Kapitel 13

UNTERMANNIGFALTIGKEITEN DES $\mathbb{R}^n$ UND DER SATZ ÜBER IMPLIZITE FUNKTIONEN

Fassung vom 23. Februar 2006

13.1 Diffeomorphismen

Seien X und Y offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$.

DEFINITION Eine Abbildung

$$\Phi : X \longrightarrow Y$$

heißt *Diffeomorphismus* , falls Φ bijektiv ist und Φ sowie $\overset{-1}{\Phi}$ stetig differenzierbar sind.

SATZ *Seien $\xi \in X$ und $\Phi : X \longrightarrow Y$ ein in ξ differenzierbarer Homöomorphismus. Genau dann ist $\overset{-1}{\Phi}$ in $\Phi(\xi)$ differenzierbar, wenn $D\Phi(\xi)$ invertierbar ist.*

In diesem Fall gilt $n = m$ und

$$D\overset{-1}{\Phi}(\Phi(\xi)) = D\Phi(\xi)^{-1} \quad \textit{oder} \quad D\overset{-1}{\Phi}(\eta) = D\Phi\left(\overset{-1}{\Phi}(\eta)\right)^{-1}$$

für $\eta := \Phi(\xi)$.

LEMMA *Die Teilmenge $\mathbb{GL}_{\mathbb{R}}(n)$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \approx \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) \approx \mathbb{R}^{n \times n}$ der invertierbaren linearen Abbildungen in $\mathbb{R}^n$ ist offen, und die Abbildungen*

$$\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} : T \longmapsto \det T \quad \textit{und} \quad \mathbb{GL}_{\mathbb{R}}(n) \longrightarrow \mathbb{GL}_{\mathbb{R}}(n) : T \longmapsto T^{-1}$$

sind stetig differenzierbar.

KOROLLAR *Sei $\Phi : X \longrightarrow Y$ ein stetig differenzierbarer Homöomorphismus.*

(i) Ist $\xi \in X$ und $D\Phi(\xi)$ invertierbar, dann existiert eine offene Umgebung U von ξ , so daß $D\Phi(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist. Zusätzlich ist $V := \Phi(U)$ offen, und Φ ist ein Diffeomorphismus von U auf V .

(ii) Ist $D\Phi(x)$ für alle $x \in X$ invertierbar ist, so ist Φ ein Diffeomorphismus.

13.2 Satz über die Umkehrfunktion

Wir werden jetzt das vorige Korollar verbessern. Man kann auf die Voraussetzungen, daß Φ ein Homöomorphismus und Y offen ist, verzichten.

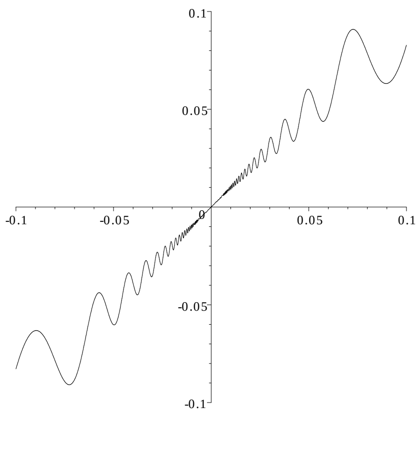
HAUPTSATZ (SUF) *Seien X eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$, $\xi \in X$ und $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so daß $D\Phi(\xi)$ invertierbar ist. Dann existieren offene Umgebungen $U \subset X$ bzw. V von ξ bzw. $\eta := \Phi(\xi)$, so daß Φ von U auf V ein Diffeomorphismus ist.*

BEMERKUNG Sei $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Der Satz über die Umkehrfunktion besagt, daß Φ in der Nähe von ξ einen Diffeomorphismus definiert, falls $D\Phi(\xi)$ invertierbar ist. Aber Achtung, wenn $D\Phi(x)$ für alle $x \in X$ invertierbar ist, ist Φ lokal ein Diffeomorphismus ohne notwendigerweise ein Diffeomorphismus zu sein, da Φ nicht injektiv sein muß, wie das folgende Beispiel 2 zeigt. Es gilt aber das

KOROLLAR *Ist $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv, stetig differenzierbar und ist $D\Phi(x)$ für alle $x \in X$ invertierbar, so ist $Y := \Phi(X)$ offen und $\Phi : X \longrightarrow Y$ ein Diffeomorphismus.*

BEISPIEL 1 Die Voraussetzung, daß Φ stetig differenzierbar ist, ist unerläßlich, wie das folgende Beispiel zeigt : Sei $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} x + |x|^{\frac{3}{2}} \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} .$$



$$x \longmapsto x + |x|^{\frac{3}{2}} \cdot \sin \frac{1}{x}$$

Diese Funktion ist differenzierbar mit $\Phi'(0) = 1$ und

$$\Phi'(x) = 1 + \frac{3}{2} \cdot \operatorname{signum} x \cdot |x|^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \frac{1}{x} - |x|^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos \frac{1}{x} \quad \text{falls } x \neq 0 \ .$$

Da Φ' in jeder Umgebung von 0 weder nach oben noch nach unten beschränkt ist, ist die Einschränkung von Φ auf diese Umgebung nie monoton wachsend, also nie injektiv. Man beachte, daß für kleine x der Graph nicht korrekt ist, da die Schrittweite zu groß ist !

BEISPIEL 2 Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$.

Sei

$$\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \varphi) \longmapsto (r \cdot \cos\ \varphi, r \cdot \sin\ \varphi) \ .$$

Es gilt

$$D\Phi_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} \ ,$$

also

$$\det D\Phi_2(r, \varphi) = r \ .$$

Damit ist

$$\Phi_2 : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

lokal ein Diffeomorphismus, aber Φ_2 ist nicht injektiv, da

$$\Phi_2(r, \varphi + k \cdot 2\pi) = \Phi_2(r, \varphi) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \ .$$

Ist X eine offene Menge in $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ auf der Φ_2 injektiv ist, so ist $Y := \Phi_2(X)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ offen, und Φ_2 ein Diffeomorphismus von X auf Y . Setzt man

$$x = r \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin\varphi \quad \text{für } (r, \varphi) \in X \ ,$$

so gilt

$$D\overset{-1}{\Phi_2}(x, y) = D\Phi_2(r, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r} \cdot \sin\varphi & \frac{1}{r} \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \ .$$

Ohne $\overset{-1}{\Phi_2}$ zu kennen, konnten wir $D\overset{-1}{\Phi_2}$ ausrechnen ! Mit Hilfe der Resultate aus 7.7 ist, da man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch $(x, y) \longmapsto x + i \cdot y$ identifizieren kann,

$$\Phi_2 : \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi, \pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$$

eine Bijektion, also ein Diffeomorphismus. Es gilt

$$\overset{-1}{\Phi_2}(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arg(x, y)\right)$$

mit $\arg(x, y) := \arg(x + i \cdot y)$. Die Funktion arg berechnet man durch die beiden Formeln

$$\arg(x, y) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } y \geqslant 0 \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } y < 0 \end{cases} \ .$$

Man beachte, daß man mit diesen Formeln nicht die Ableitung von arg für $y = 0$ berechnen kann ! Man benötigt die dritte Formel

$$\arg(x,y) = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{falls } x > 0 \ .$$

Obiges zeigt, ohne Kenntnis dieser drei Formeln, daß

$$\partial_x \arg(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \partial_y \arg(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \ .$$

gilt.

BEISPIEL 3 Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$.

Die Abbildung

$$\Phi_3 :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \smallsetminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R} : (\rho,\varphi,\vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} \rho\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\varphi \\ \rho\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\varphi \\ \rho\cdot\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

ist ein Diffeomorphismus und $\det D\Phi_3(\rho,\varphi,\vartheta) = \rho^2\cdot\cos\ \vartheta$.

BEISPIEL 4 Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$.

Die Abbildung

$$\Phi_n :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-2}$$

$$(\rho,\varphi_2,\ldots,\varphi_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\cos\varphi_{n-1}\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\cos\varphi_3\cdot\cos\varphi_2 \\ \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\cos\varphi_4\cdot\cos\varphi_3\cdot\sin\varphi_2 \\ \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\cos\varphi_4\cdot\sin\varphi_3 \\ \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\sin\varphi_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho\cdot\sin\varphi_n \end{pmatrix}$$

ist ein Diffeomorphismus und

$$\det D\Phi_n(\rho,\varphi_2,\ldots,\varphi_n) = \rho^{n-1}\cdot\cos^{n-2}\varphi_n\cdot\cos^{n-3}\varphi_{n-1}\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_3 \ .$$

13.3 Satz über implizite Funktionen

Seien X eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n+m}$ und $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wir wollen das Nullstellengebilde von F , d.h. die Menge

$$\{F = 0\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \;\middle|\; F(x, y) = 0 \right\} \ .$$

untersuchen und als Graph einer Funktion darstellen. Dies entspricht dem Auflösen der Gleichung $F(x, y) = 0$ bzgl. y in Abhängigkeit von x .

HAUPTSATZ (SIF) *Seien X eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n+m}$, $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $(\xi, \eta) \in X$ mit $F(\xi, \eta) = 0$.*

Ist $D_2F(\xi, \eta) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ invertierbar, so existieren eine offen Umgebung $W \subset X$ von (ξ, η) , eine offene Umgebung U von ξ und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$\operatorname{Gr} g = \{F = 0\} \cap W \ ,$$

d.h. für alle $x \in U$, ist $g(x)$ das eindeutig bestimmte $y \in \mathbb{R}^m$ mit

$$(x, y) \in W \quad \textit{und} \quad F(x, y) = 0 \ .$$

Zusätzlich gilt

$$Dg(x) = -D_2F(x, g(x))^{-1} D_1F(x, g(x)) \ .$$

BEISPIEL Die Bedingung des Satzes ist nicht notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Sei $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto y^2$. Es gilt $\{F = 0\} = \mathbb{R} \times \{0\}$ und $\partial_2 F(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Gleichung $F(x, y) = y^2 = 0$ kann man aber bzgl y lösen : $g = 0$.

BEMERKUNG Eine Menge ist i.a. als Teilmenge einer "bekannten" Menge X beschrieben, d.h. als die Menge aller Elementen von X , die eine gewisse Eigenschaft erfüllen, z.B. eine Gleichung. Man spricht von einer *externen Beschreibung* .

Man kann aber auch eine Menge als Bild einer Abbildung darstellen; mit anderen Worten zählt man die Elemente dieser Menge mit Hilfe eines "bekannten" Parameterraumes auf. Man spricht von einer *Parametrisierung* oder einer *internen Beschreibung* .

Der Satz über die Umkehrfunktion gibt eine hinreichende Bedingung dafür an, daß das Nullstellengebilde einer Funktion als Graph beschrieben werden kann, d.h. mit Hilfe einer Abbildung der Form

$$x \longmapsto (x, g(x))$$

parametrisiert werden kann.

13.4 Offene Menge mit Rand

DEFINITION 1 Sei $m \in \mathbb{N}^*$. Ist μ eine Linearform auf $\mathbb{R}^m$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so sagt man, daß $H_{\mu,\alpha} := \{\mu \leqslant \alpha\}$ ein *abgeschlossener Halb-Raum* ist und daß $\partial H_{\mu,\alpha} := \{\mu = \alpha\}$ sein *Rand* ist.

Eine offene Teilmenge U in $H_{\mu,\alpha}$ heißt *offene Menge mit Rand (der Dimension m)* und

$$\partial U := U \cap \partial H_{\mu,\alpha}$$

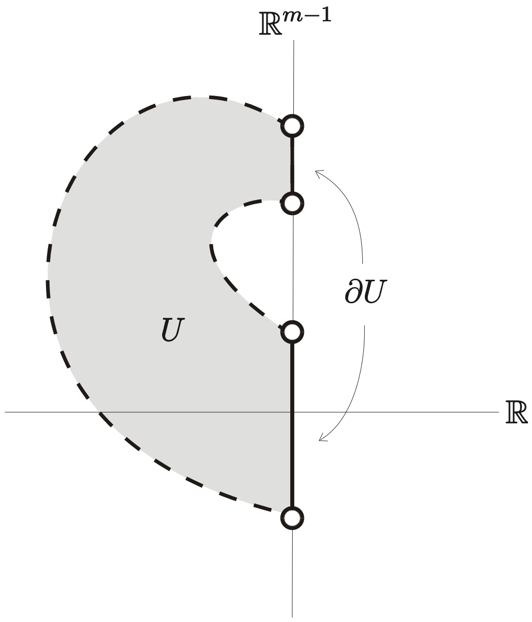
heißt *Rand* von U . Ist $\partial U = \emptyset$, so sagt man, daß U *ohne Rand* ist.

Errinern wir, daß eine offene Menge in $H_{\mu,\alpha}$ der Durchschnitt von $H_{\mu,\alpha}$ mit einer offenen Menge in $\mathbb{R}^m$ ist

Aufgabe Bezeichnet U° das Innere einer offenen Menge mit Rand U in $\mathbb{R}^m$, so gilt

$$U^\circ = U \smallsetminus \partial U \quad \text{oder} \quad \partial U = U \smallsetminus U^\circ \ .$$

Insbesondere ist genau dann U in $\mathbb{R}^m$ offen, wenn U ohne Rand ist.



BEMERKUNG 1 Der Rand $\partial H_{\mu,\alpha}$ von $H_{\mu,\alpha}$ stimmt mit seinem topologischen Rand (der Grenze) in $\mathbb{R}^m$ überein :

$$\mathrm{Rd}_{\mathbb{R}^m} H_{\mu,\alpha} = H_{\mu,\alpha} \smallsetminus {H_{\mu,\alpha}}^\circ = \{\mu \leqslant \alpha\} \smallsetminus \{\mu < \alpha\} = \{\mu = \alpha\} = \partial H_{\mu,\alpha} \ .$$

Man beachte aber, daß der Rand von U nicht mit dem topologischen Rand in $\mathbb{R}^m$ identisch ist. Dieser ist durch

$$\mathrm{Rd}_{\mathbb{R}^m} U := \overline{U} \smallsetminus U^\circ$$

definiert, wobei der Abschluß und das Innere in $\mathbb{R}^m$ genommen werden ! Er stimmt auch nicht mit dem topologischen Rand $\mathrm{Rd}_{H_{\mu,a}} U := \overline{U} \smallsetminus U$ in $H_{\mu,a}$, wobei der Abschluß in $H_{\mu,a}$ gleich dem in $\mathbb{R}^m$ ist, da $H_{\mu,a}$ abgeschlossen ist !

BEMERKUNG 2 Für praktische Anwendungen benötigt man diese Allgemeinheit. Um die Notation zu vereinfachen wie in der obigen Zeichnung kann man sich durch eine geeignete bijektive affine Transformation bijective affine – man kann sogar annehmen, daß es eine Rotation gefolgt von eine Translation ist –, auf den Fall

$$H_{\mathrm{pr}_1,0} = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$$

zurückführen. In einem Beweis werden wir also annehmen, daß U eine offenen Menge von $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$ ist. Es gilt

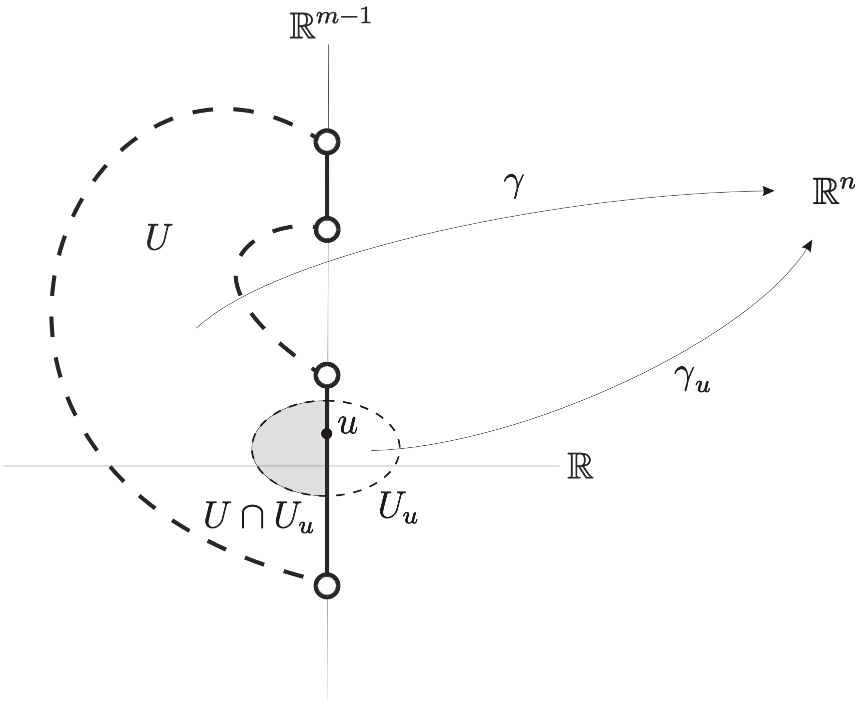
$$\partial U = \left[\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}\right] \cap U \ .$$

Man kann zeigen

HAUPTSATZ *Seien U eine offenen Menge mit Rand und $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent :*

(i) Für alle $u \in U$ existiert eine stetige differenzierbare lokale Fortsetzung $\gamma_u : U_u \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von γ , also in einer offene Umgebung U_u von u in $\mathbb{R}^m$ definiert, so daß

$$\gamma_{|U \cap U_u} = \gamma_{u|U \cap U_u} \ .$$



(ii) Für alle $u \in U$ existiert $A_u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, so daß für φ_u definiert durch

$$\gamma(v) = \gamma(u) + A_u(v-u) + \varphi_u(v) \quad \text{für alle } v \in U$$

gilt

$$\lim_{U \smallsetminus \{u\} \ni v \to u} \frac{\varphi_u(v)}{|v-u|} = 0 \ ,$$

und die Abbildung

$$u \longmapsto A_u : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

stetig ist.

(iii) γ *ist auf* U° *stetig differenzierbar und* $D\left(\gamma_{|U^\circ}\right)$ *besitzt eine (einzige) stetige Fortsetzung*

$$D\gamma : U \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right) : v \longmapsto D\gamma\left(v\right) \ .$$

In diesem Fall gilt

$$D\gamma\left(v\right) = A_v = D\gamma_u\left(v\right) \quad \textit{für alle } v \in U_u \ .$$

Zusätzlich ist U *eine offene Menge in* $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$ *, so gilt für alle* $u \in U$

$$D\gamma\left(u\right) = \left(\partial_l \gamma_k\left(u\right)\right)_{\substack{k=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots,m}}$$

in den kanonischen Basen von $\mathbb{R}^m$ *und* $\mathbb{R}^n$ *; ist* $u \in \partial U$ *, so ist* $\partial_1 \gamma_k\left(u\right)$ *die links Ableitung von* γ_k *in* u *.*

DEFINITION 2 Sei U eine offene Menge mit Rand. Eine Abbildung $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *stetig differenzierbar* , wenn eine der äquivalenten Eigenschaften des Hauptsatzes erfüllt ist. Die Abbildung

$$D\gamma : U \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right) : u \longmapsto D\gamma\left(u\right)$$

heißt die *Ableitung* von γ in U .

Diesen Satz werden wir nicht benutzen, die Definition (i) ist ausreichend und erlaubt die direkte Anwendung des Satzes über die Umkehrfunktion.

LEMMA *Die Zusammensetzung stetig differenzierbarer Abbildungen im obigen Sinn ist stetig differenzierbar, und die Kettenregel ist gültig.*

DEFINITION 3 Ist U eine offene Menge in $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$, dann ist

$$U^\partial := \left\{w \in \mathbb{R}^{m-1} \mid \ (0, w) \in \partial U\right\}$$

eine offene Menge in $\mathbb{R}^{m-1}$. Ist $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, so definiert man

$$\gamma^\partial : U^\partial \longrightarrow \mathbb{R}^n : w \longmapsto \gamma\left(0, w\right) \ .$$

Ist $m \geqslant 2$ und γ stetig differenzierbar, so ist auch γ^∂ stetig differenzierbar, und es gilt

$$D\gamma^\partial\left(w\right) = D_2\gamma\left(0, w\right) \ .$$

Ist $m = 1$, so identifiziert man $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^0$ mit $\mathbb{R}$ und die Abbildung γ^∂ ist trivial :

$$\gamma^\partial : U^\partial = \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n : 0 \longmapsto \gamma\left(0\right) \ .$$

SATZ *Seien* U *und* V *offene Mengen mit Rand der Dimension* m *bzw.* p *und* $\Phi : U \longrightarrow V$ *ein Diffeomorphismus, d.h.* Φ *ist bijektiv und* Φ , $\overset{-1}{\Phi}$ *sind stetig differenzierbar.*

Dann ist $D\Phi\left(u\right)$ *invertierbar für alle* $u \in U$ *, insbesondere gilt* $m = p$ *, und*

$$\Phi\left(U^\circ\right) = V^\circ \quad , \quad \Phi\left(\partial U\right) = \partial V \ .$$

Zusätzlich ist $m \geqslant 2$ *, so ist die von* Φ *induzierte Abbildung* $\Phi^\partial : U^\partial \longrightarrow V^\partial$ *ein Diffeomorphismus.*

13.5 Reguläre Parametrisierungen

Wir errinern, daß wir $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^0$ mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren ! Achtung, es gilt zwar $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, aber in $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist $\{0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n-m}$.

HAUPTSATZ *Seien X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $x \in X$ und $m \in \mathbb{N}^*$ mit $m \leqslant n$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent :*

(i) Es gibt eine offene Menge mit Rand U der Dimension m und eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, die ein Homöomorphismus von U auf eine offene Umgebung von x in X ist, so daß

$$D\gamma\left(\overset{-1}{\gamma}(x)\right) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

injektiv ist.

(ii) Es gibt eine offene Umgebung W von x in $\mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus

$$\Phi : W \longrightarrow \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$$

mit

$$\Phi(X \cap W) = \left[\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}\right] \cap \Phi(W) \ .$$

(iii) Es gibt eine offene Umgebung W von x in $\mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Abbildungen

$$\delta : W \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad F : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$$

mit

$$X \cap W = \{\delta \leqslant 0\} \cap \{F = 0\}$$

und so daß

(a) falls $\delta(x) = 0$ die Vektoren in $\mathbb{R}^n$

$$\operatorname{grad}\delta(x) \quad \textit{und} \quad \operatorname{grad}F_j(x) \quad \textit{für } j = 1, \ldots, n-m$$

linear unabhängig sind.

(b) falls $\delta(x) < 0$ die Vektoren in $\mathbb{R}^n$

$$\operatorname{grad}F_j(x) \quad \textit{pour } j = 1, \ldots, n-m$$

linear unabhängig sind.

Betrachtet man in diesem Fall hinreichend kleine Umgebungen, so kann man annehmen

$$\gamma = \overset{-1}{\Phi} \circ j_{\mathbb{R}^m|U} \quad , \quad \overset{-1}{\gamma} = \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^m} \circ \Phi_{|X\cap W} \ ,$$

$$U \times \{0\} = \Phi(X \cap W) \quad , \quad \gamma(U) = X \cap W \ ,$$

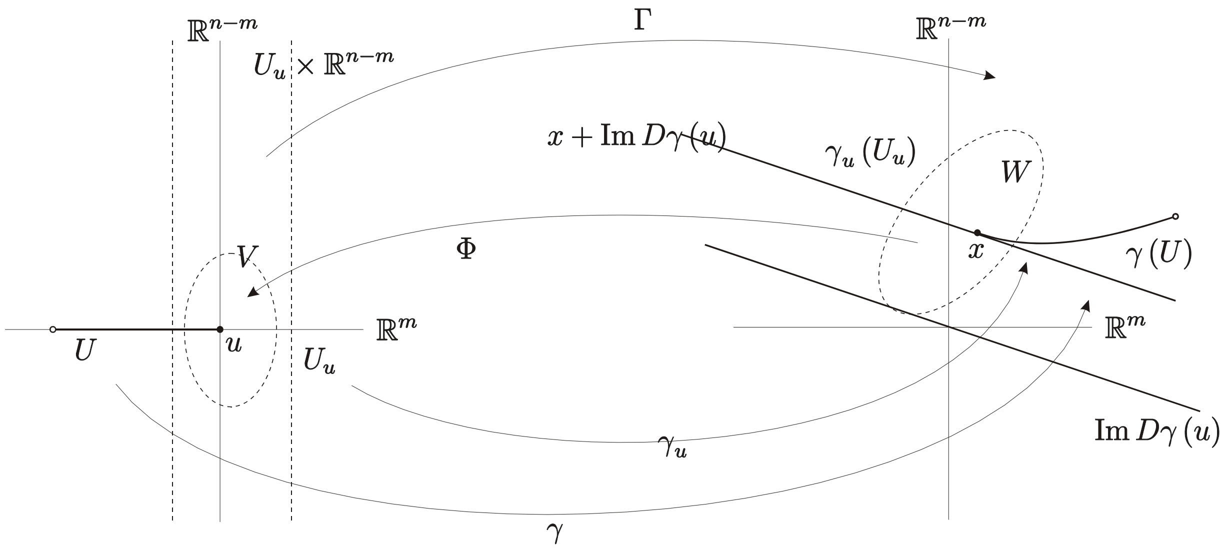
$$D\gamma(u) \ \textit{ist injektiv für alle } u \in U \ ,$$

$$\delta = \Phi_1 \quad \textit{und} \quad F = \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^{n-m}} \circ \Phi \ ,$$

$$W = \{\delta < 0\} \quad \textit{falls } U \textit{ ohne Rand ist.}$$

Weiterhin gilt

$$\gamma(\partial U) = \{\delta = 0\} \cap \{F = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} \delta \\ F \end{pmatrix} = 0 \right\} \ .$$

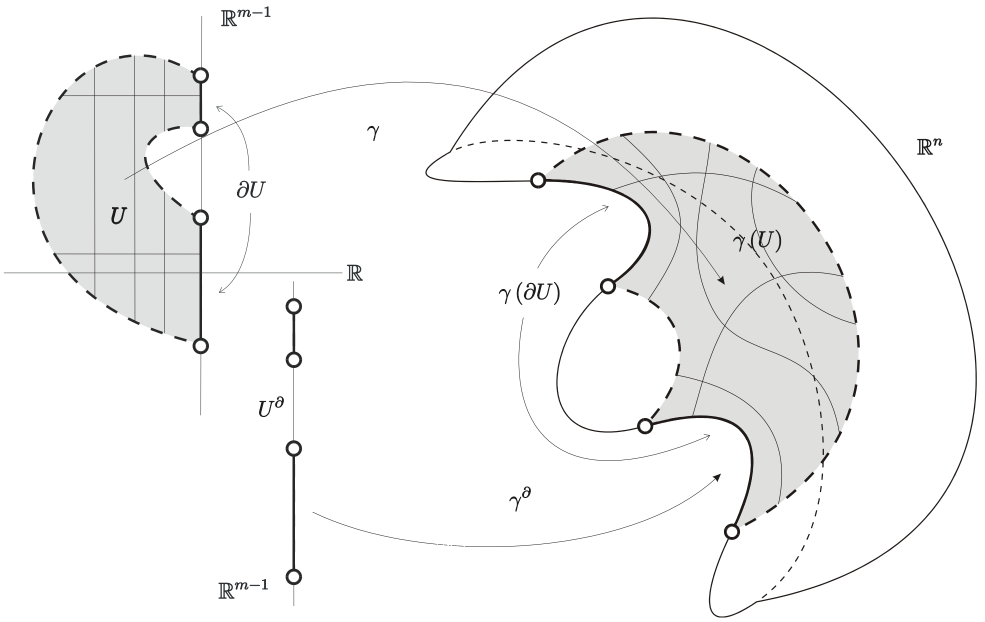


BEMERKUNG 1 Ist $m = n$, so muß man die Null-Funktion $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^0$ ohne Komponenten betrachten; es gilt dann $W = \{F = 0\}$. Die Bedingung (iii.a) ist dann erfüllt, wenn $\operatorname{grad} \delta(x) \neq 0$ ist; dagegen ist (iii.b) trivial erfüllt, da leer.

DEFINITION Seien X eine nicht-leere Menge von $\mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{N}$.

(a) Eine Abbildung $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt eine *lokale reguläre Parametrisierung* (der Dimension m) von X , falls gilt

(i) U ist eine offene Menge mit Rand der Dimension m .
(ii) γ ist ein Homöomorphismus von U auf eine offene Menge in X .
(iii) γ ist stetig differenzierbar, und $D\gamma(u)$ ist injektiv für alle $u \in U$.



(b) Ist W eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ und $\Phi : W \longrightarrow \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus mit

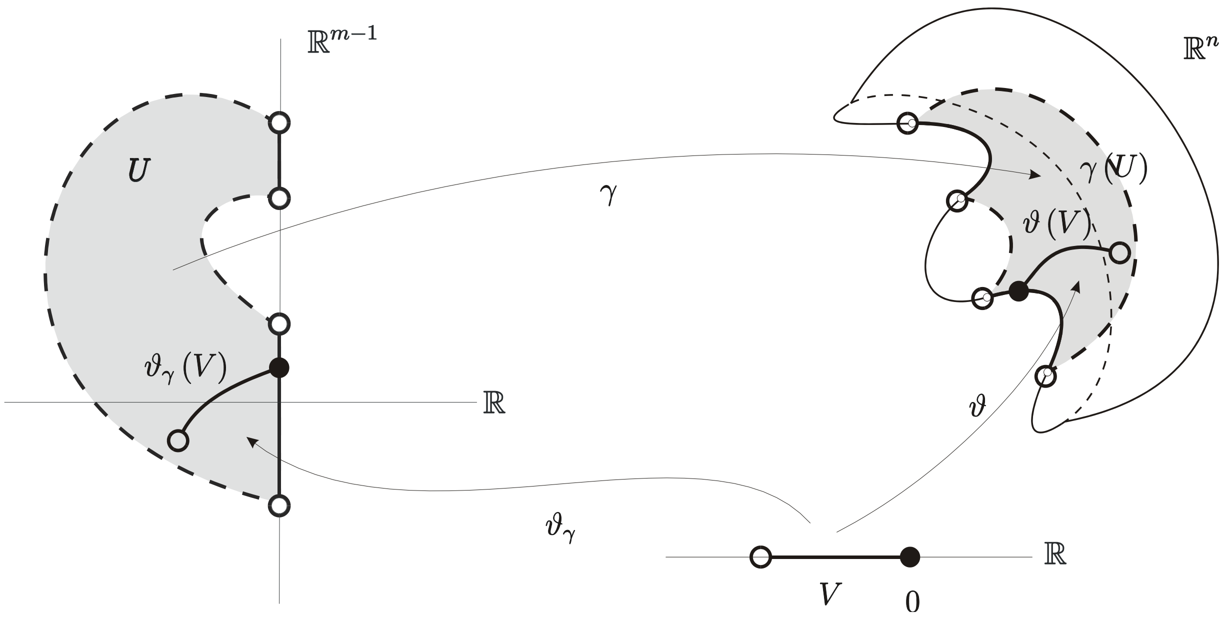
$$\Phi(X \cap W) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\} \ ,$$

so daß $\Phi(W \cap X)$ eine offene Menge mit Rand der Dimension m ist, so heißt $\Phi_{|W \cap X}$ eine *Karte* von X . Man sagt auch, daß Φ ein *System von m lokalen Koordinaten* auf X definiert.

SATZ *Seien $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale, reguläre Parametrisierung von X , V eine offene Menge mit Rand der Dimension p und $\vartheta : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\vartheta(V) \subset \gamma(U)$. Dann ist die eindeutig bestimmte Abbildung $\vartheta_\gamma : V \longrightarrow U$ mit*

$$\vartheta = \gamma \circ \vartheta_\gamma$$

stetig differenzierbare.



KOROLLAR *Sind $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $\vartheta : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokale, reguläre Parametrisierungen von X mit $\gamma(U) = \vartheta(V)$, wobei U und V offene Mengen mit Rand der Dimension m bzw. p sind, dann ist die eindeutig bestimmte Abbildung $\gamma_\vartheta : U \longrightarrow V$ mit $\gamma = \vartheta \circ \gamma_\vartheta$ ein Diffeomorphismus. Zusätzlich gilt*

$$m = p \quad , \quad \gamma(\partial U) = \vartheta(\partial V) \quad \text{und} \quad D\gamma(u)(\mathbb{R}^m) = D\vartheta(\gamma_\vartheta(u))(\mathbb{R}^p) \quad \text{für alle } u \in U \ .$$

13.6 Der Begriff von Untermannigfaltigkeit

DEFINITION Seien X eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{N}^*$. Dann heißt X *Untermannigfaltigkeit mit Rand* des $\mathbb{R}^n$ der Dimension m , wenn für jedes $x \in X$ eine reguläre Parametrisierung $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ in der Nähe von x existiert, wobei U eine offene Menge mit Rand der Dimension m ist. Ist $x \in \gamma(\partial U)$, so heißt x ein *Randpunkt* von X . Die Menge der Randpunkte nennt man *Rand* von X und wird mit ∂X bezeichnet. Ist $\partial X = \emptyset$, so heißt X *ohne Rand* .

Wir nennen eine diskrete Menge des $\mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension 0 in $\mathbb{R}^n$.

BEMERKUNG 1 Wir errinern, daß eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes X *diskret* genannt wird, falls Y versehen mit der induzierten Topologie ein diskreter Raum ist (vgl. Beispiel 10.12.6). Dies bedeutet, daß jede Teilmenge in Y offen ist, also daß für alle $y \in Y$ eine offene Umgebung V von y in X existiert, so daß $V \cap Y = \{y\}$ gilt.

HAUPTSATZ *Ist X eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit Rand, dann ist ∂X eine $(m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand des $\mathbb{R}^n$.*

BEMERKUNG Sei $x \in X$. Um zu zeigen, daß es keine lokale, reguläre Parametrisierung in der Nähe von x gibt, ist es meistens am besten die Bedingung (iii) des Hauptsatzes 13.5 zu benutzen. Durch geeignete Wahl von parametrisierten Kurven in X kann man oft zeigen, daß die Vektoren $\operatorname{grad} \delta(x)$ und $\operatorname{grad} F_j(x)$, für $j = 1, \ldots, n-m$, nicht linear unabhängig sind, z.B. daß einer dieser Vektoren 0 ist. Diese Methode ist auf γ_2 im nachfolgenden Beispiel 5 nicht anwendbar.

Aber Achtung, falls γ nicht eine reguläre Parametrisierung ist, kann man nicht folgern, daß $\gamma(U)$ keine Untermannigfaltigkeit ist ! Z.B. ist $t \longmapsto t^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nicht reguläre Parametrisierung von $\mathbb{R}_+$, aber $\mathbb{R}_+$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 . Allgemeiner

BEISPIEL 1 Jede offene Menge mit Rand der Dimension n ist eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension n in $\mathbb{R}^n$. Insbesondere jede offenen Menge in $\mathbb{R}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension n in $\mathbb{R}^n$.

BEISPIEL 2 Die Kugel $\mathbb{B}^n(r)$ mit Zentrum 0 und Radius $r > 0$ ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand des $\mathbb{R}^n$. Der Rand $\partial\mathbb{B}^n(r)$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ mit Zentrum 0 und Radius r ; sie ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand des $\mathbb{R}^n$.

Man beachte, mit $\delta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x|^2 - r^2$ gilt

$$\mathbb{B}^n(r) = \{\delta \leqslant 0\} \quad \text{und} \quad \mathbb{S}^{n-1}(r) = \{\delta = 0\} \ .$$

Mit $U := \left]0, r\right] \times \left]-\pi, \pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[^{n-2}$ ist die Einschränkung $\gamma_n := \Phi_{n|U}$ (vgl. Beispiel 13.2.4) eine reguläre Parametrisierung von

$$\mathbb{B}^n(r) \smallsetminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-2} .$$

Für jedes $x \in \mathbb{B}^n(r) \smallsetminus \{0\}$, existiert eine Rotation $A \in \mathbb{SO}(n)$, so daß $A \circ \gamma_n$ eine lokale reguläre Parametrisierung von $\mathbb{B}^n(r)$ in der Nähe von x ist. Z.B. liefert die Rotation

$$A : (x, y, z) \longmapsto (-x, z, y)$$

im Fall $n = 3$ eine reguläre Parametrisierung von

$$\mathbb{B}^3(r) \smallsetminus \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \{0\} :$$

$$\left]0, r\right] \times \left]-\pi, \pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \varphi, \vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} -r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\vartheta \\ r \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} .$$

Eine reguläre Parametrisierung von $\mathbb{S}^{n-1}(r) \smallsetminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-2}$ ist γ_n^{∂} . Insbesondere kann man $\mathbb{S}^2(r)$ mit Hilfe von 2 Parametrisierungen vollständig beschreiben :

$$\left]-\pi, \pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^3 :$$

$$(\varphi, \vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \sin\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\varphi, \vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} -r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\vartheta \\ r \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} .$$

Die Abbildung

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \longmapsto \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sqrt{r^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}\right)$$

ist eine reguläre Parametrisierung (als Graph) der oberen Halbsphäre ohne Rand

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r \text{ und } x_n > 0\} .$$

Um $\mathbb{S}^2(r)$ mit Graphen zu parametrisieren braucht man 6 solcher Abbildungen.

BEISPIEL 3 Die obere Halbsphäre

$$\mathbb{S}^2_+(r) := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x| = 1 \text{ und } x_3 \geqslant 0\right\}$$

ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit Rand. Ihr Rand

$$\partial\mathbb{S}^2_+(r) := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x| = 1 \text{ und } x_3 = 0\right\} = \mathbb{S}^1(r) \times \{0\}$$

ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand des $\mathbb{R}^3$. Man braucht nur die Abbildungen

$$\delta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto -x_3 \quad , \quad F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x|^2 - r^2$$

zu betrachten, da

$$\mathbb{S}^2_+(r) = \{\delta \leqslant 0\} \cap \{F = 0\} \quad \text{und} \quad \partial\mathbb{S}^2_+(r) = \{\delta = 0\} \cap \{F = 0\} .$$

Die Mengen $U := \left]-\pi, \pi\right[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ und $V := \left[0, \pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sind offene Mengen mit Rand der Dimension 2 , und die Einschränkungen obiger Abbildungen in Beispiel 2 liefern reguläre Parametrisierungen von $\mathbb{S}^2_+(r) \smallsetminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{S}^2_+(r) \smallsetminus \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \{0\}$.

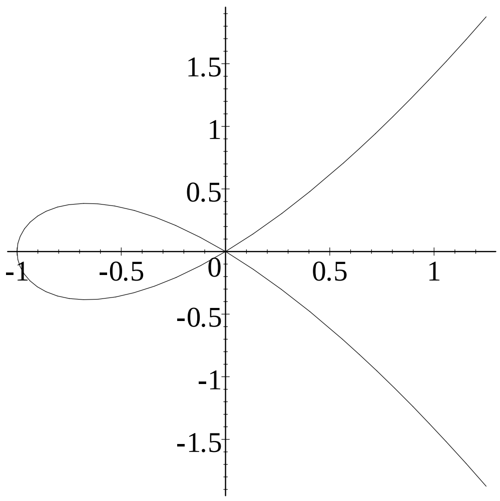
BEISPIEL 4 Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $J^\circ \neq \emptyset$. Eine stetige Abbildung $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt parametrisierte Kurve nach Definition 11.1.1.

Ist γ stetig differenzierbar mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ und ist γ ein Homöomorphismus von J auf $\gamma(J)$, so ist $\gamma(J)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit Rand $\gamma(J \setminus J^\circ)$.

Der schwierige Punkt ist zu zeigen, daß γ ein Homöomorphismus ist. Dies ist z.B. richtig falls γ die Einschränkung auf J einer stetigen injektiven Funktion, die auf einem kompaktem Intervall definiert ist (vgl. Hauptsatz 10.20).

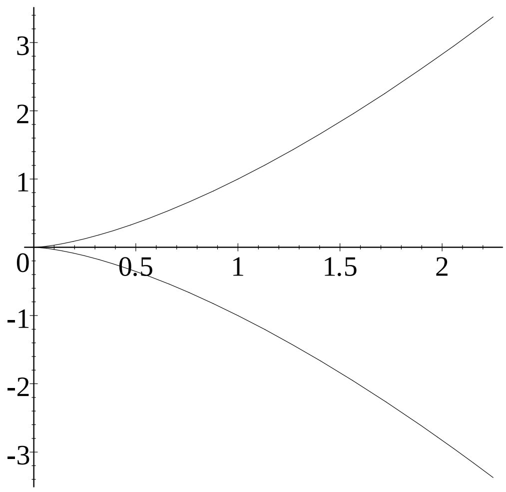
Allgemeiner sei γ injektiv und $([a_k, b_k])$ eine (wachsende) Folge von Intervallen in J , so daß $([a_k, b_k]^\circ)$ eine offene Überdeckung von J ist. Nach Korollar 10.20 ist γ genau dann ein Homöomorphismus, wenn $\gamma([a_k, b_k]^\circ)$ in $\gamma(J)$ offen ist, d.h. $\gamma([a_k, b_k]^\circ) = \gamma([a_k, b_k])^\circ$. Das nachstehende Beispiel γ_3 ist eine gute Illustration dieses Problem.

BEISPIEL 5 Zwei Beispiele wo γ nicht regulär ist.



$$\gamma_1 : t \longmapsto \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$$

non-injective



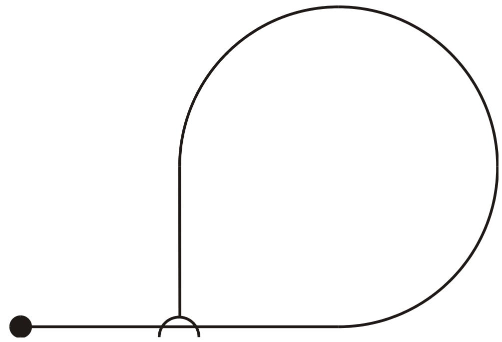
$$\gamma_2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

homéomorphisme, mais singulier

Man kann zeigen, daß $\gamma_1(\mathbb{R})$ und $\gamma_2(\mathbb{R})$ keine Untermannigfaltigkeiten sind.

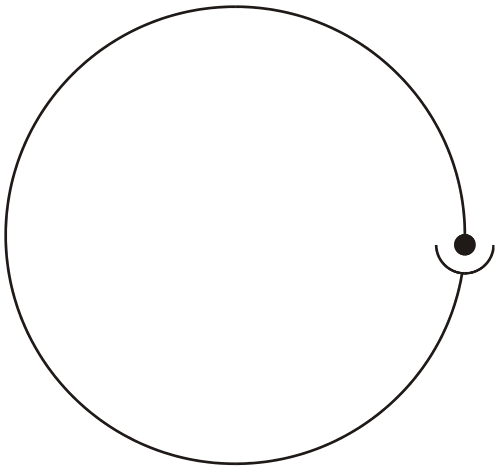
BEISPIEL 6 Zwei Beispiele wo γ injektiv, aber kein Homöomorphismus ist. Das Bild von

$$\gamma_3 : t \longmapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} & -2 \leqslant t < 0 \\ \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \quad \text{si} & 0 \leqslant t < \frac{3\pi}{2} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3\pi}{2} - t \end{pmatrix} & \frac{3\pi}{2} \leqslant t < \frac{3\pi}{2} + 1 \end{cases}$$



ist keine Untermannigfaltigkeit, das Bild von

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0, 2\pi[$$



hingegen schon.

13.7 Der Tangentialraum

Im folgenden sei X stets eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Das Korollar 13.5 zeigt, daß folgende Definition sinnvoll ist.

DEFINITION 1 Für jedes $x \in X$ heißt der Untervektorraum

$$T_X(x) := D\gamma(u)(\mathbb{R}^m)$$

von $\mathbb{R}^n$, wobei γ eine reguläre Parametrisierung in der Nähe von $x = \gamma(u)$ ist, der *Tangentialraum* an X in x . Der Tangentialraum in jedem Punkt einer 0-dimensionaler Untermannigfaltigkeit ist $\{0\}$.

Dieser Untervektorraum ist m-dimensional. Eigentlich ist der affine Unterraum $x + T_X(x)$ an X in x tangential.

HAUPTSATZ *Sei $x \in X$. Für jedes Intervall J in $\mathbb{R}$ und jede stetig differenzierbare, parametrisierte Kurve*

$$\vartheta : J \longrightarrow X \quad \text{mit } 0 \in J \ , \ \vartheta(0) = x \text{ und } \vartheta(J) \subset X$$

ist $\vartheta'(0) \in T_X(x)$. Zusätzlich gilt

(i) *Die Menge dieser Vektoren $\vartheta'(0)$ ist gleich $T_X(x)$.*

(ii) *Ist $x \in \partial X$, so existiert genau ein Vektor $\mathfrak{n}(x) \in T_X(x)$ mit*

$$|\mathfrak{n}(x)| = 1 \quad , \quad \mathfrak{n}(x) \perp T_{\partial X}(x) \ ,$$

und so daß die Menge der Vektoren $\vartheta'(0)$ mit $J \subset \mathbb{R}_+$ gleich

$$\{\mathfrak{t} \in T_X(x) \mid (\mathfrak{t}|\,\mathfrak{n}(x)) \leqslant 0\}$$

ist.

DEFINITION 2 Der Vektor $\mathfrak{n}(x)$ heißt *äußerer Normalenvektor* an ∂X in x . Falls nötig werden wir $\mathfrak{n}_{\partial X}(x)$ schreiben.

SATZ *Seien U eine offene Menge in $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$ und $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung um $x = \gamma(u) \in X$.*

(i) *Für $x \in \partial X$ ist $\mathfrak{n}(x) \in T_X(x)$ eindeutig durch die Bedingungen*

$$|\mathfrak{n}(x)| = 1 \quad , \quad \mathfrak{n}(x) \perp T_{\partial X}(x) \quad \text{und} \quad (\partial_1\gamma(u)|\,\mathfrak{n}(x)) > 0$$

bestimmt. Es gilt

$$T_X(x) = T_{\partial X}(x) \boxplus \mathbb{R}\cdot\mathfrak{n}(x) \ ,$$

wobei die direkte Summe orthogonal ist.

(ii) *Ist $x \in X$, so bilden die Vektoren*

$$\partial_j\gamma(u) \quad \text{für } j = 1, \ldots, m$$

eine Basis von $T_X(x)$, die aber i.a. weder orthogonal noch normiert ist. Der Vektor $\partial_j \gamma(u)$ ist der Tangentialvektor in 0 an der parametrisierte Kurve

$$t \longmapsto \gamma(u + t \cdot e_j) \ .$$

Für $x \in \partial X$ bilden die Vektoren

$$\partial_j \gamma(u) \quad \text{für } j = 2, \ldots, m$$

eine Basis von $T_{\partial X}(x)$, und $\partial_1 \gamma(u)$ zeigt ins Äußere der Untermannigfaltigkeit.

Mit den Notationen aus Hauptsatz 13.5 gilt :

(iii) *Für $x \in X$ ist*

$$T_X(x) = DF(x)^{\intercal} \left(\mathbb{R}^{n-m}\right)^{\perp} = \{\operatorname{grad} F_j(x) \mid j = 1, .., n-m\}^{\perp} \ .$$

(iv) *Für $x \in \partial X$ ist*

$$T_{\partial X}(x) = \begin{pmatrix} D\delta(x) \\ DF(x) \end{pmatrix}^{\intercal} \left(\mathbb{R}^{1+n-m}\right)^{\perp} = \left[\{\operatorname{grad} \delta(x)\} \cup \{\operatorname{grad} F_j(x) \mid j = 1, .., n-m\}\right]^{\perp}$$

und bezeichnet man mit P_x die orthogonale Projektion auf $T_X(x)$, so gilt

$$\mathfrak{n}(x) = \frac{P_x \operatorname{grad} \delta(x)}{|P_x \operatorname{grad} \delta(x)|} \ .$$

BEMERKUNG Man kann auf verschiedene Arten die orthogonale Projektion P_x berechnen.

(a) Sind die Vektoren $\operatorname{grad} F_j(x)$ für $j = 1, \ldots, n-m$ durch $(\epsilon_j)_{j=1,\ldots,n-m}$ orthonormalisiert, so gilt

$$P_x = \mathrm{Id} - \sum_{j=1}^{n-m} (\epsilon_j | \diamond) \cdot \epsilon_j \ ,$$

d.h.

$$P_x \operatorname{grad} \delta(x) = \operatorname{grad} \delta(x) - \sum_{j=1}^{n-m} (\epsilon_j | \operatorname{grad} \delta(x)) \cdot \epsilon_j \ .$$

(b) Ist X eine Untermannigfaltigkeit der Dimension n in $\mathbb{R}^n$ und $x \in \partial X$, so gilt

$$\mathfrak{n}(x) = \frac{\operatorname{grad} \delta(x)}{|\operatorname{grad} \delta(x)|} \ .$$

(c) Ist X eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ in $\mathbb{R}^n$ und $x \in \partial X$, so gilt

$$P_x \operatorname{grad} \delta(x) = \operatorname{grad} \delta(x) - \frac{(\operatorname{grad} F(x) | \operatorname{grad} \delta(x))}{|\operatorname{grad} F(x)|^2} \cdot \operatorname{grad} F(x) \ ,$$

woraus man $\mathfrak{n}(x)$ berechnen kann.

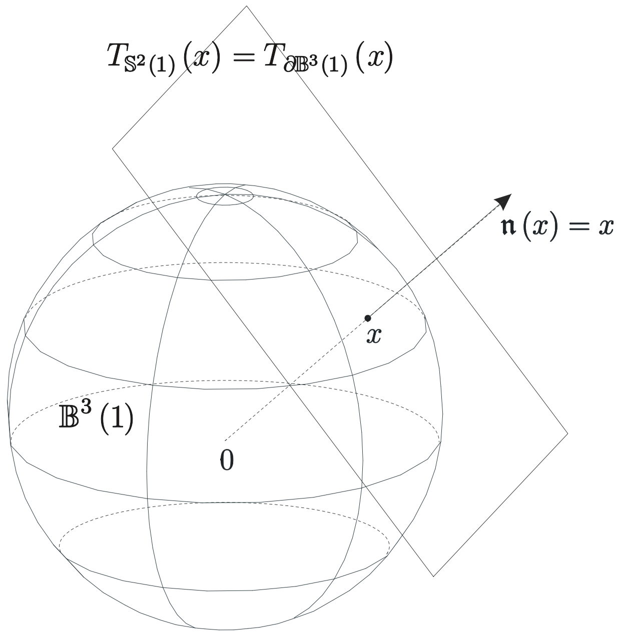
(d) Es gilt auch

$$P_x = D\gamma(u) \left[D\gamma(u)^{\intercal} D\gamma(u)\right]^{-1} D\gamma(u)^{\intercal} \ .$$

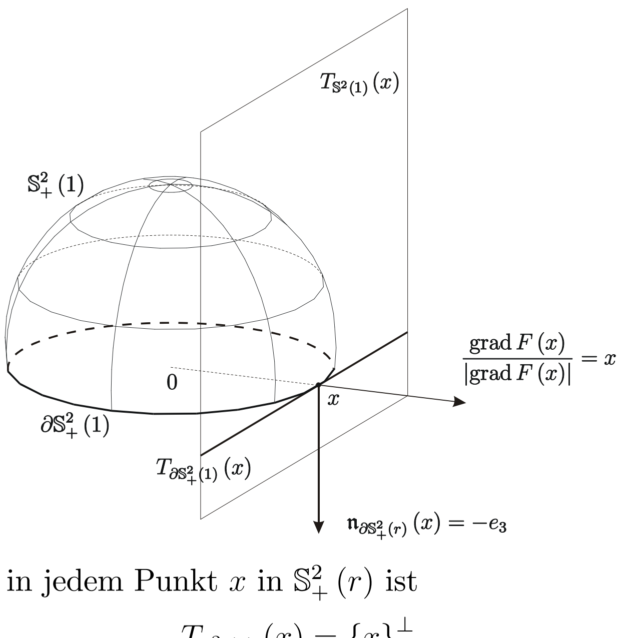
BEISPIEL 1 Nach beispiel 13.6.2 ist die Kugel $\mathbb{B}^n(r)$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, dessen Rand die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ ist.

Der Tangentialraum in jedem Punkt x in $\mathbb{B}^n(r)$ ist $\mathbb{R}^n$. Für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}(r)$ gilt

$$\mathfrak{n}_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}(x) = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad T_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}(x) = \left\{\mathfrak{n}_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}(x)\right\}^{\perp} .$$



BEISPIEL 2 Nach Beispiel 13.6.3 ist die obere Halbsphäre $\mathbb{S}^2_+(r)$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit Rand $\mathbb{S}^1(r) \times \{0\}$.



Der Tangentialraum in jedem Punkt x in $\mathbb{S}^2_+(r)$ ist

$$T_{\mathbb{S}^2_+(r)}(x) = \{x\}^{\perp} .$$

Für alle $x \in \partial\mathbb{S}^2_+(r)$ ist

$$\mathfrak{n}_{\partial\mathbb{S}^2_+(r)}(x) = -e_3 \quad \text{und} \quad T_{\partial\mathbb{S}^2_+(r)}(x) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \cap \{x\}^{\perp} .$$

BEISPIEL 3 Ist γ stetig differenzierbar mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ und ist γ ein Homöomorphismus von J auf $\gamma(J)$, so ist $\gamma(J)$ (nach Beispiel 13.6.4) eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit Rand $\gamma(J \setminus J^\circ)$.

Für alle $t \in J$ ist

$$T_{\gamma(J)}(\gamma(t)) = \mathbb{R} \cdot \gamma'(t)$$

der Tangentialraum in $\gamma(t)$. Gehört $\inf J$ bzw. $\sup J$ zu $J \setminus J^\circ$, so gilt

$$\mathfrak{n}_{\partial\gamma(J)}(\gamma(\inf J)) = -\frac{\gamma'(\inf J)}{|\gamma'(\inf J)|} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{n}_{\partial\gamma(J)}(\gamma(\sup J)) = \frac{\gamma'(\sup J)}{|\gamma'(\sup J)|} \ .$$