Kapitel 4

KONSTRUKTION DER REELLEN ZAHLEN

Fassung vom 8. Februar 2002

4.1 Partitionen

DEFINITION Sei X eine Menge. Eine Familie $(X_j)_{j \in J}$ aus nicht-leeren Teilmengen von X heißt *Partition* von X , falls

$$X = \bigcup_{j \in J} X_j$$

ist, und für alle $k, l \in J$ gilt

$$k \neq l \quad \Longrightarrow \quad X_k \cap X_l = \emptyset \ .$$

BEISPIEL Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist

$$\left(\overset{-1}{f}(\{y\}) \right)_{y \in f(X)}$$

eine Partition von X .

SATZ *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Dann existiert eine injektive Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ mit*

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \ .$$

4.2 Äquivalenzrelationen

DEFINITION 1 Seien X eine Menge und $R \subset X \times X$. Man sagt, daß R eine *Äquivalenzrelation* ist, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(a) *Transitivität*

$$x\ R\ y \text{ und } y\ R\ z \quad \Longrightarrow \quad x\ R\ z$$

(b) *Symmetrie*

$$x\ R\ y \quad \Longleftrightarrow \quad y\ R\ x$$

(c) *Reflexivität*

$$x\ R\ x \ .$$

Man schreibt oft $x \equiv y \mod R$ anstelle von $x\ R\ y$. Wir setzen

$$[x] := \{y \in X \mid x\ R\ y\} \ ,$$

$$X/R := \{[x] \in \mathfrak{P}(X) \mid x \in X\} \ ,$$

sowie

$$p : X \longrightarrow X/R : x \longmapsto [x] \ .$$

Man sagt, daß $[x]$ die *Äquivalenzklasse* von x und p die *Quotientenabbildung* von X auf den *Quotientenraum* X/R sind.

SATZ *Für alle $x, y \in X$ gilt*

(i)
$$y \in [x] \quad \Longleftrightarrow \quad x\ R\ y \ .$$

(ii)
$$([x] = [y] \text{ und } x\ R\ y) \quad \text{oder} \quad ([x] \cap [y] = \emptyset \text{ und } \neg x\ R\ y) \ .$$

(iii)
$$p^{-1}(\{[x]\}) = [x] \ .$$

Man sagt, daß $\left(p^{-1}(\{c\})\right)_{c \in X/R}$ die Partition von X in Äquivalenzklassen $\mod R$ ist. Jedes $x \in p^{-1}(c)$ heißt *Repräsentant* der Äquivalenzklasse c .

4.3 Gruppen

DEFINITION 1 Sei G eine Menge, die mit einer assoziativen Operation

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G : (s,t) \longmapsto s \cdot t$$

versehen ist. Man sagt, daß G eine *Gruppe* ist falls :

(g_1) Es gibt ein $e \in G$, so daß für alle $s \in G$ gilt

$$e \cdot s = s \cdot e = s \ .$$

(g_2) Für alle $s \in G$ existiert ein $t \in G$ mit

$$s \cdot t = t \cdot s = e \ .$$

Eine Gruppe G heißt *kommutativ* oder *abelsch* falls für alle $s, t \in G$ gilt

$$s \cdot t = t \cdot s \ .$$

BEMERKUNG 1 Sei G eine Gruppe.

(a) Ein Element e mit (g_1) ist eindeutig bestimmt und heißt *neutrales Element* von G .

(b) Sei $s \in G$. Ein Element $t \in G$ mit (g_2) ist eindeutig bestimmt und heißt das *Inverse* von s . Es wird mit s^{-1} bezeichnet. Es gilt

$$\left(s^{-1}\right)^{-1} = s \ .$$

(c) Seien $s, t \in G$. Die Gleichungen

$$s \cdot x = t \quad \text{und} \quad x \cdot s = t$$

besitzen genau eine Lösung

$$x = s^{-1} \cdot t \quad \text{bzw.} \quad x = t \cdot s^{-1} \ .$$

BEMERKUNG 2 Ist die Operation additiv notiert, so wird das neutrale Element mit 0 und das Inverse von s mit $-s$ bezeichnet. Man schreibt

$$s - t := s + (-t) \ .$$

BEISPIEL Die Menge $\mathbb{N}$ mit der Addition ist keine Gruppe.

In der Tat ist die Gleichung $x + 1 = 0$ in $\mathbb{N}$ nicht lösbar.

DEFINITION 2 Eine additive kommutative Gruppe G , die mit einer Ordnung $\leqslant$ versehen ist, heißt *geordnete Gruppe* , falls die Addition mit der Ordnung verträglich ist, d.h. für alle $s, t, u \in G$ gilt

$$s \leqslant t \quad \Longrightarrow \quad s + u \leqslant t + u \ .$$

Man sagt, daß $s \in G$ *positiv* bzw. *negativ* ist, falls gilt $s \geqslant 0$ bzw. $s \leqslant 0$, sowie *strikt positiv* bzw. *strikt negativ* falls $s > 0$ bzw. $s < 0$ gilt.

4.4 Konstruktion der ganzen Zahlen

Um eine additive Gruppe zu konstruieren, die ein Abbild von $\mathbb{N}$ enthält und dessen Addition die von $\mathbb{N}$ fortsetzt, betrachten wir folgende Relation Z auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

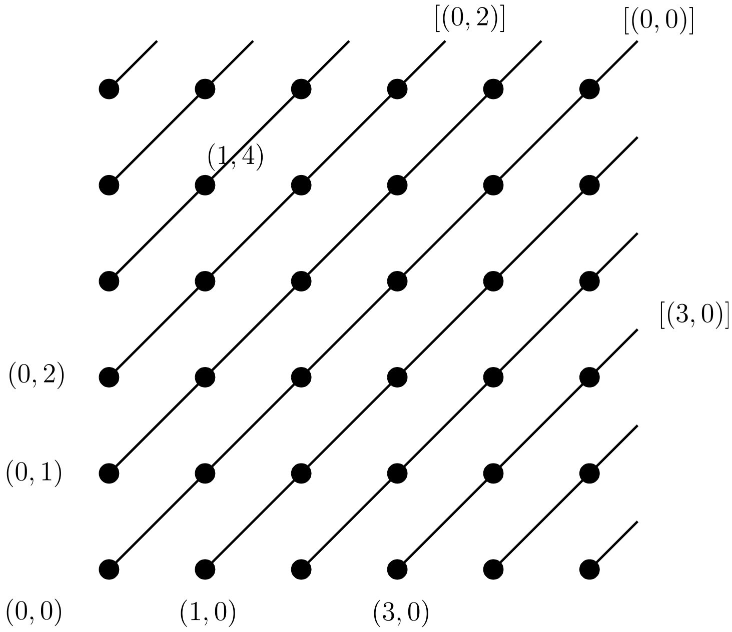
$$(a,b) \;\, Z \;\, (c,d) \quad : \quad a+d = b+c \; .$$

Sie ist eine Äquivalenzrelation.

DEFINITION 1 Man definiert

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \, Z \; ,$$

und nennt diese Menge die *Menge der ganzen Zahlen* .



Zum Beispiel gilt

$$[(k,0)] = \{(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid c = d+k\} = \{(l+k,l) \;\mid l \in \mathbb{N}\} \;\; .$$

und

$$[(0,k)] = \{(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid d = c+k\} = \{(l,l+k) \;\mid l \in \mathbb{N}\}$$

DEFINITION 2 Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ definiert man die Summe von x und y durch

$$x + y := [(a+c, b+d)] \;\; ,$$

falls $(a,b) \in x$ und $(c,d) \in y$. Diese Definition ist von der Wahl der Repräsentanten von x und y unabhängig :

LEMMA *Für alle $a,b,c,d,r,s,t,u \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(a,b) \;\, Z \;\, (r,s) \;\; \textit{und} \;\; (c,d) \;\, Z \;\, (t,u) \quad \Longrightarrow \quad (a+c, b+d) \;\, Z \;\, (r+t, s+u) \;\; .$$

BEMERKUNG 1 In anderen Worten gilt

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)] \ .$$

HAUPTSATZ *$\mathbb{Z}$ ist eine kommutative Gruppe, dessen neutrales Element $[(0,0)]$ ist. Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ ist das Inverse von $[(a,b)]$ gleich $[(b,a)]$.*

BEMERKUNG 2 Man identifiziert $\mathbb{N}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit Hilfe der Injektion

$$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto [(n,0)] \ ,$$

da für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$[(m,0)] + [(n,0)] = [(m+n,0)]$$

gilt, d.h. die Addition von $\mathbb{Z}$ induziert die von $\mathbb{N}$.

BEMERKUNG 3 Die Äquivalenzklasse $[(n,0)]$ wird mit n bezeichnet, um die Notation zu vereinfachen. Da $[(0,n)] = -[(n,0)]$ das Inverse von $[(n,0)]$ ist, wird diese Äquivalenzklasse mit $-n$ bezeichnet.

Jedes Element von $\mathbb{Z}$ ist der Gestalt $n = [(n,0)]$ mit $n \in \mathbb{N}$ oder der Gestalt $-n = [(0,n)]$ mit $n \in \mathbb{N}^*$. Für jedes $a, b \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$[(a,b)] = a - b \ .$$

Aufgabe Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sei definiert:

$$a \equiv b \quad \text{falls } \exists s \in \mathbb{Z} \text{ mit } a = b + sn \ .$$

(a) Zeigen Sie, daß durch “ $\equiv$ ” eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert wird. Man sagt, daß a sei *gleich b modulo n* .

(b) Geben Sie eine interne Beschreibung der zugehörigen Äquivalenzklassen.

4.5 Ringe und Körper

DEFINITION 1 Eine Menge R , die mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$ versehen ist, heißt ein *Ring* , falls die Addition $+$ eine kommutative Gruppenstruktur auf R definiert und falls die Multiplikation $\cdot$ assoziativ und bzgl. der Addition distributiv ist.

Der Ring R heißt *kommutativ* , falls die Multiplikation kommutativ ist. Er heißt *Ring mit Eins* , falls die Multiplikation ein neutrales Element besitzt. Ein Ring mit Eins R heißt *Körper* , falls $R^* := R \smallsetminus \{0\}$ bzgl. der Multiplikation eine Gruppe ist.

BEMERKUNG 1 Sei R ein Ring.

(a) Für alle $a \in R$ gilt

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \ .$$

(b) Für alle $a, b \in R$ gilt

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -a \cdot b \ .$$

Insbesondere gilt

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \ .$$

DEFINITION 2 Ein kommutativer Ring mit Eins R , der mit einer Ordnung $\leqslant$ versehen ist, heißt *geordneter Ring* , falls die additive Gruppe R eine geordnete Gruppe ist und

$$a \leqslant b \text{ und } c \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad a \cdot c \leqslant b \cdot c$$

für alle $a, b, c \in R$ gilt.

SATZ *Seien R ein geordneter Ring und $a, b, c \in R$. Dann gilt*

(i)
$$a \leqslant b \quad \Longleftrightarrow \quad a + c \leqslant b + c \ .$$

(ii)
$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a + c < b + c \ .$$

(iii)
$$a \leqslant b \quad \Longleftrightarrow \quad -b \leqslant -a \ .$$

(iv)
$$a \leqslant b \text{ und } c \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad a \cdot c \geqslant b \cdot c \ .$$

(v)
$$a \geqslant 0 \text{ und } b \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad a + b \geqslant 0 \text{ und } a \cdot b \geqslant 0 \ .$$

Ist zusätzlich R ein Körper und $c > 0$, so gilt weiter

(vi)
$$a \leqslant b \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot c \leqslant b \cdot c \ .$$

(vii)
$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c \ .$$

Die Multiplikation und die Ordnung auf $\mathbb{N}$ können auf $\mathbb{Z}$ fortgesetzt werden:

DEFINITION 3 Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ definiert man das Produkt von x mit y durch

$$x \cdot y := [(ac + bd, ad + bc)] \ ,$$

falls $(a, b) \in x$ und $(c, d) \in y$. Diese Definition ist von der Wahl der Repräsentanten unabhängig. Die Relation auf $\mathbb{Z}$

$$y - x \in \mathbb{N}$$

wird mit $x \leqslant y$ bezeichnet.

BEMERKUNG 2 Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$[(m, 0)] \cdot [(n, 0)] = [(m \cdot n, 0)] \ ,$$

und $n - m \in \mathbb{N}$ ist zu $m \leqslant n$ äquivalent.

HAUPTSATZ *$\mathbb{Z}$ ist ein total geordneter kommutativer Ring mit Eins. Bzgl. der Multiplikation ist jedes Element in $\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ kürzbar, und es gilt die Division mit Rest.*

BEMERKUNG 3 Aber $\mathbb{Z}$ ist kein Körper, da die Gleichung $2 \cdot x = 1$ in $\mathbb{Z}$ keine Lösung hat.

Aufgabe 1 Man betrachte die Äquivalenzrelation $\equiv$ aus Aufgabe 4.4. Zeigen Sie, daß für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gilt

$$a \equiv b \text{ und } c \equiv d \quad \Longrightarrow \quad a \cdot c \equiv b \cdot d \ .$$

Aufgabe 2 Sei K ein kommutativer total geordneter Körper. Für alle $x, y \in K$ und $b \in K^*$ mit $b > 0$ gilt

$$x^2 \geqslant 0 \quad , \quad \frac{1}{b} > 0 \quad \text{und} \quad 2 \cdot x \cdot y \leqslant \frac{1}{b} \cdot x^2 + b \cdot y^2 \ .$$

Aufgabe 3 Sei K ein kommutativer total geordneter Körper. Für alle $x, y \in K$ gilt

$$1 < x < y \quad \Longrightarrow \quad x + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{y} \ .$$

Aufgabe 4 Sei R ein Ring und $P \subset R$ eine Teilmenge mit folgenden drei Eigenschaften:

Aufgabe 1 P_1

$$R = P \cup (-P) \quad \text{et} \quad P \cap (-P) = \{0\} \ .$$

P_2

$$a, b \in P \quad \Longrightarrow \quad a + b \in P \ .$$

P_3

$$a, b \in P \quad \Longrightarrow \quad ab \in P \ .$$

(a) Zeigen Sie, daß R mit der Definition

$$a \leqslant b \quad \text{falls} \quad b - a \in P$$

zu einem total geordneten Ring wird.

(b) Beweisen Sie umgekehrt, daß jeder total geordnete Ring eine Teilmenge P mit den Eigenschaften $P1$ bis $P3$ besitzt, die die Ordung von R definiert.

4.6 Konstruktion der rationalen Zahlen

Um einen geordneten Körper zu konstruieren, der ein Bild von $\mathbb{Z}$ enthält und dessen Strukturen die von $\mathbb{Z}$ induzieren, betrachten wir folgende Relation Q auf $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, wobei $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\setminus\{0\}$:

$$(a,b) \ Q \ (c,d) \quad : \quad a \cdot d = b \cdot c \ .$$

DEFINITION Man definiert

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \, Q \ .$$

Diese Menge heißt die *Menge der rationalen Zahlen* . Für alle $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ setzt man

$$\frac{a}{b} := [(a,b)] \ .$$

Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ definiert man die Summe und das Produkt von x mit y durch

$$x + y := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

und

$$x \cdot y := \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \ ,$$

falls $(a,b) \in x$ und $(c,d) \in y$, d.h. $x = \frac{a}{b}$ und $y = \frac{c}{d}$.

Man definiert eine Relation auf $\mathbb{Q}$ durch

$$x \leqslant y \quad : \quad \text{falls } a,b,c,d \in \mathbb{Z} \text{ existieren mit } b,d > 0 \ , \ x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d} \text{ und } a \cdot d \leqslant b \cdot c \ .$$

Diese Definitionen sind von den Repräsentanten unabhängig.

BEMERKUNG 1 Man identifiziert $\mathbb{Z}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{Q}$ durch die Injektion

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} : n \longmapsto \frac{n}{1} \ .$$

Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{m}{1} + \frac{n}{1} = \frac{m+n}{1} \quad \text{und} \quad \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{m \cdot n}{1} \ .$$

Dies zeigt, daß die Addition und die Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ die entspechenden Operationen auf $\mathbb{Z}$ induzieren. Zuzätzlich ist

$$\frac{m}{1} \leqslant \frac{n}{1} \quad \Longleftrightarrow \quad m \leqslant n \ ,$$

also induziert die Ordung von $\mathbb{Q}$ diejenige von $\mathbb{Z}$.

HAUPTSATZ *$\mathbb{Q}$ ist ein total geordneter Körper.*

BEMERKUNG 2 Ist K ein Körper, so definiert man für alle $x \in K$ und $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$:

$$n \cdot x := -(-n) \cdot x$$

und

$$x^n := \left(x^{-1}\right)^{-n} \quad \text{falls } x \neq 0 \ .$$

Für alle $x, y \in K$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$x \cdot (n \cdot y) = n \cdot (x \cdot y) \quad , \quad n \cdot (x + y) = n \cdot x + n \cdot y \quad , \quad (n + m) \cdot x = n \cdot x + m \cdot x \ ,$$

sowie

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} \quad , \quad (x^n)^m = x^{n \cdot m} \quad \text{und} \quad x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n \ \text{falls } x, y \neq 0 \ .$$

Aufgabe Seien K ein total geordneter Körper und $a, b \in K$. Zeigen Sie, daß genau dann gilt $a \cdot b \geqslant 0$, wenn

$$a, b \geqslant 0 \quad \text{oder} \quad a, b \leqslant 0 \ .$$

4.7 Konstruktion der reellen Zahlen

DEFINITION 1 Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{Q}$ heißt *Dedekindscher Schnitt* falls:

D_1
$$\emptyset \neq D \neq \mathbb{Q} \ .$$

D_2
$$\text{Für alle } x \in D \text{ und } y \in \mathbb{Q} \text{ mit } y \leqslant x \text{ gilt } y \in D$$

D_3
$$\text{Für alle } x \in D \text{ existiert } y \in D \text{ mit } y > x \ .$$

Man setzt dann
$$\mathbb{R} := \{D \in \mathfrak{P}(\mathbb{Q}) \mid D \text{ ist ein Dedekindscher Schnitt}\} \ ,$$
und nennt diese Menge *die Menge der reellen Zahlen* oder *Zahlengerade* .

LEMMA *Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ gilt*
$$a < \frac{a+b}{2} < b \ .$$

KOROLLAR *Ist $a \in \mathbb{Q}$, dann ist $a_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$ ein Dedekindscher Schnitt und die Abbildung*
$$a \longmapsto a_{\mathbb{R}} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$
ist injektiv.

DEFINITION 2 Für $C, D \in \mathbb{R}$ definiert man die Summe von C und D durch
$$C + D := \{x + y \mid x \in C, y \in D\}$$
und eine Relation zwischen C und D durch
$$C \leqslant D \quad : \quad C \subset D \ .$$

BEMERKUNG 1 Für alle $C, D \in \mathbb{R}$ ist $C + D$ ein Dedekindscher Schnitt, d.h. $C + D \in \mathbb{R}$.

BEMERKUNG 2 Die Relation $\leqslant$ auf $\mathbb{R}$ ist nach Definition durch die Ordnungsrelation $\subset$ auf $\mathfrak{P}(\mathbb{Q})$ induziert, also eine Ordnung auf $\mathbb{R}$.

SATZ *$\mathbb{R}$ ist eine kommutative total geordnete Gruppe. Das neutrale Element für die Addition ist $0_{\mathbb{R}}$, und das Inverse von $D \in \mathbb{R}$ ist*
$$-D := \begin{cases} (-a)_{\mathbb{R}} & \\ & \textit{falls} \\ \{-x \mid x \notin D\} & \end{cases} \begin{array}{l} D = a_{\mathbb{R}} \textit{ für ein } a \in \mathbb{Q} \\ \\ D \neq a_{\mathbb{R}} \textit{ für alle } a \in \mathbb{Q} \end{array} \ .$$

DEFINITION 3 Für $C, D \in \mathbb{R}$ definiert man das Produkt von C und D durch

$$C \cdot D := \{x \cdot y \mid x \in C \ , \ y \in D \text{ mit } y > 0\} \quad \text{falls } D > 0$$

sowie

$$C \cdot D = -C \cdot (-D) \quad \text{falls } D < 0 \ .$$

und

$$C \cdot 0 = 0 \ .$$

Man setzt

$$\mathbb{R}_+ := \{D \in \mathbb{R} \mid D \geqslant 0_{\mathbb{R}}\} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}_- := \{D \in \mathbb{R} \mid D \leqslant 0_{\mathbb{R}}\} \ ,$$

sowie

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \quad , \quad \mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \smallsetminus \{0\} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}_-^* := \mathbb{R}_- \smallsetminus \{0\} \ .$$

BEMERKUNG 3 Für alle $C, D \in \mathbb{R}$ ist $C \cdot D$ ein Dedekindscher Schnitt, d.h. $C \cdot D \in \mathbb{R}$.

HAUPTSATZ *$\mathbb{R}$ ist ein total geordneter Körper. Das neutrale Element für die Multiplikation ist $1_{\mathbb{R}}$ und das Inverse von $D \in \mathbb{R}_+^*$ ist*

$$\frac{1}{D} := \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\frac{1}{a}\right)_{\mathbb{R}} & & D = a_{\mathbb{R}} \quad \textit{für ein } a \in \mathbb{Q} \\ & \textit{falls} & \\ \mathbb{R}_- \cup \left\{\frac{1}{y} \mid y \notin D\right\} & & D \neq a_{\mathbb{R}} \quad \textit{für alle } a \in \mathbb{Q} \end{array} \right. .$$

BEMERKUNG 4 Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$, gilt $a_{\mathbb{R}} + b_{\mathbb{R}} = (a+b)_{\mathbb{R}}$ und $a_{\mathbb{R}} \subset b_{\mathbb{R}}$ ist mit $a \leqslant b$ äquivalent. Wir werden $\mathbb{Q}$ mit der entspechenden Menge in $\mathbb{R}$ identifizieren. Der Dedekindsche Schnitt $a_{\mathbb{R}}$ für $a \in \mathbb{Q}$ wird wiederum mit a bezeichnet.

Dank dieser Identifikation beschreibt der erste Teil des folgenden Satzes, leider im Zirkelschluß, die Konstruktion von $\mathbb{R}$!

SATZ

(i) *Für alle $c \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{Q}$ gilt genau dann $x < c$, wenn $x \in c$ ist. Insbesondere ist*

$$c = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < c\} \ .$$

(ii) *Für alle $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $c < q < d$.*

Aufgabe Zeigen Sie für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$, daß

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{n-k}$$

gilt. Folgern Sie die Formel

$$\binom{n}{k} = \prod_{l=k+1}^{n} \frac{l}{l-k} = \prod_{l=1}^{n-k} \frac{l+k}{l} = \prod_{l=1}^{k} \frac{n+l-k}{l} \ ,$$

sowie die Abschätzung

$$(1+a)^n \geqslant \frac{1}{2} n \left(n-1\right) a^2$$

für $a \in \mathbb{R}_+$.

4.8 Suprema und der Satz von Dedekind

DEFINITION 1 Seien X eine geordnete Menge, $A \subset X$ und $m \in X$. Man sagt, daß m eine *obere Schranke* von A ist, falls $m \geqslant a$ für alle $a \in A$ ist, und A heißt *nach oben beschränkt* , falls A eine obere Schranke besitzt. Man sagt, daß m das *kleinste Element* oder *Minimum* von A ist, wenn $m \in A$ und $m \leqslant a$ für alle $a \in A$ gilt.

Ein $s \in X$ heißt *Supremum* von A , falls s die kleinste obere Schranke von A ist, d.h. falls gilt:

(a) s ist eine obere Schranke.

(b) Ist m eine obere Schranke von A , so gilt $m \geqslant s$.

Man definiert die Begriffe *untere Schranke* , *nach unten beschränkt* , *größtes Element* oder *Maximum* , und *Infimum* , indem man die Ungleichungen umdreht.

Das Maximum, das Minimum, das Supremum und das Infimum von A werden mit

$$\max A \quad \text{bzw.} \quad \min A \quad , \quad \sup A \quad , \quad \inf A \ ,$$

falls sie existieren, bezeichnet.

Man sagt, daß A *beschränkt* ist, wenn A sowohl nach oben wie nach unten beschränkt ist.

Ist $\sup A \in A$ bzw. $\inf A \in A$, so ist

$$\sup A = \max A \quad \text{und} \quad \inf A = \min A \ .$$

Ist $(a_j)_{j \in J}$ eine Familie in X , so setzt man

$$\sup\nolimits_{j \in J} a_j := \sup \{a_j \mid j \in J\} \quad \text{bzw.} \quad \inf\nolimits_{j \in J} a_j := \inf \{a_j \mid j \in J\} \ ,$$

wenn es existiert.

Schreibt man einer der Symbole $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ oder $\min A$, so nehmen wir an, ohne es zu sagen, daß diese Elemente existieren.

SATZ *Seien X eine total geordnete Menge und $x, y \in X$. Dann existieren* $\max \{x, y\}$ *und* $\min \{x, y\}$ *. Allgemeiner besitzt jede endliche nicht-leere Teilmenge von X ein Maximum und ein Minimum.*

DEFINITION 2 Zur Vereinfachung schreibt man $\max (x, y)$ und $\min (x, y)$ anstelle von $\max \{x, y\}$ und $\min \{x, y\}$.

Approximationseigenschaft Seien X eine total geordnete Menge, $A \subset X$ und $s \in X$. Genau dann ist s das Supremum von A , wenn s eine obere Schranke von A ist und wenn für alle $x \in X$ mit $x < s$ ein $a \in A$ mit $a > x$ existiert.

HAUPTSATZ (von Dedekind) *Sei A eine nicht-leere und nach oben beschränkte Teilmenge in $\mathbb{R}$. Dann existiert das Supremum* $\sup A$ *von A .*

BEISPIEL 1 Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$c = \sup \{x \in \mathbb{Q} \mid x < c\} = \sup c\ .$$

BEMERKUNG Man kann zeigen, daß für $c \notin \mathbb{Q}$ die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < c\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt.

4.9 Satz von Archimedes

LEMMA $\mathbb{N}$ *ist in* $\mathbb{R}$ *nicht nach oben beschränkt.*

HAUPTSATZ (von Archimedes) $\mathbb{R}$ *ist archimedisch, d.h. für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $x, y > 0$ *existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *, so daß* $n \cdot x \geqslant y$ *ist.*

Insbesondere ist die Menge $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\} \neq \emptyset$ und besitzt ein größtes Element.

DEFINITION 1 Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\lfloor x \rfloor := \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$$

und nennt diese Zahl die *(untere) Gaußklammer* von x . Analog definiert man die *(obere) Gaußklammer* von x durch

$$\lceil x \rceil := - \lfloor -x \rfloor = \min \{n \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant n\} \ .$$

Es gilt

$$\lfloor x \rfloor , \lceil x \rceil \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil \ .$$

BEMERKUNG Man kann zeigen, daß jeder total geordnete Körper, in dem der Satz von Dedekind gültig ist, zu $\mathbb{R}$ isomorph ist.

DEFINITION 2 Die Menge

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\emptyset, \mathbb{Q}\} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{Q})$$

ist durch die von $\mathfrak{P}(\mathbb{Q})$ induzierte Ordnung $\subset$ total geordnet. Die Elemente $\emptyset$ und $\mathbb{Q}$ werden mit $-\infty$ bzw. ∞ bezeichnet. Man nennt $\overline{\mathbb{R}}$ die *erweiterte Zahlengerade* .

Es gilt

$$-\infty < x < \infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \ ,$$

d.h. $-\infty$ und ∞ sind das kleinste bzw. das größte Element von $\overline{\mathbb{R}}$.

SATZ $\overline{\mathbb{R}}$ *ist eine total geordnete Menge, und jede Teilmenge* $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ *besitzt ein Supremum und ein Infimum in* $\overline{\mathbb{R}}$ *. Es gilt*

$$\sup \emptyset = -\infty \quad \textit{und} \quad \inf \emptyset = \infty \ .$$

Genau dann ist eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ *nicht nach oben beschränkt bzw. nicht nach unten beschränkt in* $\mathbb{R}$ *, wenn*

$$\sup A = \infty \quad , \textit{bzw.} \quad \inf A = -\infty \quad \textit{in } \overline{\mathbb{R}} \ .$$

DEFINITION 3 Für alle $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a \leqslant b$ definiert man das *abgeschlossene* bzw. *offene* , *nach rechts offene* und *nach links offene Intervall* durch

$$[a, b] := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leqslant x \leqslant b\right\} \ ,$$

$$]a, b[:= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\right\} \subset \mathbb{R} \ ,$$

$$[a, b[:= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leqslant x < b\right\}$$

und

$$]a, b] := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leqslant b\right\} \ .$$

FUNDAMENTALES BEISPIEL $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n} = 0$.

Insbesondere für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \leqslant \varepsilon \textit{ für alle } \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant 0 \ .$$

4.10 Bernoulli Ungleichung

DEFINITION Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in einer geordneten Menge heißt *(monoton) wachsend* bzw. *fallend* , falls für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_{k+1} \geqslant x_k \quad \text{bzw.} \quad x_{k+1} \leqslant x_k \ .$$

Man sagt, sie ist *streng wachsend* bzw. *streng fallend* , wenn die Ungleichungen strikt sind.

BEISPIEL Die Folge $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng fallend in $\mathbb{R}$.

HAUPTSATZ (Bernoulli-Ungleichung) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geqslant -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + n \cdot x \ .$$

KOROLLAR *Sei $y \in \mathbb{R}_+^*$.*

(i) Ist $y > 1$, so ist $\left(y^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ streng wachsend und für alle $M \in \mathbb{R}_+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $y^n \geqslant M$. In anderen Worten gilt

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} y^k = \infty \ .$$

(ii) Ist $0 < y < 1$, so ist $\left(y^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ streng fallend und

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} y^k = 0 \ .$$

4.11 Rechnen mit Suprema und Infima

DEFINITION 1 Für Teilmengen A, B von $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ definiert man

$$-A := \{-x \mid x \in A\} \quad , \quad a + B := \{a + b \mid b \in B\} \ ,$$

$$A + B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\} \quad \text{und} \quad A \cdot B := \{x \cdot y \mid x \in A, y \in B\} \ .$$

Ist A eine Teilmenge von $\mathbb{R}^*$, so definiert man

$$\frac{1}{A} := \left\{ \frac{1}{a} \mid a \in A \right\} \ .$$

SATZ *Seien A, B nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$.*

(i) Ist $A \subset B$ und ist B nach oben beschränkt, so ist A nach oben beschränkt und

$$\sup A \leqslant \sup B \ .$$

(ii) Ist $(a_{j,k})_{(j,k) \in J \times K}$ eine (doppelt indizierte) und nach oben beschränkte Familie in $\mathbb{R}$, so sind die Familien $(a_{j,k})_{k \in K}$, $(a_{j,k})_{j \in J}$, $(\sup_{k \in K} a_{j,k})_{j \in J}$ und $\left(\sup_{j \in J} a_{j,k}\right)_{k \in K}$ nach oben beschränkt und

$$\sup_{(j,k) \in J \times K} a_{j,k} = \sup_{j \in J} (\sup_{k \in K} a_{j,k}) = \sup_{k \in K} \left(\sup_{j \in J} a_{j,k}\right) \ .$$

(iii) Ist A nach unten beschränkt, so ist $-A$ nach oben beschränkt und

$$\inf A = -\sup(-A) \ .$$

(iv) Sind $a \in \mathbb{R}$ und B nach oben beschränkt, so ist $a + B$ nach oben beschränkt und

$$\sup(a + B) = a + \sup B \ .$$

(v) Sind A, B nach oben beschränkt, so ist $A + B$ nach oben beschränkt und

$$\sup(A + B) = \sup_{a \in A} (a + \sup B) = \sup A + \sup B \ .$$

(vi) Sind $a \in \mathbb{R}_+$ und B nach oben beschränkt, so ist $a \cdot B$ nach oben beschränkt und

$$\sup(a \cdot B) = a \cdot \sup B \ .$$

(vii) Sind $A \subset \mathbb{R}_+$ und B nach oben beschränkt, so ist $A \cdot B$ nach oben beschränkt und

$$\sup(A \cdot B) = \sup_{a \in A} (a \cdot \sup B) = \sup A \cdot \sup B \ .$$

(viii) Ist $A \subset \mathbb{R}_+^*$ nach oben beschränkt, so ist $\frac{1}{A}$ nach unten beschränkt und

$$\inf \frac{1}{A} = \frac{1}{\sup A} \ .$$

DEFINITION 2 Für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert man

$$|x| := \max(x, -x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x & & x \geqslant 0 \\ & \text{falls} & \\ -x & & x < 0 \end{array} \right. ,$$

und nennt dies den *Absolutbetrag* oder kürzer den *Betrag* von x .

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$|x| \geqslant 0 \quad , \quad \pm\, x \leqslant |x| \quad , \quad |-x| = |x| \ ,$$

und

$$|x - y| \leqslant r \quad \Longleftrightarrow \quad y - r \leqslant x \leqslant y + r \ .$$

LEMMA *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$x^2 \leqslant y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \leqslant |y| \ .$$

Aufgabe 1 Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen:

(a)

$$\left\{ \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

(b)

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{x} \leqslant 1 - 2x^2 \right\} \ .$$

Existieren Maximum und Minimum?

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\min(x, y) + \max(x, y) = x + y \ ,$$

$$\max(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (x + y + |x - y|) \quad \text{und} \quad \min(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (x + y - |x - y|) \ .$$

Aufgabe 3 Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$ nichtleere und beschränkte Teilmengen. Zeigen Sie:

(a)

$$\sup(X \cup Y) = \max(\sup X, \sup Y)$$

und

$$\inf(X \cup Y) = \min(\inf X, \inf Y) \ .$$

(b) Gilt $X \cap Y \neq \emptyset$, dann ist

$$\sup(X \cap Y) \leqslant \min(\sup X, \sup Y)$$

und

$$\max(\inf X, \inf Y) \leqslant \inf(X \cap Y) \ .$$

Kann hierbei "strikt kleiner" gelten?

4.12 Existenz der Quadratwurzel

HAUPTSATZ *Für alle $a \in \mathbb{R}_+$ existiert in $\mathbb{R}_+$ genau eine Lösung der Gleichung $x^2 = a$. Sie heißt* Quadratwurzel *von a und wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet. Es gilt*

$$\sqrt{a} := \sup \left\{ y \in \mathbb{R}_+ \mid y^2 \leqslant a \right\} \ .$$

KOROLLAR *Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.*

Aufgabe 1 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Mengen

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geqslant 0 \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leqslant 0 \right\} \ .$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Menge

$$C := \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + axy + by^2 \geqslant 0 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie für die Menge

$$X := \left\{ \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$$

Supremum und Infimum. Entscheiden Sie, ob es sich dabei um ein Maximum bzw. ein Minimum handelt.

Hinweis: Es ist nützlich, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ so zu erweitern, dass man die Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

anwenden kann.

4.13 Konstruktion der komplexen Zahlen

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

DEFINITION 1 In der Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ definiert man eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$

und

$$(x, y) \cdot (u, v) := (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u) \ .$$

Man sagt, daß $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen ist.

Man setzt

$$i := (0, 1) \ .$$

HAUPTSATZ *$\mathbb{C}$ ist ein kommutativer Körper. Das neutrale Element der Addition ist $(0, 0)$, das der Multiplikation $(1, 0)$. Das Inverse von (x, y) bzgl. der Addition ist $(-x, -y)$ und das Inverse von $(x, y) \neq (0, 0)$ bzgl. der Multiplikation ist*

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \ .$$

BEMERKUNG 1 Die Abbildung

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto (x, 0)$$

ist eine Injektion und für alle $x, u \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0) \quad \text{und} \quad (x, 0) \cdot (u, 0) = (x \cdot u, 0) \ .$$

Somit induziert die Körperstruktur von $\mathbb{C}$ diejenige von $\mathbb{R}$ und wir werden $\mathbb{R}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ identifizieren. Das Paar $(x, 0)$ wird mit x bezeichnet. Für alle $y \in \mathbb{R}$, gilt

$$i \cdot y = (0, y) \quad \text{und} \quad i \cdot (0, y) = -y \ .$$

Insbesondere ist $i^2 = -1$ und $(x, y) = x + i \cdot y$.

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ schreibt sich also eindeutig in der Form

$$z = x + i \cdot y \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R} \ .$$

DEFINITION 2 Man sagt, daß x bzw. y der *Realteil* bzw. der *Imaginärteil* von z ist. Er wird mit $\operatorname{Re} z$ bzw. $\operatorname{Im} z$ bezeichnet.

Man setzt

$$\overline{z} := x - i \cdot y$$

und nennt sie die *komplex-konjugierte Zahl* von z .

Es gilt

$$\overline{z} \cdot z = x^2 + y^2 \geqslant 0 \ .$$

BEMERKUNG 2 Es sei bemerkt, daß

$$(x + i \cdot y) + (u + i \cdot v) = (x + u) + i \cdot (y + v)$$

und

$$(x + i \cdot y) \cdot (u + i \cdot v) = x \cdot u + i \cdot x \cdot v + i \cdot y \cdot u + i^2 \cdot y \cdot v = x \cdot u - y \cdot v + i \cdot (x \cdot v + y \cdot u) \ .$$

Hier sieht man wieder die Definition der Summe und des Produktes zweier komplexer Zahlen.

BEMERKUNG 3 Für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\overline{z} \cdot z} = \frac{x - i \cdot y}{x^2 + y^2} \ .$$

also

$$\overline{z} \cdot z = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{z} = \overline{z} \ .$$

Insbesondere gilt

$$\overline{i} = -i \quad , \quad \overline{i} \cdot i = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{i} = -i \ .$$

SATZ *Seien $z, w \in \mathbb{C}$.*

(i) Es gilt

$$z = \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z \quad \textit{und} \quad \overline{z} = \operatorname{Re} z - i \cdot \operatorname{Im} z$$

sowie

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} \cdot (z + \overline{z}) \quad \textit{und} \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} \cdot (z - \overline{z}) \ .$$

(ii) Die Eigenschaften

$$z \in \mathbb{R} \quad , \quad \operatorname{Im} z = 0 \quad \textit{und} \quad z = \overline{z}$$

sind äquivalent.

(iii) Es gilt

$$\overline{\overline{z}} = z \quad , \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \textit{und} \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \ .$$

Aufgabe Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{2 - 5i}{4 + 3i} \quad \text{und} \quad \left(\frac{4 \cdot i^{11} - i}{1 + 2i} \right)^2 \ .$$

4.14 Absolutbetrag in $\mathbb{C}$

DEFINITION 1 Für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert man

$$|z| := \sqrt{\overline{z} \cdot z} \ ,$$

und nennt dies den *Absolutbetrag* oder kürzer den *Betrag* von z .

Diese Definition stimmt mit der für $z \in \mathbb{R}$ überein (vgl. Definition 4.11.2).

SATZ *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$|z| \geqslant 0 \quad , \quad |\overline{z}| = |z| \quad , \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad , \quad |\operatorname{Re} z| \, , |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$$

und

$$|z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0 \ .$$

Dreiecksungleichung *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$|z + w| \leqslant |z| + |w| \ ,$$

sowie

$$|z| - |w| \leqslant |z - w| \quad \textit{und} \quad ||z| - |w|| \leqslant |z - w| \ .$$

Aufgabe Bestimmen Sie für die folgenden Teilmengen $Z_j \subset \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, die Zahlen

$$\sup |Z_j| \quad \text{und} \quad \inf |Z_j|$$

und untersuchen Sie, ob es sich dabei um Maxima bzw. Minima handelt. Versuchen Sie, die Mengen Z_j zu skizzieren!

(a)

$$Z_1 := \left\{ \frac{1}{z} \;\middle|\; |z| \geqslant 1 \right\} \ .$$

(b)

$$Z_2 := \left\{ \frac{z - i}{z + i} \;\middle|\; \operatorname{Im} z > 0 \right\} \ .$$