Die Räume $\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ sind Hilberträume. Im folgenden untersuchen wir den Hilbertraum

$$\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1]) := \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}\left(\lambda_{[0,1]}\right) \; .$$

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$e_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto e^{2\pi i k \cdot x} \; .$$

Es gilt $e_k \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ und

$$(e_k|\, e_l) = \delta_{k,l} \quad \text{für alle } k,l \in \mathbb{Z} \; .$$

Man sagt, daß das System $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *orthonormiert* ist.

Eine Funktion der Gestalt

$$P = \sum_{k\in K} c_k \cdot e_k \; ,$$

wobei K eine endliche Menge in $\mathbb{Z}$ ist, d.h.

$$P(x) = \sum_{k\in K} c_k \cdot e^{2\pi i k \cdot x} \quad \text{für } x \in [0,1] \; ,$$

heißt *trigonometrisches Polynom* .

PROBLEM Kann man jede Funktion $f \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ durch trigonometrische Polynome *im quadratischen Mittel* , d.h. bzgl. $\|\cdot\|_2$, approximieren ?

HAUPTSATZ *Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $(\epsilon_j)_{j\in J}$ ein orthonormiertes System in $\mathcal{H}$, d.h.*

$$(\epsilon_k|\, \epsilon_l) = \delta_{k,l} \quad \textit{für alle } k,l \in J \; .$$

Für jede endliche Menge $K \subset J$ bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_K$ den endlichdimensionalen Untervektorraum, der von $(\epsilon_k)_{k\in K}$ erzeugt wird. Für alle $\xi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\inf \left\{ \|\xi - P\|^2 \;\middle|\; P \in \mathcal{H}_K \right\} = \|\xi\|^2 - \sum_{k\in K} |(\epsilon_k|\,\xi)|^2 = \left\|\xi - \widehat{P}\right\|^2 \ ,$$

mit

$$\widehat{P} := \sum_{k\in K} (\epsilon_k|\,\xi) \cdot \epsilon_k \ ,$$

und $\widehat{P}$ ist das einzige $P \in \mathcal{H}_K$, wo das Minimum erreicht wird.

Daraus folgert man sofort das

KOROLLAR (Bessel-Ungleichung) *Für jedes $\xi \in \mathcal{H}$ gilt*

$$\sum_{j\in J} |(\epsilon_j|\,\xi)|^2 := \sup\nolimits_{K \ \mathit{endlich},\ \subset J} \sum_{k\in K} |(\epsilon_k|\,\xi)|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \ .$$

15.17 Fourier-Koeffizienten

DEFINITION Für jedes $f \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ heißt die komplexe Zahl

$$(e_k|\, f) := \int_0^1 e^{-2\pi i k\cdot x} \cdot f(x)\, dx$$

der k*-te Fourierkoeffizient* von f .

Allgemeiner sagt man, daß $(\epsilon_j|\xi)$ der j*-te Fourierkoeffizient* von ξ im orthonormierten System $(\epsilon_j)_{j\in J}$ ist.

BEISPIEL Sei $a \in [0,1]$. Es gilt

$$\left(e_0 \left| 1_{[0,a[}\right.\right) = a \ ,$$

und für alle $k \neq 0$

$$\left(e_k \left| 1_{[0,a[}\right.\right) = \frac{1}{2\pi i k} \cdot \left(1 - e^{-2\pi i k\cdot a}\right) \ .$$

Es gilt dann

$$\left\|1_{[0,a[}\right\|_2^2 = a = \sup_{K \text{ endlich, } \subset J} \sum_{k\in K} \left|\left(e_k \left| 1_{[0,a[}\right.\right)\right|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=-n}^{n} \left|\left(e_k \left| 1_{[0,a[}\right.\right)\right|^2 \ .$$

KOROLLAR *Die Algebra der trigonometrischen Polynome ist dicht in* $\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ *.*

15.18 Hilbertsche Basen

DEFINITION Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein orthonormiertes System $(\epsilon_j)_{j\in J}$ in $\mathcal{H}$ heißt *hilbertsche Basis* von $\mathcal{H}$, falls $(\epsilon_j)_{j\in J}$ in $\mathcal{H}$ *total* ist, d.h. wenn der Untervektorraum, der von allen ϵ_j erzeugt wird, in $\mathcal{H}$ dicht ist.

BEISPIEL 1 Das System $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist eine hilbertsche Basis von $\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$.

HAUPTSATZ *Sei $(\epsilon_j)_{j\in J}$ eine hilbertsche Basis von $\mathcal{H}$. Für jedes $\xi \in \mathcal{H}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Menge $K \subset J$, so daß für alle endliche Mengen $L \subset J$ mit $L \supset K$ gilt*

$$\left\| \xi - \sum_{l\in L} (\epsilon_l |\, \xi) \cdot \epsilon_l \right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

*Zusätzlich gilt die **Parseval-Gleichung***

$$\|\xi\|^2 = \sum_{j\in J} |(\epsilon_j |\, \xi)|^2 \ .$$

BEMERKUNG 1 Die Menge aller $j \in J$ mit $(\epsilon_j |\, \xi) \neq 0$ ist abzählbar.

Ist J unendlich und $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow J$ injektiv mit $\alpha(\mathbb{N}) \supset \{ j \in J \mid (\epsilon_j |\, \xi) \neq 0 \}$, so gilt

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \left(\epsilon_{\alpha(k)} \middle|\, \xi \right) \right| \cdot \epsilon_{\alpha(k)} \ .$$

BEMERKUNG 2 Man schreibt

$$\xi = \sum_{j\in J} (\epsilon_j |\, \xi) \cdot \epsilon_j$$

um klar zu zeigen, daß man umordnen kann ! Man sagt, daß diese Reihe *summierbar* ist.

BEISPIEL 2 Wir haben also gezeigt, daß für alle $f \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ gilt

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_k |\, f) \cdot e_k = \lim\nolimits_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} (e_k |\, f) \cdot e_k \quad \text{in } \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$$

und

$$\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(e_k |\, f)|^2 = \lim\nolimits_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} |(e_k |\, f)|^2 \ .$$

Die Rechnung im Beispiel 15.17 zeigt, daß

$$1_{[0,a[} = a + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1 - e^{-2\pi i k \cdot a}}{2\pi i k} \cdot e_k \quad \text{in } \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$$

ist. Insbesondere folgt

$$2 \cdot 1_{[0,\frac{1}{2}[} - 1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1 - e^{-\pi i k}}{\pi i k} \cdot e_k = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \sin(2\pi (2k+1) \,\mathrm{id}) \quad \text{in } \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1]) \ .$$

Die Parseval-Gleichung liefert dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

BEISPIEL 3 Mit Hilfe der Eulerschen Formel verifiziert man, daß das System der Funktionen

$$1 \ , \ \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi k \cdot) \ , \ \sqrt{2} \cdot \sin(2\pi k \cdot) \quad \text{für } k \geqslant 1$$

eine hilbertsche Basis von $\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ ist.

15.19 Lokal integrierbare und absolut stetige Funktionen

DEFINITION 1 Eine Funktion f auf X mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ oder $\mathbb{C}$ heißt *lokal μ-integrierbar* , wenn für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung V von x existiert, so daß die Funktion $1_V \cdot f$ μ-integrierbar ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^1_{loc}(\mu)$ bzw. $\mathcal{L}^1_{loc,\mathbb{C}}(\mu)$ die Menge aller dieser Funktionen. Ist μ moderat, d.h. ist X μ-moderat, so definieren wir

$$\mathbf{L}^1_{loc,\mathbb{C}}(\mu) := \mathcal{L}^1_{loc,\mathbb{C}}(\mu) / \mathcal{N}(\mu) \ .$$

SATZ *Eine μ-integrierbare Funktion ist lokal μ-integrierbar. Eine lokal μ-integrierbare Funktion ist auf jedem Kompaktum μ-integrierbar. Die Umkehrung ist richtig, falls X lokal kompakt ist.*

DEFINITION 2 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ setzt man $1_{a,b} := \left\{ \begin{array}{c} 1_{[a,b]} \\ -1_{[b,a]} \end{array} \right.$ si $\begin{array}{c} a \leqslant b \\ b < a \end{array}$.

LEMMA *Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$.*

(i) Für alle $a, b, c \in J$ gilt

$$1_{a,b} + 1_{b,c} = 1_{a,c} \ .$$

(ii) Eine Funktion f auf J ist genau dann lokal λ_J-integrierbar, wenn für jedes kompaktes Intervall $[a, b] \subset J$ die Funktion $1_{[a,b]} \cdot f$ λ_J-integrierbar ist.

In diesem Fall für $\tau \in J$ und $c \in \mathbb{C}$ betrachtet man die Funktion

$$F : J \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto c + \int_\tau^x f(t) \, dt = c + \int 1_{\tau,x} \cdot f \, d\lambda_J \ .$$

Dann gilt

(iii) F ist stetig.

(iv) Ist F wachsend, so folgt $f \geqslant 0$ $\lambda_J - f.ü.$. Ist insbesondere $F = 0$, so ist $f = 0$ $\lambda_J - f.ü.$, d.h. die Klasse von f ist durch F eindeutig bestimmt.

(v) Ist f in x stetig, so ist F in x differenzierbar und $F'(x) = f(x)$.

DEFINITION 3 Eine Funktion F obiger Gestalt heißt *(lokal) absolut stetig* . Die Menge dieser Funktionen wird mit $\mathcal{AC}(J)$ bezeichnet.

Wir nennen $f \in \mathbf{L}^1_{loc}(\lambda_J)$ die (verallgemeinerte) Ableitung von F ; sie wird mit ∂F bezeichnet.

Dies ist wohl definiert, da f bis auf Gleichheit λ_J-fast überall eindeutig bestimmt ist

BEMERKUNG 1 Allgemeiner hat Lebesgue gezeigt, daß jede lokal absolut stetige Funktion F λ_J-fast überall differenzierbar ist und daß diese Ableitung λ_J-fast überall gleich f ist, d.h.

F erfüllt die Formel des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung (vgl. Hewitt and Stromberg [10], theorem 18.3).

Da diese Resultate sehr tief liegen und praktisch wenig nutzen, zieht man heute lieber obige Definition vor. Die Produkt- (siehe Hauptsatz 16.4) und Kettenregel (Hauptsatz 16.10) sind entsprechend gültig. Dies zeigt, daß $\mathcal{AC}(J)$ die typischen Eigenschaften von $\mathcal{C}^{(1)}(J)$ besitzt und an dessen Stelle treten kann.

Diese Funktionen F wurden auch von Lebesgue als diejenigen erkannt, die auf jedem kompakten Intervall in J in seinem Sinn "absolut stetig" sind (vgl. Hewitt and Stromberg, definition 18.10 und theorem 18.17).

Es folgt noch ein praktisches Kriterium für die lokale absolute Stetigkeit.

HAUPTSATZ (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $F : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine lokal lipschitzstetige Funktion, die fast überall differenzierbar ist. Dann ist F', durch 0 definiert, wo F nicht differenzierbar ist, lokal λ_J-integrierbar, und es gilt*

$$F(y) = F(x) + \int_x^y F'(t)\, dt \quad \text{für alle } x, y \in J\ .$$

BEMERKUNG 2 Eine stetige Funktion F, stückweise differenzierbar mit beschränkter Ableitung, ist lokal Lipschitz-beschränkt, erfüllt also die Formel des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Das obige Resultat kann man auf Funktionen, die bis auf eine abzählbare Menge differenzierbar sind und eine lokal beschränkte Ableitung besitzen, verallgemeinern (vgl. Dieudonné [11], 8.5.2).

BEMERKUNG 3 Achtung, es gibt streng wachsende stetige Funktionen, die λ_J-fast überall differenzierbar mit Ableitung 0 sind (vgl. Hewitt and Stromberg, example 18.8). Diese Funktionen sind klar nicht lokal absolut stetig. Dies zeigt insbesondere, daß man im Hauptsatz die Voraussetzung "lokal lipschitzstetig" nicht entbehren kann.

BEMERKUNG 4 Man kann zeigen, daß eine lokal Lipschitz-beschränkte Funktion absolut stetig auf jedem kompakten Intervall im Sinne von Lebesgue ist, also insbesondere fast überall differenzierbar (vgl. Hewitt and Stromberg, exercise 18.34).

[10] E. Hewitt and K. Stromberg, Real and abstract Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[11] J. Dieudonné, Eléments d'Analyse, Tome I, Fondement de l'Analyse moderne, Gauthier-Villars, Paris, 1968.