Kapitel 6

REIHEN

Fassung vom 21. April 2002

6.1 Der Begriff der Reihe

DEFINITION Sei $(z_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ definiert durch

$$s_k := \sum_{l=0}^{k} z_l$$

heißt die *Folge der Partialsummen* von $(z_l)_{l\in\mathbb{N}}$. Zur Vereinfachung spricht man von der *Reihe* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$.

Man sagt, daß diese Reihe *konvergent* ist, falls die Folge der Partialsummen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Man bezeichnet dann auch mit $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ den Limes dieser Folge. Er heißt *Summe* der Reihe, d.h.

$$\sum_{l=0}^{\infty} z_l = \lim_k s_k = \lim_k \sum_{l=0}^{k} z_l \ .$$

Die Reihe heißt *divergent* falls die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergent ist.

BEISPIEL 1 Die *geometrische Reihe* $\sum_{l=0}^{\infty} z^l$ ist genau dann konvergent, wenn $|z| < 1$. In diesem Fall gilt

$$\sum_{l=0}^{\infty} z^l = \frac{1}{1-z} \ .$$

Achilles und die Schildkröte Das Paradoxon von Zenon (495-435 v. Chr.) kann man folgendermaßen beschreiben. Achilles startet in 0 und die Schildkröte in $x \in \mathbb{R}_+^*$. Zenon behauptet, daß Achilles die Schildkröte nie überholt. Wenn Achilles in $x_0 := x$ ankommt ist aber die Schildkröte schon in $x_1 > x$. Ist er dann in x_1 , ist sie in $x_2 > x_1$, usw...

Bezeichnet man mit v die Geschwindigkeit von Achilles und ist $q \cdot v$ die der Schildkröte mit $q \in \left]0,1\right[$, wenn Achilles in $x_0 = x$ ankommt ist die Schildkröte in $x_1 = x + q \cdot x$. Ist er dann in x_1 , ist sie in $x_2 = x + q \cdot x + q^2 \cdot x$, usw... Nach k Etappen ist die Schildkröte in

$$x_k = \sum_{l=0}^{k} q^l \cdot x \ .$$

Die maximale zurückgelegte Distanz ist dann

$$\sup_k x_k = \lim_k \sum_{l=0}^{k} q^l \cdot x = x \cdot \sum_{l=0}^{\infty} q^l = \frac{x}{1-q} \ .$$

Genauso ist es für die vergangene Zeit, die zuerst $\frac{1}{v} \cdot x$ ist, dann $\frac{1}{v} \cdot (x + q \cdot x)$, usw..., d.h.

$$\frac{x}{v} \cdot \sum_{l=0}^{k} q^l$$

nach der k-ten Etappe. Diese Zeit wird also nicht

$$\frac{x}{v} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} q^l = \frac{x}{v} \cdot \frac{1}{1-q}$$

überschreiten, was mit unsere Erfahrung nicht möglich ist.

BEISPIEL 2 Es gilt

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l\,(l+1)} = 1 \ .$$

Aufgabe 1 Es gilt

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{4}{l\,(l+1)\,(l+2)} = 1 \ .$$

SATZ *Seien $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ und $\sum_{l=0}^{\infty} w_l$ konvergente Reihen in $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann konvergieren die Reihen $\sum_{l=0}^{\infty} (z_l \pm w_l)$ und $\sum_{l=0}^{\infty} a \cdot z_l$ und es gilt*

$$\sum_{l=0}^{\infty} (z_l \pm w_l) = \sum_{l=0}^{\infty} z_l \pm \sum_{l=0}^{\infty} w_l \ ,$$

sowie

$$\sum_{l=0}^{\infty} a \cdot z_l = a \cdot \sum_{l=0}^{\infty} z_l \ .$$

BEMERKUNG 1 Wie für Folgen (siehe Satz 5.2), hängt die Konvergenz einer Reihe nur von den Termen, ab einen bestimmten Index, ab. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\sum_{l=0}^{\infty} z_l = \sum_{l=0}^{n-1} z_l + \sum_{l=n}^{\infty} z_l \ .$$

BEMERKUNG 2 Jede Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ kann man als die Folge der Partialsummen der Reihe $z_0 + \sum_{l=1}^{\infty} (z_l - z_{l-1})$ auffassen, da

$$z_k = z_0 + \sum_{l=1}^{k} (z_l - z_{l-1}) \ .$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{10 \cdot 3^l - 2}{11^{l+1}} \ .$$

6.2 Reihen mit positiven Termen

SATZ *Sei* $\sum_{l=0}^{\infty} x_l$ *eine Reihe mit positiven Termen, d.h. mit* $x_l \geqslant 0$ *für alle* $l \in \mathbb{N}$ *. Genau dann ist diese Reihe konvergent, wenn die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{l=0}^{\infty} x_l = \sup_k \sum_{l=0}^{k} x_l \ .$$

BEISPIEL 1 Die harmonische Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}$ ist divergent.

BEISPIEL 2 Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$, ist die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}$ konvergent. Die Funktion

$$\zeta : \left]1, \infty\right[\longrightarrow \mathbb{R} : s \longmapsto \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}$$

heißt *Riemannsche Zeta-Funktion* .

Mit Hilfe der Fourierreihentheorie kann man zeigen, daß

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^6} = \frac{\pi^6}{945} \ .$$

Aufgabe 1 Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}$ ist konvergent.

(b) Es gilt

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ .$$

Der gemeinsame Grenzwert wird mit e bezeichnet und heißt *Eulersche Zahl* (siehe 6.16).

Beweisen Sie zuerst mit Hilfe der Binomischen Formel, daß

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

gilt und benutzen Sie dann Aufgabe 5.3.1.

(c) Für alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$0 < e - \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} < \frac{1}{k \cdot k!} \ .$$

(d) Die Zahl e ist irrational.

Aufgabe 2 Sind folgende Reihen konvergent ?

(a)
$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+4}{l^2-3l+1} \ .$$

(b)
$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{l+1}-\sqrt{l}}{\sqrt{l+1}} \ .$$

(c)
$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{l+1}-\sqrt{l}}{\sqrt{(l+1)^3}} \ .$$

(d)
$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l+1}-\frac{1}{2l}\right) \ .$$

Aufgabe 3 (Verdichtungsprinzip von Cauchy) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge. Genau dann ist die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ konvergent, wenn die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m \cdot a_{2^m}$ konvergent ist.

Folgern Sie, daß die harmonische Reihe divergent ist.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, daß für alle $s \in \mathbb{R}_+^*$ mit $s > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{s-1}{l^s} + \frac{1}{(l+1)^{s-1}} - \frac{1}{l^{s-1}}\right)\right] \ .$$

De la Vallée Poussin [1] hat gezeigt, daß die Reihe

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{s-1}{l^s} + \frac{1}{(l+1)^{s-1}} - \frac{1}{l^{s-1}}\right)$$

für alle $s \in \mathbb{R}_+^*$ konvergent ist. In der Tat gilt

$$\left(\frac{1-s}{l^s} + \frac{1}{l^{s-1}} - \frac{1}{(l+1)^{s-1}}\right) \leqslant \frac{1}{l^{s+1}}$$

für alle $s \in \left]0,1\right[$ und $l \in \mathbb{N}^*$. Damit kann man die Riemannsche Zeta-Funktion auf $\mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$ definieren.

Die Ungleichung kann man mit Hilfe von

$$1 - sx - \frac{x^2}{1-x} \leqslant (1-x)^s$$

für alle $x \in \left[0,1\right[$ (vgl. Aufgabe 10.8.2) beweisen.

[1] C. de la Vallée Poussin, Mém. Acad. Sci. Belg. 53 (1896), n° 6.

6.3 Entwicklungen in der Basis p

Seien $p \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\}$ und $x \in \mathbb{R}_+^*$. Die Menge aller ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{1}{p^k} \leqslant x$ ist nach unten beschränkt. Sei also $m \in \mathbb{Z}$ das kleinste. Für alle $k \geqslant m$ definiert man durch Induktion naturliche Zahlen x_k als die größten, so daß

$$\sum_{l=m}^{k} x_l \cdot \frac{1}{p^l} \leqslant x \quad \text{für alle } k \geqslant m \ ,$$

d.h.

$$x_k = \left\lfloor p^k \cdot \left(x - \sum_{l=m}^{k-1} x_l \cdot \frac{1}{p^l} \right) \right\rfloor \quad \text{für alle } k \geqslant m \ .$$

SATZ *Es gilt*

$$x = \sum_{l=m}^{\infty} x_l \cdot \frac{1}{p^l} \ ,$$

sowie

$$0 \leqslant x_k \leqslant p-1 \textit{ für alle } k \geqslant m \quad , \quad x_m \neq 0 \tag{$*$}$$

und

$$\textit{für alle } n \in \mathbb{N} \textit{ existiert } k \in \mathbb{N} \textit{ mit } k \geqslant n \textit{ und } x_k \neq p-1 \ . \tag{$*$}$$

Diese Zerlegung ist eindeutig.

DEFINITION Erfüllt eine Folge $(x_k)_{k \geqslant m}$ die Bedingungen $(*)$ und $(**)$, so heißt

$$x = \sum_{l=m}^{\infty} x_l \cdot \frac{1}{p^l} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_{k+m} \cdot \frac{1}{p^k} \right) \cdot p^{-m}$$

die *strikte Entwicklung in der Basis* p von x . Ist $p = 10$ so nennt man sie die *strikte dezimale Entwicklung* . Man schreibt auch

$$x = x_m, x_{m+1} \dots x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots \cdot p^{-m}$$

und spricht von der *wissenschaftliche Notation* oder *Gleitpunkt-Darstellung* .

BEMERKUNG Ist $m \leqslant 0$, so schreibt man

$$x = x_m x_{m+1} \dots x_{-1} x_0 , x_1 x_2 \dots \ ,$$

wohingegen für $m > 0$

$$x = 0,0 \dots 0 x_m x_{m+1} \dots \ ,$$

wobei die Anzahl der Nullen m ist.

BEISPIEL 1 Im dezimalen System, d.h. $p = 10$, gilt

$$0,99\ldots = \sum_{l=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-l} = 1 \ ,$$

aber diese Entwicklung ist nicht strikt.

BEISPIEL 2 Im dyadischen System, d.h. $p = 2$, ist

$$\frac{2}{3} = 0,1010\ldots \ .$$

Aufgabe Zeigen Sie, daß die strikte Entwicklung in der Basis p von x genau dann periodisch ist, wenn x rational ist.

6.4 Cauchy-Kriterium

HAUPTSATZ *Sei* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ *eine Reihe in* $\mathbb{C}$ *. Genau dann konvergiert diese Reihe, wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$\left| \sum_{l=p}^{q} z_l \right| \leqslant \varepsilon \quad \textit{für alle } p, q \geqslant N \ .$$

KOROLLAR *Ist die Reihe* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ *konvergent, so gilt* $\lim_l z_l = 0$ *.*

BEMERKUNG Die Umkehrung ist falsch wie das Beispiel der harmonischen Reihe 6.2.1 zeigt.

SATZ *Sei* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ *eine Reihe in* $\mathbb{C}$ *. Existiert eine Teilfolge* $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *von* $\mathbb{N}$ *, so daß* $(z_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ *nicht gegen* 0 *konvergiert, so ist die Reihe divergent.*

Aufgabe 1 Sei $\sum_{l=0}^{\infty} x_l$ eine konvergente Reihe mit

$$0 \leqslant x_{l+1} \leqslant x_l \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N} \ .$$

Zeigen Sie, daß

$$\lim_l l \cdot x_l = 0$$

gilt, indem Sie Summen der Gestalt $\sum_{l=n+1}^{k} x_l$ mit $k \geqslant 2n$ betrachten.

Aufgabe 2 Ist die Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^l}{(l+1)^l}$$

konvergent ?

6.5 Majoranten-Kriterium

DEFINITION Eine Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ in $\mathbb{C}$ heißt *absolut konvergent* , falls die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} |z_l|$ konvergent ist.

HAUPTSATZ *Seien $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ eine Reihe in $\mathbb{C}$ und $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ eine konvergente Reihe mit positiven Termen, so daß $|z_l| \leqslant a_l$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{l=0}^{\infty} |z_l| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} a_l \ .$$

Ist die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ absolut konvergent, so konvergiert diese Reihe und es gilt

$$\left| \sum_{l=0}^{\infty} z_l \right| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} |z_l| \ .$$

BEMERKUNG Eine konvergente Reihe braucht i.a. nicht absolut zu konvergieren wie das Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe 6.7 zeigen wird.

BEISPIEL Da die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)}$ konvergent ist (siehe Bsp. 6.1.2) und da für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s \geqslant 2$, gilt

$$\frac{1}{l^s} \leqslant \frac{1}{l^2} \leqslant \frac{2}{l\,(l+1)} \ ,$$

hat man einen zweiten Beweis der Konvergenz der Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}$ für $s \geqslant 2$.

6.6 Quotienten-Kriterium

HAUPTSATZ (d'Alembert) *Seien* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ *eine Reihe in* $\mathbb{C}$ *und* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $z_l \neq 0$ *für alle* $l \geqslant m$ *. Existiert ein* $q \in [0,1[$ *mit*

$$\left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| \leqslant q \quad \textit{für alle } l \geqslant m \ ,$$

so ist diese Reihe absolut konvergent.

BEISPIEL 1 Für alle $s \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} l^s \cdot z^l$ konvergent.

Man kann zeigen (Übung 6.15) daß

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{2^l} = 2 \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^2}{2^l} = 6 \ .$$

Im Beispiel 8.15.3 werden wir zeigen, daß

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2^l} = \ln\ 2 \ .$$

BEISPIEL 2 Die harmonische Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}$ erfüllt folgende Bedingung :

$$\left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| = \frac{l}{l+1} < 1 \quad \text{für alle } l \geqslant 1 \ ,$$

aber es gibt kein $q \in [0,1[$ und kein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{l}{l+1} \leqslant q \quad \text{für alle } l \geqslant m \ .$$

Das Kriterium ist also nicht anwenbar, was nicht verwunderlich ist, da die harmonische Reihe 6.2.1 divergent ist.

BEISPIEL 3 Die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ ist konvergent nach Beispiel 6.2.2. Das Quotienten-Kriterium ist aber auch nicht anwenbar.

Aufgabe Sind die folgenden Reihen konvergent ?

(a)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l!}{l^l} \ .$$

(b)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^3 \cdot l!}{l^l} \ .$$

6.7 Leibniz-Kriterium

HAUPTSATZ *Sei $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine fallende Nullfolge. Dann ist die alternierende Reihe*

$$\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot x_l$$

konvergent. Präziser sind die Partialsummen $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ wachsend bzw. fallend. Für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt

$$s_{2k+1}\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot x_l\leqslant s_{2k}\ ,$$

und

$$\left|\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot x_l-\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\cdot x_l\right|\leqslant x_{k+1}\ .$$

BEISPIEL Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\cdot\frac{1}{l}\ ,$$

sowie

$$\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot\frac{1}{2l+1}\ ,$$

sind konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Später werden wir zeigen (vgl. Beispiel 8.15.3), daß

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\cdot\frac{1}{l}=\ln\ 2\quad\text{und}\quad\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot\frac{1}{2l+1}=\frac{\pi}{4}\ .$$

Aufgabe 1 Sind die folgenden Reihen konvergent ?

(a)

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}+\frac{(-1)^l}{\sqrt{l}}\right)\ .$$

(b)

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\cdot\sin\frac{1}{l}\ .$$

(c)

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4+(-1)^l\cdot l}{l^2+l}\ .$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Menge der $x \in \mathbb{R}$, so daß die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \cdot (-x)^l$ konvergent ist und zeigen Sie, daß

$$1 - 2x \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \cdot (-x)^l \leqslant 1 - 2x + 3x^2 \quad \text{für alle } x \in \left[0, \frac{3}{4}\right] .$$

6.8 Wurzel-Kriterium

HAUPTSATZ (Cauchy) *Seien* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ *eine Reihe in* $\mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ *und* $q \in [0,1[$. *Gilt*

$$\sqrt[l]{|z_l|} \leqslant q \quad \text{für alle } l \geqslant m \ ,$$

so ist die Reihe absolut konvergent.

DEFINITION Eine Reihe der Gestalt

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l \ ,$$

wobei $(c_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ sind, heißt *Potenzreihe* .

SATZ *Ist die Potenzreihe* $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l$ *für ein* $w \in \mathbb{C}$ *konvergent, so ist sie für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < |w|$ *absolut konvergent.*

Aufgabe 1 Ist die Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{l+1} \right)^{l^2}$$

konvergent ?

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2 - (-1)^l}{2^l}$$

konvergent ist.

Kann man das Quotientenkriterium benutzen ? Man kann zeigen, daß die Bedingung des Quotientenkriteriums diejenige des Wurzelkriteriums impliziert.

6.9 Limes superior und Limes inferior

DEFINITION Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ (sogar in $\overline{\mathbb{R}}$) , so definiert man

$$\limsup_k x_k := \inf_{l\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} x_k\right) \in \overline{\mathbb{R}}$$

und

$$\liminf_k x_k := \sup_{l\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\in n,k\geqslant l} x_k\right) \in \overline{\mathbb{R}} \ ,$$

und nennt diese Zahlen *Limes superior* bzw. *Limes inferior* .

BEISPIEL 1 Es gilt

$$\limsup_k (-1)^k = 1 \quad , \quad \liminf_k (-1)^k = -1 \ ,$$

und

$$\limsup_{k\geqslant 1} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = 0 \quad , \quad \liminf_{k\geqslant 1} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = 0 \ .$$

BEMERKUNG 1 Die Folgen

$$\left(\sup_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} x_k\right)_{l\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left(\inf_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} x_k\right)_{l\in\mathbb{N}}$$

sind fallend bzw. wachsend. Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so sind diese Folgen konvergent und es gilt

$$\limsup_k x_k := \lim_{l\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} x_k\right) \in \mathbb{R}$$

sowie

$$\liminf_k x_k := \lim_{l\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} x_k\right) \in \mathbb{R} \ .$$

LEMMA *Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn*

$$\limsup_k x_k = \liminf_k x_k \in \mathbb{R} \ .$$

In diesem Fall gilt

$$\lim_n x_n = \limsup_n x_n = \liminf_n x_n \ .$$

SATZ *Sei $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ eine Reihe in $\mathbb{C}$.*

(i) Gilt $z_l \neq 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und

$$\limsup_l \left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| < 1 \ ,$$

so ist diese Reihe absolut konvergent.

(ii) Gilt $z_l \neq 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und

$$\liminf_l \left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| > 1 \ ,$$

so ist diese Reihe divergent.

(iii) Gilt

$$\limsup_l \sqrt[l]{|z_l|} < 1 \ ,$$

so ist diese Reihe absolut konvergent.

(iv) Gilt

$$\limsup_l \sqrt[l]{|z_l|} > 1 \ ,$$

so ist diese Reihe divergent.

BEMERKUNG 2 Konvergiert eine der Folgen $\left(\left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right|\right)_{l\in\mathbb{N}}$ bzw. $\left(\sqrt[l]{|z_l|}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ und ist der Limes < 1 , so konvergiert die Reihe absolut. Ist der Limes > 1 , so divergiert die Reihe.

BEISPIEL 2 Wir betrachten die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ definiert durch

$$a_l := \begin{cases} \frac{1}{l^2} & \text{falls} \quad l \text{ ungerade} \\ \frac{1}{(l+1)^3} & \text{falls} \quad l \text{ gerade} \end{cases} .$$

Diese Reihe ist durch die konvergente Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ majorisiert, also konvergent, aber

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{(2k+1)^3}{(2k+1)^2} = 2k+1 \quad \text{und} \quad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{(2k+1)^2}{(2k+3)^3} \leqslant \frac{1}{2k+3} \ ,$$

und somit $\limsup_l \frac{a_{l+1}}{a_l} = \infty$ und $\liminf_l \frac{a_{l+1}}{a_l} = 0$.

Aufgabe 1 Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge und $H \subset \mathbb{R}$ die Menge ihrer Häufungspunkte. Zeigen Sie, daß gilt

$$\limsup_n x_n = \max H \quad \text{und} \quad \liminf_n x_n = \min H \ .$$

Aufgabe 2 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$. Zeigen Sie, daß gilt

$$\frac{1}{\limsup_k x_k} = \liminf_k \frac{1}{x_k} \ .$$

6.10 Konvergenzradius einer Potenzreihe

DEFINITION Seien $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l$ eine Potenzreihe und C die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ für die diese Reihe konvergent ist. Man nennt

$$R := \sup |C| \in \overline{\mathbb{R}}$$

den *Konvergenzradius* dieser Reihe.

SATZ *Seien $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R und $z \in \mathbb{C}$.*

(i) Ist $|z| < R$, so ist die Reihe absolut konvergent.

(ii) Ist $|z| > R$, so ist die Reihe divergent.

(iii) Ist $|z| = R$ so kann man nichts sagen.

BEISPIEL 1 Der Konvergenzradius der geometrischen Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} z^l$ ist 1 .

BEISPIEL 2 Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot z^l$ ist 1 .

Für $z = 1$ bekommt man die divergierende harmonische Reihe, für $z = -1$ die konvergierende alternierende harmonische Reihe. Wir werden später zeigen, daß diese Reihe konvergent ist, falls $|z| = 1$ und $z \neq 1$.

HAUPTSATZ (Hadamardformel) *Der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l$ ist durch*

$$R = \frac{1}{\limsup_l \sqrt[l]{|c_l|}}$$

gegeben, wobei $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$ definiert wird.

Aufgabe 1 Zeigen Sie, daß

$$\sum_{l=0}^{\infty} z^{l!}$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 ist.

Aufgabe 2 Ist $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R , so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^{2l}$ gleich $\sqrt{R}$.

Aufgabe 3 Sind $\sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot z^l$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l \cdot z^l$ Potenzreihen mit Konvergenzradien R_a und R_b in $]0, \infty[$, so erfüllt der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot b_l \cdot z^l$ die Ungleichung $R \geqslant R_a \cdot R_b$.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^*$, so daß die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot x^{-l}$ konvergent ist.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie den Grenzwert folgender Folgen :

(a)

$$x_k := \left(\sum_{l=0}^{k} l^3 \right) \cdot k^{-4} .$$

(b)

$$x_k := \left(\sum_{l=0}^{n} l^k \right) \cdot n^{-k} \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}^* .$$

6.11 Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Wir errinern, daß eine Menge A abzählbar ist (siehe Definition 3.4) falls sie endlich ist oder falls eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf A existiert. Z.B. ist $\mathbb{Z}$ abzählbar, da

$$n \longmapsto (-1)^n \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\{ \begin{array}{ccc} m & & n = 2m \\ & \text{falls} & \\ -m-1 & & n = 2m+1 \end{array} \right.$$

eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ ist.

SATZ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

Präziser ist die Abbildung

$$(n, m) \longmapsto \frac{1}{2} \cdot (n+m)(n+m+1) + m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

eine Bijektion.

BEMERKUNG Die Umkehrabbildung kann man folgendermaßen berechnen : Ist $k \in \mathbb{N}$ gegeben, so bestimme man $l \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{l(l+1)}{2} \leqslant k < \frac{(l+1)(l+2)}{2} = \frac{l(l+1)}{2} + (l+1) \ .$$

Dann ist die einzige Lösung $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von $\frac{1}{2} \cdot (n+m)(n+m+1) + m = k$ durch

$$m := k - \frac{l(l+1)}{2} \quad \text{und} \quad n := l - m$$

gegeben.

6.12 Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

LEMMA *Eine nicht-leere Menge A ist genau dann abzählbar, wenn eine Surjektion von $\mathbb{N}$ auf A existiert.*

HAUPTSATZ *Eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist abzählbar.*

KOROLLAR $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Aufgabe 1 Zeigen Sie:

(a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(b) Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : (x, y) \longmapsto 2^{x-1} \cdot (2y - 1)$$

surjektiv ist.

Durch Induktion auf $n \in \mathbb{N}$ zeigt man mit Hilfe von Aufgabe 3.8, daß für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leqslant n$ manche $x, y \in \mathbb{N}$ mit $m = 2^{x-1} \cdot (2y - 1)$ existieren.

6.13 Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

HAUPTSATZ (von Cantor) *$\mathbb{R}$, sowie jedes Intervall mit mindestens zwei Punkten sind überabzählbar.*

KOROLLAR *Die Menge der irrationalen Zahlen ist überabzählbar.*

BEMERKUNG Eine komplexe Zahl heißt *algebraisch* (über $\mathbb{Q}$), falls sie Lösung ist einer Gleichung der Gestalt

$$\sum_{l=0}^{k} c_l \cdot x^l = 0 \quad \text{mit } c_l \in \mathbb{Z} \text{ (oder } \mathbb{Q}) \text{ für alle } l \in \{0, .., k\} \ .$$

Z.B. ist $\sqrt{2}$ algebraisch, π und e sind nicht algebraisch. Man sagt, daß eine Zahl *transzendent* ist, wenn sie nicht algebraisch ist.

Aufgabe Zeigen Sie,

(a) Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar.

(b) Die Menge der transzendenten Zahlen ist überabzählbar.

6.14 Umordnung

DEFINITION Ist $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion, so heißt die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} z_{\sigma(j)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$.

HAUPTSATZ (Umordnungssatz) *Sei $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ eine absolut konvergente Reihe. Dann ist jede Umordnung $\sum_{j=0}^{\infty} z_{\sigma(j)}$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty} z_{\sigma(j)} = \sum_{l=0}^{\infty} z_l \ .$$

BEISPIEL Es gibt eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe, die divergent ist. Z.B. :

$$1 - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] + \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{6}\right] + \ldots + \left[\sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} \frac{1}{2^k + 2l + 1} - \frac{1}{2k+2}\right] + \ldots$$

BEMERKUNG Sei $(z_j)_{j \in J}$ eine Familie in $\mathbb{C}$, die durch eine abzählbare unendliche Menge J indiziert ist. Ist für eine Abzählung $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow J$ von J die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} z_{\sigma(l)}$ absolut konvergent, dann gilt dies für jede Abzählung. Wir sagen dann, daß die Reihe $\sum_{j \in J} z_j$ *absolut konvergent* ist (man sagt auch, daß $(z_j)_{j \in J}$ eine *summierbare Familie* ist) und da die Summe dieser Reihe nicht von der Wahl dieser Abzählung abhängt, wird sie auch mit

$$\sum_{j \in J} z_j$$

bezeichnet.

6.15 Produkt von zwei Reihen

LEMMA *Ist* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ *eine konvergente Reihe und ist* $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge von* $\mathbb{N}$ *mit* $l_0 = 0$, *so ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=l_k}^{l_{k+1}-1} z_l\right)$$

konvergent und hat die gleiche Summe. Die Umkehrung ist wahr für Reihen mit positiven Termen.

BEISPIEL Die Umkehrung ist i.a. falsch wie folgendes Beispiel zeigt

$$\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \text{ ist divergent} \quad \text{und} \quad \sum_{l=0}^{\infty}(1-1) = 0 \ .$$

Sind $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ und $\sum_{l=0}^{\infty} w_l$ konvergente Reihen in $\mathbb{C}$, so gilt

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} z_l\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty} w_l\right) = \lim_k \sum_{l,m=0}^{k} z_l\cdot w_m = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^2\\ 0\leqslant l,m\leqslant k\\ l=k \text{ oder } m=k}} z_l\cdot w_m\right) ,$$

wobei die letzte Reihe konvergent ist. Man summiert nach dem Schema :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
z_0\cdot w_0 & z_0\cdot w_1 & z_0\cdot w_2 & z_0\cdot w_3 & \dots \\
\cline{1-1}
z_1\cdot w_0 & z_1\cdot w_1 & z_1\cdot w_2 & z_1\cdot w_3 & \dots \\
\cline{1-2}
z_2\cdot w_0 & z_2\cdot w_1 & z_2\cdot w_2 & z_2\cdot w_3 & \dots \\
\cline{1-3}
z_3\cdot w_0 & z_3\cdot w_1 & z_3\cdot w_2 & z_3\cdot w_3 & \dots \\
\cline{1-4}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Diese Weise zu summieren ist leider in der Praxis nicht nützlich. Zum Beispiel wenn man zwei Potenzreihen mutipliziert, um die Termen gleicher Potenz in Klammern zu setzen, möchte man diagonal summieren :

$$\begin{array}{ccccc}
z_0\cdot w_0 & z_0\cdot w_1 & z_0\cdot w_2 & z_0\cdot w_3 & \dots \\
z_1\cdot w_0 & z_1\cdot w_1 & z_1\cdot w_2 & z_1\cdot w_3 & \dots \\
z_2\cdot w_0 & z_2\cdot w_1 & z_2\cdot w_2 & z_2\cdot w_3 & \dots \\
z_3\cdot w_0 & z_3\cdot w_1 & z_3\cdot w_2 & z_3\cdot w_3 & \dots \\
\iddots & \iddots & \iddots & &
\end{array}$$

HAUPTSATZ (Cauchyprodukt) *Sind die Reihen $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ und $\sum_{l=0}^{\infty} w_l$ absolut konvergent, dann gilt*

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} z_l\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} w_l\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^2 \\ l+m=k}} z_l \cdot w_m\right) ,$$

wobei letztere Reihe absolut konvergent ist.

Aufgabe Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gelten

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \cdot z^l \quad \text{und} \quad \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+2) \cdot (l+1) \cdot z^l ,$$

indem Sie Cauchyprodukte mit der Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} z^l$ bilden. Berechnen Sie dann

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{2^l} \quad \text{und} \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^2}{2^l} .$$

6.16 Die Exponentialfunktion

LEMMA *Die Reihe* $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$ *ist absolut konvergent für alle* $z \in \mathbb{C}$ *. Ihr Konvergenzradius ist* ∞ *.*

DEFINITION Die Potenzreihe $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$ heißt *Exponentialreihe* . Die Funktion definiert durch

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \exp(z) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$$

heißt *komplexe Exponentialfunktion* . Durch Einschränkung erhält man die *reelle Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \exp(x) \ .$$

Man nennt

$$e := \exp(1) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = 2,71828\ldots$$

die *Eulersche Zahl* .

Wir errinern an die Aufgaben 5.3.1und 6.2.1. Es gilt

$$e = \lim_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ .$$

BEMERKUNG Die Folge $\left(\sqrt[k]{k!}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ist streng wachsend und $\sup_k \sqrt[k]{k!} = \infty$.

SATZ (Restabschätzung) *Schreibt man*

$$\exp(z) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{z^l}{l!} + r_n(z) \ ,$$

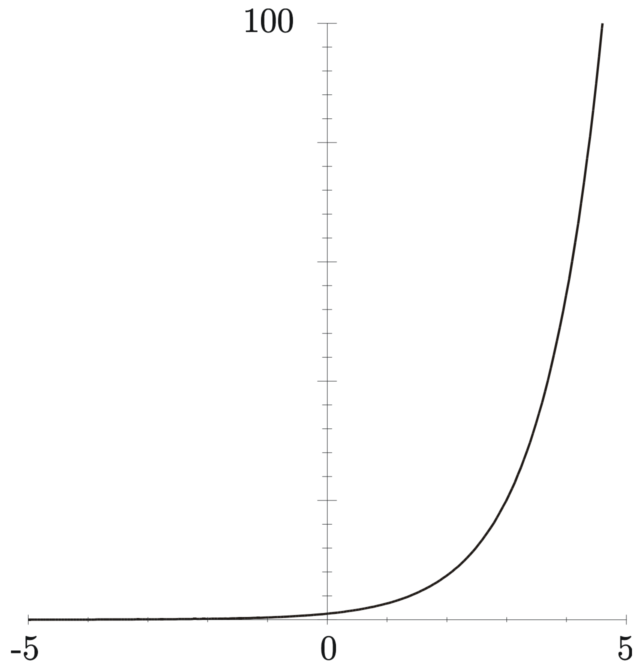
so gilt

$$|r_n(z)| \leqslant 2 \cdot \frac{|z|^n}{n!} \quad \textit{für alle } |z| \leqslant \frac{n+1}{2} \ .$$

Damit kann man Werte von exp , z.B. e , mit einer apriori Abschätzung des Fehlers berechnen. Mit Hilfe des Hornerschen Schema

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{z^l}{l!} = \left(\left(\ldots\left(\left(\frac{z}{k} + 1\right) \cdot \frac{z}{k-1} + 1\right) \cdot \frac{z}{k-2} + \ldots + 1\right) \cdot \frac{z}{2} + 1\right) \cdot z + 1 \ ,$$

kann man die Rechnungen mit wenig Speicherplatz durchführen.



$x \longmapsto \exp(x)$

x	$\exp(x)$
-3	$0,049\ldots$
-2	$0,13\ldots$
-1	$0,36\ldots$
0	1
1	$e = 2,71\ldots$
2	$7,38\ldots$
3	$20,09\ldots$
10	$2,20\ldots \cdot 10^4$
100	$2,68\ldots \cdot 10^{43}$

Aufgabe Ist die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{l^2}\right) - 1\right)$ konvergent ?

6.17 Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

HAUPTSATZ *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \ .$$

KOROLLAR *Für alle $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt*

(i)
$$\exp(z) \neq 0 \quad \textit{und} \quad \exp(-z) = \exp(z)^{-1}$$

(ii)
$$\exp(x) > 0$$

(iii)
$$\exp(nz) = \exp(z)^n$$

(iv)
$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$$

BEMERKUNG Um $\exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ zu berechnen, zerlegt man x in

$$x = \lfloor x \rfloor + h \text{ mit } 0 \leqslant h < 1 \ ,$$

und erhält

$$\exp(x) = \exp(\lfloor x \rfloor + h) = e^{\lfloor x \rfloor} \cdot \exp(h) \ .$$

Für $z \in \mathbb{C}$ schreibt man $z = x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\exp(z) = \exp(x) \cdot \exp(i \cdot y) \ .$$

Aufgabe Für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert man die hyperbolischen Funktionen durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2} \cdot [\exp(x) + \exp(-x)] \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \frac{1}{2} \cdot [\exp(x) - \exp(-x)] \ .$$

Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(a)
$$\cosh(x+y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y)$$

(b)
$$\sinh(x+y) = \cosh(x) \cdot \sinh(y) + \sinh(x) \cdot \cosh(y)$$

(c)
$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1 \ .$$

6.18 Die trigonometrischen Funktionen

Man untersucht die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \exp(ix) \ .$$

Wir setzen

$$\mathbb{U} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} \ .$$

LEMMA *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt* $\exp(ix) \in \mathbb{U}$.

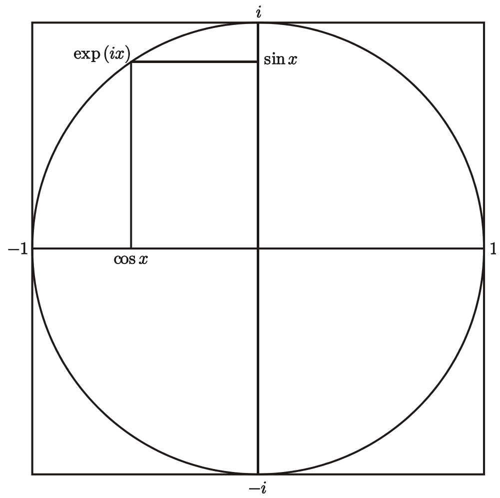
DEFINITION 1 Für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\cos x := \operatorname{Re}(\exp(ix)) \quad \text{und} \quad \sin x := \operatorname{Im}(\exp(ix)) \ ,$$

d.h.

Eulerformel

$$\exp(ix) := \cos x + i \cdot \sin x \ .$$



DEFINITION 2 Die Funktionen cos und sin heißen *Kosinusfunktion* bzw. *Sinusfunktion* .

Die geometrische Relation zwischen dem Punkt $\exp(ix) \in \mathbb{U}$ und $x \in \mathbb{R}$ wird in Theorem 7.6 und Bemerkung 7.7.2 geklärt.

SATZ *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

(i)

$$\cos x = \frac{1}{2} \cdot [\exp(ix) + \exp(-ix)] \quad \textit{und} \quad \sin\ x = \frac{1}{2i} \cdot [\exp(ix) - \exp(-ix)]$$

(ii)

$$\cos(-x) = \cos x \quad \textit{und} \quad \sin(-x) = -\sin x$$

(iii)

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Additionssätze

(iv)

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

und

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

(v)

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

und

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

(vi)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$$

und

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

Aufgabe Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z) \quad .$$

6.19 Reihenentwicklung der Funktionen cos und sin

SATZ *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \cdot x^{2l} \quad \text{und} \quad \sin x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \cdot x^{2l+1} \ ,$$

wobei diese Reihen absolut konvergent sind.

BEMERKUNG Es gilt folgende Restabschätzung : Schreibt man

$$\cos x = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \cdot x^{2l} + r_{2k+2}(x) \quad \text{und} \quad \sin x = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \cdot x^{2l+1} + r_{2k+3}(x) \ ,$$

so ist

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} \quad \text{für alle } |x| \leqslant n+1 \ .$$

Wir werden zeigen (vgl. Beispiel 8.11), daß diese Abschätzung für alle $x \in \mathbb{R}$ gültig ist.

Aufgabe

(a) Sei $x \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, daß die Folgen $\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)_{k \geqslant n}$ und $\left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)_{k \geqslant n}$ genau dann fallend sind, wenn $x \leqslant \sqrt{(2n+2)(2n+1)}$ bzw. $x \leqslant \sqrt{(2n+3)(2n+2)}$.

Unter Benutzung des Leibniz-Kriteriums 6.7 zeigen Sie, daß gilt

(b)
$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{für alle } x \in \left[-\sqrt{30}, \sqrt{30}\right] \ .$$

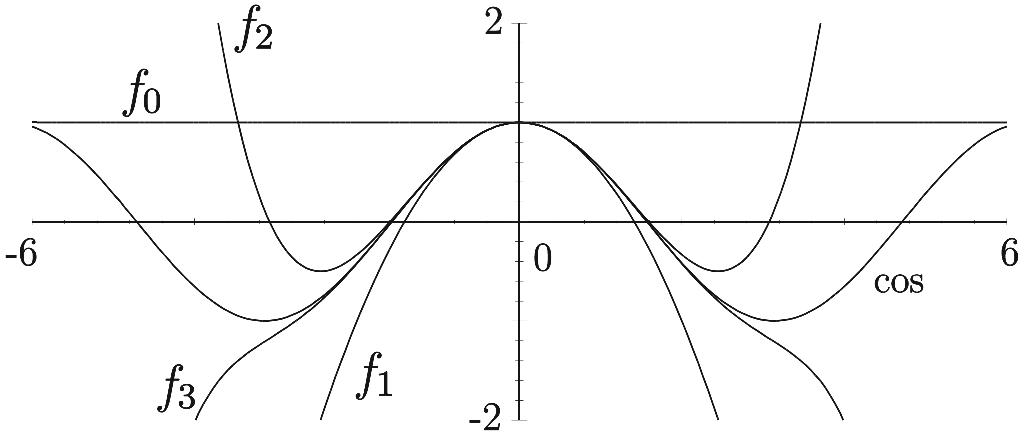
(c)
$$x \geqslant \sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6} \quad \text{für alle } x \in \left[0, \sqrt{20}\right] \ .$$

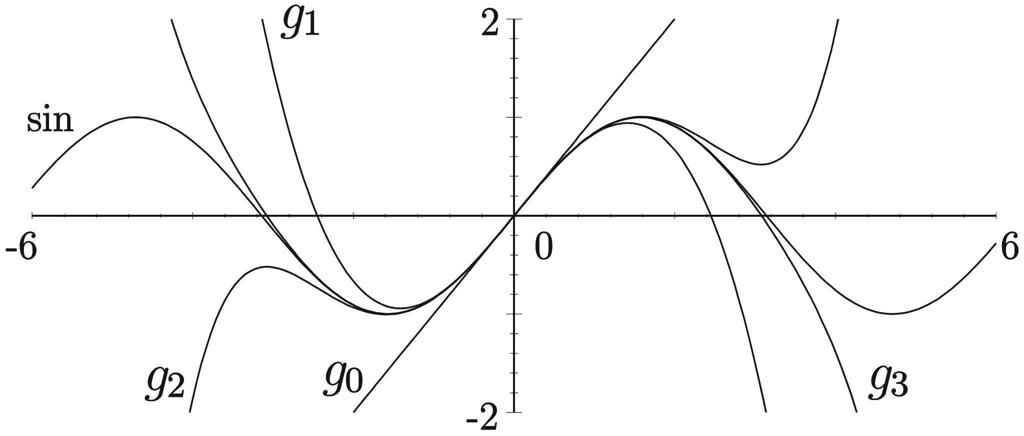
In der Tat gelten bessere Ungleichungen wie die folgenden Bilder zeigen. Man definiert

$$f_0 := 1 \ , \ f_1 := 1 - \frac{\mathrm{id}^2}{2} \ , \ f_2 := 1 - \frac{\mathrm{id}^2}{2} + \frac{\mathrm{id}^4}{24} \ , \ f_3 := 1 - \frac{\mathrm{id}^2}{2} + \frac{\mathrm{id}^4}{24} - \frac{\mathrm{id}^6}{720}$$

und

$$g_0 := \mathrm{id} \ , \ g_1 := \mathrm{id} - \frac{\mathrm{id}^3}{6} \ , \ g_2 := \mathrm{id} - \frac{\mathrm{id}^3}{6} + \frac{\mathrm{id}^5}{120} \ , \ g_3 := \mathrm{id} - \frac{\mathrm{id}^3}{6} + \frac{\mathrm{id}^5}{120} - \frac{\mathrm{id}^7}{5040}$$


f_2
2
f_0
-6
0
6
cos
f_3
f_1
-2


g_1
2
sin
-6
0
6
g_2
g_0
g_3
-2