Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Klausuren zur Vorlesung

ANALYSIS I

Prof. Dr. C. Portenier

unter Mitarbeit von

A. Alldridge und R. Jäger

Marburg, Wintersemester 2001/02

Fassung vom 21. April 2002

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Wintersemester 2001/02

1. Klausur zur

Analysis I

21. Dezember 2001
16:15 - 18:45 Uhr

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt, welches Sie vorher mit Ihrem Namen versehen. Blätter ohne Namen werden nicht gewertet. Als Hilfsmittel sind Ihre Vorlesungs- und Übungsaufzeichnungen zugelassen. Bitte achten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben auf eine sorgfältige und lesbare Darstellung und geben Sie, zumindest stichpunktartig, Begründungen für Ihre Rechnungen an. In der Vorlesung oder den Übungsaufgaben bewiesene Resultate können ohne Beweis zitiert werden.

Viel Glück !

Name:

Matrikel Nummer:

eMail-Adresse:

Zahl der abgegebenen Blätter:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$	**Note**
Punkte														

1. Klausur zur Analysis I

Aufgabe 1 Es seien A , B und C drei endliche Mengen. Zeigen Sie (3)

(a)

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \ .$$

(b)

$$\# (A \cup B \cup C) =$$

$$= \# (A) + \# (B) + \# (C) - \# (A \cap B) - \# (A \cap C) - \# (B \cap C) + \# (A \cap B \cap C) \ .$$

Aufgabe 2 Sei R ein Ring und $\mathcal{P} \subset R$ eine Teilmenge mit folgenden drei Eigenschaften: (4)

P1 Für jedes $x \in R$ gilt genau eine der drei Alternativen

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x \in \mathcal{P} \quad \text{oder} \quad -x \in \mathcal{P} \ .$$

P2 Aus $x, y \in \mathcal{P}$ folgt $x + y \in \mathcal{P}$.

P3 Aus $x, y \in \mathcal{P}$ folgt $xy \in \mathcal{P}$.

Zeigen Sie, dass R durch

$$x \leqslant y :\Leftrightarrow x = y \quad \text{oder} \quad y - x \in \mathcal{P}$$

zu einem total geordneten Ring wird.

Aufgabe 3 Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Formel (3)

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\,(k+2) = \frac{1}{4} \cdot n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) \ .$$

Aufgabe 4 Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Ungleichung (3)

$$\frac{1}{2}x^2 + 3 \geqslant 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2} \ .$$

Aufgabe 5 Betrachten Sie die Abbildung (3)

$$f : w \longmapsto \frac{1}{w} + 1 : \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z\} \ .$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung f wohldefiniert ist und untersuchen Sie, ob sie bijektiv ist.

Aufgabe 6 Bestimmen Sie die $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, für die die Menge (4)

$$M_n := \left\{ \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \left(-\frac{5}{n}\right)^{l+1} \,\middle|\, k, l \in \mathbb{N} \right\}$$

beschränkt ist, und berechnen Sie Infimum und Supremum der Menge M_n für diese n .

1. Klausur zur Analysis I

Aufgabe 7 Untersuchen Sie unten stehende Folgen $(a_k)_{k \geqslant 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den jeweiligen Grenzwert: (4)

(a)

$$a_k := \frac{5 \cdot 8^k - k^7 \cdot 3^k}{(k - 2^k)(4^k + k^2 - 1)}$$

(b)

$$a_k := \left[(-1)^k + 2\right]^5 \cdot \frac{k^3 + 9}{(k^2 + k)(k^2 - 2k)}$$

Aufgabe 8 Zeigen Sie, dass die durch (3)

$$a_0 := 1 \quad , \quad a_{k+1} := \sqrt{a_k} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 9 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ die durch (4)

$$\delta(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \text{für alle} \quad x, y \in X$$

definierte Metrik.

Zeigen Sie: Für $x \in X$ konvergiert eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ genau dann bezüglich d gegen x , wenn sie bezüglich δ gegen x konvergiert.

Aufgabe 10 Seien $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}, (w_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folgen. Zeigen Sie: Wenn $(z_k)_k$ beschränkt ist, ist $(z_k + w_k)_k$ genau dann beschränkt, wenn $(w_k)_k$ beschränkt ist. (3)

Aufgabe 11 Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert. (3)

Aufgabe 12 Zeigen sie, dass die Reihe (3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k} \cdot x^k$$

für $|x| < 1$ absolut konvergiert und für $|x| \geqslant 1$ divergiert.

Lösungen der 1. Klausur zur

Analysis I

Aufgabe 1

(a) Die Inklusion '$\supset$' ist trivial, kann aber auch ähnlich wie '$\subset$' bewiesen werden: Es gilt nämlich

$$(x \in A \text{ oder } x \in B) \text{ und } x \in C \quad \Longrightarrow \quad (x \in A \text{ und } x \in C) \text{ oder } (x \in B \text{ und } x \in C)$$

mittels des Beweisprinzips durch Fallunterscheidung.

(b) Es gilt durch dreimalige Anwendung der Formel $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A \cup B) + \#C - \#((A \cup B) \cap C)$$

$$= \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C) \ .$$

Aufgabe 2

Reflexivität: Es gilt $x \leqslant x$ für alle $x \in R$, da $x = x$.

Antisymmetrie: Sei $x \leqslant y$ und $y \leqslant x$. Dann ist $y - x = 0$ oder

$$y - x \in \mathcal{P} \quad \text{und} \quad x - y = -(y - x) \in \mathcal{P} \ .$$

Nach P1 muss $x - y = 0$, also $x = y$ sein.

Transitivität: Sei $x \leqslant y$ und $y \leqslant z$. Für $x = y$ oder $y = z$ ist die Behauptung trivial. Nehmen wir also an, dass

$$y - x \in \mathcal{P} \quad \text{und} \quad z - y \in \mathcal{P} \ .$$

Wegen P2 ist dann auch

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathcal{P} \ ,$$

also ist $x \leqslant z$.

Sind $x, y \in R$, so gilt nach P1, dass genau eine der drei Möglichkeiten

$$x = y \quad \text{oder} \quad x < y \quad \text{oder} \quad y < x$$

zutrifft, also ist die Ordnung total.

Seien $x, y, z \in R$ mit $x \leqslant y$. Es ist

$$x + z \leqslant y + z$$

genau dann, wenn

$$(y+z)-(x+z)=y-x=0 \quad \text{oder} \quad y-x\in\mathcal{P}\,,$$

d.h. genau dann, wenn $x \leqslant y$ ist.

Seien $x,y,z\in R$ mit $x\leqslant y$ und $z\geqslant 0$. Der Fall $x=y$ oder $z=0$ ist trivial. Sei also $x<y$ und $z>0$, d.h

$$y-x\in\mathcal{P} \quad \text{und} \quad z\in\mathcal{P}\,.$$

Nach P3 ist dann auch

$$(y-x)\,z\in\mathcal{P}\,,$$

d.h. es ist $(y-x)\,z\geqslant 0$.

Aufgabe 3 Für $n=0$ gilt

$$\sum_{k=1}^{0} k\,(k+1)\,(k+2) = 0 = \frac{1}{4}\cdot 0\cdot 1\cdot 2\cdot 3\,.$$

Die Formel gelte für $n\geqslant 0$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\,(k+1)\,(k+2) - \sum_{n=1}^{n} k\,(k+1)\,(k+2) = (n+1)\,(n+2)\,(n+3)$$

und

$$\frac{1}{4}\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4) - \frac{1}{4}n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) =$$

$$= \frac{1}{4}\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4-n) = (n+1)\,(n+2)\,(n+3)\;\;.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt die Behauptung.

Aufgabe 4 Es gilt

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^2\geqslant 0$$

und somit die Behauptung.

Aufgabe 5 Zunächst ist zu zeigen, dass für $1>\operatorname{Re} w>0$ gilt $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{w}+1\right)>0$. Ist $1>\operatorname{Re} w>0$, so ist $w\neq 0$, also macht $\frac{1}{w}\in\mathbb{C}$ Sinn. Weiter gilt

$$\frac{1}{w}+1=\frac{\overline{w}}{|w|^2}+1\,,$$

d.h.

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{w}+1\right) = \frac{1}{|w|^2}\operatorname{Re}\overline{w}+1 = \frac{1}{|w|^2}\operatorname{Re}w+1 > 1\ .$$

Falls $\frac{1}{w}+1=\frac{1}{z}+1$ ist, folgt leicht $z=w$, also ist f injektiv. Nach obiger Rechnung sieht man schon ein, dass alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z \leqslant 1$ nicht als Wert angenommen werden können. In der Tat ist $\frac{1}{2} \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z\}$, aber

$$\frac{1}{w}+1=\frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad w=-2 \notin \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}\ .$$

Aufgabe 6 Es gilt

$$\left|\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(-\frac{5}{n}\right)^l\right| = \left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(\frac{5}{n}\right)^l\ .$$

Da

$$\sup_{k,l}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(\frac{5}{n}\right)^l = \sup_k\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\cdot\sup_l\left(\frac{5}{n}\right)^l$$

ist und die Folge $\left(1+\frac{1}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ fallend ist, ist die Menge genau dann beschränkt, wenn

$$\sup_l\left(\frac{5}{n}\right)^l < \infty\ .$$

Dies gilt genau dann, wenn $\frac{5}{n}<1$, d.h. wenn $n \geqslant 6$.

Die Folge $\left(\left(\frac{5}{n}\right)^l\right)_l$ ist dann fallend. Da $\left(-\frac{5}{n}\right)^l$ genau dann positiv ist, wenn l gerade ist, folgt

$$\sup_l\left(-\frac{5}{n}\right)^l = \max_l\left(-\frac{5}{n}\right)^l = \left(-\frac{5}{n}\right)^0 = 1\ ,$$

denn für $l \geqslant 1$ ist $\left(\frac{5}{n}\right)^l < 1$, und

$$\inf_l\left(-\frac{5}{n}\right)^l = \min_l\left(-\frac{5}{n}\right)^l = \left(-\frac{5}{n}\right)^1 = -\frac{5}{n}\ .$$

Mit dem oben Gesagten gilt außerdem

$$\sup_k\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \max_k\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = 1+\frac{1}{2^0} = 2\ .$$

Es folgt

$$\sup_{k,l}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(-\frac{5}{n}\right)^l = \sup_k\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\cdot\sup_l\left(-\frac{5}{n}\right)^l = 2\cdot 1 = 2$$

sowie

$$\inf_{k,l}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(-\frac{5}{n}\right)^l = -\sup_{k,l} - \left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(-\frac{5}{n}\right)^l$$

$$= -\sup_k \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \cdot \sup_l - \left(-\frac{5}{n}\right)^l = \sup_k \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \cdot \inf_l \left(-\frac{5}{n}\right)^l = 2 \cdot \left(-\frac{5}{n}\right) = -\frac{10}{n} \ .$$

Aufgabe 7

(a) Es gilt

$$a_k = \frac{8^k \cdot \left(5 - k^7 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^k\right)}{2^k \cdot \left(k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right) \cdot 4^k \cdot \left(1 + k^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4}\right)^k\right)} =$$

$$= \frac{5 - k^7 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^k}{\left(k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right)\left(1 + k^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4}\right)^k\right)} \ .$$

Da

$$\lim_k k^n q^k = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}, q < 1 \ ,$$

folgt mit den Grenzwertsätzen, dass $(a_k)_k$ konvergiert mit

$$\lim_k a_k = \frac{5 - \lim_k k^7 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^k}{\left(\lim_k k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right)\left(1 + \lim_k k^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k - \lim_k \left(\frac{1}{4}\right)^k\right)} = -5 \ .$$

(b) Es gilt mit Grenzwertsätzen

$$\frac{k^3 + 9}{(k^2 + k)(k^2 - 2k)} = \frac{\frac{1}{k} + \frac{9}{k^4}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)} \xrightarrow{(k)} 0 \ .$$

Da die Folge $\left(\left((-1)^k + 2\right)^5\right)_k$ beschränkt ist mit

$$\left|\left((-1)^k + 2\right)^5\right| \leqslant \left|(-1)^k + 2\right|^5 \leqslant 3^5 = 243 \ ,$$

folgt, dass $(a_k)_k$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 8 Die Folge ist nach oben beschränkt durch $\frac{25}{4}$. In der Tat gilt

$$a_0 = 1 = \frac{4}{4} < \frac{25}{4} \ ,$$

und ist $a_k \leqslant \frac{25}{4}$, so folgt

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k} + \frac{15}{4} \leqslant \sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{15}{4} = \frac{5}{2} + \frac{15}{4} = \frac{25}{4} \ .$$

Weiterhin ist die Folge wachsend. Denn

$$a_1 - a_0 = a_1 - \sqrt{a_0} = \frac{15}{4} > 0$$

und ist $a_{k+1} - a_k \geqslant 0$, so folgt

$$a_{k+2} - a_{k+1} = \sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k} \geqslant 0 \; .$$

Also konvergiert die Folge gegen ein a mit $1 = a_0 \leqslant a \leqslant \frac{25}{4}$. Es gilt für $b = \sqrt{a}$

$$\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = b^2 - b = a - \sqrt{a} = \lim_k \left(a_k - \sqrt{a_k}\right) = \frac{15}{4} \; ,$$

also folgt

$$b = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

und somit

$$\lim_k a_k = a = \frac{25}{4} \; .$$

Aufgabe 9 Sei $x = \lim_k x_k$ bezüglich d , d.h. $\lim_k d\,(x, x_k) = 0$. Es folgt mit den Grenzwertsätzen

$$\lim_k \delta\,(x, x_k) = \frac{\lim_k d\,(x, x_k)}{1 + \lim_k d\,(x, x_k)} = \frac{0}{1+0} = 0 \; ,$$

d.h. $\lim_k x_k = x$ bezüglich δ .

Umgekehrt beachte

$$\delta\,(x, y) = \frac{d\,(x, y)}{1 + d\,(x, y)} < \frac{1 + d\,(x, y)}{1 + d\,(x, y)} = 1 \; .$$

Also gilt für $\lim_k x_k = x$ bezüglich δ , d.h. $\lim_k \delta\,(x, x_k) = 0$, mit den Grenzwertsätzen

$$\lim_k d\,(x, x_k) = \frac{\lim_k \delta\,(x, x_k)}{1 - \lim_k \delta\,(x, x_k)} = \frac{0}{1-0} = 0 \; ,$$

d.h. $\lim_k x_k = x$ bezüglich d .

Aufgabe 10 Es gibt ein $C_1 \geqslant 0$ mit $|z_k| \leqslant C_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wenn (w_k) beschränkt ist, gibt es ein $C_2 \geqslant 0$ mit $|w_k| \leqslant C_2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$|z_k + w_k| \leqslant |z_k| + |w_k| \leqslant C_1 + C_2 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \; ,$$

d.h. die Folge $(z_k + w_k)$ ist beschränkt.

Falls $(z_k + w_k)$ beschränkt ist, folgt, da $(-z_k)$ beschränkt ist, mit dem obigen, dass

$$(w_k) = (z_k + w_k + (-z_k))$$

beschränkt ist.

Aufgabe 11 Es gilt

$$\left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \right| = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot (n+1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{(n)} \frac{1}{e} < 1 \; ,$$

also folgt die Behauptung aus dem Quotientenkriterium.

Aufgabe 12 Für $|x| \geqslant 1$ ist $\left(\sqrt{k} \cdot x^k\right)$ keine Nullfolge, denn

$$\left|\sqrt{k} \cdot x^k\right| \geqslant \sqrt{k} \geqslant 1 \quad \text{für alle} \quad k \geqslant 1$$

also divergiert die Reihe.

Ist $|x| < 1$, so gilt

$$\left|\frac{\sqrt{k+1} \cdot x^{k+1}}{\sqrt{k} \cdot x^k}\right| = \sqrt{\frac{k+1}{k}} \cdot |x| = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |x| \xrightarrow{(k)} |x| < 1 \ ,$$

also folgt aus dem Quotientenkriterium, dass die Reihe absolut konvergiert.

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Wintersemester 2001/02

2. Klausur zur

Analysis I

12. Februar 2002
9:15 - 11:45 Uhr

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem ***gesonderten Blatt*** *, welches Sie vorher mit Ihrem* ***Namen*** *versehen. Blätter ohne Namen werden nicht gewertet. Als Hilfsmittel sind Ihre Vorlesungs- und Übungsaufzeichnungen zugelassen. Bitte achten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben auf eine sorgfältige und lesbare Darstellung und geben Sie, zumindest stichpunktartig, Begründungen für Ihre Rechnungen an. In der Vorlesung oder den Übungsaufgaben bewiesene Resultate können ohne Beweis zitiert werden.*

Viel Erfolg !

Name:

Zahl der abgegebenen Blätter:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$	**Note**
Punkte														

2. Klausur zur Analysis I

Aufgabe 1 Bestimmen Sie (mit Beweis) die Menge der $n \in \mathbb{N}$, für die gilt (2)

$$n! \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^n \ .$$

Aufgabe 2 Sei $a \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Menge (3)

$$Z = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = |1-\overline{a}z|\}$$

sowie

$$\sup|Z| \quad \text{und} \quad \inf|Z| \ .$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $|a| = 1$ und $|a| \neq 1$.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die unten angegebenen Folgen in $\mathbb{C}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) (0.5)

$$a_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k^2}$$

(b) (1)

$$a_k = \sqrt{k^2+3k} - k$$

(c) (1.5)

$$a_k = \frac{3k^5+9k-1}{(7k-k^8)\left(17k^2-\sqrt{k}\right)} + i^{k^2} \cdot \sqrt{\frac{k}{k+1}}$$

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die rekursiv definierte Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit (3)

$$a_0 := \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad a_{k+1} := \frac{1}{2-a_k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

auf Wohldefiniertheit, Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 5 Sei $a_k := \sum_{l=k+1}^{2k} \frac{1}{l}$. (3)

Berechnen Sie $a_{k+1} - a_k$, und zeigen Sie, dass die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 6 Seien $(a_l)_{l \in \mathbb{N}}, (b_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folgen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: (2)

Falls $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ konvergiert und (b_l) beschränkt ist, konvergiert $\sum_{l=0}^{\infty} a_l b_l$.

2. Klausur zur Analysis I

Aufgabe 7 Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ auf Konvergenz und Divergenz:

(a) (1.5)

$$a_l := \frac{\sqrt{l+1} - \sqrt{l-1}}{\sqrt{l^3}} \ .$$

(b) (1.5)

$$a_l := \frac{1 + \sin\left(\pi \cdot \left(l + \frac{1}{2}\right)\right)}{l} \ .$$

Aufgabe 8 Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Reihe konvergiert und ob evtl. absolute Konvergenz vorliegt: (3)

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sqrt[3]{3l} \cdot x^l$$

Aufgabe 9 Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion (2)

$$f_a : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} a & \text{falls} \quad x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sin 2x}{\cos x} & \phantom{\text{falls}} \quad x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

stetig auf $[0, \pi]$?

Aufgabe 10 Zeigen Sie, dass genau ein $x \in [0, 1]$ existiert mit (3)

$$1 - x^2 = \exp(x - 1) \ .$$

Aufgabe 11 Zeigen Sie, dass die Funktion (4)

$$f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin(x) \exp(-x)$$

ein Maximum besitzt.

Aufgabe 12 Zeigen Sie, dass die Funktion (4)

$$f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \exp(x) - \sin(\exp(-x))$$

injektiv ist, und bestimmen Sie ihr Bild $f([0, \infty[)$. Beweisen Sie weiterhin, dass die Umkehrfunktion

$$\overset{-1}{f} : f([0, \infty[) \longrightarrow [0, \infty[$$

stetig ist.

Lösungen der 2. Klausur zur Analysis I

Aufgabe 1 Zunächst gilt die Ungleichung nicht für $n \in \{1, \ldots 5\}$, jedoch für $n = 0$ und $n = 6$ (Induktionsanfang). Nach Blatt 8 ist die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)_{k \geqslant 1}$ monoton wachsend, sodass

$$2 = (1+1)^1 \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \quad \text{bzw.} \quad k+1 \leqslant \frac{k+1}{2} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

für alle $k \geqslant 1$ gilt. Es folgt unter der (Induktions-)Annahme $n \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^n$ der Induktionsschritt

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \leqslant (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^n \leqslant \frac{n+1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} .$$

Die gesuchte Menge ist somit $\{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 6\}$.

BEMERKUNG Ersetzt man $n!$ durch $(n+1)!$ wird die Bestimmung erheblich schwerer. Zunächst gilt zwar für alle $k \geqslant 8$

$$\frac{2\,(k+2)}{k+1} = \frac{2+\frac{4}{k}}{1+\frac{1}{k}} < 2.5 < \left(1+\frac{1}{8}\right)^8 \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right)^k ,$$

also

$$k+2 \leqslant \frac{k+1}{2} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k ;$$

und man kann für $n \geqslant 8$ wie oben den Induktionsschritt durchführen. Aber man erreicht den Induktionsanfang erst sehr spät, nämlich für $n = 18$, sodass die gesuchte Menge gerade $\{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 18\}$ ist.

Lösungen der 2. Klausur zur Analysis I

n	$(n+1)!$	$\left(\frac{n}{2}\right)^n$	$\left(\frac{n}{2}\right)^n - (n+1)!$
0	1	1	0
1	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
2	6	1	-5
3	24	$\frac{27}{8}$	$-\frac{165}{8}$
4	120	16	-104
5	720	$\frac{3125}{32}$	$-\frac{19\,915}{32}$
6	5040	729	-4311
7	40 320	$\frac{823\,543}{128}$	$-\frac{4337\,417}{128}$
8	362 880	65 536	$-297\,344$
9	3628 800	$\frac{387\,420\,489}{512}$	$-\frac{1470\,525\,111}{512}$
10	39 916 800	9765 625	$-30\,151\,175$
11	479 001 600	$\frac{285\,311\,670\,611}{2048}$	$-\frac{695\,683\,606\,189}{2048}$
12	6227 020 800	2176 782 336	$-4050\,238\,464$
13	87 178 291 200	$\frac{302\,875\,106\,592\,253}{8192}$	$-\frac{411\,289\,454\,918\,147}{8192}$
14	1307 674 368 000	678 223 072 849	$-629\,451\,295\,151$
15	20 922 789 888 000	$\frac{437\,893\,890\,380\,859\,375}{32\,768}$	$-\frac{247\,704\,088\,669\,124\,625}{32\,768}$
16	355 687 428 096 000	281 474 976 710 656	$-74\,212\,451\,385\,344$
17	6402 373 705 728 000	$\frac{827\,240\,261\,886\,336\,764\,177}{131\,072}$	$-\frac{11\,931\,664\,470\,843\,651\,823}{131\,072}$
18	121 645 100 408 832 000	150 094 635 296 999 121	28 449 534 888 167 121
19	2432 902 008 176 640 000	$\frac{1978\,419\,655\,660\,313\,589\,123\,979}{524\,288}$	$\frac{702\,878\,327\,597\,399\,356\,803\,979}{524\,288}$
20	51 090 942 171 709 440 000	100 000 000 000 000 000 000	48 909 057 828 290 560 000

Aufgabe 2 Genau dann gilt $|z-a| = |1-\overline{a}z|$, wenn

$$(z-a)\,(\overline{z}-\overline{a}) = (1-a\overline{z})\,(1-\overline{a}z) \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2 + |a|^2 = 1 + |a|^2\,|z|^2 \ ,$$

also wenn

$$\left(1-|a|^2\right)|z|^2 = 1-|a|^2$$

gilt. Wenn $|a| = 1$ ist, ist $Z = \mathbb{C}$, andernfalls

$$Z = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \ .$$

Damit gilt

$$\inf |Z| = \begin{cases} 1 & \text{falls } |a| \neq 1 \\ 0 & \phantom{\text{falls }} |a| = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \sup |Z| = \begin{cases} 1 & \text{falls } |a| \neq 1 \\ \infty & \phantom{\text{falls }} |a| = 1 \end{cases} .$$

Aufgabe 3

(a) Es gilt

$$a_k = \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{j=1}^{k} j = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{k\,(k+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \longrightarrow \frac{1}{2} .$$

(b) Es gilt

$$a_k = \frac{k^2 + 3k - k^2}{k + \sqrt{k^2 + 3k}} = \frac{3}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{k}}} \longrightarrow \frac{3}{2} .$$

(c) Es gilt

$$\frac{3k^5 + 9k - 1}{(7k - k^8)\left(17k^2 - \sqrt{k}\right)} = \frac{\frac{3}{k^5} + \frac{9}{k^9} - \frac{1}{k^{10}}}{\left(\frac{7}{k^7} - 1\right)\left(17 - \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)} \longrightarrow -\frac{0}{17} = 0 ,$$

d.h. $\left(\frac{3k^5+9k-1}{(7k-k^8)\left(17k^2-\sqrt{k}\right)}\right)_k$ ist konvergent. Demnach ist $(a_k)_k$ genau dann konvergent, wenn $\left(i^{k^2} \cdot \sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)_k$ konvergiert. Da $\lim_{k \geqslant 1} \sqrt{\frac{k+1}{k}} = 1$, konvergiert $\left(i^{k^2} \cdot \sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)_k$ genau dann, wenn die Folge der Werte

$$\sqrt{\frac{k+1}{k}} \cdot i^{k^2} \cdot \sqrt{\frac{k}{k+1}} = i^{k^2} \quad , k \in \mathbb{N} ,$$

konvergiert. Aber

$$i^{(2k)^2} = i^{4k^2} = i^0 = 1 \quad \text{und} \quad i^{\left(3^k\right)^2} = i^{9^k} = i ,$$

denn

$$i = i^1 = i^9 \quad \text{und} \quad i^{9^{k+1}} = \left(i^9\right)^{9^k} = i^{9^k} = \cdots = i .$$

Also hat $\left(i^{k^2}\right)$ verschiedene Häufungspunkte und ist somit divergent. Damit ist auch (a_k) divergent.

Aufgabe 4 Behauptung: Es gilt $a_k < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. In der Tat gilt $a_0 = \frac{1}{2} < 1$, und ist $a_k < 1$, so folgt

$$2 - a_k > 2 - 1 = 1 ,$$

also ist a_{k+1} wohldefiniert und

$$a_{k+1} = \frac{1}{2 - a_k} < 1 .$$

Damit gilt die Behauptung. Weiter gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$1 - (2 - a_k)\, a_k = a_k^2 - 2a_k + 1 = (a_k - 1)^2 > 0 \; .$$

Da $2 - a_k > 1 > 0$ ist, folgt

$$a_{k+1} = \frac{1}{2 - a_k} > a_k \; ,$$

d.h. $(a_k)_k$ ist streng monoton wachsend und durch 1 beschränkt, also konvergent. Für den Grenzwert $a = \lim_k a_k$ gilt mit den Grenzwertsätzen

$$a = \frac{1}{2 - a} \;\Leftrightarrow\; (a-1)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 1 \; .$$

Aufgabe 5 Es gilt

$$a_{k+1} - a_k = \sum_{l=k+2}^{2k+2} \frac{1}{l} - \sum_{l=k+1}^{2k} \frac{1}{l} = \frac{1}{2\,(k+1)} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2\,(k+1)} = \frac{1}{2\,(2k+1)\,(k+1)} \; .$$

Diese Zahl ist > 0 und $\leqslant \frac{1}{(k+1)^2}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ konvergiert, gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \varepsilon$ für alle $q > p \geqslant n$. Seien $p, q \geqslant n$, Œ $q > p$. Es gilt mit dem obigen

$$|a_q - a_p| = a_q - a_p = \sum_{k=p}^{q-1} (a_{k+1} - a_k) \leqslant \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \varepsilon \; .$$

Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 6 Die Aussage ist falsch, denn die Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1} \quad \text{konvergiert}$$

nach dem Leibniz-Kriterium, während mit $b_l = (-1)^l$ die harmonische Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l b_l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l+1} \quad \text{bekanntlich divergiert,}$$

obwohl (b_l) durch 1 beschränkt ist.

Lösungen der 2. Klausur zur Analysis I

Aufgabe 7

(a) Es gilt

$$0 < \frac{\sqrt{l+1}-\sqrt{l-1}}{\sqrt{l^3}} = \frac{\left(\sqrt{l+1}-\sqrt{l-1}\right)\left(\sqrt{l+1}+\sqrt{l-1}\right)}{\sqrt{l^3}\left(\sqrt{l+1}+\sqrt{l-1}\right)} \leqslant \frac{2l}{2\sqrt{l^3}\sqrt{l}} = \frac{1}{l^2}\ .$$

Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ (absolut) konvergent.

Man hätte auch folgendermaßen vorgehen können. Es gilt

$$\sqrt{l+1}-\sqrt{l-1} \leqslant 1 \quad \text{für alle } l \geqslant 2\ .$$

In der Tat ist die Funktion $\sqrt{\cdot}$ wachsend und somit

$$\left(\sqrt{l-1}+1\right)^2 = l + 2\sqrt{l-1} \geqslant l+2 \geqslant l+1\ .$$

Daraus folgt

$$a_l \leqslant \frac{1}{\sqrt{l^3}} = \frac{1}{l^{\frac{3}{2}}} \quad \text{für alle} \quad l \geqslant 2\ .$$

Nun ist $\frac{3}{2} > 1$, also nach Abschnitt 6.2 $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l^3}}$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium ist auch $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ (absolut) konvergent.

(b) Es gilt

$$a_l = \frac{1+\cos \pi l}{l} = \frac{1+(-1)^l}{l}\ .$$

Die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium; würde also $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ konvergieren, so würde auch

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}$$

konvergieren, was nicht der Fall ist. Daher divergiert die Reihe.

Aufgabe 8 Es gilt für $|x| < 1$, dass

$$\left| \frac{\sqrt[3]{3\,(l+1)}x^{l+1}}{\sqrt[3]{3l}x^l} \right| = \sqrt[3]{\frac{l+1}{l}} \cdot |x| \longrightarrow |x| < 1\ ,$$

also konvergiert die Reihe in diesem Fall absolut nach Quotientenkriterium (vgl. Skript, Kapitel 6.9, Satz und Bemerkung 2). Für $|x| \geqslant 1$ ist

$$\left|\sqrt[3]{3l} \cdot x^l\right| \geqslant \sqrt[3]{3l}$$

also $\left(\sqrt[3]{3l} \cdot x^l\right)_{l\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge , also divergiert die Reihe in diesem Fall.

Lösungen der 2. Klausur zur Analysis I

Aufgabe 9 Für $\frac{\pi}{2} \neq x \in [0, \pi]$ ist $\cos x \neq 0$, also ist f_a dort stetig. Weiter gilt

$$\lim_{\frac{\pi}{2} \neq x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \lim_{\frac{\pi}{2} \neq x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = \lim_{\frac{\pi}{2} \neq x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} 2 \sin x = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \ .$$

Da $f_a\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ ist , ist f_a genau dann in $\frac{\pi}{2}$, also überall, stetig, wenn $a = 2$.

Aufgabe 10 Es gibt ein solches x , denn für die stetige Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \exp(x - 1) - \left(1 - x^2\right)$$

gilt

$$f(0) = \exp(-1) - 1 = \frac{1}{\exp(1)} - 1 < \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

und

$$f(1) = 1 + \exp(0) - 1 = \exp(0) = 1 > 0 \ ,$$

also hat nach dem Zwischenwertsatz (oder dem Satz von Bolzano) f eine Nullstelle $x \in [0, 1]$, d.h. die Gleichung hat eine Lösung x . Da $1 - \mathrm{id}^2$ auf $[0, 1]$ streng fällt und $\exp(\mathrm{id} - 1)$ als Verknüpfung der streng wachsenden Funktionen exp und $\mathrm{id} - 1$ ebenfalls streng wachsend ist, ist f streng wachsend, also x eindeutig.

Aufgabe 11 Es gilt

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) =: \varepsilon > 0 \ .$$

Da $\sin \leqslant 1$ ist und $\exp(-\mathrm{id})$ streng fällt mit $\lim_{x \longrightarrow \infty} \exp(-x) = 0$, gibt es $R > \frac{\pi}{2}$ mit

$$f(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad x > R \ .$$

Das Maximum der stetigen Funktion $f_{|[0,R]}$ existiert nach Weierstrass und ist $\geqslant \varepsilon$, also ein Maximum von f .

Aufgabe 12 Die Funktion exp ist streng wachsend, und die Funktion $\exp(-\mathrm{id})$ ist streng fallend. Ferner ist für $x \geqslant 0$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \in]0, 1] \ .$$

Da die Funktion sin auf $[0, 1]$ wachsend ist, folgt für $x, y \in [0, \infty[$ mit $x < y$

$$\exp y - \exp x > 0 > \sin \exp(-y) - \sin \exp(-x) \ ,$$

also

$$f(y) = \exp y - \sin \exp(-y) > \exp x - \sin \exp(-x) = f(x) \ ,$$

d.h. f ist streng wachsend und somit insbesondere injektiv. Da f als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist, ist $\overset{-1}{f} : f([0, \infty[) \longrightarrow \mathbb{R}$ somit ebenfalls stetig und streng wachsend.

Weiter gilt

$$f(0) = \exp(0) - \sin\exp(0) = 1 - \sin 1 \ .$$

Somit ist

$$1 - \sin 1 \in f([0,\infty[) \subset [1 - \sin 1, \infty[\ .$$

Da sin beschränkt ist, gilt weiterhin

$$\infty = \lim_{x \longrightarrow \infty} \exp(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) \ .$$

Ist also $R > 1 - \sin 1$, so gibt es $x \geqslant 0$ mit $f(x) > R$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt, dass es $y \in]0, x[$ mit $f(y) = R$, so dass $R \in f([0,\infty[)$ ist. Damit gilt

$$f([0,\infty[) = [1 - \sin 1, \infty[\ .$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Wintersemester 2001/02

Wiederholungsklausur zur

Analysis I

5. April 2002
14:15 - 16:45 Uhr

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem ***gesonderten Blatt*** *, welches Sie vorher mit Ihrem* ***Namen*** *versehen. Blätter ohne Namen werden nicht gewertet. Als Hilfsmittel sind Ihre Vorlesungs- und Übungsaufzeichnungen zugelassen. Bitte achten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben auf eine sorgfältige und lesbare Darstellung und geben Sie, zumindest stichpunktartig, Begründungen für Ihre Rechnungen an. In der Vorlesung oder den Übungsaufgaben bewiesene Resultate können ohne Beweis zitiert werden.*

Viel Glück !

Name:

Zahl der abgegebenen Blätter:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$	**Note**
Punkte														

Wiederholungsklausur zur Analysis I

Aufgabe 1 Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. (2)

(a) Zeigen Sie mittels der binomischen Formel

$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} .$$

(b) Folgern Sie : Die Anzahl der mindestens $(n+1)$-elementigen Teilmengen einer $2n$-elementigen Menge ist gleich

$$\frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right) .$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{C}$ (2)

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + z^{2^k}\right) = \sum_{l=0}^{2^n-1} z^l .$$

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die unten angegebenen Folgen in $\mathbb{C}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) (1)

$$a_k = \frac{-2k^4 + k - 7}{(7k - k^2)\left(6k^2 - \sqrt{k}\right)} + i^k \cdot \sqrt{\frac{1}{k}}$$

(b) (1)

$$a_k = \cos\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right]$$

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die rekursiv definierte Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit (4)

$$a_0 := 0 \quad \text{und} \quad a_{k+1} := \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{a_k^2 + 1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

auf Wohldefiniertheit, Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 5 Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine gegen $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ konvergente Folge. Beweisen Sie: (3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right| < \infty .$$

Wiederholungsklausur zur Analysis I

Aufgabe 6 Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert folgende Reihe? Für welche x konvergiert sie absolut? (2)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{j} \right) \cdot x^l$$

Aufgabe 7 Zeigen Sie, dass für $x \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$ die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} (l+1)(-x)^l$ konvergiert mit (4)

$$1 - 2x \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)(-x)^l \leqslant 1 - 2x + 3x^2 \; .$$

Aufgabe 8 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) (1)

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{\sinh(x)}{\exp(-x)}$$

(b) (1)

$$\lim_{0 < x \longrightarrow 0} \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Aufgabe 9 Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion (3)

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} a & \text{falls } x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{x^4}} \cdot \cos(x^2) & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 10 Zeigen Sie, dass die Gleichung (3)

$$2 + \cos(y) = \frac{\exp(-\cos(y))}{\cos(y)}$$

genau eine Lösung im Intervall $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ besitzt.

Aufgabe 11 Zeigen Sie, dass die Funktion (3)

$$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 \cdot \exp(-x)$$

ein Maximum besitzt.

Aufgabe 12 Zeigen Sie, dass die Funktion (4)

$$f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln(x+e) + \cos\left(\frac{1}{\ln(x+e)}\right)$$

injektiv ist, und bestimmen Sie ihr Bild $f([0, \infty[)$. Beweisen Sie weiterhin, dass die Umkehrfunktion

$$\overset{-1}{f} : f([0, \infty[) \longrightarrow [0, \infty[$$

stetig ist.

Lösungen der Wiederholungsklausur zur

Analysis I

Aufgabe 1

(a) Es gilt mit binomischer Formel

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \ .$$

(b) Es gilt

$$\#\{A \subset 2n \mid \#A \geqslant n+1\} = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right) \ .$$

Aufgabe 2 Beweis durch Induktion nach n . Sei $n = 1$. Es gilt

$$\prod_{k=0}^{0} \left(1 + z^{2^k}\right) = 1 + z = \sum_{k=0}^{2-1} z^k \ .$$

Die Formel gelte für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Es gilt

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right) = \left(1 + z^{2^n}\right) \sum_{k=0}^{2^n-1} z^k = \sum_{k=0}^{2^n-1} z^k + \sum_{k=0}^{2^n-1} z^{k+2^n} = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} z^k \ ,$$

denn $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Aufgabe 3

(a) Es gilt

$$\left| i^k \cdot \sqrt{\frac{1}{k}} \right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{k}} \longrightarrow 0 \ ,$$

also $\lim_k i^k \sqrt{\frac{1}{k}} = 0$. Weiter gilt

$$\frac{-2k^4 + k - 7}{(7k - k^2)\left(6k^2 - \sqrt{k}\right)} = \frac{-2 + \frac{1}{k^3} - \frac{7}{k^4}}{\left(\frac{7}{k} - 1\right)\left(6 - k^{-\frac{7}{2}}\right)} \longrightarrow \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \ .$$

Damit folgt $\lim_k a_k = \frac{1}{3}$.

(b) Es gilt

$$\lim_k \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \left[\lim_k \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{-1} = \frac{1}{e} .$$

Da cos eine stetige Funktion ist, folgt

$$\lim_k \cos\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \cos\left(\frac{1}{e}\right) .$$

Aufgabe 4 Es gilt $0 \leqslant a_k \leqslant \frac{5}{8}$. In der Tat: $a_0 = 0 \in \left[0, \frac{5}{8}\right]$ und induktiv gilt $a_k^2+1 \geqslant 1$, also ist a_{k+1} wohldefiniert und

$$a_{k+1} = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{1+a_k^2} \leqslant \frac{5}{8} .$$

Offenbar ist $a_{k+1} \geqslant 0$.

Die Folge erfüllt die Cauchybedingung. In der Tat:

$$|a_{k+1}-a_k| = \frac{5}{8}\frac{\left|a_{k-1}^2-a_k^2\right|}{\left(1+a_k^2\right)\left(1+a_{k-1}^2\right)} \leqslant \frac{5}{8}\cdot|a_{k-1}+a_k|\cdot|a_k-a_{k-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5}{8}\cdot 2\cdot\frac{5}{8}\cdot|a_k-a_{k-1}| \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{25}{32}\right)^k\cdot(a_1-a_0) = \frac{5}{8}\cdot\left(\frac{25}{32}\right)^k .$$

Damit folgt für $k \geqslant l$

$$|a_k-a_l| \leqslant \sum_{j=l}^{k-1}|a_{j+1}-a_j| \leqslant \frac{5}{8}\cdot\sum_{j=l}^{k-1}\left(\frac{25}{32}\right)^j .$$

Da $\frac{25}{32} < 1$, konvergiert die dazugehörige geometrische Reihe, so dass es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die rechte Seite der Ungleichung $\leqslant \varepsilon$ ist, wann immer $k, l \geqslant n$. Daher ist (a_k) eine Cauchyfolge und somit konvergent. Der Grenzwert a erfüllt die Gleichung

$$a = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{1+a^2} \quad\Leftrightarrow\quad a^3+a-\frac{5}{8} = 0$$

und die Bedingung $\frac{1}{2} \geqslant a \geqslant 0$. $\frac{1}{2}$ ist eine Lösung dieser Gleichung. Es gilt für $\frac{1}{2} > b \geqslant 0$

$$\frac{b^3+b-\frac{5}{8}}{b-\frac{1}{2}} = b^2+\frac{b}{2}+\frac{5}{4} > 0 ,$$

also hat die kubische Gleichung keine anderen Lösungen mit dieser Bedingung und es folgt $a = \frac{1}{2}$.

Lösungen der Wiederholungsklausur zur Analysis I

Aufgabe 5 Da $a > 0$ ist, gilt $\varepsilon := \inf_k a_k > 0$. Es folgt

$$\left|\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right| = \frac{|a_k - a_{k+1}|}{|a_k a_{k+1}|} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\,|a_k - a_{k+1}| \ .$$

Daher folgt die zweite Aussage aus der ersten mit dem Majorantenkriterium. Die umgekehrte Implikation folgt mit der ersten, angewandt auf die Folge $\left(\frac{1}{a_k}\right) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, denn es gilt nach Grenzwertsätzen

$$\lim_k \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a} \neq 0 \ ,$$

so dass diese Folge die Voraussetzungen der ersten Implikation erfüllt.

Aufgabe 6 Es gilt

$$\left|\frac{x^{l+1}\cdot\sum_{j=1}^{l+1}\frac{1}{j}}{x^l\cdot\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j}}\right| = |x|\cdot\frac{\frac{1}{l+1}+\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j}}{\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j}} = |x|\cdot\left(1+\frac{1}{(l+1)\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j}}\right) \to |x| \ ,$$

da die harmonische Reihe $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}$ divergiert. Nach dem Quotienkriterium konvergiert die Reihe also für $|x| < 1$ absolut. Ist hingegen $|x| \geqslant 1$, so gilt

$$\left|x^l\cdot\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j}\right| \geqslant 1 > 0 \ ,$$

also ist $\left(x^l\cdot\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j}\right)$ keine Nullfolge und die Reihe divergiert.

Aufgabe 7 Sei $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$. Dann ist $\left((l+1)\cdot x^l\right)_{l\geqslant 0}$ eine Nullfolge. Falls $l \geqslant 2$ ist, gilt

$$x \leqslant \frac{3}{4} \leqslant \frac{l+1}{l+2} \quad \text{, also} \quad (l+2)\cdot x^{l+1} \leqslant (l+1)\cdot x^l \ .$$

Damit ist die Folge $\left((l+1)\cdot x^l\right)_{l\geqslant 2}$ fallend und nach dem Leibnizkriterium folgt, dass die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^l\,(l+1)\,x^l$ konvergiert mit

$$0 \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^l\,(l+1)\cdot x^l \leqslant 3\cdot x^2 \ .$$

Durch Addition von $1-2x$ erhält man die Behauptung.

Aufgabe 8

(a) Es gilt

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{\sinh x}{e^{-x}} = \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{1}{2}e^x\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\longrightarrow\infty}e^{-2x}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \ .$$

(b) Es gilt

$$\left|\sqrt{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \sqrt{x} \to 0 \quad (x\to 0)\ .$$

Aufgabe 9 Die Funktion f_a ist stets auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig, es reicht, die Stetigkeit in 0 zu prüfen. Es gilt

$$\lim_{0\neq x\longrightarrow 0} f_a(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}}\sqrt{\frac{1}{x^4}}\cos\left(x^2\right) = 1\cdot\lim_{x\longrightarrow 0} e^{-\frac{1}{y^2}}\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{y\longrightarrow\infty} y\cdot e^{-y} = 0\ .$$

Damit muss $a=0$ sein.

Aufgabe 10 Die Gleichung ist für $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ zu

$$(2+\cos y)\cdot\cos y = e^{-\cos y}$$

äquivalent. cos ist auf diesem Intervall streng fallend und >0 , also ist $(2+\cos)\cdot\cos$ streng fallend und $e^{-\cos}$ streng wachsend. Daher gibt es höchstens eine Lösung. Nun ist $(2+\cos)\cdot\cos - e^{-\cos}$ als Summe von Funktionen, die als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig sind, eine stetige Funktion. Weiter gilt

$$(2+\cos 0)\cdot\cos 0 - e^{-\cos 0} = 3-\frac{1}{e} > 3-e > 0\ ,$$

sowie

$$\left(2+\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{2} - e^{-\cos\frac{\pi}{2}} = -1 < 0\ .$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine Nullstelle dieser Funktion und damit eine Lösung der Gleichung, die nach dem obigen eindeutig ist.

Aufgabe 11 Es gilt $1^3\cdot\exp(-1) = \frac{1}{e} > 0$. Weiter gilt

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x^3\cdot\exp(-x) = 0 = \lim_{x\longrightarrow 0} x^3\exp(-x)\ .$$

Daher gibt es $R>1>r>0$, so dass $\exp(-x)\cdot x^3 < \frac{1}{e}$ für alle $x>R$ und $x<r$. Die stetige Funktion $f_{|[r,R]}$ besitzt ein Maximum $>\frac{1}{e}$, dies ist also auch ein Maximum von f .

Aufgabe 12 Die Funktion f ist streng wachsend. Denn $\ln(e+\mathrm{id})$ ist streng wachsend als Verknüpfung streng wachsender Funktionen. $\frac{1}{\ln(e+\mathrm{id})}$ ist streng fallend und da für $x\geqslant 0$

$$\ln(e+x)\geqslant \ln e = 1 > 0\ ,$$

ist für $x\geqslant 0$

$$0 < \frac{1}{\ln(e+x)} \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}\ .$$

Auf dem Intervall $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ist cos streng fallend. Damit ist $\cos\left(\frac{1}{\ln(e+\mathrm{id})}\right)$ als Verknüpfung streng fallender Funktionen streng wachsend. Insbesondere ist f als Summe streng wachsender Funktionen streng wachsend und somit auch injektiv. Da f als Summe von durch Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz

$$f\left([0,\infty[\right) = \left[f(0), \lim_{x\longrightarrow\infty} f(\infty)\right[= [1+\cos 1, \infty[\ ,$$

denn

$$f(x) \geqslant \ln(e+x) - 1 \to \infty \quad (x \to \infty) \ .$$

Da f streng wachsend, stetig und auf einem Intervall deifniert ist, folgt nach Vorlesung, dass auch $\overset{-1}{f}$ streng wachsend und stetig ist.