Kapitel 7

STETIGKEIT

Fassung vom 8. Juni 2002

7.1 Der Begriff Stetigkeit

DEFINITION 1 I.a. sagt man, daß eine Abbildung von einer Menge X in $\mathbb{K}^n$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, eine *Funktion* ist. Für $n = 1$ sagt man *reelle* bzw. *komplexe Funktion* .

Intuitiv besitzt eine stetige Funktion auf einem Intervall in $\mathbb{R}$ einen Graph, den man zeichnen kann, ohne den Bleistift hochzuheben.

DEFINITION 2 Seien X, Y metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Wir sagen, daß f *in* $x \in X$ *stetig* ist, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $u \in X$ gilt

$$d_X(u, x) \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(u), f(x)) \leqslant \varepsilon \ ,$$

d.h.

$$u \in B(x, \delta, d_X) \quad \Longrightarrow \quad f(u) \in B(f(x), \varepsilon, d_Y) \ ,$$

oder

$$f(B(x, \delta, d_X)) \subset B(f(x), \varepsilon, d_Y) \ .$$

HAUPTSATZ *Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann in $x \in X$ stetig, wenn für alle gegen x konvergenten Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und es gilt*

$$f(x) = \lim_k f(x_k) \quad , \textit{ d.h. } \quad f(\lim_k x_k) = \lim_k f(x_k) \ .$$

Aufgabe 1 Seien X ein metrischer Raum und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in $x \in X$ stetige Funktion. Ist $f(x) > 0$, dann existieren $a > 0$ und $\delta > 0$, so daß $f(u) \geqslant a$ für alle $u \in B(x, \delta, d_X)$ gilt.

Aufgabe 2 Durch

$$T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2 : (x, y) \longmapsto \left(\frac{3}{5}(x - y) + 2, \frac{3}{5}(x + y) + 1\right)$$

ist eine Abbildung gegeben.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie, ob die Mengen

$$T(B(0,0), 1, d_\infty) \quad \text{und} \quad B(T(0,0), 1, d_\infty)$$

bzw.

$$T(B(0,0), 1, d_2) \quad \text{und} \quad B(T(0,0), 1, d_2)$$

ineinander enthalten sind. Skizzieren Sie die 4 Mengen.

7.2 Beispiele von stetigen Abbildungen

DEFINITION Seien X, Y metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Wir sagen, daß f eine *stetige Abbildung (auf X)* ist, wenn f in jedem Punkt von X stetig ist.

BEISPIEL 1 Eine konstante Abbildung, d.h. $X \longrightarrow Y : x \longmapsto \tilde{y}$ für ein $\tilde{y} \in Y$, ist stetig.

BEISPIEL 2 Die Abbildung $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X : x \longmapsto x$ ist stetig.

BEISPIEL 3 Die kanonischen Projektionen

$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \longrightarrow X : (x, y) \longmapsto x \quad \text{und} \quad \mathrm{pr}_2 : X \times Y \longrightarrow Y : (x, y) \longmapsto y$$

sind stetig.

BEISPIEL 4 Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig.

BEISPIEL 5 Für alle $p \in \mathbb{N}^*$ ist die Funktion $\sqrt[p]{\cdot} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto \sqrt[p]{x}$ stetig.

HAUPTSATZ *Die folgenden Abbildungen sind stetig :*

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (z, w) \longmapsto z + w \quad , \quad |\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : z \longmapsto |z| \ ,$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (z, w) \longmapsto z \cdot w \ , \ \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} : (z, w) \longmapsto \frac{z}{w} \ ,$$

$$\overline{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \overline{z}$$

$$\mathrm{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto \mathrm{Re}\, z \quad \textit{und} \quad \mathrm{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto \mathrm{Im}\, z \ .$$

Aufgabe Die Abbildungen

$$\max : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \max(x, y) \quad \text{und} \quad \min : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \min(x, y)$$

sind stetig.

7.3 Rechnen mit stetigen Abbildungen

HAUPTSATZ

(i) Seien X, Y *metrische Räume,* $f : X \longrightarrow Y$ *eine Abbildung,* Z *eine Teilmenge von* X *mit der von* X *induzierte Metrik und* $x \in Z$ *. Ist* f *in* x *stetig, dann ist auch* $f_{|Z}$ *in* x *stetig.*

(ii) Seien X, Y, Z *metrische Räume,* $f : X \longrightarrow Y$ *und* $g : Y \longrightarrow Z$ *Abbildungen. Ist* f *in* $x \in X$ *stetig und ist* g *in* $f(x)$ *stetig, so ist* $g \circ f$ *in* x *stetig.*

(iii) Seien X, Y, Z *metrische Räume,* $f : X \longrightarrow Y$ *und* $g : X \longrightarrow Z$ *Abbildungen und* $x \in X$ *. Genau dann ist*

$$(f, g) : X \longrightarrow Y \times Z : u \longmapsto (f(u), g(u))$$

in x *stetig, wenn* f *und* g *in* x *stetig sind.*

KOROLLAR *Seien* X *ein metrischer Raum,* $x \in X$ *,* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *in* x *stetige Funktionen und* $\alpha \in \mathbb{C}$ *. Dann gilt*

(i) Die Funktionen $f + g$ *,* $|f|$ *,* $\alpha \cdot f$ *und* $f \cdot g$ *sind in* x *stetig.*

(ii) Die Funktion

$$\frac{f}{g} : X \smallsetminus \{g = 0\} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

ist in x *stetig.*

(iii) Die Funktionen

$$\bar{f} : X \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \overline{f(x)} \ ,$$

$$\operatorname{Re} f : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{Re} f(x) \quad \textit{und} \quad \operatorname{Im} f : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{Im} f(x)$$

sind in x *stetig.*

BEMERKUNG Sei X ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $x \in X$ stetig, wenn der *Realteil* $\operatorname{Re} f$ und der *Imaginärteil* $\operatorname{Im} f$ von f in x stetig sind.

Aufgabe 1 Seien X ein metrischer Raum und $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x \in X$ stetige Funktionen. Dann sind

$$\max(f, g) : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \max(f(x), g(x))$$

und

$$\min(f, g) : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \min(f(x), g(x))$$

in x stetige Funktionen.

Aufgabe 2 Seien X und Y metrische Räume, Z eine Teilmenge von Y mit der von Y induzierten Metrik, $f : X \longrightarrow Z$ eine Abbildung und $x \in X$. Dann gilt

(a) Die kanonische Injektion $j : Z \hookrightarrow Y$ ist stetig.

(b) Genau dann ist $f : X \longrightarrow Z$ in x stetig, wenn $f : X \longrightarrow Y$ in x stetig ist.

BEISPIEL 1 Die trigonometrischen Funktionen cos und sin sind stetig.

BEISPIEL 2 Eine Funktion der Gestalt

$$p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \sum_{l=0}^{n} c_l \cdot z^l$$

mit $c_l \in \mathbb{C}$ für $l = 0, \ldots, n$, heißt *komplexes Polynom vom Grade* n , falls $c_n \neq 0$. Ist jedes $c_l \in \mathbb{R}$, so heißt die reelle Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *reelles Polynom* .

Jedes Polynom ist stetig.

BEISPIEL 3 Sind p und q Polynome, so nennt man die Funktion

$$\frac{p}{q} : \mathbb{C} \smallsetminus \{q = 0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \frac{p(z)}{q(z)}$$

rational .

Eine rationale Funktion ist stetig.

BEISPIEL 4 Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{lcr} 1 & & x \geqslant 0 \\ & \text{falls} & \\ -1 & & x < 0 \end{array} \right.$$

ist in 0 unstetig. Dagegen ist $f_{|\mathbb{R}_+}$ (auf $\mathbb{R}_+$) stetig.

BEISPIEL 5 Die Dirichletfunktion.

Diese Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{lcr} 0 & & x \text{ irrational} \\ & \text{falls} & \\ \frac{1}{q} & & x = \frac{p}{q} \text{ mit } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ und } p \text{ teilerfremd zu } q \end{array} \right. .$$

Die Dirichletfunktion ist in jedem irrationalen Punkt stetig und in jedem rationalen Punkt unstetig.

BEISPIEL 6 Die Funktion

$$d_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \longmapsto d_X(x, y)$$

und für alle $x \in X$ die Funktion

$$d_X(x, \cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : y \longmapsto d_X(x, y) \ ,$$

sind stetig.

7.4 Links- und rechtsseitige Stetigkeit

DEFINITION Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, Y ein metrischer Raum, $f : J \longrightarrow Y$ eine Funktion und $x \in J$. Dann heißt f in x *linksstetig* bzw. *rechtsstetig* , wenn die Einschränkung von f auf $J \cap \left]-\infty, x\right]$ bzw. auf $J \cap \left[x, \infty\right[$ in x stetig ist. Man schreibt dann

$$f(x) = \lim_{u \to x-} f(u) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \lim_{u \to x+} f(u) \ .$$

SATZ *Genau dann ist f in x stetig, wenn f in x links- und rechtsstetig ist, d.h. wenn*

$$\lim_{u \to x-} f(u) = f(x) = \lim_{u \to x+} f(u) \ .$$

Aufgabe Die Funktion $x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und wachsend.

7.5 Satz von Bolzano

HAUPTSATZ *Seien $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ und f eine reelle, stetige Funktion auf $[a,b]$ mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Dann besitzt f eine Nullstelle $\xi \in \,]a,b[$, d.h. es existiert ein $\xi \in \,]a,b[$ mit $f(\xi) = 0$.*

BEISPIEL 1 Die Funktion $x \longmapsto \exp(x) + \frac{1}{x} - 5 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Intervall $[1,2]$ eine Nullstelle.

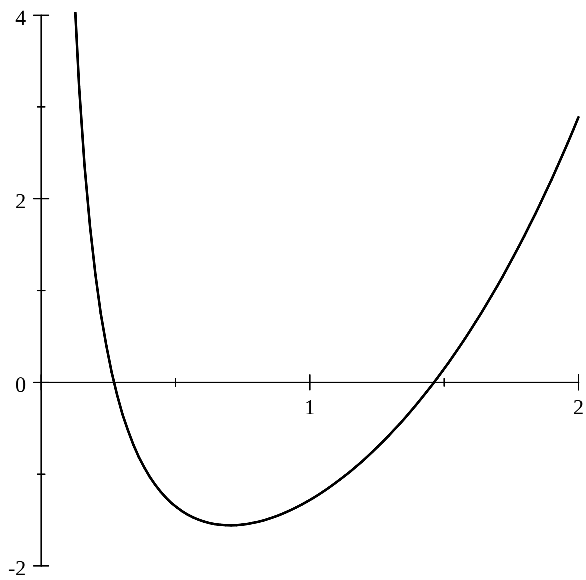
KOROLLAR (Zwischenwertsatz) *Sei f eine reelle, stetige Funktion auf einem Intervall J in $\mathbb{R}$. Für alle $x,y \in J$ mit $x \neq y$ und η strikt zwischen $f(x)$ und $f(y)$, existiert ein ξ strikt zwischen x und y mit $\eta = f(\xi)$.*

Das Bild $f(J)$ von f ist ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $\inf f(J)$ und $\sup f(J)$ als Endpunkten.

BEISPIEL 2 Für die Funktion

$$g : x \longmapsto \exp(x) + \frac{1}{x} - 5 : \,]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt $\sup g(]0,1]) = \infty$ und $g(1) \leqslant -1$, also $g(]0,1]) \supset [-1,\infty]$. Kann man $\inf g(]0,1])$ berechnen ? Diese Funktion besitzt im Intervall $]0,1]$ eine Nullstelle.



$x \longmapsto \exp(x) + \frac{1}{x} - 5$

DEFINITION Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

Diese Funktion f heißt *wachsend* bzw. *fallend* , wenn für alle $x, y \in J$ mit $x \leqslant y$ gilt $f(x) \leqslant f(y)$ bzw. $f(x) \geqslant f(y)$.

Sie heißt *streng wachsend* bzw. *streng fallend* , wenn für alle $x, y \in J$ mit $x < y$ gilt $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$.

BEMERKUNG Eine streng monotone Funktion, d.h. streng wachsend oder streng fallend, ist injektiv.

Aufgabe Man betrachte die Funktionen

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{1+x}$$

und

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x}{1+x} .$$

Was kann man von diesen Funktionen und ihren Bildern $f(\mathbb{R}_+)$ und $g(\mathbb{R}_+)$ sagen ?

7.6 Die Zahl π

SATZ *Auf dem Intervall* $[0,2]$ *ist die Funktion* $\cos$ *streng fallend und besitzt dort genau eine Nullstelle, während die Funktion* $\sin$ *dort* >0 *ist.*

DEFINITION Man bezeichnet die einzige Nullstelle von cos in $[0,2]$ mit $\frac{\pi}{2}$.

LEMMA *Ist* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine gegen* 0 *konvergente Folge in* $\mathbb{R}^*$ *, so gilt*

$$\lim_k \frac{\sin x_k}{x_k} = 1 \ .$$

HAUPTSATZ *Die Funktion* $\cos$ *bzw.* $\sin$ *ist eine fallende bzw. wachsende Bijektion von* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *auf* $[0,1]$ *. Die Funktion*

$$\exp(i\cdot) : \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \{z\in\mathbb{U} \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$$

ist eine Bijektion. Insbesondere ist

$$\cos 0 = 1 \quad , \quad \sin 0 = 0 \quad , \quad \exp(i\cdot 0) = 1$$

und

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad , \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad , \quad \exp\left(i\cdot\frac{\pi}{2}\right) = i \ .$$

Für alle $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *, ist die "Länge des Bogens" auf* $\mathbb{U}$ *zwischen* 1 *und* $\exp(ix)$ *, d.h. die Länge der "Kurve"* $\{\exp(iu) \mid 0\leqslant u\leqslant x\}$ *, gleich* x *.*

BEMERKUNG 1 Sei $n\in\mathbb{N}^*$. Die Länge des Polygonzuges durch die Punkte

$$\exp\left(i\cdot\frac{k}{n}\cdot x\right)\in\mathbb{U} \quad \text{für } k=0,1,\ldots,n$$

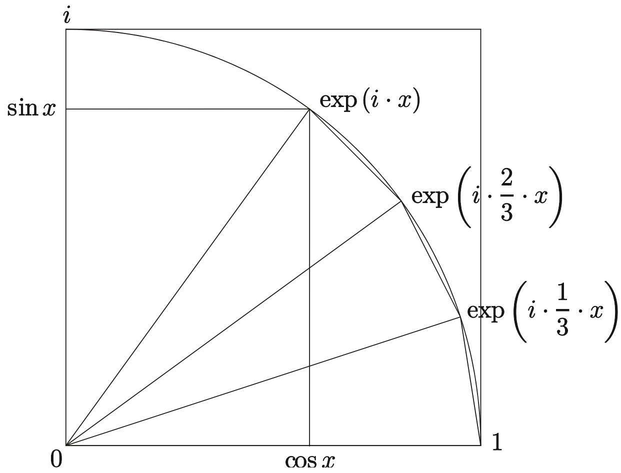
ist durch

$$l_n := \sum_{k=0}^{n-1}\left|\exp\left(i\cdot\frac{k+1}{n}\cdot x\right) - \exp\left(i\cdot\frac{k}{n}\cdot x\right)\right|$$

gegeben. Die Folge $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und die *Länge des Bogens* auf $\mathbb{U}$ zwischen 1 und $\exp(ix)$ wird dann durch

$$l := \lim_n l_n$$

definiert. Eine allgemeinere Definition wird später gegeben (siehe 11.16).



BEMERKUNG 2 Somit stimmen die Funktionen cos und sin , die mit Hilfe der Eulerformel

$$\exp(ix) = \cos x + i \cdot \sin x$$

definiert wurden, mit den klassischen Funktionen, die geometrisch am Einheitskreis definiert sind, überein.

Aufgabe Zeigen Sie die Existenz eines $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit

$$\sin x = \cos 2x \; .$$

7.7 Periodizität der trigonometrischen Funktionen

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt
$$\exp\left(in \cdot \frac{\pi}{2}\right) = i^n \ ,$$
insbesondere
$$\exp(i \cdot \pi) = -1 \quad \text{und} \quad \exp(2\pi i) = 1 \ .$$

(1) $2\pi i$**–Periodizität von** exp **.** Für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt
$$\exp(z + 2\pi i \cdot n) = \exp(z) \ .$$

(2) 2π**–Periodizität von** cos **und** sin **.** Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt
$$\cos(x + 2\pi \cdot n) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi \cdot n) = \sin x \ .$$

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\cos(x \pm \pi) = -\cos x \quad , \quad \sin(x \pm \pi) = -\sin x \ ,$$
und
$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x \quad , \quad \sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x \ .$$

SATZ

(i) Genau dann ist $x \in \mathbb{R}$ Lösung von $\cos x = 0$ bzw. $\sin x = 0$ oder $\exp(ix) = 1$, wenn $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$ bzw. $x = \pi \cdot n$ oder $x = 2\pi \cdot n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Die Funktion cos *ist eine fallende bzw. wachsende Bijektion von $[0, \pi]$ bzw. $[\pi, 2\pi]$ auf $[-1, 1]$.*

Die Funktion sin *ist eine wachsende bzw. fallende Bijektion von $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bzw. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ auf $[-1, 1]$.*

(iii) Die Abbildung $x \longmapsto \exp(ix) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$ ist surjektiv. Für alle $z \in \mathbb{U}$ sind die Lösungen von $\exp(ix) = z$ der Gestalt $x = u + 2\pi \cdot n$ für ein eindeutig bestimmtes $u \in \left]-\pi, \pi\right]$ und alle $n \in \mathbb{Z}$. Man könnte auch $u \in \left[0, 2\pi\right[$ wählen.

DEFINITION Für alle $z \in \mathbb{U}$ setzt man
$$\arg z := x \quad \text{falls } x \in \left]-\pi, \pi\right] \text{ und } \exp(ix) = z \ .$$
Allgemeiner definiert man für jedes $z \in \mathbb{C}^*$
$$\arg z := \arg \frac{z}{|z|} \quad \text{und} \quad \arg 0 := 0 \ .$$
Diese Zahl heißt *Argument* der komplexen Zahl z .

Es gilt dann
$$z = |z| \cdot \exp(i \cdot \arg\, z) \ .$$

Man könnte auch $\arg\, z \in \left]-\pi, \pi\right]$ wählen, muß aber immer die getroffene Wahl präzisieren, und darf diese nicht im Laufe einer Überlegung wechseln !

BEMERKUNG 1 Insbesondere ist $\exp(i\cdot) :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{U}$ bijektiv und die Abbildung

$$(r, \varphi) \longmapsto r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

ist eine Bijektion mit Umkehrabbildung

$$z \longmapsto \left(\frac{z}{|z|}, \arg z\right) : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi] \ .$$

Man nennt (r, φ) die *Polarkoordinaten* von $\mathbb{C}^*$ oder $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$.

BEMERKUNG 2 Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} : x \longmapsto \exp(i \cdot x)$$

beschreibt die Bewegung eines Punktes auf $\mathbb{U}$; man sagt, daß er sich in die positive bzw. negative Richtung dreht falls x wächst bzw. fällt. Man spricht von einer parametrisierten Kurve (vgl. 11.1). Die Länge des Bogens auf $\mathbb{U}$ zwischen 1 und $\exp(ix)$ ist gleich $|x|$.

BEMERKUNG 3 Die Funktion arg ist in allen Punkten von $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-$ stetig. In allen Punkten von $\mathbb{R}_-$ ist sie unstetig, insbesondere in 0 und -1 .

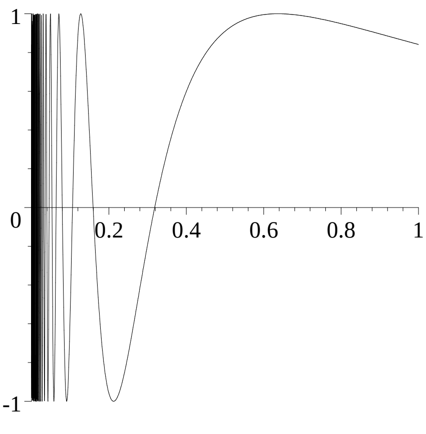
Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Menge der Punkte in denen die folgenden Funktionen stetig sind:

(a)

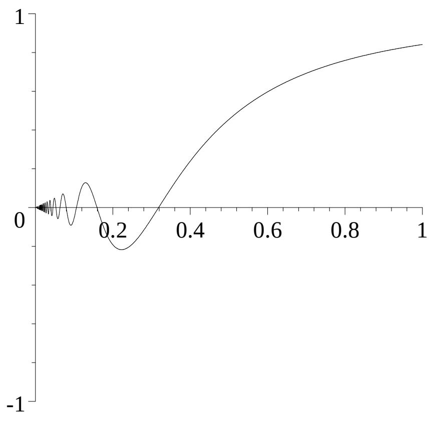
$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0 & \quad x = 0 \end{cases} \ .$$

(b)

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0 & \quad x = 0 \end{cases} \ .$$



$\sin\frac{1}{\mathrm{id}}$



$\mathrm{id} \cdot \sin\frac{1}{\mathrm{id}}$

Aufgabe 2 Die Kreislinie $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sei mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Metrik versehen und $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen *Antipodenpunkt* $z \in \mathbb{U}$ besitzt, d.h. $f(z) = f(-z)$.

7.8 Grenzwerte einer Funktion

Seien X, Y metrische Räume, $x \in X$ und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Da genau dann f in x stetig ist, wenn für alle gegen x konvergente Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und es gilt $f(x) = \lim_k f(x_k)$, schreiben wir zur Abkürzung

$$f(x) = \lim_{u\to x} f(u) \ .$$

Sei jetzt f in x nicht definiert, d.h.

$$f : X \smallsetminus \{x\} \longrightarrow Y \ .$$

DEFINITION Ein $\tilde{y} \in Y$ heißt *Grenzwert* von f in x , falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $u \in X \smallsetminus \{x\}$

$$d_X(u, x) \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(u), \tilde{y}) \leqslant \varepsilon \ .$$

Wir schreiben

$$\tilde{y} = \lim_{x\neq u\to x} f(u) \ ,$$

da

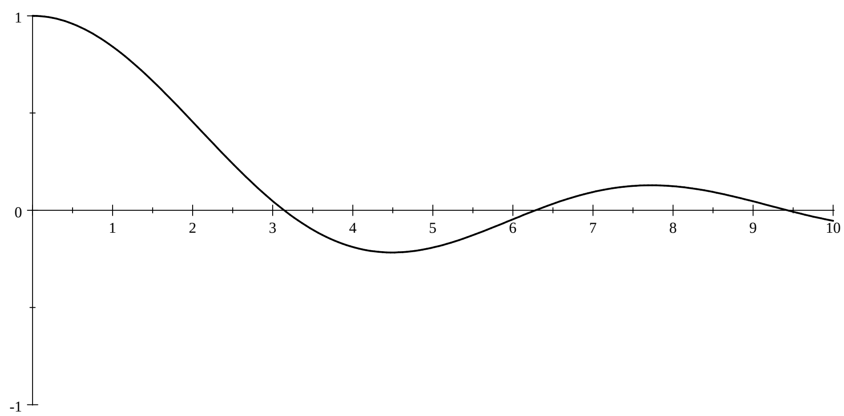
SATZ *Genau dann ist $\tilde{y} \in Y$ Grenzwert von f in x , wenn für alle gegen x konvergente Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $X \smallsetminus \{x\}$ gilt $\tilde{y} = \lim_k f(x_k)$.*

BEMERKUNG Ist $\tilde{y} \in Y$ Grenzwert von f in x , dann ist die Funktion $\tilde{f}$ auf X definiert durch

$$\widetilde{f} : X \longrightarrow Y : u \longmapsto \begin{cases} f(u) & \text{falls} \quad u \neq x \\ \tilde{y} & \phantom{\text{falls}} \quad u = x \end{cases}$$

in x stetig. Wir nennen $\tilde{f}$ die *stetige Fortsetzung von f in x* .

BEISPIEL 1 Die Funktion $x \longmapsto \frac{\sin x}{x} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.



sinc

Man kann sie stetig durch 1 in 0 fortsetzen, da

$$\lim_{0 \neq x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ .$$

Diese Funktion wird mit sinc bezeichnet, und heißt *Sinuskardinal* .

BEISPIEL 2 Die Funktion $z \longmapsto \frac{\exp(z)-1}{z} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig, und man kann sie stetig durch 1 in 0 fortsetzen, da

$$\lim_{0 \neq z \to 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1 \ .$$

Aufgabe 1 Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{0 \neq x \to 0} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - \exp(x)} \right]$$

mit Hilfe der Restabschätzung r_3 (siehe 6.16).

Aufgabe 2 Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\exp(\sqrt{x}) - 1 - \sqrt{x}}{x} \ .$$

7.9 Konvergenz in $\overline{\mathbb{R}}$

DEFINITION 1 Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ heißt gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ konvergent, wenn für alle $M \in \mathbb{R}_+^*$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_k \geqslant M$ bzw. $x_k \leqslant -M$ für alle $k \geqslant N$. Man schreibt dann $\lim_k x_k = \infty$ bzw. $\lim_k x_k = -\infty$.

LEMMA *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}_+$. Genau dann ist $\lim_k x_k = \infty$, wenn $\lim_k \frac{1}{x_k} = 0$ gilt.*

Aufgabe Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Genau dann ist $\lim_k x_k = \infty$ bzw. $\lim_k x_k = -\infty$, wenn $\liminf_k x_k = \infty$ bzw. $\limsup_k x_k = -\infty$ gilt.

DEFINITION 2 Seien X ein metrischer Raum, $x \in X$ und

$$f : X \smallsetminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Wir schreiben

$$\lim_{x\neq u\to x} f(u) = \pm\infty ,$$

falls gilt

$$\lim_k f(x_k) = \pm\infty$$

für alle gegen x konvergente Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $X \smallsetminus \{x\}$.

Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $\sup J = \infty$ bzw. $\inf J = -\infty$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = c \in \overline{\mathbb{R}} ,$$

falls für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in J mit $\lim_k x_k = \infty$ bzw. $\lim_k x_k = -\infty$ gilt

$$\lim_k f(x_k) = c .$$

BEMERKUNG 1 Es gilt genau dann $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, wenn für alle $M \in \mathbb{R}_+^*$ ein $b \in J$ mit

$$f(x) \geqslant M \quad \text{für alle } x \geqslant b$$

existiert.

BEMERKUNG 2 Es gilt genau dann $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $b \in J$ mit

$$|f(x) - c| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } x \geqslant b$$

existiert.

BEISPIEL 1 Sei p ein reelles Polynom vom Grade n , d.h. $p(x) = \sum_{l=0}^{n} c_l \cdot x^l$ mit $c_l \in \mathbb{R}$ für alle $l = 0, \ldots, n$ und $c_n \neq 0$.

Ist $c_n > 0$, dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = (-1)^n \cdot \infty \ .$$

KOROLLAR *Jedes reelle Polynom p ungeraden Grades besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Es ist $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.*

BEMERKUNG 3 Man kann zeigen (Fundamentalsatz der Algebra), daß jedes komplexe Polynom mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt.

BEISPIEL 2 Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$.

BEISPIEL 3 Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^n \cdot \exp(-x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \exp(x) = 0$$

und

$$\lim_{x>0, x\to 0} x^n \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \infty \ .$$

BEISPIEL 4 Es ist $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$.

Aufgabe 1 Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a)
$$\lim_{x\to 0+} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \ .$$

(b)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sinh(x)}{\exp(-x)} \ .$$

(c)
$$\lim_{0\neq x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \ .$$

(d)
$$\lim_{\pi\neq x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x} \ .$$

(e)
$$\lim_{1\neq x\to 1} \frac{\exp(x) - \exp(1)}{x-1} \ .$$

(f)
$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \cos\frac{1}{x} \ .$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß die durch

$$x_0 := 1 \quad \text{und} \quad x_{k+1} := x_k \cdot e^{-x_k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ positiv und fallend ist. Schließen Sie daraus, daß sie konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Man definiert $s_k := \sum_{l=0}^{k} x_l$ und zeigt, daß $x_{k+1} = e^{-s_k}$ und $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen unendlich konvergiert.

Aufgabe 3 Die Funktion

$$\cosh : [0,\infty[\longrightarrow [1,\infty[$$

ist bijektiv.

Benutzen Sie Aufgabe 4.5.3

7.10 Satz von Weierstraß

DEFINITION Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, daß f in $\xi \in J$ sein *Maximum* bzw. sein *Minimum* (auf J) annimmt, falls

$$f(\xi) = \max f(J) \quad \text{bzw.} \quad f(\xi) = \min f(J)$$

gilt. Zur Vereinfachung sagt man *Extremum* , wenn man nicht präzisieren will.

BEMERKUNG 1 Ist f eine stetige Funktion, dann nimmt f genau dann sein Maximum bzw. Minimum auf J an, wenn der obere bzw. untere Endpunkt des Intervalls $f(J)$ zu $f(J)$ gehört.

LEMMA *Sei A eine nicht-leere Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$. Es gibt eine wachsende bzw. fallende Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A mit*

$$\sup A = \sup_k x_k = \lim_k x_k \quad \textit{bzw.} \quad \inf\ A = \inf_k x_k = \lim_k x_k\ .$$

HAUPTSATZ *Eine reelle, stetige Funktion f auf einen abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ ist beschränkt, und nimmt sein Maximum wie sein Minimum auf $[a,b]$ an.*

BEMERKUNG 2 Die Behauptung des Satzes ist i.a. falsch wenn das Intervall unbeschränkt oder nicht abgeschlossen ist, wie es die Beispiele

$$\mathrm{id}_{[0,\infty[} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mathrm{id}_{]0,1]}}$$

zeigen.

Aufgabe 1 Ist p ein reelles Polynom vom geraden Grad mit Hauptkoeffizient > 0 , so gilt

$$p(\mathbb{R}) = [\min p(\mathbb{R}), \infty[\ .$$

Zeigen Sie zuerst, daß für ein $\eta \in p(\mathbb{R})$ ein Intervall $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ existiert, sodaß für alle $x \notin [a,b]$ gilt $p(x) > \eta$.

Aufgabe Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x^3 - 2x}{x^2+5}$$

ein Minimum besitzt.

Aufgabe Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f :]0,1] \longrightarrow x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

ein Maximum besitzt.

7.11 Umkehrfunktionen

HAUPTSATZ *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, streng wachsende bzw. fallende Funktion. Dann ist f eine Bijektion von J auf $f(J)$, das ein Intervall mit den Endpunkten* $\inf f(J)$ *und* $\sup f(J)$ *ist, und die Umkehrfunktion*

$$\overset{-1}{f} : f(J) \longrightarrow J$$

ist eine stetige, streng wachsende bzw. fallende Funktion.

BEMERKUNG 1 Die strenge Monotonie ist eine notwendige Voraussetzung, wie das folgende Resultat zeigt :

LEMMA *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Genau dann ist f injektiv, wenn f streng monoton ist.*

BEMERKUNG 2 Ist f streng wachsend, und ist $\inf\, J \in J$ bzw. $\sup\, J \in J$, dann gilt

$$f(\inf J) = \inf f(J) = \min f(J) \quad \text{bzw.} \quad f(\sup J) = \sup f(J) = \max f(J) \ .$$

BEMERKUNG 3 Sind I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto g(y)$$

eine Funktion, dessen Verhalten man in der Nähe von $\eta \in I$, z.B. ihre Stetigkeit, untersuchen möchte, ist es manchmal günstig eine *Variablenänderung* vorzunehmen, d.h. $y = f(x)$ zu setzen, wobei $f : J \longrightarrow I$ eine stetige streng monotone und surjektive Funktion sei. Damit betrachtet man das Diagramm

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ J \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g \circ f"'] & \end{tikzcd}$$

und es ist äquivalent die Funktion g oder die Funktion $g \circ f$ zu untersuchen, da f und $\overset{-1}{f}$ bijektiv stetig sind und es gilt

$$g = (g \circ f) \circ \overset{-1}{f} \ .$$

.

KOROLLAR *Durch* $y_k := f(x_k)$ *oder* $x_k := \overset{-1}{f}(y_k)$ *ist eine Bijektion zwischen den Folgen* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* J *und den Folgen* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $I = f(J)$ *definiert. Genau dann ist* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen* $\eta \in J$ *konvergent, wenn* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen* $\xi := \overset{-1}{f}(\eta)$ *konvergent ist. Insbesondere gilt*

$$\lim_{y\to\eta} g(y) = \lim_{x\to\xi} g\circ f(x) \ ,$$

d.h. existiert einer dieser Limites, so existiert auch der andere, und sie sind gleich.

Ist zusätzlich f *streng wachsend, so gilt*

$$\lim_k x_k = \inf J \quad \Leftrightarrow \quad \lim_k y_k = \inf f(J)$$

und

$$\lim_k x_k = \sup J \quad \Leftrightarrow \quad \lim_k y_k = \sup f(J) \ .$$

BEISPIEL **(p-te Wurzel)** Ist $p \in \mathbb{N}^*$, so ist die Funktion

$$x \longmapsto x^p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

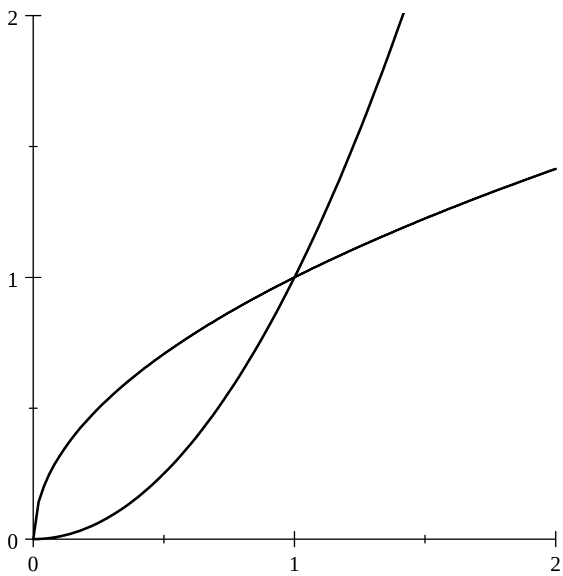
stetig streng wachsend und bijektiv, da

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} x^p = \infty \ .$$

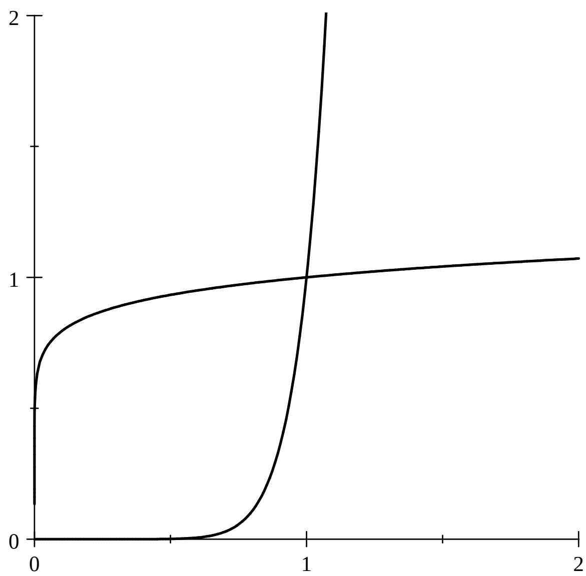
Ihre Umkehrfunktion stimmt mit der p-te Wurzelfunktion aus 5.6

$$\sqrt[p]{\cdot} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

überein.



$x \longmapsto x^2$ und $x \longmapsto \sqrt{x}$



$x \longmapsto x^{10}$ und $x \longmapsto \sqrt[10]{x}$

Dies liefert einen neuen Existenzbeweis der p-ten Wurzel, aber kein Algorithmus um sie zu rechnen.

Aufgabe Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, daß genau dann $\left(\frac{1}{1+x_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, wenn entweder $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ konvergent ist oder $\lim_k x_k = \infty$.

Es gilt die gleiche Aussage für die Folge $\left(\frac{x_k}{1+x_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

7.12 Der natürliche Logarithmus

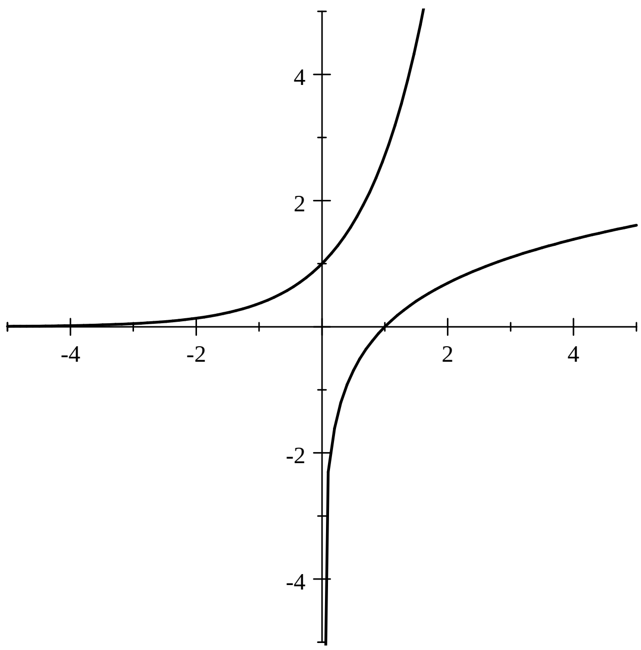
SATZ *Die Funktion* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *ist stetig, bijektiv und streng wachsend, wie auch ihre Umkehrfunktion*

$$\ln := \exp^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty \ .$$

DEFINITION Die Funktion ln heißt *natürlicher Logarithmus* und für jedes $x \in \mathbb{R}_+^*$ nennt man $\ln x$ der *Logarithmus von* x .



exp et ln

BEMERKUNG Für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$ und $y \in \mathbb{R}$ ist

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \exp(y) = x \ ,$$

also

$$\exp(\ln x) = x \quad \text{und} \quad \ln(\exp(y)) = y \ ,$$

sowie

$$\ln 1 = 0 \quad \text{und} \quad \ln e = 1 \ .$$

Es sei bemerkt, daß

$$\ln\left(2,3\ldots\cdot 10^{43}\right) = 100 \ .$$

HAUPTSATZ (Funktionalgleichung von $\ln$**)** *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *gilt*

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \ .$$

Aufgabe 1 Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ ,$$

indem sie bemerken, daß die Funktion

$$x \longmapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) : \left]0, \infty\right[\longrightarrow \left]0, \infty\right[$$

bijektiv und streng fallend ist.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \left]0, 1\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

streng wachsend und bijektiv ist.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, daß ein $x \in \left]0, 1\right]$ mit

$$\exp x + \ln x = 0$$

existiert.

7.13 Reelle Potenzen

Für alle $a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\sqrt[q]{a^p} = \exp\left(\frac{p}{q} \cdot \ln a\right) \ .$$

Die Funktion

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : \frac{p}{q} \longmapsto \sqrt[q]{a^p}$$

wird also durch die stetige Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto \exp(x \cdot \ln a)$$

fortgesetzt. Ist insbesondere $x = \lim_k \frac{p_k}{q_k}$ mit $p_k \in \mathbb{Z}$ und $q_k \in \mathbb{N}^*$, so ist

$$\exp(x \cdot \ln a) = \lim_k \sqrt[q_k]{a^{p_k}} \ .$$

Dies führt zur

DEFINITION Für alle $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert man die *x-te Potenz von a* durch

$$a^x := \exp(x \cdot \ln a) \ .$$

Man hat

$$e^x = \exp(x) \quad , \quad a^x = e^{(\ln a) \cdot x} \quad \text{und} \quad \ln(a^x) = x \cdot \ln a \ .$$

SATZ *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ gilt*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad , \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad , \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} \ ,$$

sowie

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \ .$$

Die Funktion

$$x \longmapsto a^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

ist stetig, bijektiv und streng wachsend, falls $a > 1$ bzw. streng fallend, falls $0 < a < 1$, wie auch ihre Umkehrfunktion, die mit $\log_a$ bezeichnet wird.

BEMERKUNG Für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$ und $y \in \mathbb{R}$ ist

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x \ .$$

Es gilt

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{und} \quad \ln = \log_e \ .$$

In der Praxis benutzt man

$$\log := \log_{10} = \frac{\ln}{\ln 10} \ ,$$

wobei

$$\ln 10 = 2,30259\ldots\ .$$

Aufgabe Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f := \mathrm{id}\cdot\exp : x \longmapsto x\cdot e^x : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

streng wachsend und bijektiv ist. Folgern Sie daraus, daß die Gleichungen

$$v = x\cdot e^{x\cdot u} \quad \text{und} \quad u\cdot v = y$$

eine Bijektion

$$\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* : (x,y)\longmapsto (u,v)$$

definieren. Formulieren Sie zuerst dieses Problem präziser !

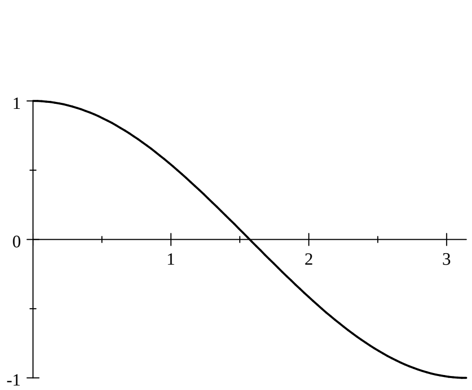
7.14 Die Funktionen arccos und arcsin

SATZ *Die Funktion* $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ *ist stetig, bijektiv und streng fallend, wie auch ihre Umkehrfunktion*

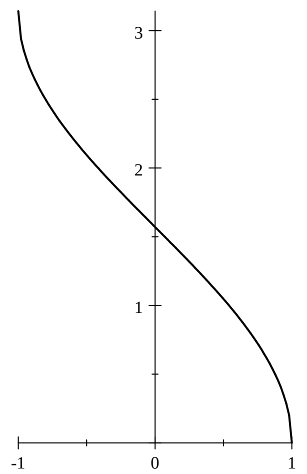
$$\arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \ .$$

Die Funktion $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ *ist stetig, bijektiv und streng wachsend, wie auch ihre Umkehrfunktion*

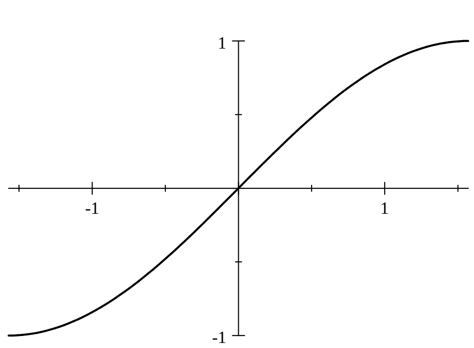
$$\arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ .$$



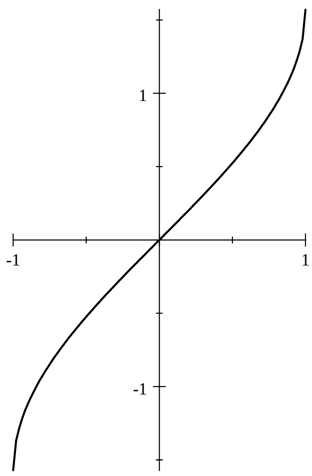
cos



arccos



sin



arcsin

Für die explizite Werteberechnung von arccos und arcsin kann man die Taylorreihen (vgl. Aufgabe 10.8.2) benutzen.

7.15 Die Funktionen tan und arctan

DEFINITION Man definiert die *Tangensfunktion* durch

$$\tan := \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R} \smallsetminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi\right) \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

und sagt, daß $\tan x$ für alle $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi\right)$ der *Tangens* von x ist.

BEMERKUNG 1 Sie erfüllt die Funktionalgleichung

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \quad , \text{ falls } x, y, x+y \in \mathbb{R} \smallsetminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi\right) \ .$$

Weiter gilt

$$\tan(-x) = -\tan x \ .$$

SATZ *Die Funktion tg* : $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ *ist eine stetige, streng wachsende Bijektion und es gilt*

$$\sup\nolimits_{x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} \tan x = \lim\nolimits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = \infty$$

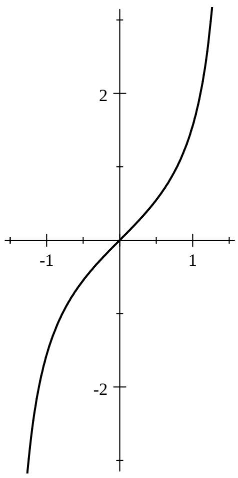
und

$$\inf\nolimits_{x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} \tan x = \lim\nolimits_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty \ .$$

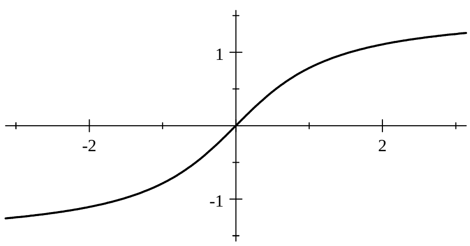
Ihre Umkehrfunktion

$$\arctan := \tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

ist auch stetig streng wachsend und bijektiv.



tan



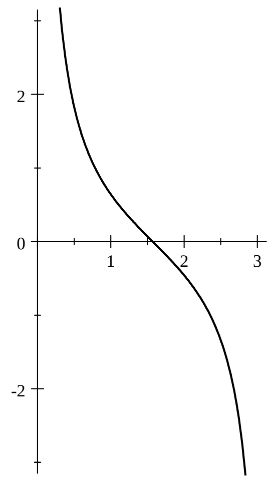
arctan

BEMERKUNG 2 Es gelten analoge Resultate für die *Kotangensfunktion*

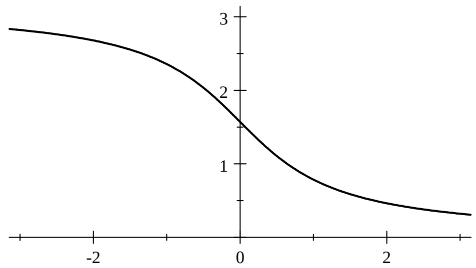
$$\cot := \frac{\cos}{\sin} : \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \cdot \pi \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ihre Umkehrfunktion

$$\operatorname{arccot} := \cot^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]0, \pi\right[\ .$$



cot



arccot

Für die explizite Werteberechnung von arctan und arccot kann man die Taylorreihen (vgl. 10.11) benutzen.

7.16 Einige Anwendungen

(1) Für alle $a \in \mathbb{R}_+^*$ gilt $\lim_k \sqrt[k]{a} = 1$.

(2) Sei $s \in \mathbb{R}_+^*$. Die Funktion

$$x \longmapsto x^s : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

ist eine stetige und streng wachsende Bijektion. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^s = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+} x^s = 0 \ .$$

Dies zeigt auch, daß man diese Funktion in 0 stetig fortsetzen kann durch

$$0^s := 0 \quad \text{für alle } s > 0 \ .$$

(3) Für alle $s \in \mathbb{R}_+^*$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+} x^s \cdot \ln x = 0 \ .$$

(4) Für alle $s \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\lim_k \sqrt[k]{k^s} = 1 \ .$$

Aufgabe Berechnen Sie

(a)

$$\lim_{1<x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln 2x} \ .$$

(b)

$$\lim_{1\neq x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \ .$$

(c)

$$\lim_{x\to 0+} x \cdot \ln^2 x \ .$$

7.17 Komplexe Potenzen

DEFINITION Für jedes $z \in \mathbb{C}$ schreibt man analog zu reellen Potenzen

$$e^z := \exp(z) \ ,$$

und für alle $a \in \mathbb{R}_+^*$ definiert man

$$a^z := e^{z \cdot \ln a} \ .$$

BEMERKUNG 1 Für $w \in \mathbb{C}$ definieren wir w^z nicht, da wir $\ln w$ definieren müßten; dies würde einige Probleme im Zusammenhang mit der Funktion arg , die nicht überall stetig ist, aufrufen (vgl. Bemerkung 7.7.3). Diese Probleme werden in der Vorlesung "Funktionentheorie" diskutiert.

Ist $z = x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) \ .$$

Insbesondere hat man

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad , \quad e^{i\pi} = -1 \quad \text{und} \quad e^i = \cos 1 + i \cdot \sin 1 \ .$$

Nach Definition 7.7 ist

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \arg z} \quad \text{mit } \arg z \in \left]-\pi, \pi\right] \ .$$

SATZ *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\arg z + \arg w)} \ ,$$

mit

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \operatorname{Re} \frac{z}{|z|} & \\ & \textit{falls} \\ -\arccos \operatorname{Re} \frac{z}{|z|} & \end{cases} \begin{matrix} \operatorname{Im} z \geqslant 0 \\ \\ \operatorname{Im} z < 0 \end{matrix} \ .$$

für alle $z \neq 0$.

BEMERKUNG 2 Achtung es gilt nur

$$\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w \mod 2\pi \ .$$

BEMERKUNG 3 Wählt man arg $z \in [0, 2\pi[$, so gilt

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \operatorname{Re} \frac{z}{|z|} & \\ & \text{falls} \\ 2\pi - \arccos \operatorname{Re} \frac{z}{|z|} & \end{cases} \begin{matrix} \operatorname{Im} z \geqslant 0 \\ \\ \operatorname{Im} z < 0 \end{matrix} \ .$$

BEISPIEL Die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^z}$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ absolut konvergent.

Dies definiert eine Fortsetzung der Riemannsche Zeta-Funktion in die komplexe Ebene :

$$\zeta : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^z} .$$

Aufgabe Sei $z \in \mathbb{C}^*$. Zeigen Sie :

(a) Wählt man $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right]$, so gilt

$$\arg z = \left\{ \begin{array}{c} \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \\ \pi - \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \\ -\pi + \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{array} \right. \quad \text{si} \quad \begin{array}{c} \operatorname{Re} z \geqslant 0 \\ \operatorname{Re} z < 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0 \\ \operatorname{Re} z < 0 \text{ et } \operatorname{Im} z < 0 \end{array} \quad .$$

(b) Wahlt man $\arg z \in \left[0, 2\pi\right[$, so gilt

$$\arg z = \left\{ \begin{array}{c} \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \\ \pi - \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \\ 2\pi + \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{array} \right. \quad \text{si} \quad \begin{array}{c} \operatorname{Re} z \geqslant 0 \text{ et } \operatorname{Im} z \geqslant 0 \\ \operatorname{Re} z < 0 \\ \operatorname{Re} z \geqslant 0 \text{ et } \operatorname{Im} z < 0 \end{array} \quad .$$

7.18 n-te Einheitswurzeln

SATZ *Für $n \in \mathbb{N}^*$ sind die Lösungen in $\mathbb{C}$ der Gleichung*

$$z^n = 1$$

die komplexen Zahlen

$$e^{2\pi i \cdot \frac{k}{n}} \quad \textit{für } k = 0, \ldots, n-1 \ .$$

DEFINITION Man nennt diese Zahlen die *n-ten Einheitswurzeln* .

BEMERKUNG Dies sind die Ecken, von denen eine 1 ist, eines regulären Polygons mit n Kanten.

KOROLLAR *Allgemeiner sind für $w \in \mathbb{C}$ die Lösungen von $z^n = w$ durch*

$$|w|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \cdot \frac{\arg w + 2\pi \cdot k}{n}} \quad \textit{für } k = 0, \ldots, n-1$$

gegeben. Insbesondere sind die Lösungen von $z^2 = w$

$$|w|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\arg w}{2}} \quad \textit{und} \quad |w|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\arg w}{2} + i \cdot \pi} = -|w|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\arg w}{2}} \ ,$$

d.h.

$$\pm\sqrt{w} \quad \textit{mit} \quad \sqrt{w} := |w|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\arg w}{2}} \ .$$

Diese Definition hängt aber von der Wahl der Funktion arg ab! Trotzdem wählt man arg mit Werten in $]-\pi, \pi]$ oder $[0, 2\pi[$, so ist

$$i = \sqrt{-1} \ .$$

Aber Achtung beim unbedachten Benutzen von $\sqrt{\cdot}$:

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \ .$$

Dieser Fehler ensteht weil gilt

$$\arg\left((-1)^2\right) = \arg(1) = 0 \neq 2\pi = \arg(-1) + \arg(-1) \ ,$$

also ist

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)^2} \ .$$

Lösung der Gleichung zweiten Grades Für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ ist die Gleichung

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$$

zu

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

äquivalent. Die Lösungen sind also

$$\frac{1}{2a} \cdot \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \ .$$

Aufgabe 1 Schreiben Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen in der Gestalt $z = x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(a)

$$z^3 = 1 \ .$$

(b)

$$z^3 = i - 1 \ .$$

(c)

$$z^2 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

(d)

$$z^2 + 2i \cdot z - i = 0 \ .$$

Benutzen Sie die Additionstheoreme um die Werte von cos und sin , die benutzt werden, zu berechnen.

Aufgabe 2 Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, daß für alle $j = 0, \ldots, 2^n - 2$ gilt

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \exp\left(2\pi i \cdot \frac{j \cdot 2^k}{2^n - 1}\right)\right) = 1 \ .$$

Benutzen Sie die Aufgabe 3.12.2.

Aufgabe 3 Sei $c \in \mathbb{R}_+^*$. Zeigen Sie, daß die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z| = 2c \cdot \sin(\arg z)$$

ein Kreis ist.