Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Klausuren zur Vorlesung

ANALYSIS II

Prof. Dr. C. Portenier

R. Jäger und R. Knevel

Marburg, Sommersemester 2002

Fassung vom 18. Oktober 2002

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2002

Klausur zur Analysis II

16.07.2002
09:15 - 11:45 Uhr

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt, welches Sie vorher mit Ihrem Namen versehen. Blätter ohne Namen werden nicht gewertet. Als Hilfsmittel sind Ihre Vorlesungs- und Übungsaufzeichnungen zugelassen. Bitte achten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben auf eine sorgfältige und lesbare Darstellung und geben Sie, zumindest stichpunktartig, Begründungen für Ihre Rechnungen an. In der Vorlesung oder den Übungsaufgaben bewiesene Resultate können ohne Beweis zitiert werden.

Viel Erfolg !

Name:

Matrikel Nummer:

eMail-Adresse:

Zahl der abgegebenen Blätter:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$	Note
Punkte														

Aufgabe 1 Diskutieren Sie die Funktion (4)

$$f : \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{\ln x - \ln 2}{\ln^2 x} .$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie: Die Funktion (3)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^n + ax + b$$

besitzt höchstens zwei Nullstellen, falls n gerade und höchstens drei Nullstellen, falls n ungerade.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert: (2)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln(x^m + 1)}{\ln(x^n)} \quad m, n \in \mathbb{N}^* .$$

Aufgabe 4 Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: (3)

$$f' + 2\,\mathrm{id} \cdot f = 2\,\mathrm{id} \quad ; \quad f(0) = 2 .$$

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems: (3)

$$f' = \cos \cdot \exp(-f) \quad ; \quad f(0) = \xi \in \mathbb{R}_+ .$$

Aufgabe 6 Für $k \in \mathbb{N}$ sei (3)

$$f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto k \cdot x^k \cdot (1 - x) .$$

Untersuchen Sie die Folge $(f_k)_k$ auf

(a) punktweise Konvergenz,

(b) gleichmäßige Konvergenz auf Intervallen $[0, b] \subset [0, 1]$.

Aufgabe 7 Zeigen Sie: Durch (2)

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k \exp(kx)}$$

wird eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 8 Seien K und L kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass (2)

$$K + L := \{x + y \mid x \in K \, , \, y \in L\}$$

kompakt ist.

Aufgabe 9 Für $a > 0$ (fest) berechne man die Länge der Sternkurve (2)

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \gamma(t) := \begin{pmatrix} a \cdot \cos^3 t \\ a \cdot \sin^3 t \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 10 Es seien $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und (3)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto xy \cdot g(x, y) \; .$$

Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ stetig, partiell und total differenzierbar ist.

Aufgabe 11 Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion (3)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto y^2 + 5x^2 - 6y + 10x + 6 \, .$$

Handelt es sich dabei um globale Extremstellen?

Aufgabe 12 Analysieren Sie auf (4)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \middle| \; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

die Extremstellen der Funktion $A \longmapsto \det A$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2002

Lösungen der Klausur zur

Analysis II

Aufgabe 1 Die Funktion ist in jedem Punkt des Definitionsbereichs differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (\ln x - \ln 2) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2 \ln 2 - \ln x}{x \cdot \ln^3 x} \ .$$

Diese ist ebenfalls stetig und differenzierbar mit stetiger Ableitung

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x \cdot \ln^3 x - (2 \ln 2 - \ln x)\left(\ln^3 x + x \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}\right)}{x^2 \cdot \ln^6 x} =$$

$$= \frac{\ln^2 x + 2(1 - \ln 2) \cdot \ln x - 6 \ln 2}{x^2 \cdot \ln^4 x} = \frac{\ln^2 x + (2 - \ln 4) \cdot \ln x - 3 \ln 4}{x^2 \cdot \ln^4 x} \ .$$

Die Funktion hat in $x = 2$ die einzige Nullstelle und in $x = 1$ die einzige Polstelle. Ferner gilt

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{1}{\ln x} \left(\frac{\ln x - \ln 2}{\ln x} \right) = 0- \ ,$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1-} \frac{1}{\ln x} \left(\frac{\ln x - \ln 2}{\ln x} \right) = -\infty \ ,$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1+} \frac{1}{\ln x} \left(\frac{\ln x - \ln 2}{\ln x} \right) = -\infty \ ,$$

und

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \left(\frac{\ln x - \ln 2}{\ln x} \right) = 0+ \ .$$

Auf $]0,1[$ ist $f'(x) < 0$, so dass dort die Funktion f fallend ist. Auf $]1,4[$ ist $f'(x) > 0$, die Funktion f ist dort wachsend. Der Punkt $x = 4$ ist einzige Nullstelle der Ableitung, dort liegt ein lokales Maximum vor, da

$$f''(4) = \frac{\ln^2 4 + 2(1 - \ln 2) \cdot \ln 4 - 6 \ln 2}{16 \cdot \ln^4 4} = \frac{\ln^2 4 + (2 - \ln 4) \cdot \ln 4 - 3 \ln 4}{16 \cdot \ln^4 4} = \frac{-\ln 4}{16 \cdot \ln^4 4} < 0 \ .$$

Schließlich gilt $f'(x) < 0$ auf $]4, \infty[$, dort ist f fallend.

Durch $\ln^2 x + (2 - \ln 4) \cdot \ln x - 3 \ln 4 = 0$, sind die Nullstellen von f'' gegeben. Die einzige Lösung x_0'' dieser Gleichung, die in $\mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$ liegt, ist durch

$$\ln x_0'' = -\frac{(2 - \ln 4)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(2 - \ln 4)}{2}\right)^2 + 3 \ln 4} = -1 + \frac{\ln 4}{2} + \sqrt{\left(\frac{\ln 4}{2} + 1\right)^2 + \ln 4} > \ln 4$$

eindeutig charakterisiert. Es ist $x_0'' > 4$ und dies ist der einzige Wendepunkt von f : Links von x_0'' ist f'' strikt negativ, wie man aus $f''(4) < 0$ und

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln^2\frac{1}{2} + (2 - \ln 4)\cdot\ln\frac{1}{2} - 3\ln 4}{\frac{1}{4}\cdot\ln^4\frac{1}{2}} = 4\cdot\frac{\ln^2 2 - (2 - 2\ln 2)\ln 2 - 6\ln 2}{\ln^4 2} =$$

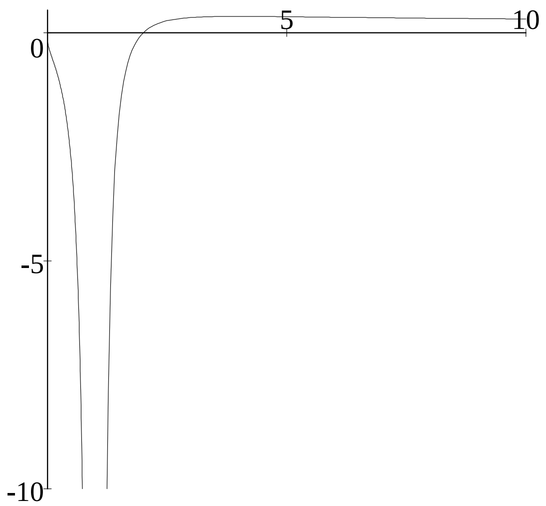
$$= 4\cdot\frac{\ln 2 - 2 + 2\ln 2 - 6}{\ln^3 2} = 4\cdot\frac{3\ln 2 - 8}{\ln^3 2} \leqslant 4\cdot\frac{-5}{\ln^3 2} < 0$$

entnehmen kann. Rechts von x_0'' ist f'' strikt positiv, da

$$f''(16) = \frac{\ln^2 16 + (2 - \ln 4)\cdot\ln 16 - 3\ln 4}{16^2\cdot\ln^4 16} = \frac{4\cdot\ln^2 4 + \ln 4 - 2\cdot\ln^2 4}{16^2\cdot\ln^4 16} =$$

$$= \frac{2\cdot\ln^2 4 + \ln 4}{16^2\cdot\ln^4 16} > 0\ .$$

Zusammen zeigt dies, dass f auf $]0,1[$ wie auch auf $]1,x_0''[$ konkav ist, wohingegen f auf $]x_0'',\infty[$ konvex ist.



Aufgabe 2 Es gilt $f'(x) = n\cdot x^{n-1} + a$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also besitzt die Funktion f' höchstens 2 Nullstellen, falls n ungerade und höchstens eine Nullstelle, falls n gerade. Angenommen n ungerade und f besitzt die paarweise verschiedenen Nullstellen $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Da f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, existieren nach dem Satz von Rolle (Hauptsatz 8.5) Nullstellen $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ von f' mit $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3 < x_4$. Wiederspruch! Analog folgt die Behauptung im Falle n gerade.

Aufgabe 3 Mit der Regel von l'Hospital (für $\frac{\infty}{\infty}$) gilt

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln(x^m+1)}{\ln(x^n)} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{m\cdot x^{m-1}}{(x^m+1)}\cdot\frac{x^n}{n\cdot x^{n-1}} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{m\cdot x^m}{n\cdot(x^m+1)} = \frac{m}{n}\ .$$

Aufgabe 4 Wir lösen zunächst das homogene Anfangswertproblem mit Hilfe von Satz 9.8 . Es ist von der Form $f' = c \cdot f$, $f(\tau) = \eta$ mit $c = -2\,\mathrm{id}$, $\tau = 0$. Laut Satz besitzt dieses die eindeutig bestimmte Lösung

$$\eta \cdot \exp\left(\int_\tau^\diamond c\right) = \eta \cdot \exp\left(-\,\mathrm{id}^2\right) \ .$$

Für das inhomogene Anfangswertproblem sei f eine Lösung. Wir machen den Ansatz (Variation der Konstanten)

$$f = g \cdot \exp\left(-\,\mathrm{id}^2\right) \ .$$

Der führt auf das folgende Anfangswertproblem für g :

$$g' \cdot \exp\left(-\,\mathrm{id}^2\right) = 2\,\mathrm{id} \quad ; \quad g(0) = 2 \ .$$

Letzteres besitzt als eindeutige Lösung

$$g = g(0) + \int_0^\diamond 2\,\mathrm{id}\exp\left(\mathrm{id}^2\right) = 2 + \left[\exp\left(\mathrm{id}^2\right)\right]_0^\diamond = 1 + \exp\left(\mathrm{id}^2\right) \ .$$

Es ergibt sich also als 'inhomogene' Lösung f eindeutig:

$$f = \left(1 + \exp\left(\mathrm{id}^2\right)\right) \cdot \exp\left(-\,\mathrm{id}^2\right) = \exp\left(-\,\mathrm{id}^2\right) + 1 \ .$$

Aufgabe 5 Sei $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Dann gilt

$$\sin t = \int_0^t \cos = \int_0^t f' \cdot \exp(f) = \int_\xi^{f(t)} \exp = \exp(f(t)) - \exp\xi \ ,$$

also

$$\sin J \subset \mathbb{R}_+^* - \exp\xi$$

und

$$f(t) = \ln(\sin t + \exp\xi) \ .$$

Diese Funktion ist für $\xi > 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, da $\sin J \subset [-1,1] \subset \mathbb{R}_+^* - \exp\xi$.

Für $\xi = 0$ ist sie nur auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right[$ definiert, da $\sin J \subset \mathbb{R}_+^* - 1$ impliziert $\sin J \subset]-1,1[$ und $0 \in J$ sein muss. Es gilt dann $\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}} f(t) = \lim_{t\to\frac{3}{2}\pi} f(t) = -\infty$.

Daß f das Anfangswertproblem löst, sieht man ohne Probleme, diese Lösung ist mit obigen Definitionsgebieten offensichtlich auch maximal.

Aufgabe 6

(a) Für alle $x \in [0,1[$ gilt $f_k(x) = k \cdot x^k \cdot (1-x) \to 0$, da sich die Potenz von $x < 1$ durchsetzt. Ferner $f_k(1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Insgesamt folgt also $\lim_k f_k = 0$ punktweise auf $[0,1]$.

(b) f_k besitzt als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ ein Maximum. Da ferner $f_k > 0$, aber offenbar auch $f_k \neq 0$ für $k \neq 0$, wird dieses für $k \neq 0$ in $]0,1[$ angenommen. Da

$$f_k'(x) = k \cdot x^{k-1} \cdot (k - (k+1)\,x) \ ,$$

besitzt f in $]0,1[$ genau einen kritischen Punkt, nämlich $x_k = \frac{k}{k+1}$; somit muss an dieser Stelle das Maximum liegen. Folglich

$$\|f_k\|_{\infty,[0,1]} = f_k(x_k) = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \to \frac{1}{e}$$

für $k \to \infty$. Für $b = 1$ liegt also keine gleichmäßige Konvergenz auf $[0,b]$ vor. Falls $b < 1$, ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen die Nullfunktion auf $[0,b]$, denn für $k > \frac{1}{1-b} - 1$ gilt

$$\|f_k\|_{\infty,[0,b]} \leqslant k \cdot b^{k-1} \cdot (1-b) \to 0\ .$$

Aufgabe 7 Wir zeigen, daß die Reihe auf $\mathbb{R}_+$ normal konvergiert. Dann folgt mit Hauptsatz 10.5 die Behauptung, da alle Summanden auf $\mathbb{R}_+$ stetige und beschränkte Funktionen sind. Es gilt $\exp(k\,\mathrm{id}) \geqslant k\,\mathrm{id}$ auf $\mathbb{R}_+$. Somit

$$\left\|\frac{\mathrm{id}}{k\exp(k\,\mathrm{id})}\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \left\|\frac{\mathrm{id}}{k^2\,\mathrm{id}}\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \frac{1}{k^2}\ ,$$

und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist nach Vorlesung konvergent.

Aufgabe 8 Eine erste Lösung verwendet die Tatsache, dass $K \times L$ kompakt in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist. Da nämlich

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : (x,y) \longmapsto x + y$$

stetig ist (Dreiecksungleichung der Norm), ist das Bild $K + L$ von $K \times L$ unter dieser Abbildung kompakt.

Die zweite Lösung verwendet die Charakterisierung nach Bolzano-Weierstraß. Ist nämlich $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $K + L$, so existieren Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L$ mit $x_k + y_k = s_k$ für alle k . Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $\left(x_{\alpha(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, die in K gegen $\kappa \in K$ konvergiert. Mit dem selben Argument, angewandt auf die Folge $\left(y_{\alpha(k)}\right)_k$, existiert eine Teilfolge $\left(y_{\alpha(\beta(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, die in L gegen $\lambda \in L$ konvergiert. Mit den Grenzwertsätzen (oder der obigen Stetigkeit von $+$) ist

$$\left(s_{\alpha(\beta(k))}\right)_{l\in\mathbb{N}} = \left(x_{\alpha(\beta(k))} + y_{\alpha(\beta(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

eine konvergente Teilfolge mit Limes $\kappa + \lambda \in K + L$. Das Bolzano-Weierstraß Kriterium für $K + L$ ist nachgewiesen.

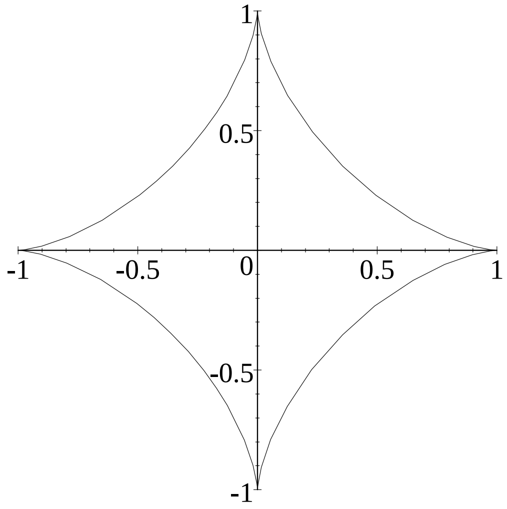
Aufgabe 9 Es ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -3a \cdot \cos^2(t) \cdot \sin(t) \\ 3a \cdot \sin^2(t) \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi]$$

also

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'| = \int_0^{2\pi} |3a| \cdot \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \cdot |\cos(t)\sin(t)|\, dt =$$

$$= \frac{3a}{2} \cdot \int_0^{2\pi} |\sin(2t)|\, dt = 3a \cdot \int_0^{\pi} |\sin(2t)|\, dt = 3a \cdot \int_0^{\pi} \sin s\, ds = 6a\ .$$



$a = 1$

Aufgabe 10 Es gilt $f(0,0) = 0$ und $|f(x,y)| \leq |xy| \cdot \|g\|_\infty$, woraus sofort die Stetigkeit von f in $(0,0)$ folgt. Ferner gilt

$$f(x,0) = 0 \quad , \text{bzw.} \quad f(0,y) = 0$$

oder die (partiellen) Differentialquotienten konvergieren offensichtlich

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

für $0 \neq x \to 0$ bzw. $0 \neq y \to 0$. Demnach gilt $\partial_1 f(0,0) = 0$ und $\partial_2 f(0,0) = 0$, und sofern eine erste Ableitung existiert, muss sie die Gestalt $(0,0)$ haben.

Damit ist die Funktion

$$\varphi(x,y) := f(x,y) - f(0,0) - (0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy \cdot g(x,y)$$

auf die Eigenschaft

$$\lim_{(0,0) \neq (x,y) \to (0,0)} \frac{|\varphi(x,y)|}{|(x,y)|} = 0$$

zu untersuchen. Es gilt jedoch für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{|\varphi(x,y)|}{|(x,y)|} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \|g\|_\infty \leq \max(|x|, |y|) \cdot \|g\|_\infty \ ,$$

so dass die Limesbedingung erfüllt ist.

Aufgabe 11 Für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto y^2 + 5x^2 - 6y + 10x + 6$$

gilt

$$\partial_1 f(x,y) = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{5(x+h)^2 + 10(x+h) - (5x^2 + 10x)}{h} = 10x + 10$$

und

$$\partial_2 f(x, y) = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{(y+h)^2 - 6(y+h) - (y^2 - 6y)}{h} = 2y - 6 ,$$

so dass es sich um eine stetig partiell differenzierbare Funktion handelt. Damit ist die Funktion stetig differenzierbar mit $\operatorname{grad} f(x, y) = (10x + 10, 2y - 6)^{\intercal}$. Dieser Gradient ist wieder differenzierbar (analoge Argumentation, vgl. auch Abschnitt 11.11 der Vorlesung) mit Ableitung

$$\operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit Gradient $\operatorname{grad} f(x, y) = (10x + 10, 2y - 6)^{\intercal}$ und konstanter zweiter Ableitung (s.o.) ist. Diese ist sicherlich positiv definit!

Für eine lokale Extremstelle ist

$$(0, 0)^{\intercal} = \operatorname{grad} f(x, y) = (10x + 10, 2y - 6)^{\intercal} \quad \text{bzw.} \quad x = -1 \text{ und } y = 3$$

notwendig. Zusammen mit der positiven Definitheit der Hesse-Matrix ist aber auch das hinreichende Kriterium (vgl. Hauptsatz 11.16) erfüllt: f hat in $(-1, 3)$ ein lokales Minimum mit Wert $f(-1, 3) = 9 + 5 - 18 - 10 + 6 = 20 - 28 = -8$.

Mit der Translation $\tau : (x, y) \longmapsto (x - 1, y + 3)$ ergibt sich als translatierte Funktion

$$f \circ \tau : (x, y) \longmapsto f(x - 1, y + 3)$$

mit Werten

$$(y + 3)^2 + 5(x - 1)^2 - 6(y + 3) + 10(x - 1) + 6 =$$

$$= y^2 + 6y + 9 + 5\left(x^2 - 2x + 1\right) - 6y - 18 + 10x - 10 + 6 =$$

$$= y^2 + 5x^2 + 20 - 28 .$$

Der Funktionswert -8 ist globales Minimum!

Aufgabe 12 Die Aufgabe besteht in der Analyse der Extremwerte von der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \longmapsto x \cdot z$$

unter der Nebenbedingung $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Beide Funktionen f und F sind stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ mit Ableitung

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} .$$

Die Nebenbedingung $\{F = 0\}$ beschreibt eine abgeschlossene und beschränkte Menge im $\mathbb{R}^3$. Nach Heine-Borel ist diese Menge kompakt, und nach Weierstraß nimmt die Stetige Funktion f darauf Maximum und Minimum an!

Wegen $\operatorname{grad} F(x, y, z) \neq 0$ auf $\{F = 0\}$ ist die Methode der Lagrange-Multiplikatoren anwendbar, d.h. für eine Extremstelle ξ von f unter $\{F = 0\}$ gibt es ein $\lambda \in \mathrm{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} \xi_3 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2\xi_1 \\ 2\xi_2 \\ 2\xi_3 \end{pmatrix} .$$

Da $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ ist $\lambda \neq 0$. Es folgt $\xi_2 = 0$. Wiederum gilt $\xi_1, \xi_3 \neq 0$ und

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{\xi_1}{\xi_3} \quad \text{mit} \quad \xi_1^2 + \xi_3^2 = 1 ,$$

also $\xi_3^2 = \xi_1^2$ und somit $\xi_1^2 = \frac{1}{2}$. Einzige Möglichkeiten der Lösung sind

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad , \quad \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad , \quad \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad , \quad \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) .$$

Da

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{2} = f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

und

$$f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\tfrac{1}{2} = f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

handelt es sich bei den ersten beiden Stellen um Maximalstellen, und bei den letzten beiden Punkten um Minima.

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2002

Wiederholungsklausur zur Analysis II

15.10.2002
9:15 - 11:45 Uhr

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt , welches Sie vorher mit Ihrem Namen versehen. Blätter ohne Namen werden nicht gewertet. Als Hilfsmittel sind Ihre Vorlesungs- und Übungsaufzeichnungen zugelassen. Bitte achten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben auf eine sorgfältige und lesbare Darstellung und geben Sie, zumindest stichpunktartig, Begründungen für Ihre Rechnungen an. In der Vorlesung oder den Übungsaufgaben bewiesene Resultate können ohne Beweis zitiert werden.

Viel Erfolg !

Name:

Zahl der abgegebenen Blätter:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$	Note
Punkte														

Aufgabe 1 Zeigen Sie: Gilt für reelle $c_0, \ldots, c_n$ (1,5)

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0 ,$$

so besitzt

$$x \longmapsto c_0 + c_1 \cdot x + \ldots + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + c_n \cdot x^n$$

mindestens eine Nullstelle in $]0, 1[$.

Aufgabe 2 Diskutieren Sie die Funktion (4)

$$f : \mathbb{R} \smallsetminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2} .$$

Aufgabe 3 Beweisen Sie die Konvergenz und bestimmen Sie den folgenden Grenzwert: (1,5)

$$\lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln (x+1)} \right) .$$

Aufgabe 4 Für $c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}^*$ sei (4)

$$f_k : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto k^c \cdot x \cdot \exp \left(-\frac{x}{k} \right) .$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist

(a) $(f_k)_k$ punktweise konvergent? Bestimmen Sie die Grenzfunktion.

(b) $(f_k)_k$ gleichmäßig konvergent?

Aufgabe 5 Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe (3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot x^k .$$

Leiten Sie eine geschlossene Funktionsformel für den Grenzwert her.

Aufgabe 6 Sei f eine beschränkte, reelle Funktion auf $[a, b]$. Beweisen oder widerlegen Sie: (2)

f^2 Riemann-integrierbar impliziert f Riemann-integrierbar.

Aufgabe 7 Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem (3)

$$\mathrm{id} \cdot f' - f = -\frac{2}{\mathrm{id}} \quad \text{auf } \mathbb{R}_+^* \quad \text{und} \quad f(1) = -1 \,.$$

Aufgabe 8 Zeigen Sie: Es existiert genau eine Lösung $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ von (4)

$$f' = \frac{\mathrm{id}}{e^2 + \mathrm{id}^2} \cdot f \cdot \ln(f) \quad \text{und} \quad f(0) = e^e$$

mit der Eigenschaft $f(t) > 1$ für alle $t \in J$. Geben Sie das maximale Intervall J an.

Aufgabe 9 Welche der Mengen (3)

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x, y \geqslant 0 \,,\ x + y \leqslant 7 - e^{-y} \right\}$$

und

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0 \,,\ x \cdot y \leqslant 1 \right\}$$

sind kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 10 Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve (2)

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \longmapsto \left(t - \frac{1}{3} t^3, t^2, t + \frac{1}{3} t^3 \right) \,.$$

Aufgabe 11 Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von (2)

$$(x, y) \longmapsto \frac{x - y}{1 + x + y}$$

im Punkte $(1, -1)$ bis einschließlich zur Ordnung 2 .

Aufgabe 12 Analysieren Sie (4)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - 2x + 2y$$

auf Extremstellen unter der Bedingung $x^2 + y^2 = 2$.

Lösungen der Wiederholungsklausur zur Analysis II

Aufgabe 1 Von $p : x \longmapsto c_0 + c_1 \cdot x + \ldots + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + c_n \cdot x^n$ ist

$$P : x \longmapsto c_0 \cdot x + \frac{c_1}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} \cdot x^n + \frac{c_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

sicherlich eine Stammfunktion (alles Polynome!) mit der Eigenschaft $P(0) = 0$. Gilt (nach Voraussetzung)

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0 ,$$

so heißt dies $P(1) = 0$. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt, woraus eine Nullstelle $\xi \in]0,1[$ von p folgt.

Aufgabe 2 In ihrem Definitionsbereich ist die Funktion f beliebig oft stetig differenzierbar. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 (x-4)}{(x-2)^3}$$

und

$$f''(x) = 6\frac{x-1}{(x-2)^4} .$$

Die Funktion hat in $x = 1$ die einzige Nullstelle und in $x = 2$ die einzige Polstelle. Ferner gilt

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2-} f(x) = +\infty ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty ,$$

sowie

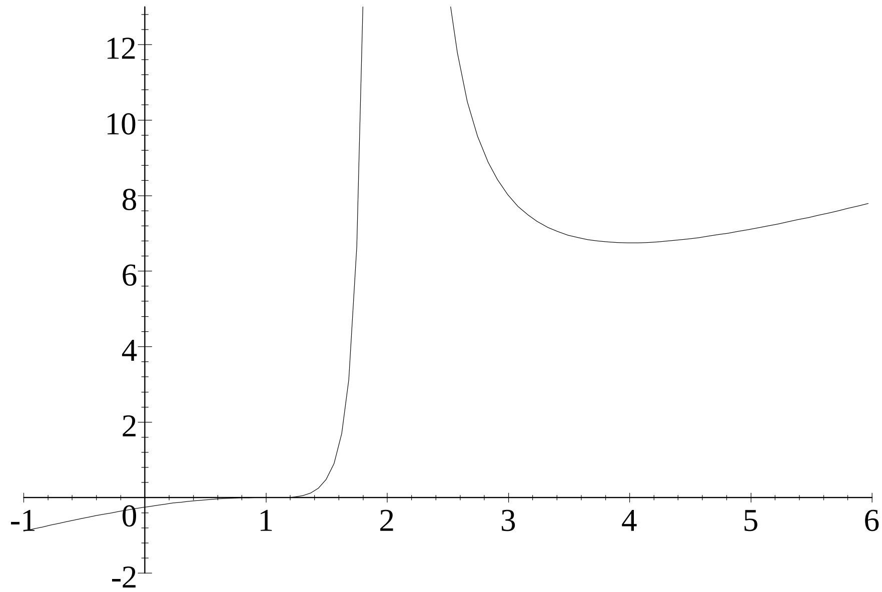
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty .$$

Auf $]-\infty, 1[$, $]1,2[$ und $]4,+\infty[$ ist $f'(x) > 0$, dort ist f wachsend. Auf $]2,4[$ ist $f'(x) < 0$, f ist dort fallend. Der Punkt $x = 4$ ist Nullstelle der Ableitung, dort liegt ein lokales Minimum vor, da

$$f''(4) = \frac{9}{8} > 0 .$$

$x = 1$ ist eine weitere Nullstelle von f' , dort liegt jedoch kein lokales Extremum vor, siehe unten.

Die einzige Nullstelle von f'' liegt bei $x = 1$. Da f'' bei $x = 1$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ durchläuft, liegt an $x = 1$ ein Wendepunkt, genauer gesagt ein Sattelpunkt vor, da ja auch $f'(1) = 0$!! Auf $]-\infty, 1[$ ist $f''(x) < 0$, auf $]1, 2[$ und $]2, +\infty[$ ist $f''(x) > 0$. f ist also auf $]-\infty, 1[$ konkav, auf $]1, 2[$ und auf $]2, \infty[$ konvex.



$$x \longmapsto f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$$

Aufgabe 3 Zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital für $\frac{0}{0}$ liefert

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x+1) - x}{x\cdot\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x+1} - 1}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{-x}{(x+1)\cdot\ln(x+1) + x} = \lim_{x\to 0+}\frac{-1}{\ln(x+1) + 1 + 1} = -\frac{1}{2} .$$

Aufgabe 4

(a) Da $\lim_k \exp\left(-\frac{x}{k}\right) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$, konvergiert (f_k) für $c = 0$ punktweise gegen die Grenzfunktion $f = \mathrm{id}$, für $c < 0$ punktweise gegen $f = 0$ und für $c > 0$ überhaupt nicht.

(b) Für $c = 0$ und festes $k \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$f_k(x) - x = x\left(1 - \exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right) \to \infty$$

für $x \to +\infty$, damit $\|\mathrm{id} - f_k\|_\infty = \infty$. Also kann für $c = 0$ keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen. Für $c < 0$ erhält man durch die Substitution $x = k\cdot t$ (wichtig: Mit x durchläuft auch t ganz $\mathbb{R}_+$)

$$\|f_k\|_\infty = k^{c+1}\cdot\|\mathrm{id}\cdot\exp(-\mathrm{id})\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \quad .$$

Weil $\lim_{t\to\infty} t\exp(-t) = 0$, folgt zusammen mit der Stetigkeit von $\mathrm{id}\cdot\exp(-\mathrm{id})$

$$0 < \|\mathrm{id}\cdot\exp(-\mathrm{id})\|_{\infty,\mathbb{R}_+} < \infty \quad .$$

Somit konvergiert (f_k) gleichmäßig für $c < -1$.

Aufgabe 5 Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$R = \lim_k \frac{k}{k+1} = 1 ,$$

da dieser Limes existiert. Für solche $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$ konvergiert die Reihe offensichtlich nicht. Der Konvergenzbereich ist also (im Reellen !) $]-1,1[$, dort definiere sie die Funktion f . Eine Potenzreihe darf innerhalb des Konvergenzbereichs gliedweise differenziert werden (Korollar zum Hauptsatz 10.8). Wenden wir dies auf die geometrische Reihe mit $x \in]-1,1[$ an, so folgt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot x^{k-1} = \frac{f}{x^2} \quad ,$$

somit

$$f = \frac{x^2}{(1-x)^2} .$$

Aufgabe 6 Die Implikation ist falsch, wie wir durch ein Gegenbeispiel zeigen werden! Nach Vorlesung wissen wir, dass

$$1_{\mathbb{Q}} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

eine beschränkte, reelle Funktion ist, die nicht (Riemann-)integrierbar (auf $[a,b]$) ist, da nämlich $0 = \int_{a*}^{b} 1_{\mathbb{Q}} < \int_{a}^{b*} 1_{\mathbb{Q}} = 1$. Die Funktion

$$f := 1_{\mathbb{Q}} - 1_{[a,b]\setminus\mathbb{Q}} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist ebenfalls reell und beschränkt. f ist nicht integrierbar, da sonst $f + 1_{[a,b]} = 2\cdot 1_{\mathbb{Q}}$ integrierbar wäre(Widerspruch!). Allerdings ist $f^2 = 1_{[a,b]}$ klar integrierbar.

Aufgabe 7 Die homogene Differentialgleichung (DGL) $\mathrm{id}\cdot h' - h = 0$ wird offensichtlich von $h := c\cdot\mathrm{id}$ mit beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$ gelöst. Sei f nun Lösung der inhomogenen DGL

$$\mathrm{id}\cdot f' - f = -\frac{2}{\mathrm{id}} ,$$

und definiere g mittels $f = g\cdot h$ (Ansatz). Die DGL ist dann äquivalent zu

$$\mathrm{id}\cdot(g'h + gh') = gh - \frac{2}{\mathrm{id}} ,$$

so dass als bestimmende DGL für g die Gleichung

$$\mathrm{id}\cdot h\cdot g' = -\frac{2}{\mathrm{id}} \quad \text{bzw.} \quad g' = -\frac{2}{c\cdot \mathrm{id}^3}$$

verbleibt. Damit muss g der Gestalt $g = \frac{1}{c\cdot\mathrm{id}^2} + \widetilde{c}$ sein, wobei $\widetilde{c}$ eine beliebige reelle Konstante bezeichnet. Zusammen ergibt sich als Lösung

$$f = \frac{1}{\mathrm{id}} + c_0\cdot\mathrm{id} \quad \text{mit} \quad c_0 \in \mathbb{R}\ .$$

Der Anfangswert $f(1) = -1$ wird mit der Konstanten $c_0 = -2$ erreicht: die eindeutige Lösung ist

$$f = \frac{1}{\mathrm{id}} - 2\,\mathrm{id} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x} - 2x\ .$$

Aufgabe 8 Mit den Bezeichnungen von Kap. 9.15 lässt sich die Lösung aus

$$\sigma : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \frac{t}{e^2 + t^2} \quad \text{und} \quad \rho : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x\cdot\ln x$$

konstruieren, wobei schon hier $\widetilde{I} \subset \,]0,\infty[$ ersichtlich wird. Auf genau den zwei Intervallen $]0,1[$ und $]1,\infty[$ ist ρ von Null verschieden. Nur $I := \,]1,\infty[$ verträgt sich mit dem geforderten Bildbereich der Lösung ($f(t) > 1$ war verlangt). Gemäß Kap. 9.15 definieren wir

$$R : \,]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int_{e^e}^{x} \left(\frac{1}{\mathrm{id}}\circ\ln\right)\cdot\ln' = \int_e^{\ln x}\frac{1}{\mathrm{id}} = \ln(\ln x) - 1\ ,$$

eine bijektive Abbildung mit (Bild $R(]1,\infty[) = \mathbb{R}$ und) inverser Abbildung

$$R^{-1} : y \longmapsto \exp\left(e^{y+1}\right)\ .$$

Ferner sei

$$S : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2\,\mathrm{id}}{e^2+\mathrm{id}^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\int_{e^2}^{e^2+t^2}\frac{1}{\mathrm{id}}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(e^2+t^2\right) - 2\right)\ ,$$

eine überall (auf ganz $\mathbb{R}$) definierte Funktion. Das größte Intervall, dass 0 enthält und vollständig in $S^{-1}(R(]1,\infty[))$ liegt, ist somit $J := \mathbb{R}$. Darauf erhält man als (maximale) Lösung des Anfangswertproblems die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \,]1,\infty[: t \longmapsto \exp\left(e^{\frac{1}{2}\left(\ln\left(e^2+t^2\right)-2\right)+1}\right) = \exp\left(\sqrt{e^2+t^2}\right)\ .$$

Aufgabe 9 Die Menge A ist abgeschlossen, des sie Schnitt der abgechlossenen Urbilder

$$\{y \geqslant 0\} \quad , \quad \{x \geqslant 0\} \quad \text{und} \quad \left\{x + y - 7 + e^{-y} \leqslant 0\right\}$$

ist. Sie ist ferner beschränkt, denn für jedes $(x,y) \in A$ gilt

$$0 \leqslant x \leqslant x + y + e^{-y} \leqslant 7 \quad \text{und} \quad 0 \leqslant y \leqslant x + y + e^{-y} \leqslant 7\ .$$

Nach dem Hauptsatz von Heine-Borel ist A kompakt.

Die Menge B ist nicht kompakt, da sie sonst (nach Heine Borel) beschränkt sein müsste. In der Tat gilt aber $\left(\frac{1}{n}, n\right) \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für diese Elemente gilt $\left|\left(\frac{1}{n}, n\right)^t\right| \geqslant n$. Damit kann B nicht vollständig in einer Kugel enthalten sein.

Aufgabe 10 Es gilt

$$\gamma'(t) = \left(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\right) ,$$

also

$$|\gamma'(t)|^2 = \left(1 - 2t^2 + t^4\right) + 4t^2 + \left(1 + 2t^2 + t^4\right) = 2 \cdot \left(1 + t^2\right)^2$$

und somit

$$\int_0^1 |\gamma'(t)| \, dt = \int_0^1 \sqrt{2} \cdot \left(1 + t^2\right) \, dt = \sqrt{2} \cdot \frac{4}{3} .$$

Aufgabe 11 f ist offensichtlich beliebig oft stetig differenzierbar, und es gilt

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \frac{1}{(1 + x + y)^2} \begin{pmatrix} 1 + 2y \\ -1 - 2x \end{pmatrix} ,$$

insbesondere

$$\operatorname{grad} f(1, -1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} ,$$

sowie

$$\operatorname{Hess} f(x, y) = \frac{2}{(1 + x + y)^3} \begin{pmatrix} -1 - 2y & x - y \\ x - y & 1 + 2x \end{pmatrix} ,$$

insbesondere

$$\operatorname{Hess} f(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} .$$

Damit haben wir

$$f(x, y) = f(1, -1) + \Big(\operatorname{grad} f(1, -1) \,\big|\, (x - 1, y + 1)\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\Big((x - 1, y + 1) \,\big|\, \operatorname{Hess} f(1, -1)\,(x - 1, y + 1)\Big) + \varphi(x, y) =$$

$$= 2 - x - 3y + x^2 + 4xy + 3y^2 + \varphi(x, y)$$

mit dem Restglied $\varphi(x, y)$.

Aufgabe 12 Die Nebenbedingung $F(x, y) = 0$ mit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - 2$ beschreibt eine (abgeschlossene und beschränkte, also) kompakte Menge. Da f stetig ist, nimmt es Maxima und Minima auf $\{F = 0\}$ nach Weierstraß an (Existenz!).

Beide Funktionen sind stetig differenzierbar mit Ableitungen

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y + 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{grad} F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} ,$$

insbesondere $\operatorname{grad} F(x, y) = 0$ nur für $(x, y) = (0, 0) \notin \{F = 0\}$. Für eine (lokale) Extremstelle ξ von f unter $F = 0$ gilt nach dem Theorem über Lagrange-Multiplikatoren

$$\begin{pmatrix} 2\xi_1 - 2 \\ 2\xi_2 + 2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2\xi_1 \\ 2\xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} \xi_1 - 1 &= \lambda\xi_1 \\ \xi_2 + 1 &= \lambda\xi_2 \end{aligned}$$

für ein $\lambda \in \mathsf{R}$. Offensichtlich $\lambda \neq 1$ und es muss $\xi_1 = \frac{1}{1-\lambda} = -\xi_2$ gelten, was wegen $|\xi|^2 = 2$ nur mit $\xi_1 = \pm 1$ möglich ist. Die Extremstellen können also nur in $(1,-1)$ oder $(-1,1)$ liegen. Durch Wertevergleich $f(1,-1) = -2$, $f(-1,1) = 6$ kommt man zu folgendem Schluss:

Das einzige, existierende (globale wie lokale) Maximum liegt bei $(-1,1)$ und das einzige, existierende (globale wie lokale) Minimum liegt bei $(1,-1)$.