Kapitel 11

VEKTORWERTIGE FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHER

In diesem Kapitel sind $m, n \in \mathbb{N}^*$ und X eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.
Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird,
versehen wir $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Norm
$|\cdot| := |\cdot|_2$

Fassung vom 17. Juli 2002

11.1 Parametrisierte Kurven

Eine Abbildung eines Intervalles von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{K}^n$ läßt sich besser geometrisch interpretieren, wenn man ihr Bild anstatt ihres Graphen betrachtet. Man kann auch eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ untersuchen, indem man sie als Bild einer solchen Abbildung schreibt.

DEFINITION 1 Eine Teilmenge C von $\mathbb{K}^n$ heißt *Kurve* , wenn ein Intervall J von $\mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ existieren mit $C = \gamma(J)$. Man sagt, daß γ eine *Parametrisierung* von C ist oder auch, daß γ eine *parametrisierte Kurve* in $\mathbb{K}^n$ ist.

LEMMA *Schreibt man*

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \quad \textit{für jedes } t \in J \ ,$$

so ist γ genau dann stetig, wenn jede Komponentenfunktion

$$\gamma_j : J \longrightarrow \mathbb{K} \quad \textit{für } j = 1, \ldots, n$$

stetig ist.

BEMERKUNG 1 Man interpretiert oft eine parametrisierte Kurve als die Bewegung eines Punktes in $\mathbb{K}^n$ im Laufe der Zeit (kinematischer Aspekt).

BEISPIEL 1 Der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Zentrum $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r \in \mathbb{R}_+$:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x-u|^2 + |y-v|^2 = r^2 \right\}$$

ist durch

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto (u + r \cdot \cos(2\pi \cdot t), v + r \cdot \sin(2\pi \cdot t))$$

parametrisiert.

Der Kreis in $\mathbb{C}$ mit Zentrum $w \in \mathbb{C}$ und Radius $r \in \mathbb{R}_+$:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - w| = r\}$$

ist durch

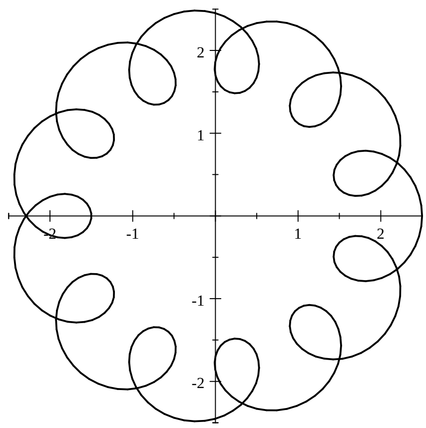
$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto w + r \cdot e^{2\pi i \cdot t}$$

parametrisiert.

Die Kurve, die der Mond um die Sonne in $(0, 0)$ durchläuft, könnte man durch

$$t \longmapsto R \cdot e^{2\pi i \cdot \Omega t} + r \cdot e^{2\pi i \cdot \omega t}$$

parametrisieren, wenn die Bewegungen vom Mond um die Erde und von der Erde um die Sonne eben und kreissförmig wären.



BEISPIEL 2 Die Gerade in $\mathbb{R}^n$ durch $u \in \mathbb{R}^n$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ läßt sich durch

$$t \longmapsto u + t \cdot v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

parametrisieren.

BEISPIEL 3 Ist $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine parametrisierte Kurve in $\mathbb{K}^n$, so ist

$$\delta : t \longmapsto (t, \gamma(t)) : J \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$$

eine parametrisierte Kurve in $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, und $\delta(J)$ ist der Graph von γ .

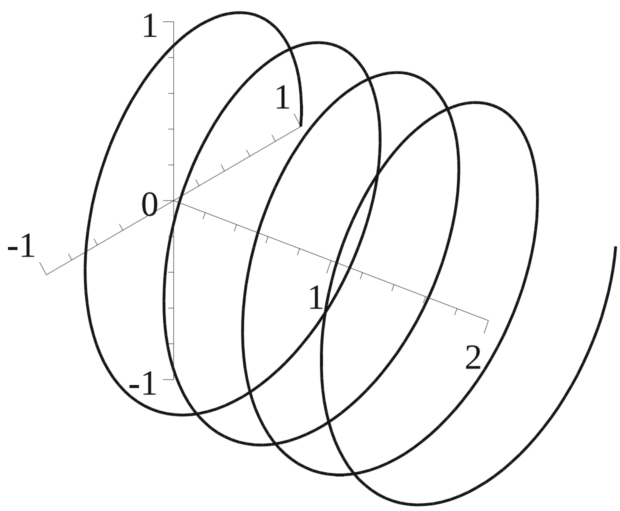
Z.B. ist

$$\gamma : t \longmapsto (\cos\ 4\pi \cdot t, \sin\ 4\pi \cdot t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine Parametrisierung des Kreises mit Zentrum 0 und Radius 1 und

$$\delta : t \longmapsto (t, \cos\ 4\pi \cdot t, \sin\ 4\pi \cdot t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$$

eine Parametrisierung einer Schraube um die erste Achse in $\mathbb{R}^3$.



BEMERKUNG 2 Ist $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine parametrisierte Kurve, so wird die Kurve $\gamma(J)$ oft durch

$$\gamma(J) = \{ z \in \mathbb{K}^n \mid F(z) = 0 \} = \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n \mid F(z_1, \ldots, z_n) = 0 \}$$

beschrieben, wobei $F : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ eine stetige Funktion ist. Man sagt, daß $F(z) = 0$ eine *Gleichung der Kurve* $\gamma(J)$ ist.

Z.B. hat der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Zentrum $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r \in \mathbb{R}_+$ die Gleichung

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 - r^2 = 0 \ .$$

Der Kreis in $\mathbb{C}$ mit Zentrum $w \in \mathbb{C}$ und Radius $r \in \mathbb{R}_+$ hat

$$|z - w| = r$$

als Gleichung.

DEFINITION 2 Die parametrisierte Kurve $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ heißt in $t \in J$ *differenzierbar* , wenn jede Komponente γ_j in t differenzierbar ist. In diesem Fall heißt der Vektor

$$\gamma'(t) := (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

die *Ableitung* von γ oder der *Tangentialvektor* zur Kurve γ in t . Man sagt, daß γ in J *stetig differenzierbar* ist, wenn γ in J differenzierbar und

$$\gamma' : J \longrightarrow \mathbb{K}^n : t \longmapsto \gamma'(t)$$

stetig ist, d.h. wenn jede Komponente γ_j in J stetig differenzierbar ist.

Ist γ in $t \in J$ differenzierbar, so ist

$$\gamma'(t) = \lim_{t \neq s \to t} \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} \ ,$$

d.h. $\gamma'(t)$ ist Limes von Sekantenvektoren.

In der kinematischen Interpretation der Kurve ist $\gamma'(t)$ der *Geschwindigkeitsvektor* zur Zeit t .

BEISPIEL 4 Eine parametrisierte Kurve braucht nicht injektiv zu sein. In einem Punkt des Raumes kann man zwei verschiedene Tangentialvektoren haben.

Sei

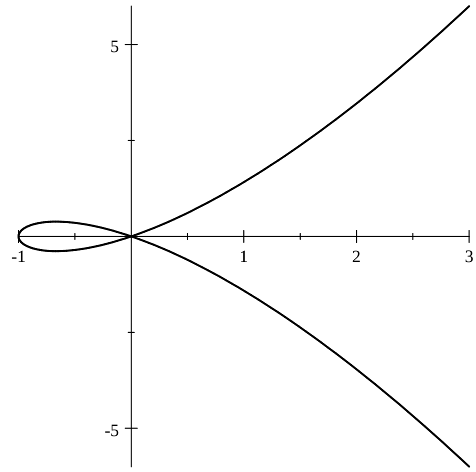
$$\gamma : t \longmapsto \left(t^2 - 1, t^3 - t\right) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ .$$

Es gilt

$$\gamma(\mathbb{R}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y^2 = x^2 + x^3 \right\} \ .$$

Insbesondere ist

$$\gamma(-1) = \gamma(1) = (0, 0) \quad , \quad \gamma'(-1) = (-2, 2) \quad \text{und} \quad \gamma'(1) = (2, 2) \ .$$



BEISPIEL 5 Neilsche Parabel Eine differenzierbare parametrisierte Kurve kann Spitzen haben. Sei

$$\gamma : t \longmapsto \left(t^2, t^3\right) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 .$$

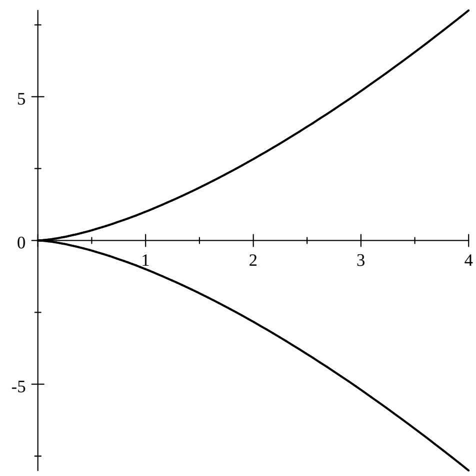
Es gilt

$$\gamma(\mathbb{R}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y^2 = x^3 \right\}$$

und $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma'(0) = (0,0)$. Eine andere Parametrisierung der Neilschen Parabel ist durch

$$t \longmapsto \begin{cases} \left((t+r)^2, (t+r)^3\right) & & t < -r \\ 0 & \text{falls} & t \in [-r, r] \\ \left((t-r)^2, (t-r)^3\right) & & r < t \end{cases}$$

gegeben.



11.2 Länge einer Kurve

DEFINITION 1 Ist $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige parametrisierte Kurve, so definiert man für alle $a, b \in J$ das (Riemann-) *Integral* von γ zwischen a und b durch

$$\int_a^b \gamma := \left(\int_a^b \gamma_j\right)_{j=1,\ldots,n} \in \mathbb{K}^n \ .$$

Ist γ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b \gamma' = \gamma(b) - \gamma(a) \ .$$

SATZ *Seien $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetig differenzierbare parametrisierte Kurve und $[a,b] \subset J$.*

(i) *Es gilt*

$$\left|\int_a^b \gamma\right| \leqslant \int_a^b |\gamma| \ .$$

(ii) ***Zweite Mittelwertungleichung*** *Für alle $t \in [a,b]$ gilt*

$$|\gamma(b) - \gamma(a) - (b-a) \cdot \gamma'(t)| \leqslant (b-a) \cdot \sup\nolimits_{s \in [a,b]} |\gamma'(s) - \gamma'(t)| \ .$$

Erinnern wir uns, daß der metrische Raum $(\mathbb{C}^n, |\cdot|)$ mit $(\mathbb{R}^{2n}, |\cdot|)$ durch

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = x$$

identifiziert werden kann. Für alle $z, w \in \mathbb{C}^n$, mit $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ identifiziert, gilt

$$|z-w|^2 = |x-y|^2 \ .$$

DEFINITION 2 Sei $[a,b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $(t_k)_{k=0,\ldots,m}$ eine Unterteilung dieses Intervalls. Man sagt, daß

$$\max\nolimits_{k=0,\ldots,m-1} |t_{k+1} - t_k|$$

die *Feinheit* dieser Unterteilung ist.

Seien $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine parametrisierte Kurve, $[a,b] \subset J$ und $L \in \mathbb{R}$. Man sagt, daß γ auf $[a,b]$ *rektifizierbar* ist und *Länge* L hat, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jede Unterteilung $(t_k)_{k=0,\ldots,m}$ von $[a,b]$ mit Feinheit $\leqslant \delta$ gilt

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| - L\right| \leqslant \varepsilon \ .$$

HAUPTSATZ *Sei $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetig differenzierbare parametrisierte Kurve. Dann ist γ auf $[a,b]$ rektifizierbar, und ihre Länge ist durch*

$$\int_a^b |\gamma'| = \int_a^b \left(|\gamma_1'(t)|^2 + \ldots + |\gamma_n'(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

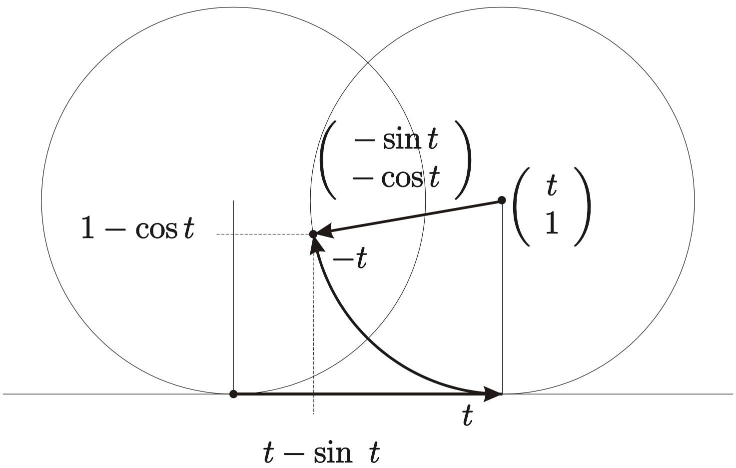
gegeben.

BEISPIEL 1 Sei $\gamma : [0, x] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto (\cos t, \sin t)$. Dies ist eine Parametrisierung eines Bogenstückes auf dem Einheitskreis mit Länge x .

BEISPIEL 2 **Zykloide** Diese Kurve in $\mathbb{R}^2$ wird durch

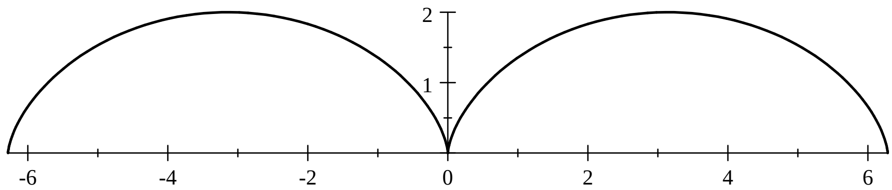
$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

parametrisiert.



Ihre Länge auf $[0, 2\pi]$ ist

$$\int_0^{2\pi} 2 \cdot \sin \frac{t}{2}\, dt = 8 \ .$$



Aufgabe 1 Seien $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine parametrisierte Kurve, $a, b \in J$ und $z \in \mathbb{K}^n$. Zeigen Sie, daß

$$\left(z \middle| \int_a^b \gamma(t)\ dt \right) = \int_a^b (z | \gamma(t))\ dt \ .$$

Aufgabe 2 Die parametrisierte Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto e^{ct} \cdot (\cos t, \sin t)$$

mit $c > 0$ heißt *logarithmische Spirale* .

(a) Skizzieren Sie die Kurve $\gamma\left([-2\pi, 2\pi]\right)$ für $c = \frac{1}{2\pi}$ und bestimmen Sie γ' im allgemeinen Fall.

(b) Für jedes Intervall $[a, b]$ zeigen Sie, daß $\gamma_{|[a,b]}$ rektifizierbar ist und berechnen Sie ihre Bogenlänge $L_{[a,b]}$.

(c) Existiert $\lim_{a\to-\infty} L_{[a,0]}$?

(d) Zeigen Sie, daß für jedes $r \in \mathbb{R}_+^*$ die Kurve $\gamma(\mathbb{R})$ den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ in genau einem Punkt schneidet. Berechnen Sie den Schnittwinkel.

Aufgabe 3 Für $n \in \mathbb{N}^*$ bezeichnen wir mit

$$\mathbb{S}^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |x|_2 = 1 \right\}$$

die sognannte *n-Sphäre* im $\mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{S}^n$ ist kompakt.

(b) Zu je zwei Punkten $x, y \in \mathbb{S}^n$ gibt es eine stetige parametrisierte Kurve

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$$

mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Hinweis : Projektion einer geeigneten Kurve von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ auf $\mathbb{S}^n$.

(c) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt einen Antipodenpunkt.[3]

(d) Ist $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{S}^n$ differenzierbar, so steht $\gamma'(t)$ für jedes $t \in J$ senkrecht auf $\gamma(t)$, und es ist

$$|\gamma''|_2 \geqslant |\gamma'|_2^2$$

überall wo γ zweimal differenzierbar ist.

Aufgabe 4 Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Zeigen Sie, daß die Länge der parametrisierten Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \left(2 \cdot t, t^2\right)$$

auf $[0, a]$ durch

$$a \cdot \sqrt{1 + a^2} + \operatorname{arcsinh} a$$

gegeben ist.

Aufgabe 5 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c, r \in \mathbb{R}_+^*$. Berechnen Sie die Länge der parametrisierten Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \longmapsto (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, c \cdot t)$$

auf $[a, b]$.

[3] Dies können wir z.B. folgendermaßen interpretieren: Wenn wir annehmen, daß die Temperatur an der Erdoberfläche stetig verteilt ist, so gibt es also zwei Orte auf gegenüberliegenden Seiten des Erdballs, an denen die gleiche Temperatur herrscht.

11.3 Partielle Ableitungen

Sei

$$f : X \longrightarrow \mathbb{K} : x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n) = f(x)$$

eine Funktion. Für $n = 2$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann man sie durch eine "topographische Karte" schön darstellen. Allgemeiner führt dies zur Betrachtung der Niveaumengen , die durch

$$H_f(h) := \{x \in X \mid f(x) = h\} \quad \text{für alle } h \in \mathbb{K}$$

definiert sind. Wir verfolgen diesen Aspekt hier nicht weiter.

Wir werden die Untersuchung einer solchen Funktion auf die Untersuchung von Funktionen einer Variable zurückführen, indem wir parametrisierte Kurven

$$\gamma : J \longrightarrow X \subset \mathbb{R}^n$$

betrachten und die Funktionen

$$f \circ \gamma : J \longrightarrow \mathbb{K}$$

studieren.

Sind z.B. $x \in X$ und $v \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so ist die parametrisierte Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \longmapsto x + t \cdot v$$

stetig differenzierbar, und $\gamma^{-1}(X)$ ist in $\mathbb{R}$ offen und enhält 0 . Es gibt also ein Intervall J in $\mathbb{R}$, das 0 enthält, so daß$\gamma(J) \subset X$. Insbesondere betrachtet man die parametrisierten Geraden, die durch x laufen und die zu den Achsen parallel sind :

$$t \longmapsto x + t \cdot e_j \ ,$$

wobei $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ die kanonische Basis in $\mathbb{R}^n$ ist.

DEFINITION 1 Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \in X$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Man sagt, daß f in x *bzgl. der j-ten Variable partiell differenzierbar* ist, wenn die Funktion

$$t \longmapsto f(x + t \cdot e_j)$$

in 0 differenzierbar ist. Die Zahl

$$\partial_j f(x) := \lim\nolimits_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot e_j) - f(x)}{t}$$

heißt die *j-te partielle Ableitung* von f in x .

Mit anderen Worten ist $\partial_j f(x)$ die Ableitung der Funktion

$$s \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

im Punkte x_j .

SCHOLIE *Die üblichen Ableitungsregeln sind auch für partielle Ableitungen gültig.*

DEFINITION 2 Die Funktion f heißt *partiell differenzierbar* in x falls f bzgl. jeder Variable partiell differenzierbar in x ist. Sie heißt *partiell differenzierbar* in X , falls sie in jedem Punkt von X partiell differenzierbar ist. Man sagt, daß f *stetig partiell differenzierbar* (auf X) ist, wenn zusätzlich jede partielle Ableitung

$$\partial_j f : X \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto \partial_j f(x) \quad \text{für } j \in \{1, \ldots, n\}$$

stetig ist.

BEMERKUNG 1 Achtung, die Bedingung " f ist stetig partiell differenzierbar" ist stärker als zu verlangen, daß die Funktionen

$$x_j \longmapsto f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$$

stetig differenzierbar sind. Man würde in dem Fall "partiell stetig differenzierbar" sagen !

Wir erinnern an die Notationen

$$\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto x$$

und

$$\mathrm{pr}_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x_j \quad \text{für } j \in \{1, \ldots, n\} \ .$$

BEISPIEL 1 Die Funktion

$$|\mathrm{id}| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x| = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ mit

$$\partial_j |\mathrm{id}| = \frac{\mathrm{pr}_j}{|\mathrm{id}|} \ .$$

Man schreibt auch

$$\partial_j |x| = \frac{x_j}{|x|} \ .$$

Die Niveaumengen sind

$$H_{|\cdot|}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\} =: \mathbb{S}^{n-1} \ .$$

BEISPIEL 2 Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}_+^*$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ eine (stetig) differenzierbare Funktion und

$$g(|\cdot|) : |\cdot|^{-1}(J) \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto g(|x|) \ .$$

Dann ist $g(|\cdot|)$ (stetig) partiell differenzierbar auf $|\cdot|^{-1}(J) \subset \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ mit

$$\partial_j g(|\mathrm{id}|) = g'(|\mathrm{id}|) \cdot \frac{\mathrm{pr}_j}{|\mathrm{id}|} \ .$$

Man beachte, daß $|\cdot|^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$.

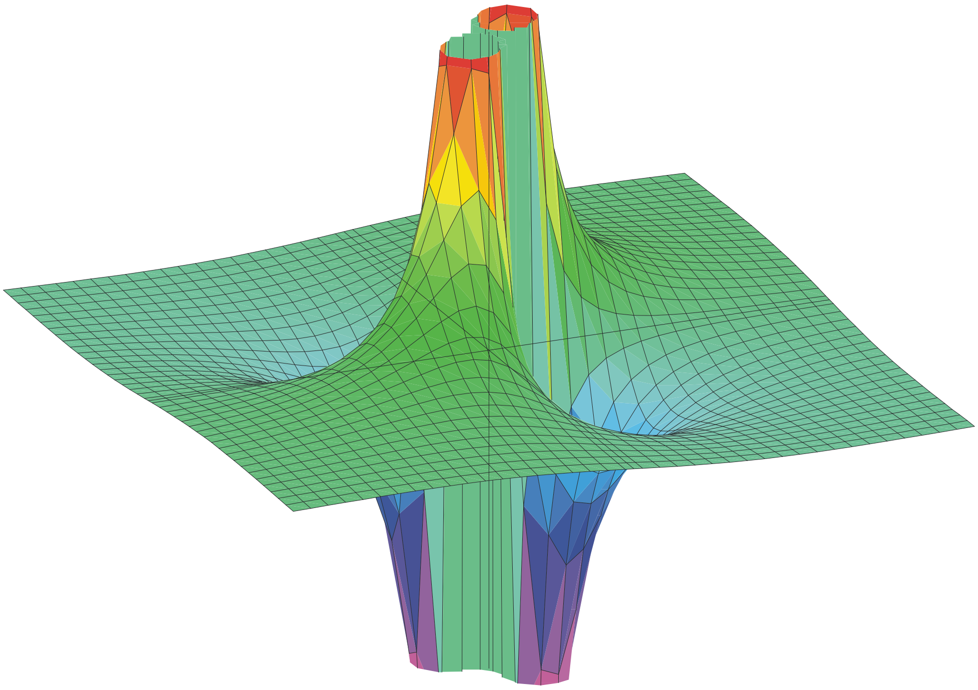
BEISPIEL 3 Seien $n \geqslant 2$ und

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{|x|^{2n}} & \\ & \text{falls} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} x \neq 0 \\ \\ x = 0 \end{matrix} \ .$$

Diese Funktion ist auf $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 f(x) = \frac{x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{|x|^{2n}} \cdot \left(1 - 2n \cdot \frac{x_1^2}{|x|^2}\right) .$$

Sie ist in 0 partiell differenzierbar, aber nicht stetig.



Man beachte noch, daß f "partiell stetig differenzierbar" (vgl. Bemerkung 1) in $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ ist, aber auch in 0 , da

$$\partial_j f(0, \ldots 0, x_j, 0, \ldots, 0) = 0 \quad \text{für alle } x_j \in \mathbb{R}$$

gilt.

BEMERKUNG 2 Dieses Beispiel zeigt, daß die partielle Differenzierbarkeit einer Funktion nicht die (globale) Stetigkeit dieser Funktion impliziert. Der Begriff der totalen Differenzierbarkeit in 16.6 wird diesen Mißstand beseitigen.

11.4 Gradient

BEMERKUNG Will man einen Punkt

$$v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$$

als Vektor betrachten, so ist es nützlich ihn als eine *Spaltenvektor* , d.h. als eine $n \times 1$ Matrix schreiben

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathsf{T}} \ .$$

Dagegen schreiben wir eine Linearform $\mu \in (\mathbb{K}^n)^* = L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \approx \mathbb{K}^n$ als $1 \times n$ Matrix, d.h. als *Kovektor* oder *Zeilenvektor*

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \ .$$

Es gilt

$$\mu(v) = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \cdot v_j \ .$$

DEFINITION Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ eine in $x \in X$ partiell differenzierbare Funktion. Der Vektor

$$\operatorname{grad} f(x) := (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))^{\mathsf{T}} \in \mathbb{K}^n$$

heißt *Gradient* von f in x .

BEISPIEL Mit den Notationen der Beispiele 1 und 2 aus 11.3, gilt

$$\operatorname{grad} |\mathrm{id}| = \frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|}$$

und

$$\operatorname{grad} g(|\mathrm{id}|) = g'(|\mathrm{id}|) \cdot \frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|} \ .$$

SATZ (Produktregel) *Sind $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ in $x \in X$ partiell differenzierbar, so ist auch $f \cdot g$ in x partiell differenzierbar, und es gilt*

$$\operatorname{grad}(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot \operatorname{grad} g(x) + g(x) \cdot \operatorname{grad} f(x) \ .$$

11.5 Divergenz

DEFINITION Eine Abbildung

$$f = (f_k)_{k=1,\ldots,m} : X \longrightarrow \mathbb{R}^m : x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))^\intercal$$

heißt in $x \in X$ *partiell differenzierbar* , falls jede Komponente f_k für $k \in \{1, \ldots, m\}$ in x partiell differenzierbar ist.

Man sagt, daß eine Abbildung $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein *Vektorfeld* auf X ist. Ist v in x partiell differenzierbar, so heißt der Skalar

$$\operatorname{div} v(x) := \sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j(x)$$

die *Divergenz* von v in x .

BEISPIEL 1 Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ auf X partiell differenzierbar, so ist

$$\operatorname{grad} f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto \operatorname{grad} f(x)$$

ein Vektorfeld auf X .

SATZ (Produktregel) *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $x \in X$. Sind f und v in x parrtiell differenzierbar, so ist*

$$f \cdot v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n : y \longmapsto f(y) \cdot v(y)$$

ein in x partiell differenzierbares Vektorfeld, und es gilt

$$\operatorname{div}(f \cdot v)(x) = (\operatorname{grad} f(x) | v(x)) + f(x) \cdot \operatorname{div} v(x) \quad .$$

BEISPIEL 2 Sei $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto x$ das identische Vektorfeld. Es gilt

$$\operatorname{div} \mathrm{id} = n \ .$$

BEISPIEL 3 Ist allgemeiner T eine lineare Abbildung in $\mathbb{R}^n$ und $(T_{k,l}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ ihre Matrix in der kanonischen Basis, so ist

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x = (x_l)_{l=1,\ldots,n} \longmapsto Tx = \left(\sum_{l=1}^{n} T_{k,l} \cdot x_l \right)_{k=1,\ldots,n}$$

und

$$\operatorname{div} T(x) = \operatorname{Tr} T := \sum_{j=1}^{n} T_{j,j}$$

eine konstante Funktion.

BEISPIEL 4 Sei $\frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|} : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto \frac{x}{|x|}$. Dann gilt

$$\operatorname{div} \frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|} = \frac{n-1}{|\mathrm{id}|} \ .$$

11.6 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

DEFINITION 1 Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Man sagt, daß f *zweimal partiell differenzierbar* in X ist, falls jede partielle Ableitung $\partial_j f$ in X partiell differenzierbar ist.

SATZ (von Schwarz) *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ eine zweimal in X partiell differenzierbare Funktion, $x \in X$ und $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Sind $\partial_k \partial_l f$ und $\partial_l \partial_k f$ in x stetig, dann gilt*

$$1\partial_k \partial_l f(x) = \partial_l \partial_k f(x) \ .$$

DEFINITION 2 Man definiert die partiellen Ableitungen höherer Ordnung durch Induktion. Eine solche partielle Ableitung ist von der Gestalt

$$\partial_{k_1}\left(\partial_{k_2}\left(\cdots \partial_{k_{m-1}}\left(\partial_{k_m} f\right)\right)\right)$$

für eine Folge $(k_j)_{j=1,\ldots,m} \subset \{1, \ldots, n\}$. Man sagt, daß m die *Ordnung* dieser Ableitung ist und, daß die Funktion f *m-mal partiell differenzierbar ist* , falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leqslant m$ definiert sind.

Sind **alle** partiellen Ableitungen der Ordnung $\leqslant m$ stetig (vgl. Bemerkung 11.3), so ist die Reihenfolge, in der man diese Ableitungen durchführt, egal.

In diesem Fall kann man jede partielle Ableitung folgendermaßen schreiben :

DEFINITION 3 Für alle $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, ein sogenannter *Multi-Index* , setzt man

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f \ ,$$

wobei $\partial_j^{\alpha_j} f$ die *partielle Ableitung* der Ordnung α_j bzgl. der j-ten Variable ist. Die natürliche Zahl

$$|\alpha|_1 := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

ist offensichtlich die Ordnung von ∂^α .

BEISPIEL Ist X eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^3$, und $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld in $x \in X$, so heißt der Vektor

$$\operatorname{rot} v(x) := \left(\partial_2 v_3(x) - \partial_3 v_2(x), \partial_3 v_1(x) - \partial_1 v_3(x), \partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x)\right)^{\intercal}$$

die *Rotation* von v in x .

Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \ .$$

Viele Felder v , die in der Physik auftreten, kann man als Gradient einer Funktion f , die *Potentialfunktion* , schreiben. Wenn v zweimal stetig partiell differenzierbar ist, ist eine notwendige Bedingung dafür, daß $\operatorname{rot} v = 0$. Diese Bedingung ist in manchen Fällen hinreichend, z.B. in $\mathbb{R}^3$, aber nicht in $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0)\} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 1 Sei

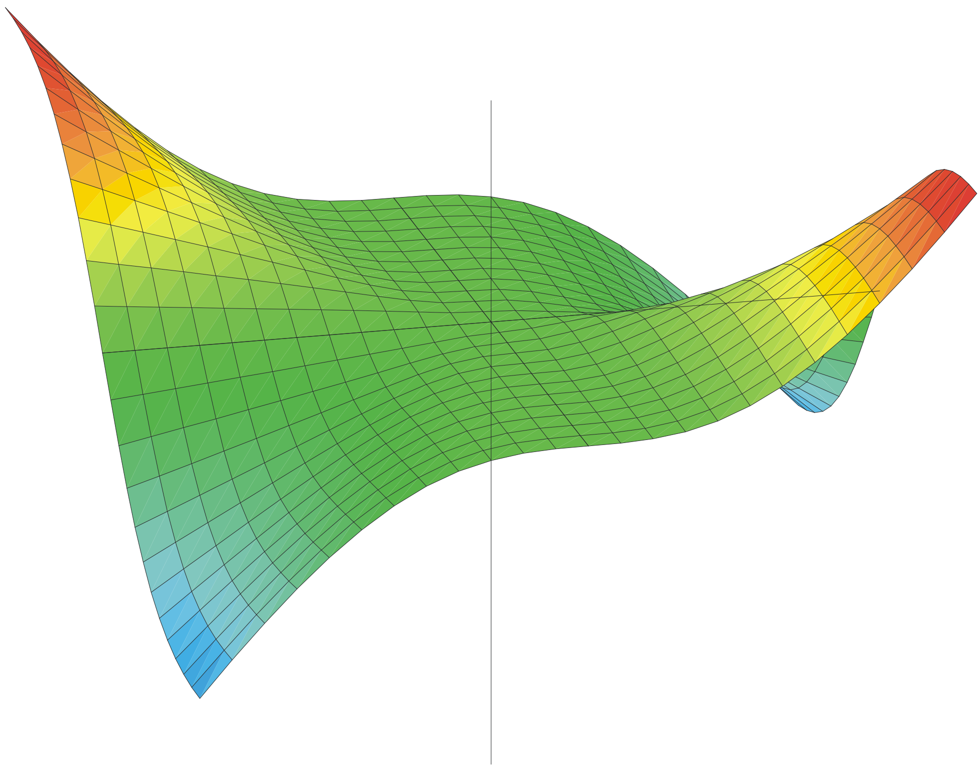
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

(a) f ist stetig partiell differenzierbar, zweimal partiell differenzierbar und es ist

$$\partial_1 \partial_2 f\,(0,0) \neq \partial_2 \partial_1 f\,(0,0) \ .$$

(b) Geben Sie eine zweite partielle Ableitung an, welche in $(0,0)$ unstetig ist.



$(x,y) \longmapsto \frac{xy^3}{x^2+y^2}$

Aufgabe 2 Man betrachte das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ 2 \cdot xy + z \\ 2 \cdot xz + y \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, daß $\operatorname{rot} v = 0$ und bestimmen Sie eine partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $v = \operatorname{grad} f$.

11.7 Laplace-Operator

DEFINITION Ist f in X zweimal partiell differenzierbar, so definiert man den *Laplaceschen Differentialausdruck* von f auf X durch

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f \ .$$

Man sagt, daß Δ der *Laplace-Operator* ist. Die partielle Differentialgleichung $\Delta f = 0$ heißt *Laplace-* oder *Potential-Gleichung* . Eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung nennt man *harmonisch* .

BEISPIEL 1 Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}_+^*$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und

$$g(|\cdot|) : |\cdot|^{-1}(J) \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Dann gilt

$$\Delta g(|\mathrm{id}|) = g''(|\mathrm{id}|) + \frac{n-1}{|\mathrm{id}|} \cdot g'(|\mathrm{id}|) \ .$$

Insbesondere ist

$$\Delta \frac{1}{|\mathrm{id}|^{n-2}} = 0 \ ,$$

d.h. $\frac{1}{|\mathrm{id}|^{n-2}}$ ist eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Die Funktion $\frac{1}{|\mathrm{id}|}$ ist also harmonisch auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Schließlich bemerke man, daß

$$\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathrm{id}|} = -\frac{1}{|\mathrm{id}|^2} \cdot \frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|}$$

ein attraktives Feld dessen Größe proportionnal zum Quadrat der Distanz zu 0 ist (*Attraktionsgesetz von Newton* oder *Coulomb*).

BEISPIEL 2 Sei X eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^{1+n}$. Man bezeichne mit $(t,x) = (t, x_1, \ldots, x_n)$ einen Punkt des $\mathbb{R}^{1+n}$, und mit Δ_x den Laplace-Operator bzgl. den Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

Die partiellen Differentialgleichungen

$$\partial_t^2 f = c^2 \cdot \Delta_x f \quad \text{und} \quad \partial_t f = k \cdot \Delta_x f$$

heißen *Wellen-* oder *Schwingungsgleichung* bzw. *Wärmeleitungsgleichung* .

Aufgabe 1 Es seien $c > 0$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v|_2 = 1$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (t,x) \longmapsto g((v|\, x) - ct)$$

eine Lösung der Wellengleichung

$$\partial_t^2 f = c^2 \cdot \Delta_x f$$

ist.

Aufgabe 2 Zeigen Sie: Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (t, x) \longmapsto t^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t f = \Delta_x f \ .$$

11.8 Norm einer linearen Abbildung

SATZ *Seien F, G normierte Räume und $T : F \longrightarrow G$ eine lineare Abbildung. Genau dann ist T stetig, wenn eine Konstante $M \in \mathbb{R}_+$ mit*

$$\|Tf\|_G \leqslant M \cdot \|f\|_F \quad \textit{für alle } f \in F \tag{$*$}$$

existiert.

BEMERKUNG 1 Die kleinste Konstante $M \in \overline{\mathbb{R}}_+$, die $(*)$ erfüllt, ist

$$\|T\| := \sup_{f \in F, \|f\|_F \leqslant 1} \|Tf\|_G \ .$$

Genau dann ist T stetig, wenn $\|T\| < \infty$.

DEFINITION Man sagt, daß $\|T\|$ die *Norm* der linearen Abbildung T ist.

BEMERKUNG 2 Die Funktion

$$T \longmapsto \|T\| : \mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

ist eine Norm auf dem Untervektorraum $\mathcal{L}(F, G)$ aller stetigen linearen Abbildungen von F in G , die sogenannte *Operatornorm* .

Ist G ein Banachraum, so auch $\mathcal{L}(F, G)$.

BEISPIEL 1 Die Linearform

$$\int_a^b : f \longmapsto \int_a^b f : (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{K}$$

ist stetig mit Norm $b - a$.

BEISPIEL 2 Man kann zeigen (Aufgabe), daß

$$\|f\|_{(1),\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

eine Norm auf $\mathcal{C}^{(1)}([a, b])$ definiert und daß $\left(\mathcal{C}^{(1)}([a, b]), \|\cdot\|_{(1),\infty}\right)$ ein Banachraum ist. Die lineare Abbildung

$$\partial : f \longmapsto f' : \left(\mathcal{C}^{(1)}([a, b]), \|\cdot\|_{(1),\infty}\right) \longrightarrow (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$$

ist stetig mit Norm 1 .

BEISPIEL 3 Dagegen ist

$$\partial : f \longmapsto f' : \left(\mathcal{C}^{(1)}([a, b]), \|\cdot\|_\infty\right) \longrightarrow (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$$

nicht stetig, da

$$\left\| \frac{1}{(b-a)^k} \cdot (\mathrm{id} - a)^k \right\|_\infty = 1$$

und

$$\left\| \partial \frac{1}{(b-a)^k} \cdot (\mathrm{id} - a)^k \right\|_\infty = \left\| \frac{k}{(b-a)^k} \cdot (\mathrm{id} - a)^{k-1} \right\|_\infty =$$

$$= k \to \infty \quad \text{für } k \to \infty \ .$$

BEMERKUNG 3 Sei

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung. Mit Hilfe der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$, kann man T durch seine $m \times n$ Matrix darstellen :

$$(T_{k,l})_{\substack{k=1,\ldots,m \\ l=1,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} T_{1,1} & \cdots & T_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n,1} & \cdots & T_{n,n} \end{pmatrix} .$$

KOROLLAR *Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig, d.h.*

$$|Tv| \leqslant \|T\| \cdot |v| \quad \textit{für alle } v \in \mathbb{R}^n \ .$$

Präziser ist $T = (T_{k,l})_{\substack{k=1,\ldots,m \\ l=1,\ldots,n}}$ und setzt man $|T|_\infty := \max_{\substack{k=1,\ldots,m \\ l=1,\ldots,n}} |T_{k,l}|$, so ist

$$|T|_\infty \leqslant \|T\| \leqslant n\sqrt{m} \cdot |T|_\infty \ .$$

BEMERKUNG 4 Die Stetigkeit von T kann man direkt beweisen, da jede Komponente

$$T_k = \sum_{l=1}^n T_{k,l} \cdot \mathrm{pr}_l : x \longmapsto (Tx)_k = \sum_{l=1}^n T_{k,l} \cdot x_l : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

für $k = 1, \ldots, m$ stetig ist.

Man beachte, daß auch

$$T : \left(\mathbb{R}^n, |\cdot|_p\right) \longrightarrow \left(\mathbb{R}^m, |\cdot|_q\right)$$

für alle $p, q \in [1, \infty]$ stetig ist.

BEMERKUNG 5 Es ist klar, daß $T \longmapsto |T|_\infty$ auch eine Norm ist, da der Vektorraum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ identifizierbar ist.

11.9 Totale Differenzierbarheit

DEFINITION 1 Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $x \in X$. Man sagt, daß f in x *(total) differenzierbar* ist, wenn eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ existiert, so daß die Abbildung $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$f(y) = f(x) + T(y-x) + \varphi(y)$$

erfüllt

$$\lim_{x \neq y \to x} \frac{\varphi(y)}{|y-x|} = 0 \ .$$

SATZ *Ist f in $x \in X$ differenzierbar, dann ist f in x stetig und partiell differenzierbar. Zusätzlich sind T und ihre Matrix $(T_{k,l})_{\substack{k=1,\ldots,m \\ l=1,\ldots,n}}$ eindeutig bestimmt und es gilt*

$$T_{k,l} = \partial_l f_k(x) \ .$$

KOROLLAR *Sei f in x partiell differenzierbar und*

$$f_k(y) = f_k(x) + \sum_{l=1}^{n} \partial_l f_k(x) \cdot (y_l - x_l) + \varphi_k(y) \quad \text{für alle } k \in \{1,\ldots,m\} \ .$$

Genau dann ist f in x differenzierbar, wenn

$$\lim_{x \neq y \to x} \frac{\varphi_k(y)}{|y-x|} = 0 \quad \text{für alle } k \in \{1,\ldots,m\} \ .$$

DEFINITION 2 Ist f in x differenzierbar, so heißt die einzige lineare Abbildung, die die Bedingung aus Definition 1 erfüllt, die *Ableitung* von f in x und wird mit $Df(x)$ bezeichnet. Die zugehörige Matrix

$$(\partial_l f_k(x))_{\substack{k=1,\ldots,m \\ l=1,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}$$

heißt *Jacobimatrix* von f in x .

Ist f in jeden Punkt $x \in X$ differenzierbar, so heißt die Abbildung

$$Df : x \longmapsto Df(x) : X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \approx \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \approx \mathbb{R}^{m \times n}$$

die *Ableitung* von f .

BEMERKUNG Die totale Differenzierbarkeit hebt die Pathologie auf, die wir mit der partiellen Differenzierbarkeit in Beispiel 11.3.3 gesehen haben. Diese Funktion ist in 0 partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar, da sie dort nicht stetig ist.

Aufgabe 1 Sei $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in 0 differenzierbare Funktion mit $g'(0) = 0$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$g(|\cdot|) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto g(|x|)$$

in 0 partiell differenzierbar ist. Ist sie in 0 (total) differenzierbar ?

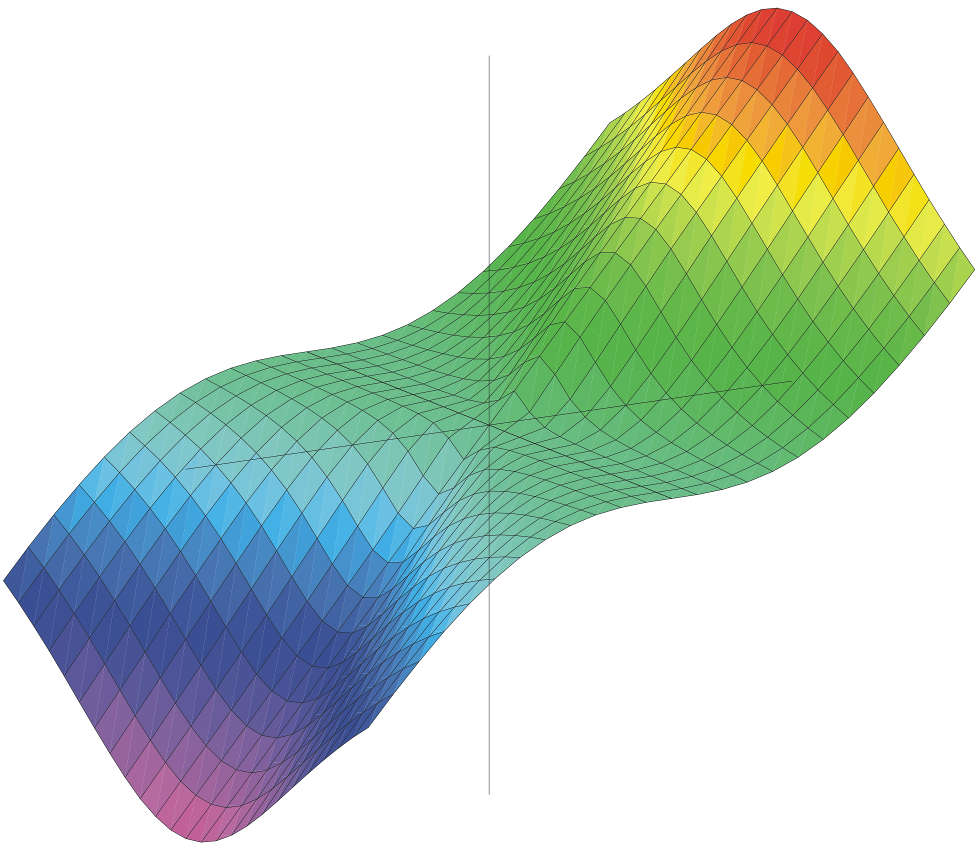
Aufgabe 2 Sei $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto x \cdot y \cdot g(x, y)$$

in $(0, 0)$ stetig und partiell differenzierbar ist. Ist sie (total) differenzierbar ?

Aufgabe 3 Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{falls} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$



$$(x, y) \longmapsto \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist stetig und in $(0, 0)$ partiell differenzierbar, aber nicht (total) differenzierbar.

(b) Ist $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve mit $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma'(0) \neq (0, 0)$, so ist $f \circ \gamma$ in 0 differenzierbar.

11.10 Stetig differenzierbare Abbildungen

DEFINITION Man sagt, daß $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *stetig differenzierbar* ist, wenn

$$Df : X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

stetig ist.

Ist f stetig differenzierbar, so sind insbesondere die partiellen Ableitungen stetig. Umgekehrt gilt

HAUPTSATZ *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine partiell differenzierbare Abbildung und $x \in X$. Sind alle partiellen Ableitungen $\partial_l f_k$ in x stetig, so ist f in x differenzierbar.*

KOROLLAR *Eine Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn f stetig partiell differenzierbar ist.*

BEMERKUNG Für eine Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gelten folgende Implikationen :

$$\begin{array}{ccc}
\text{stetig differenzierbar} & \Longleftrightarrow & \text{stetig partiell differenzierbar} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{differenzierbar} & \Longrightarrow & \text{partiell differenzierbar} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{stetig} & \Longrightarrow & \text{separat stetig}
\end{array}$$

11.11 Beispiele

BEISPIEL 1 Wir betrachten zuerst den Fall einer parametrisierten Kurve $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Genau dann ist γ total differenzierbar, wenn γ (im Sinne von Definition 11.1.2) differenzierbar ist. Dann gilt

$$D\gamma(t) = \gamma'(t) \quad \text{für alle } t \in J \ .$$

Man beachte, daß $D\gamma(t)$ eine einspaltige Matrix wie $\gamma'(t)$ ist (vgl. Bemerkung 11.4).

BEISPIEL 2 Wir betrachten jetzt den Fall einer Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Ist f (total) differenzierbar in $x \in X$, so ist die Ableitung $Df(x)$ eine einzeilige Matrix

$$Df(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)) \ .$$

Also gilt

$$\operatorname{grad} f(x) = Df(x)^{\intercal} \ .$$

Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$Df(x)\,v = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) \cdot v_j = (\operatorname{grad} f(x)|\, v) \ .$$

Für jedes $y \in X$ gilt dann

$$f(y) = f(x) + (\operatorname{grad} f(x)|\, y - x) + \varphi(y) = f(x) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) \cdot (y_j - x_j) + \varphi(y)$$

mit

$$\lim_{x \neq y \to x} \frac{\varphi(y)}{|y - x|} = 0 \ .$$

Der Graph der Funktion

$$y \longmapsto f(x) + (\operatorname{grad} f(x)|\, y - x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist eine Hyperebene, die zum Graphen von f in $(x, f(x))$ tangential ist, da wie in Bemerkung 8.1.3, diese Funktion die beste affine Approximation von f in der Nähe von x liefert.

Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sind die parametrisierten Kurven

$$t \longmapsto (x + t \cdot e_j, f(x + t \cdot e_j)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

in $\operatorname{Gr} f$ enthalten. Die tangentialen Vektoren

$$(e_j, \partial_j f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

in 0 sind in der tangentialen Hyperebene enthalten. Damit folgt :

SATZ *Genau dann ist die tangentiale Hyperebene horizontal, wenn*

$$\operatorname{grad} f(x) = 0 \ .$$

In heuristische Betrachtungen schreibt man gern

$$f(y) \simeq f(x) + (\operatorname{grad} f(x) | y - x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x) \cdot (y_j - x_j) \ ,$$

aber damit ist die ganze Information über den Fehler verloren.

BEISPIEL 3 Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Multi-Index. Die Funktion

$$x \longmapsto x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *Monom* . Eine Funktion der Gestalt

$$x \longmapsto \sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} c_\alpha \cdot x^\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *Polynom vom Grade k* falls ein α existiert mit

$$|\alpha|_1 = k \quad \text{und} \quad c_\alpha \neq 0 \ .$$

Wir erinnern, daß

$$|\alpha|_1 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \ .$$

Sei f ein Polynom vom Grade $\leqslant 2$ auf $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$f(x) = a + \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot x_j + \sum_{k,l=1}^{n} T_{k,l} \cdot x_k x_l = a + (b| x) + (x| Tx)$$

mit

$$b = (b_1, \ldots, b_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad T = (T_{k,l}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) \ .$$

Man kann annehmen, daß T symmetrisch ist, in dem man T durch $S := \frac{1}{2} \cdot (T + T^\intercal)$ ersetzt.

Diese Funktion f ist differenzierbar und es gilt

$$\operatorname{grad} f(x) = b + 2 \cdot Tx \ .$$

Aufgabe 1 Seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Berechnen Sie die Ableitung von

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto Tx + b \ .$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie die Ableitung von

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto (x| y) \ .$$

11.12 Kettenregel

HAUPTSATZ *Seien $p \in \mathbb{N}^*$, Y eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^p$ und $g : Y \longrightarrow X$ und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Ist g in $y \in Y$ differenzierbar und ist f in $g(y)$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in y differenzierbar und es gilt*

$$D(f \circ g)(y) = Df(g(y)) \circ Dg(y) \ .$$

$$\begin{array}{ccccc} Y & \overset{g}{\longrightarrow} & X & \overset{f}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^m \\ \cap & & \cap & & \\ \mathbb{R}^p & \underset{Dg(y)}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^n & \underset{Df(g(y))}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

BEISPIEL Wir betrachten den Fall einer Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Es ist $g \circ f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ und es gilt

$$D(f \circ g)(y) = (\partial_1 f(g(y)), \ldots, \partial_n f(g(y))) \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(y) & \cdots & \partial_p g_1(y) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_n(y) & \cdots & \partial_p g_n(y) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \partial_j f(g(y)) \cdot \partial_q g_j(y) \right)_{q=1,\ldots,p} ,$$

oder mit dem Beispiel 11.11.2

$$\operatorname{grad}(f \circ g)(y) = Dg(y)^\intercal \operatorname{grad} f(g(y)) \ ,$$

oder noch

$$\partial_q (f \circ g)(y) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(g(y)) \cdot \partial_q g_j(y) \ .$$

Man kann sich an diese Formel erinnern in dem man die ältere Schreibweise benutzt :

$$x_j = x_j(y_1, \ldots, y_p) \quad , \quad f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1(y_1, \ldots, y_p), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_p))$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y_q} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_q} \ .$$

Der wichtige Fall ist, wenn $p = n$ und $\Phi : Y \longrightarrow X$ eine Bijektion ist. Man sagt, daß $x = \Phi(y)$ eine *Variablenänderung* ist. Obige Formel zeigt, wie man die partiellen Ableitungen bzgl. der neuen Variablen rechnet, wenn man die partiellen Ableitungen bzgl. der alten Variablen kennt.

Aufgabe 1 Sei $b \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie die Ableitung von

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x - b|^2 \ .$$

Aufgabe 2 Seien $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbare Abbildungen. Berechnen Sie die Ableitung von

$$X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto (f(x)|\, g(x)) \ .$$

Aufgabe 3 Seien $p \in \mathbb{N}^*$, Y eine offene Menge in $\mathbb{R}^p$ und

$$\Phi : Y \longrightarrow X \quad , \quad f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Abbildungen.

(a) Zeigen Sie für alle $q \in \{1, \ldots, p\}$, daß gilt

$$\partial_q (f \circ \Phi) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f \circ \Phi \cdot \partial_q \Phi_j \ .$$

(b) Seien

$$\Phi :]0, \infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \varphi) \longmapsto (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$$

und

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, daß

$$(\Delta f) \circ \Phi = \partial_r^2 (f \circ \Phi) + \frac{1}{r} \cdot \partial_r (f \circ \Phi) + \frac{1}{r^2} \cdot \partial_\varphi^2 (f \circ \Phi)$$

gilt.

11.13 Richtungsableitungen

SATZ *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $x \in X$, $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare parametrisierte Kurve, die in X enthalten ist, und $t \in J$ mit $\gamma(t) = x$. Dann gilt*

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\operatorname{grad} f(x) | \gamma'(t)) \ .$$

DEFINITION Für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sagt man, daß

$$\partial_\xi f(x) := \lim_{0 \neq s \to 0} \frac{1}{s} \cdot [f(x + s \cdot \xi) - f(x)] = (\operatorname{grad} f(x) | \xi)$$

die *Ableitung in Richtung* ξ ist.

BEMERKUNG 1 Diesen Satz zeigt, daß die Variationsrate von f in der Nähe von x , entlang einer parametrisierten Kurve γ die durch x läuft, nur von dem Tangentialvektor in diesem Punkt abhängt, da

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\operatorname{grad} f(x) | \gamma'(t)) = \partial_{\gamma'(t)} f(x)$$

gilt.

BEMERKUNG 2 Ist $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$, so ist $(\operatorname{grad} f(x) | \xi)$ auf

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| = 1\}$$

genau dann maximal, wenn ξ zu $\operatorname{grad} f(x)$ parallel ist und gleiche Richtung hat. Dies zeigt, daß $\operatorname{grad} f(x)$ die Richtung der größte Steigung zeigt.

Aufgabe 1 Sei $\gamma : J \longrightarrow X$ eine differenzierbare parametrisierte Kurve mit konstanter Höhe, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(\gamma(t)) = c \quad \text{für alle } t \in J \ .$$

Zeigen Sie, daß

$$(\operatorname{grad} f(\gamma(t)) | \gamma'(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in J$$

gilt und geben Sie eine geometrische Interpretation diese Faktes.

Aufgabe 2 Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{y^5}{2 \cdot x^4 + y^4} & \text{falls} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \ .$$

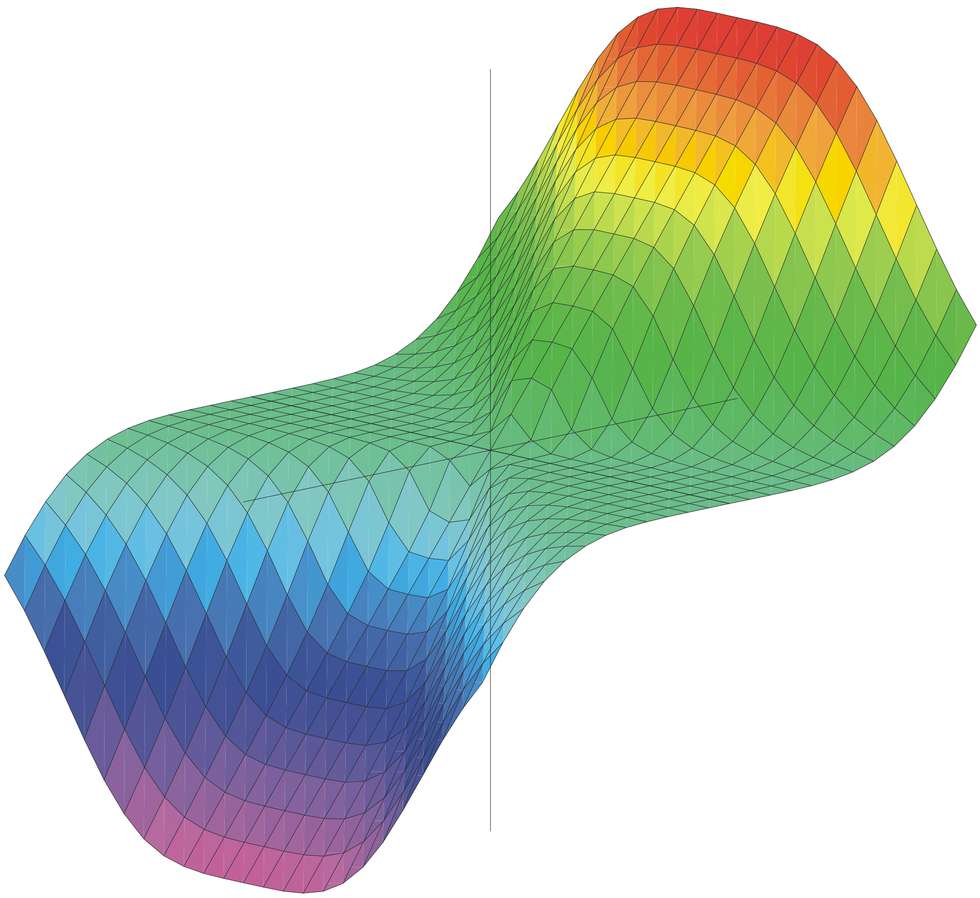
(a) Zeigen Sie, daß f stetig und partiell differenzierbar ist und, daß alle Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ exitieren, d.h. für alle differenzierbare parametrisierte Kurve $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $0 \in J$ und $\gamma(0) = (0,0)$, die Funktion $f \circ \gamma$ in 0 differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Kettenregel nicht auf f und die parametrisierte Kurve

$$\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto (t,t)$$

anwendbar ist, d.h. es gilt nicht

$$(f \circ \delta)'(0) = \sum_{j=1}^{2} \partial_j f(\delta(0)) \cdot \delta_j'(0) \ .$$



$(x,y) \longmapsto \frac{y^5}{2 \cdot x^4 + y^4}$

11.14 Mittelwertungleichung

Eine $m \times n$ Matrix kann man als Vektor in $\mathbb{R}^{m \times n}$ betrachten. Eine Funktion einer Variable und matrizenwertig integriert man deshalb koeffizientenweise (vgl. Definition 11.2.1).

DEFINITION 1 Sei

$$T : J \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : t \longmapsto (T_{k,l}(t))$$

eine stetige Abbildung. Für alle $a, b \in J$ definiert man das (Riemann-) *Integral* von T zwischen a und b durch

$$\int_a^b T := \left(\int_a^b T_{k,l}(t)\, dt \right) .$$

Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left(\int_a^b T(t)\, dt \right) v = \int_a^b T(t)\, v\ dt .$$

SATZ (Mittelwertsatz) *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $x, y \in X$ mit $t \cdot x + [1-t] \cdot y \in X$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt*

$$f(y) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(t \cdot x + [1-t] \cdot y)\, dt \right) (y - x) .$$

DEFINITION 2 Eine Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$ heißt *konvex* falls gilt

$$t \cdot x + [1-t] \cdot y \in C \quad \text{für alle } x, y \in C \text{ und } t \in [0,1] .$$

BEISPIEL Für alle $p \in [1, \infty]$ sind die abgeschlossenen und offenen Kugeln

$$B\left(x, r, |\cdot|_p\right) \quad \text{bzw.} \quad D\left(x, r, |\cdot|_p\right)$$

konvex.

Eine Teilmenge in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn sie ein Intervall ist.

HAUPTSATZ (Mittelwertungleichung) *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung und C eine konvexe Teilmenge von X mit*

$$M := \sup_{z \in C} \|Df(z)\| < \infty .$$

Für alle $x, y \in C$ gilt dann

$$|f(y) - f(x)| \leqslant M \cdot |y - x| .$$

Insbesondere ist f gleichmäßig stetig auf C .

BEMERKUNG Nach Lemma 11.8 gilt

$$\sup_{z\in C} \|Df(z)\| \leqslant n\sqrt{m} \cdot \max_{\substack{k=1,\ldots,m \\ l=1,\ldots,n}} \|\partial_l f_k\|_{\infty,C} \ .$$

Ist C kompakt, so ist

$$\sup_{z\in C} \|Df(z)\| < \infty \ .$$

Die Mittelwertungleichung ist also auf jede abgeschlossene beschränkte und konvexe Menge in $\mathbb{R}^n$, die in X enthalten ist, insbesondere auf jeden Segment in X der zwei Punkte aus X verbindet, anwendbar.

Aufgabe Seien X eine offene und konvexe Menge in $\mathbb{R}^n$ und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so daß für alle $x \in X$ gilt

$$(v|\, Df(x)\, v) > 0 \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ .$$

Zeigen Sie, daß f injektiv ist.

Hinweis : Benutzen Sie die Aufgabe 11.2.1.

11.15 Taylorformel

Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist Df eine Abbildung von X in

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^* \ ,$$

dessen Elemente einzeilige Matrizen sind. Dagegen ist

$$\operatorname{grad} f = Df^{\intercal} : X \longrightarrow \mathbb{R}^n \ .$$

DEFINITION 1 Man sagt, daß f in $x \in X$ *zweimal (total) differenzierbar* ist, wenn $\operatorname{grad} f$ in x differenzierbar ist. Man setzt

$$\operatorname{Hess} f(x) := D(\operatorname{grad} f)(x) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) & \cdots & \partial_n\partial_1 f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(x) & \cdots & \partial_n\partial_n f(x) \end{pmatrix} = (\partial_l\partial_k f(x))_{\substack{k=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots,n}} \ .$$

Sie heißt *Hesse-Matrix* von f in x .

In diesem Fall ist $\operatorname{grad} f$ in x stetig. Ist f zweimal stetig differenzierbar, d.h. f ist zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist die Matrix $\operatorname{Hess} f(x)$ symmetrisch.

Man beachte, daß $D^2 f(x) := D(Df)(x)$ eine Zeilenmatrix von Zeilenvektoren ist.

BEMERKUNG Allgemeiner kann man Abbildungen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ betrachten. Die zweite Ableitung ist eine Abbildung

$$D^2 f := D(Df) : X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \ .$$

Durch Induktion definiert man auch die (totalen) Ableitungen höhere Ordnung. Es gilt

SCHOLIE *Die Funktion f ist genau dann k-mal stetig (total) differenzierbar, wenn sie k-mal stetig partiell differenzierbar ist. In diesem Fall sind alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leqslant k$ stetig.*

DEFINITION 2 Für einen Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definiert man

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n! \ .$$

SATZ *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion, $x \in X$ et $v \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$. Dann ist die Funktion*

$$g : t \longmapsto f(x + t \cdot v) \ ,$$

in einer Umgebung von 0 definiert, k-mal stetig differenzierbar und es gilt

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \partial_{j_k} \ldots \partial_{j_1} f(x + t \cdot v) \cdot v_{j_k} \cdot \ldots \cdot v_{j_1} = \sum_{|\alpha|_1 = k} \frac{k!}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x + t \cdot v) \cdot v^\alpha \ .$$

HAUPTSATZ *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und x, y Punkte in X , so daß das Verbindungssegment in X enthalten ist. Dann gilt*

$$f(y) = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot (y-x)^\alpha + \sum_{|\alpha|_1 = k+1} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x + \theta \cdot [y-x]) \cdot (y-x)^\alpha$$

für ein bestimmtes $\theta \in [0,1]$.

KOROLLAR *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion und $x \in X$. Die Funktion $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch*

$$f(y) = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot (y-x)^\alpha + \varphi(y) \quad \text{für alle } y \in X \ ,$$

erfüllt dann

$$\lim\nolimits_{x \neq y \to x} \frac{\varphi(y)}{|y-x|^k} = 0 \ .$$

BEISPIEL (Fall der Ordnung 2) Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x \in X$, und schreibt man für alle $y \in X$

$$f(y) = f(x) + (\operatorname{grad} f(x) |\, y-x) + \frac{1}{2} \cdot (y-x \,| \operatorname{Hess} f(x)(y-x)) + \varphi(y) \ ,$$

oder

$$f(y) = f(x) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) \cdot (y_j - x_j) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k,l=1}^n \partial_l \partial_k f(x) \cdot (y_l - x_l) \cdot (y_k - x_k) + \varphi(y) \ ,$$

so ist

$$\lim\nolimits_{x \neq y \to x} \frac{\varphi(y)}{|y-x|^2} = 0 \ .$$

Aufgabe Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 3 der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto x^2 \cdot y + 2 \cdot y^3 + y^2 \cdot \cos x$$

im Punkt $(1,2)$.

11.16 Lokale Diskussion einer Funktion

DEFINITION 1 Seien Y eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in Y$. Man sagt, daß f in x ein *lokales Maximum* bzw. *lokales Minimum* besitzt , falls eine Umgebung V von x (in Y) existiert mit

$$f(y) \leqslant f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(y) \geqslant f(x) \quad \text{für alle } y \in V \ .$$

Zur Vereinfachung sagt man *lokales Extremum* wenn man nicht präzisieren will. Gilt

$$f(y) < f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(y) > f(x) \quad \text{für alle } y \in V \smallsetminus \{x\} \ ,$$

so sagt man, daß dieses Minimum bzw. Maximum *strikt* oder *isoliert* ist.

SATZ *Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und besitzt in $x \in X$ ein lokales Minimum oder lokales Maximum, so ist*

$$\operatorname{grad} f(x) = 0 \ .$$

DEFINITION 2 Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar so sagt man, daß $x \in X$ ein *kritischer Punkt* von f ist, falls $\operatorname{grad} f(x) = 0$.

Somit ist jeder Punkt wo f ein lokales Extremum besitzt ein kritischer Punkt von f . Aber wegen Bemerkung 8.4.2 ist die Umkehrung schon in Dimension 1 falsch !

DEFINITION 3 Sei $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \approx \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ eine symmetrische lineare Abbildung oder Matrix, d.h. $S^{\intercal} = S$. Sie heißt *positiv definit* bzw. *negativ definit* falls für alle $v \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ gilt

$$(v|\, Sv) > 0 \quad \text{bzw.} \quad (v|\, Sv) < 0 \ .$$

Sie heißt *positiv semidefinit* bzw. *negativ semidefinit* falls für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(v|\, Sv) \geqslant 0 \quad \text{bzw.} \quad (v|\, Sv) \leqslant 0 \ .$$

Man sagt, daß sie *indefinit* ist, falls $u, v \in \mathbb{R}^n$ existieren mit

$$(u|\, Su) > 0 \quad \text{und} \quad (v|\, Sv) < 0 \ .$$

BEMERKUNG Da S symmetrisch ist, existiert eine orthonormierte Basis $(\epsilon_j)_{j=0,\ldots,n}$ von $\mathbb{R}^n$ in der S diagonal ist. Diese Basis besteht aus Eigenvektoren, deren Eigenwerte mit $(\lambda_j)_{j=1,\ldots,n}$ bezeichnet werden. Zerlegt man $v \in \mathbb{R}^n$ in diese Basis, d.h.

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \epsilon_j \ ,$$

so ist

$$(v|\, Sv) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j^2 \ .$$

Genau dann ist S positiv definit (bzw. negativ definit, positiv semidefinit, negativ semidefinit), wenn für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\lambda_j > 0 \quad \text{bzw.} \quad < 0 \quad , \quad \geqslant 0 \quad , \quad \leqslant 0 \ .$$

Sie ist genau dann indefinit, wenn $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ existieren mit

$$\lambda_k > 0 \quad \text{und} \quad \lambda_l < 0 \ .$$

HAUPTSATZ *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x \in X$. Ist* $\operatorname{grad} f(x) = 0$ *und* $\operatorname{Hess} f(x)$ *positiv definit bzw. negativ definit, so besitzt f in x ein striktes lokales Minimum bzw. Maximum. Ist* $\operatorname{Hess} f(x)$ *indefinit, so hat f weder ein lokales Minimum, noch ein lokales Maximum.*

BEISPIEL 1 Seien $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n$ und $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine lineare symmetrische Abbildung gegeben und

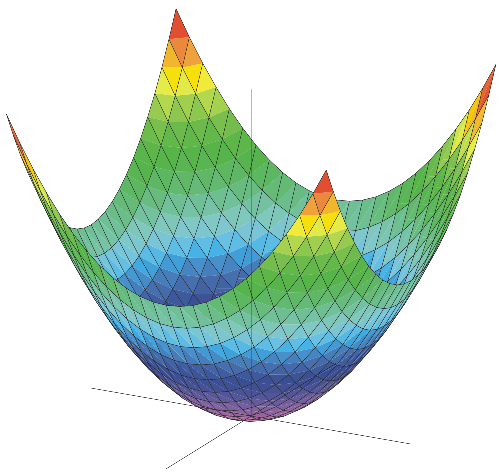
$$f : x \longmapsto a + (b|\, x) + (x|\, Sx) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Es gilt genau dann $\operatorname{grad} f(x) = 0$, wenn $b + 2 \cdot Sx = 0$. Ist S invertierbar, d.h. alle Eigenwerte sind von 0 verschieden, so ist

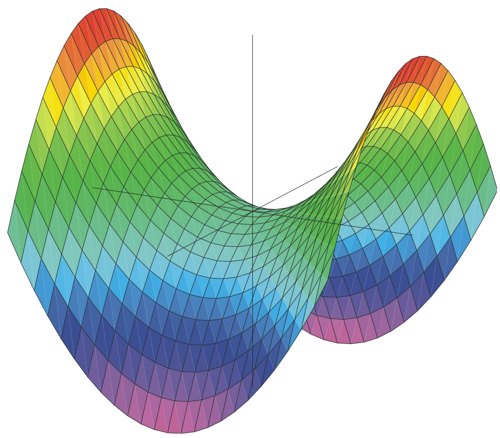
$$-\frac{1}{2} \cdot \overset{-1}{S} b$$

der einzige Punkt, wo $\operatorname{grad} f$ verschwindet.

Die geometrische Interpretation dieses Beispiel im Zusammenhang mit dem Hauptsatz ist einfach wenn man sich in eine orthonormale Basis die S diagonalisiert begibt.



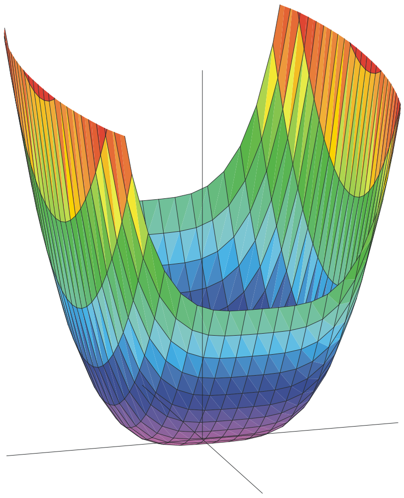
$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$



$(x, y) \longmapsto x^2 - y^2$

BEISPIEL 2 Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto x^2 + y^4 \ .$$



$(x,y) \longmapsto x^2 + y^4$

Der Punkt $(0,0)$ ist die einzige Stelle wo $\operatorname{grad} f$ verschwindet. Es gilt

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix ist positiv semidefinit. Aber f besitzt ein absolutes striktes Minimum in $(0,0)$.

BEISPIEL 3 Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto x^2 + y^3$$

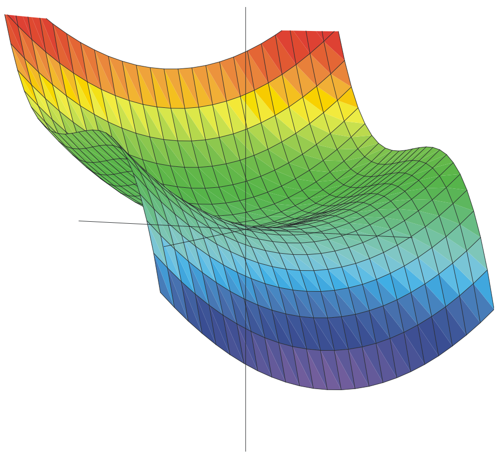
hat sowohl negative wie positive Werte in der Nähe von 0 , aber

$$\operatorname{grad} f(0,0) = 0$$

und

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

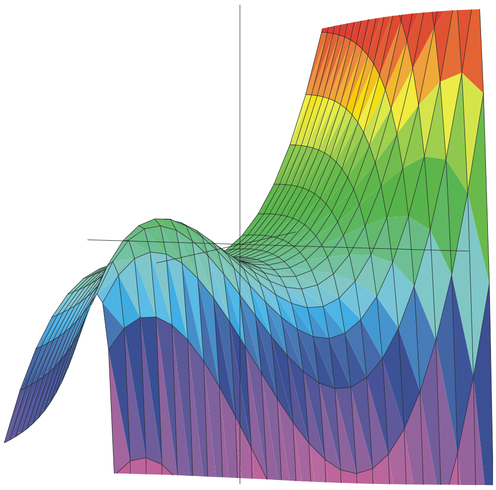
ist positiv semidefinit.



$(x,y) \longmapsto x^2 + y^3$

Aufgabe Gegeben sei die Funktion

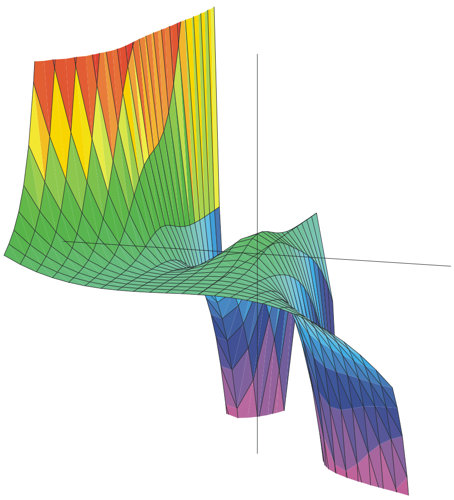
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto 3x \cdot e^y - x^3 - e^{3y} \ .$$



Zeigen Sie, dass f surjektiv ist, und bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f .

Dieses Beispiel zeigt, daß das Resultat aus der Aufgabe 8.5.3 sich nicht ohne weiteres in die Dimension 2 übertragen läßt. Es wurde aus dem Artikel von Ira Rosenholtz und Lowell Smylie [4] entnommen. Gleichzeitig publizierten J. Marshall Ash und Harlan Sexton [5] das mit einer kleinen Änderung folgende Beispiel

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \frac{x^2}{1 + x^2} + \left(2y^2 - y^4\right) \cdot \left(e^x + \frac{1}{1 + x^2}\right)$$

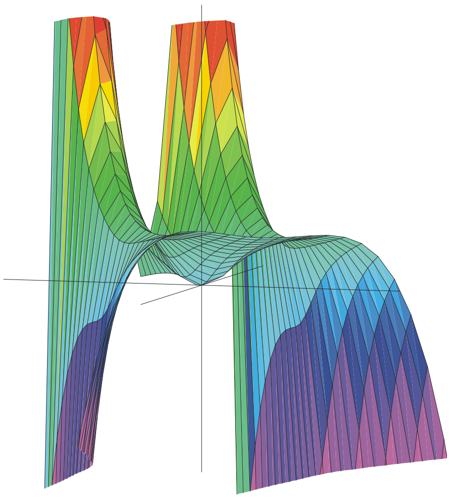


Diese Autoren geben auch eine hinreichende Bedingung für die Behauptung aus Aufgabe 8.5.3. Ein anderes Beispiel

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \left(2x^3 - 3x^2\right) \cdot e^{-y} + \left(2x^3 - 3x^2 + 1\right) \cdot e^{-y^2}$$

[4] I. Rosenholtz, L. Smylie, *"The only critical point in town" test,* Math. Mag. 58 (1985), p. 149-150.

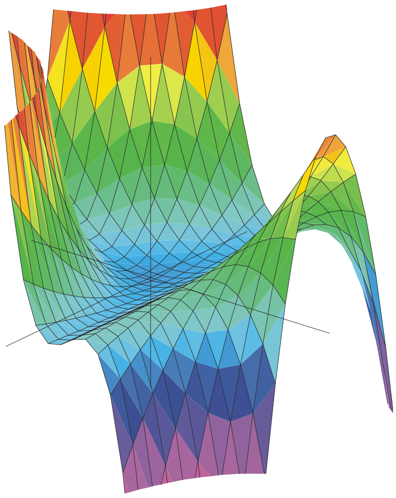
[5] J.M. Ash, H. Sexton, *A surface with one local minimum,* Math. Mag. 58 (1985), p. 147-149.

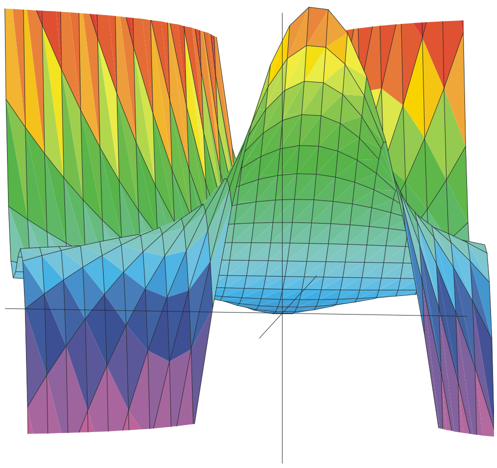


ist von David A. Smith [6] und wurde im Buch von Philip Gillett [7] publiziert.

Aber das einfachste Beispiel ist das von Bruce Calvert und M.K. Vamanamurthy [8] :

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto x^2 \cdot (1 + y)^3 + y^2$$





Sie geben auch hinreichende Bedingugen an.

[6] D.A. Smith, *Three observations on a theme : Editorial note,* Math. Mag. 58 (1985), p. 146.

[7] P. Gillett, *Calculus and analytic geometry,* 2nd ed., D.C. Heath, Lexington, Mass., 1984.

[8] B. Calvert, M.K. Vamanamurthy, *Local and global extrema for functions of several variables,* J. Austral. Math. Soc. 29 (1980), p. 362-368.

11.17 Extremum mit Bedingung

DEFINITION Seien $f, F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $\xi \in X$ mit $F(\xi) = 0$. Man sagt, daß f ein *lokales Maximum* bzw. *lokales Minimum unter der Bedingung* $F = 0$ in ξ besitzt, falls die Einschränkung von f auf der Menge

$$\{F = 0\}$$

ein lokales Maximum bzw. Minimum in ξ besitzt. Zur Vereinfachung sagt man *lokales Extremun mit Bedingung* , wenn man nicht präzisieren will.

Der Beweis des folgenden Lemmas benötigt den Satz über die Umkehrfunktion, der wir später in 13.2 beweisen werden.

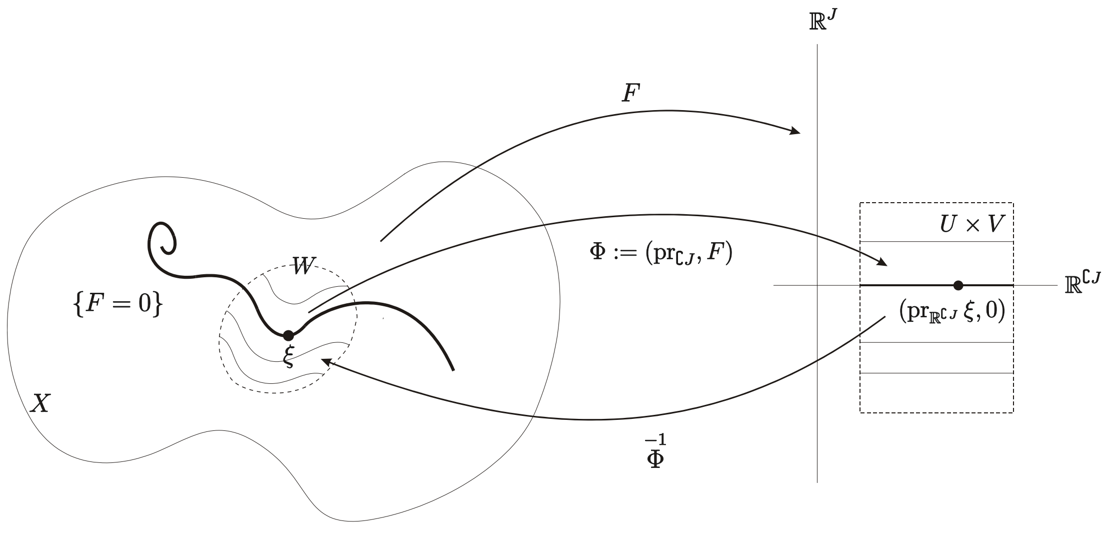
LEMMA *Seien X eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$, $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $\zeta \in X$, so daß $F(\zeta) = 0$ und $DF(\zeta) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ surjektiv ist. Dann existiert eine Teilmenge $J \subset \{1, \ldots, n\}$, eine Umgebung W von ξ in X und in der Zerlegung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\complement J} \times \mathbb{R}^J$ eine offene Umgebung von $(\mathrm{pr}_{\complement J}\, \xi, 0)$ der Gestalt $U \times V$, so daß die Abbildung*

$$\Phi := (\mathrm{pr}_{\complement J}, F) : X \longrightarrow \mathbb{R}^{\complement J} \times \mathbb{R}^J = \mathbb{R}^n : x \longmapsto (\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{\complement J}}\, x, F(x))$$

ein Diffeomorphismus von W auf $U \times V$ ist. Zusätzlich gilt

$$\Phi(\{F = h\} \cap W) = U \times \{h\}$$

für alle $h \in V$.



HAUPTSATZ (Lagrangescher Multiplikator) *Wir nehmen an, daß f und F stetig differenzierbare Abbildungen auf X sind und daß für $\xi \in X$ gilt $F(\xi) = 0$ und $DF(\xi) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ surjektiv ist.*

Besitzt f ein lokales Extremum in ξ unter der Bedingung $F = 0$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$ (der Lagrangesche Multiplikator) mit

$$\operatorname{grad} f(\zeta) = DF(\zeta)^{\intercal} \lambda \ .$$

Ist $m = 1$ so bedeutet dies

$$\operatorname{grad} f(\xi) = \lambda \cdot \operatorname{grad} F(\xi) \ .$$

BEMERKUNG 1 Diese Methode erlaubt lokale Minima und Maxima unter Bedingungen zu bestimmen. Man muß aber zuerst deren Existenz nachweisen. Dies wird üblicherweise mit Hilfe von Kompaktheitsargumenten durchgeführt. Man beachte, daß diese Methode hauptsächlich benutzt wird, wenn die Menge $\{F = 0\}$ nicht parametrisierbar ist.

BEISPIEL 1 Man bestimme den Radius ρ und die Höhe κ einer Konservendose, dessen Volumen V ist, so daß die Fläche des benötigten Bleches minimal wird. Dieses einfache Beispiel zeigt, wie man die Existenz eines lokalen Minimums unter einer Bedingung nachweist.

Die Bedingung $F = 0$ bzgl. des Volumens ist durch

$$F : (r, h) \longmapsto \pi \cdot r^2 \cdot h - V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

beschrieben und die Fläche f ist durch

$$f : (r, h) \longmapsto 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Für $M \geqslant 2 \cdot V + 2\pi$ gilt

$$\left(1, \frac{V}{\pi}\right) \in \{F = 0\} \cap \{f \leqslant M\} \cap \mathbb{R}_+^{\not\models} \ ,$$

und diese Menge ist kompakt. Daraus schließt man die Existenz eines Minimums von f in

$$(\rho, \kappa) \in \{F = 0\} \cap \mathbb{R}_+^{\not\models} \subset \mathbb{R}_+^{*\not\models} \ .$$

Über den Lagrangescher Multiplikator bekommt man dann

$$\kappa = 2 \cdot \rho \ ,$$

sowie

$$\rho^3 = \frac{V}{2\pi} \quad \text{und} \quad \kappa^3 = \frac{4 \cdot V}{\pi} \ .$$

BEISPIEL 2 Seien $\eta \in \mathbb{R}^n$ und A eine nicht-leere, abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^n$, die durch

$$A := \{F = 0\} \quad \text{mit } F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

gegeben ist. Mit Hilfe eines ähnlichen Kompaktheitsarguments wie in Beispiel 1, wird die Distanz

$$d(\eta, A) := \inf\nolimits_{x \in A} d(\eta, x)$$

von η zu A in einem Punkt ξ angenommen. Man betrachte besser $d(\eta, A)^2$, da die Funktion

$$f : x \longmapsto |x - \eta|^2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar ist. Falls F stetig differenzierbar ist und $\operatorname{grad} F(\xi) \neq 0$ gilt, folgt die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$2 \cdot (\xi - \eta) = \lambda \cdot \operatorname{grad} F(\xi) \ .$$

Ist insbesondere A eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$, die durch

$$F(x) := a + (b|\, x) = 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |b| = 1$$

gegeben ist, so folgt

$$\xi = \eta - (a + (b|\,\eta)) \cdot b \ .$$

BEISPIEL 3 Sei $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine lineare symmetrische Abbildung und

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto (x|\, Sx) \ .$$

SATZ *Es existieren Vektoren $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{n-1}$, d.h. $|\xi| = |\eta| = 1$, in denen die Funktion f auf $\mathbb{S}^{n-1}$ ihr Maximum bzw. Minimum annimmt, und diese Vektoren sind Eigenvektoren zu dem größten bzw. kleinsten Eigenwert von S :*

$$\sup f\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) = (\xi|\, S\xi) \quad \textit{bzw.} \quad \inf f\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) = (\eta|\, S\eta) \ .$$

Zusätzlich sind alle Eigenwerte reell und S ist diagonalisierbar.

KOROLLAR *Ist $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, so ist $\|T\|^2$ der größte Eigenwert von $T^{\intercal}T$.*

BEMERKUNG 2 Dieses Korollar zeigt, daß $\|T\|$ sich schwer mit Hilfe der Koeffizienten der Matrix von T ausdrücken läßt. Ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 2) \ ,$$

so gilt

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \sqrt{\left[(a+d)^2 + (b-c)^2\right]\left[(a-d)^2 + (b+c)^2\right]} \right) \ .$$

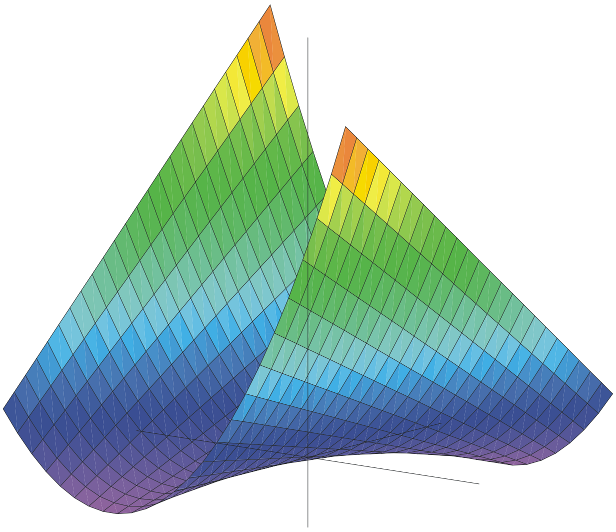
Aufgabe 1 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto 4x^2 - 3xy$.

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f auf $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \right\}$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f auf $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$.

(c) Bestimmen Sie die lokalen und absoluten Extrema von f auf

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \right\} \ .$$



$(x, y) \longmapsto 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x \cdot y$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die lokalen und absoluten Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \prod_{j=1}^{n} x_j^2$$

unter der Bedingung

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1 \ .$$

Folgern Sie, daß für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\left(\prod_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j \ .$$

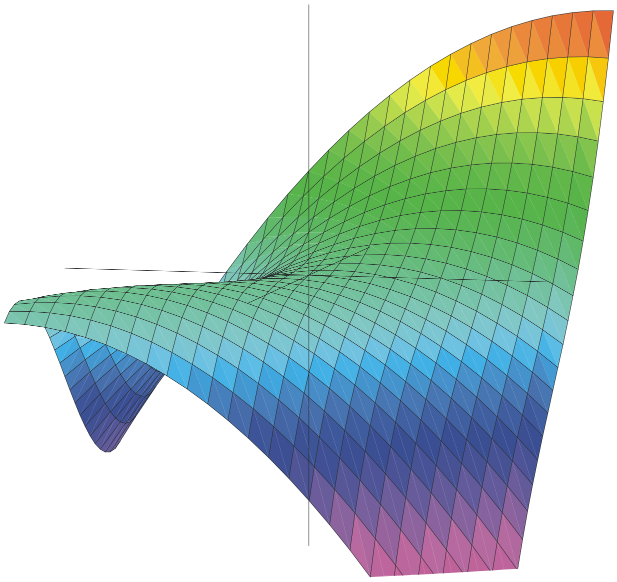
Aufgabe 3 Man betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto y^3 + y + 4 \cdot x \cdot y - 2 \cdot x^2 \ .$$

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f .

(b) Bestimmen Sie die lokalen und absoluten Extrema von f auf

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \leqslant 0 \text{ et } x + 2 \geqslant -y \geqslant 0 \right\} \ .$$



$$(x, y) \longmapsto y^3 + y + 4 \cdot x \cdot y - 2 \cdot x^2$$