Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Lösungen der Übungen zur

ANALYSIS II

Prof. Dr. C. Portenier

Ralf Jäger und Roland Knevel

Marburg im Sommersemester 2002

Fassung vom 10. Oktober 2002

Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg

Ralf Jäger und Roland Knevel
Sommersemester 2002

Analysis II

Lösungsblatt 1

Aufgabe 1

(a) Betrachte die stetige Funktion

$$g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto g(x) := f(\exp(ix)) - f(-\exp(ix)) \ .$$

Es ist

$$g(0) = f(1) - f(-1) \ .$$

1. Fall: $g(0) = 0$ **:** Dann ist $f(1) = f(-1)$, d.h. 1 ist ein Antipodenpunkt.
2. Fall: $g(0) \neq 0$ **:** Es gilt dann

$$g(\pi) = f(\exp(i\pi)) - f(-\exp(i\pi)) = f(-1) - f(1) = -g(0) \ .$$

Da g stetig ist, existiert nach dem Satz von Bolzano ein $\xi \in]0, \pi[$ mit $g(\xi) = 0$, also

$$f(\exp(i\xi)) = f(-\exp(i\xi)) \ .$$

Da $\exp(i\xi) \in \mathbb{U}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt, folgt die Behauptung mit $z := \exp(i\xi)$.

Aufgabe 2

(a) Aus der Kettenregel folgt unmittelbar

$$f \cdot (\ln f)' = f \cdot \frac{1}{f} \cdot f' = f' \ .$$

(b) Nach dem Teil (a) ist

$$g'(x) = x^x \cdot (x \cdot \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1) \ .$$

Aufgabe 3

(a) Aus Ketten- und Produktregel folgt

$$f_1'(x) = \sin(\ln x) + x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \sin(\ln x) + \cos(\ln x) \ .$$

(b) Für $x > 0$ ist mit dem (a)-Teil der vorigen Aufgabe

$$f_2'(x) = x^{x^2} \cdot \left(x^2 \cdot \ln x\right)' = x^{x^2} \cdot (2x \cdot \ln x + x) = x^{x^2+1} \cdot (2\ln x + 1) \ .$$

(c) Mit Ketten- und Quotientenregel ergibt sich

$$f_3'(x) = \frac{3x^2 \cdot \sqrt{\exp(x^2+2x+1)} - x^3 \cdot \frac{(2x+2)\cdot\exp\left(x^2+2x+1\right)}{2\sqrt{\exp(x^2+2x+1)}}}{\exp(x^2+2x+1)} =$$

$$= x^2 \frac{3 - x^2 - x}{\sqrt{\exp\left(x^2 + 2x + 1\right)}} \ .$$

(d) Für $x > 0$ ist mit der vorigen Aufgabe

$$f_4'(x) = x^{(x^x)} \cdot \left(x^x \cdot \ln x\right)' = x^{(x^x)} \cdot \left(x^x \cdot (\ln(x) + 1) \cdot \ln x + x^{x-1}\right) =$$

$$= x^{x^x+1} \left((\ln x + 1) \cdot \ln x + \frac{1}{x} \right) \ .$$

Aufgabe 4 Außerhalb des Punktes $x = 1$ ist f stetig differenzierbar, da f dort Verkettung von Polynomen ist. Wir untersuchen nun also f in $x = 1$.

linksseitig Es gilt für alle $x < 1$

$$(x-1)\left(x^4 + x^3 - x^2 - x + 1\right) = x^5 - 2x^3 + 2x - 1$$

bzw.

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = x^4 + x^3 - x^2 - x + 1 \ .$$

Dies zeigt, dass der linksseitige Limes

$$\lim_{1>x\longrightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1$$

existiert; die Funktion f ist linksseitig differenzierbar in $x = 1$.
rechtsseitig Es gilt für den rechtsseitigen Limes

$$\lim_{1>x\longrightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{1>x\longrightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} = 1 \ ;$$

die Funktion f ist rechtsseitig differenzierbar in $x = 1$.
Fazit Die Funktion ist in $x = 1$ beidseitig differenzierbar und die Ableitungen stimmen überein, mit Wert 1 . Somit ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f'(x) := \begin{cases} 5x^4 - 6x^2 + 2 & \text{falls } x < 1 \\ 1 & \phantom{\text{falls }} x \geqslant 1 \end{cases} \ .$$

Diese Ableitung ist sicherlich eine stetige Funktion.

Aufgabe 5 Außerhalb des Nullpunktes sind alle f_s (für alle $s \in \mathbb{R}_+$) stetig differenzierbar, da f_s dort Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen ist mit Ableitung

$$f_s'(x) = s \cdot x^{s-1} \cdot \sin\frac{1}{x} - x^{s-2} \cdot \cos\frac{1}{x} \quad \text{für alle } x > 0 \ .$$

Man beachte zunächst noch, dass allgemein für $t \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind

(i) $\lim_{x\longrightarrow 0+} x^t \cdot \sin\frac{1}{x}$ existiert;

(ii) $t > 0$;

In diesem Fall gilt $\lim_{x \longrightarrow 0+} x^t \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

In der Tat, da sin beschränkt ist, existiert für $t > 0$ der Limes und ist Null. Umgekehrt wähle man die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{2}{(2n+1)\pi}$, um die Divergenz zu zeigen

Wir untersuchen nun also die Funktionen f_s in Null.

Stetigkeit Mit der Vorbemerkung ist klar, alle f_s mit $s > 0$ sind stetig in Null; f_0 ist in Null unstetig.

Differenzierbarkeit Für $x > 0$ ist

$$\frac{f_s(x) - f_s(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \cdot x^s \cdot \sin \frac{1}{x} = x^{s-1} \cdot \sin \frac{1}{x} \ .$$

Nach der Vorbemerkung existiert der Limes ($0 < x \to 0$) dieser Differentialquotienten genau dann, wenn $s > 1$. Genau dann ist also f_s (in Null) differenzierbar, wenn $s > 1$. in diesem Fall gilt $f_s'(0) = 0$.

stetige Differenzierbarkeit Unter der Bedingung $s > 1$ (nach der obigen Differenzierbarkeitsuntersuchung notwendig für Differenzierbarkeit von f_s) folgt aus der Einleitung:

Genau dann ist f_s (in Null) stetig differenzierbar, wenn

$$\lim_{0<x\longrightarrow 0} s \cdot x^{s-1} \cdot \sin \frac{1}{x} - x^{s-2} \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$$

existiert ! Es ist bekannt, das der erste Term (wegen $s > 1$) gegen Null konvergiert (vgl. (i)$\Leftrightarrow$(ii)). Dies zeigt, dass f_s (in Null) genau dann stetig differenzierbar ist, wenn

$$\lim_{0<x\longrightarrow 0} x^{s-2} \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$$

existiert ! Wie in (i)$\Leftrightarrow$(ii) erhält man somit die Äquivalenz der folgenden Aussagen

(i) f_s stetig differenzierbar;

(ii) $s > 2$.

Analysis II

Lösungsblatt 2

Aufgabe 1 Es ist

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{1-1}{-1-0} = 0 \neq \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \xi$$

für alle $\xi \in]0,1[$, sofern $g'(\xi) \neq 0$!!! Dies ist kein Widerspruch zum Mittelwertsatz (Korollar 8.5), da wegen

$$g'\left(\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{11}{48}}\right) = 0$$

die Voraussetzung $g' \neq 0$ auf $]0,1[$ nicht erfüllt ist.

Aufgabe 2

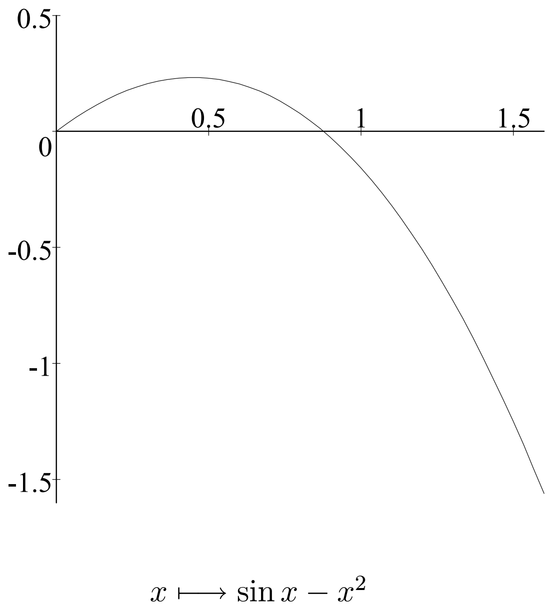
(a) Da exp auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, übertragen sich Maximal- und Minimaleigenschaften von einer Funktion f auf $\exp \circ f$ und umgekehrt. Somit genügt es, die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x - x^2$$

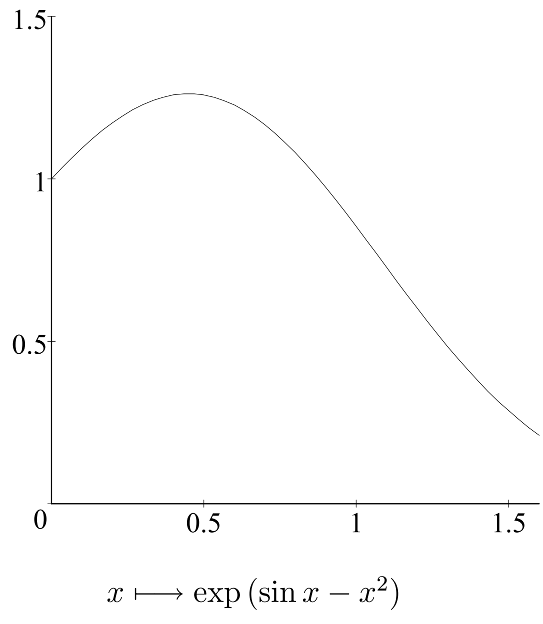
zu betrachten (den Trick sollte man sich merken !). Es ist

$$f'(x) = \cos x - 2x$$

offensichtlich streng monoton fallend in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit $f'(0) = 1 > 0$ und $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi < 0$. Nach Zwischenwertsatz, da offensichtlich f' stetig in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, besitzt f' genau eine Nullstelle x_0 und an dieser einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$. Somit ist x_0 das einzige lokale Extremum von f , und damit von g , und dieses ist ein Maximum.



$x \longmapsto \sin x - x^2$



$x \longmapsto \exp\left(\sin x - x^2\right)$

Aufgabe 3

(a) Da

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) < 0 \ ,$$

existiert nach Definition von lim eine Umgebung $U \subset J$ um a mit

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$$

für alle $x \in U$. Löst man dieses nach $f(x)$ auf, so erhält man die Implikationen "$\Rightarrow$", und da trivialerweise $x = a \Longrightarrow f(x) = f(a)$ gilt, hat man alle Fälle für x abgedeckt, sodass "$\Leftrightarrow$" gelten muss.

(b) Als Gegenbeispiel betrachte man die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} .$$

Diese ist differenzierbar nach Aufgabe 1.5 ($s = 2$) mit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{2} & \text{falls } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{falls } x = 0 \end{cases} .$$

Da somit f' in jeder Umgebung um $x = 0$ auch positive Werte annimmt, ist f in keiner Umgebung um $x = 0$ streng monoton fallend.

Aufgabe 4 Entwickelt man

$$A := \begin{pmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

z.B. nach der 1. Zeile, so erhält man

$$\det A = x \cdot \det A_{11} + \sum_{l=2}^{n} (-1)^{1+l} a_{1l} \det A_{1l} \ ,$$

wobei A_{kl} die durch Streichung der k. Zeile und l. Spalte entstehende $(n-1) \times (n-1)$-Matrix bezeichnet. Somit ist $f'(x) = \det A_{11}$.

Aufgabe 5 ρ_T ist auf $\mathbb{R}_+^*$ differenzierbar, da Komposition differenzierbarer Funktionen (insbes. Nenner > 0). Es gilt

$$\lim_{\nu\to 0+} \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h}{kT}\cdot\nu} - 1} = \frac{8\pi kT}{c^3} \cdot \lim_{\nu\to 0+} \frac{\nu^2}{\frac{e^{\frac{h}{kT}\cdot\nu}-1}{\frac{h}{kT}\cdot\nu}} = \frac{8\pi kT}{c^3} \cdot \frac{0}{\exp'(0)} = 0 \ ,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h}{kT}\cdot\nu} - 1} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{1}{\frac{e^{\frac{h}{kT}\cdot\nu}}{\nu^3} - \frac{1}{\nu^3}} = 0$$

und ρ_T ist eine positive Funktion. Mit den üblichen Argumenten und dem Satz von Weierstraß zeigt man, dass ρ_T ein Maximum besitzt. Letzteres erhalten wir weiter unten mit eine einfachere Methode.

Nach Vereinfachen erhält man

$$\nu \cdot \frac{\rho_T'(\nu)}{\rho_T(\nu)} = 3 - \frac{x}{1-e^{-x}} =: f(x)$$

mit der linearen Variablentransformation $x = \frac{h}{kT}\cdot\nu$, welches ebenfalls eine auf $\mathbb{R}_+^*$ differenzierbare Funktion ist. Da f stetig, sowie $\lim_{x\to 0} f(x) = 2 > 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, existiert nach Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle von f . Ferner ist

$$f'(x) = \frac{(1+x)\,e^{-x} - 1}{(1-e^{-x})^2} < 0 \ .$$

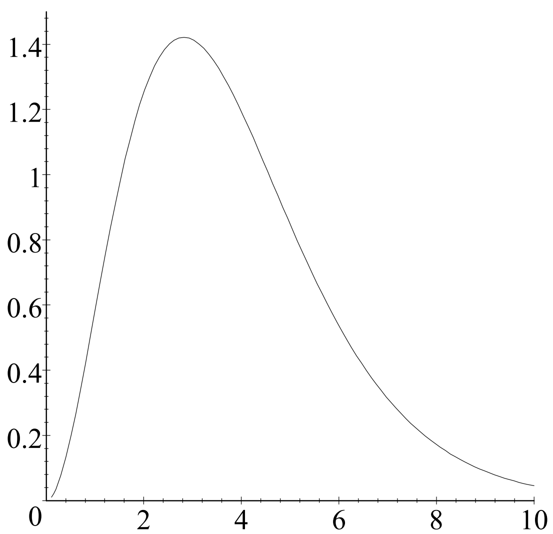
Das Letztere gilt, da $e^x > 1 + x$ für $x > 0$ nach der Reihenentwicklung von exp , also

$$e^{-x} < \frac{1}{1+x} \ .$$

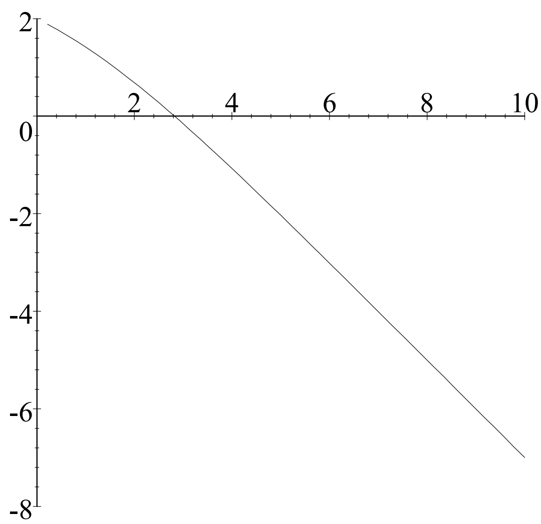
Somit ist f streng monoton fallend, besitzt daher genau eine Nullstelle x_0 und an x_0 einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$. Daher gilt das entsprechende auch für ρ_T' bei $\nu_{\max} = \frac{kT}{h}\cdot x_0$. Also befindet sich an $\nu_{\max}$ das einzige Extremum von ρ_T in $\mathbb{R}_+^*$, welches ein Maximum ist (vgl. Satz 8.6). Nach obiger Formel ergibt sich

$$\frac{\nu_{\max}(T)}{T} = \frac{k}{h}\cdot x_0$$

unabhängig von T .



$\nu \longmapsto \frac{\nu^3}{e^\nu - 1}$



$x \longmapsto 3 - \frac{x}{1-e^{-x}}$

Analysis II

Lösungsblatt 3

Aufgabe 1 Es sei $(x_k)_k \subset J \cap]-\infty, a[$ mit $\lim_k x_k = a$, sowie $(y_k)_k \subset J \cap]a, \infty[$ mit $\lim_k y_k = a$. Nach dem Mittelwertsatz existieren Folgen $(\xi_k)_k$ und $(\eta_k)_k$ mit

$$x_k < \xi_k < a \quad \text{und} \quad a < \eta_k < y_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} ,$$

insbesondere $\lim_k \xi_k = \lim_k \eta_k = a$, und

$$\frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a} = f'(\xi_k) \quad \text{und} \quad \frac{f(y_k) - f(a)}{y_k - a} = f'(\eta_k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

Da die Limites existieren gilt

$$f_l'(a) = \lim_k \frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a} = \lim_k f'(\xi_k) = f'(a-)$$

und

$$f_r'(a) = \lim_k \frac{f(y_k) - f(a)}{y_k - a} = \lim_k f'(\eta_k) = f'(a+) \ ,$$

insbesondere ist f links- und rechtsdifferenzierbar.

Das Kriterium der Vorlesung zeigt, dass genau dann f in a differenzierbar ist, wenn

$$f_l'(a) = f_r'(a) \quad \text{oder} \quad f'(a-) = f'(a+)$$

gilt.

Aufgabe 2

(a) Nach dem Mittelwertsatz (MWS) gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$e^b - e^a = e^\xi \cdot (b - a) \ .$$

Da exp strikt wachsend ist, folgt

$$e^a \cdot (b - a) < e^b - e^a < e^b \cdot (b - a) \ .$$

(b) Sei $x \in]0, 1[$ beliebig. Es ist

$$\left(\mathrm{id} - \frac{\mathrm{id}^2}{2} \right)' = 1 - \mathrm{id} \neq 0 \quad \text{auf }]0, 1[\ ,$$

also existiert nach dem MWS ein $\xi \in]0, x[$ mit

$$\frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x - \frac{x^2}{2} - 0} = \frac{\frac{1}{1+\xi}}{1 - \xi} = \frac{1}{1 - \xi^2} \ .$$

Wegen $1 - x^2 < 1 - \xi^2 < 1$ folgt die Behauptung.

(c) Es ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(\cos x - 1)^2 + (\sin x)^2 = |\cos x - 1 + i \cdot \sin x|^2 = \left|e^{i \cdot x} - 1\right|^2 = \left|e^{i \cdot x} - e^{i \cdot 0}\right|^2 \ .$$

Wir können o.B.d.A. $x \geqslant 0$ annehmen, da das Vorzeichen beim Quadrieren herausfällt. Nach der Mittelwertungleichung ist

$$\left|e^{i \cdot x} - e^{i \cdot 0}\right|^2 \leqslant \left(\sqrt{2} \cdot (x - 0) \cdot \sup_{t \in [0,x]} \left|i \cdot e^{i \cdot t}\right|\right)^2 = 2 \cdot x^2 \cdot 1 = 2 \cdot x^2 \ .$$

Aufgabe 3 Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit der Lösung. Dazu nehmen wir an, f sei eine Lösung und setzen

$$g := \frac{f}{\exp} \ .$$

Dann ist $g(\tau) = \eta \cdot \exp(-\tau)$ und

$$g' = \frac{f' \cdot \exp - f \cdot \exp'}{\exp^2} = \frac{f' - f}{\exp} = \frac{f + \exp - f}{\exp} = 1 \ ,$$

d.h. $g = \mathrm{id} + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$. Diese bestimmen wir aus der Anfangsbedingung:

$$g(\tau) = \tau + c = \eta \cdot \exp(-\tau) \ ,$$

also $c = \eta \cdot \exp(-\tau) - \tau$. Somit können wir schließen: *Wenn* eine Lösung f des AWPs existiert, so hat diese die Form

$$f = (\mathrm{id} + \eta \cdot \exp(-\tau) - \tau) \cdot \exp \ .$$

Dass dieses f tatsächlich das AWP löst verifizieren wir durch Ableiten und Einsetzen der Anfangsbedingung:

$$f' = (\mathrm{id} + \eta \cdot \exp(-\tau) - \tau)' \cdot \exp + (\mathrm{id} + \eta \cdot \exp(-\tau) - \tau) \cdot \exp' =$$

$$= \exp + (\mathrm{id} + \eta \cdot \exp(-\tau) - \tau) \cdot \exp = \exp + f$$

und

$$f(\tau) = \eta \cdot \exp(-\tau) \cdot \exp(\tau) = \eta \ .$$

Aufgabe 4

(a) Es gilt für $x \neq 0$

$$x^3 \cdot \sin\frac{1}{x} - x^2 = \frac{\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} \ .$$

Mit der Variablenänderung $y = \frac{1}{x}$ und der Regel von de l'Hospital folgt

$$\lim_{x \to \infty} x^3 \cdot \sin\frac{1}{x} - x^2 = \lim_{y \to 0+} \frac{\sin y - y}{y^3} = \lim_{y \to 0+} \frac{\cos y - 1}{3y^2} =$$

$$= \lim_{y \to 0+} \frac{-\sin y}{6y} = -\frac{1}{6} \ ,$$

da $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Man beachte, dass $\lim_{y\to 0+} (\sin y - y) = \lim_{y\to 0+} (\cos y - 1) = 0$ gilt.

(b) Setzen wir

$$f(x) := \sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} \quad \text{und} \quad g(x) := x^7 ,$$

dann ist

$$f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) = 0 \quad \text{für } k = 0, \ldots, 6$$

(nachrechnen !), sowie

$$f^{(7)}(0) = -\cos 0 = -1 \quad \text{und} \quad g^{(7)}(0) = 7! = 5040 .$$

Es folgt mit l'Hospital, siebenmal angewandt, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}}{x^7} = -\frac{1}{5040} .$$

(c) Nach der Restgliedformel für den Sinus (vgl. Beispiel 8.9.3) ist

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} = -\frac{x^7}{7!} + R_9(x)$$

und

$$|R_9(x)| \leqslant \frac{|x|^9}{9!} .$$

Es folgt

$$\left| \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}}{x^7} + \frac{1}{7!} \right| = \frac{|R_9(x)|}{|x|^7} \leqslant \frac{|x|^2}{9!} \longrightarrow 0 , \; x \longrightarrow 0 ,$$

also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}}{x^7} = -\frac{1}{7!} = -\frac{1}{5040} .$$

Analysis II

Lösungsblatt 4

Aufgabe 1

(a) Die Behauptung ist klar für $n = 0$. Schließen wir von n auf $n+1$: Es seien also $f, g \in \mathcal{C}^{(n+1)}(J)$, und es gelte die Leibnizformel für n . Dann ist die Funktion

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

differenzierbar, da die Funktionen $f^{(k)}$, $g^{(n-k)}$ für $k = 0, \ldots, n$ nach Voraussetzung differenzierbar sind, und es folgt

$$(f \cdot g)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k+1)} \cdot g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k+1)} =$$

$$= f^{(n+1)} \cdot g + f \cdot g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} .$$

Damit ist $(f \cdot g)^{(n+1)}$ stetig, also auch $f \cdot g \in \mathcal{C}^{(n+1)}(J)$.

(b) Nach (a) gilt

$$f^{(2n)} = \sum_{\substack{k=0 \\ 2|k}}^{2n} \binom{2n}{k} \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sin \cdot \cosh + \sum_{\substack{k=1 \\ 2|k-1}}^{2n-1} \binom{2n}{k} \cdot (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \cos \cdot \sinh =$$

$$= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} i^k \right) \cdot \sin \cdot \cosh - \operatorname{Re} \left(i \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} i^k \right) \cdot \cos \cdot \sinh =$$

$$= \operatorname{Re} (i+1)^{2n} \cdot \sin \cdot \cosh - \operatorname{Re} \left(i (i+1)^{2n} \right) \cdot \cos \cdot \sinh =$$

$$= \sin \cdot \cosh \cdot \operatorname{Re} (2i)^n + \cos \cdot \sinh \cdot \operatorname{Im} (2i)^n =$$

$$= 2^n \cdot \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin \cdot \cosh & \text{falls } 2 \mid n \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \cdot \sinh & \text{falls } 2 \mid n-1 \end{cases} .$$

Aufgabe 2

(a) Durch Ausprobieren erhält man

$$f^{(k)}(x) = a_k (1+x)^{\frac{1}{2}-k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $a_k \in \mathbb{Q}$ und $a_0 = 1$. Leitet man diese Formel ab, so erhält man die Rekursionsformel

$$a_{k+1} = a_k \left(\frac{1}{2} - k\right) \;,$$

und damit induktiv

$$a_k = \prod_{l=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} - l\right) = 2^{-k} (-1)^{k-1} \prod_{l=1}^{k-1} (2l-1) = \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{2^{2k-1} (k-1)!}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit erhält man

$$T_k f(x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{a_l}{l!} x^l = 1 + \sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^{l-1} (2l-2)!}{2^{2l-1} (l-1)!^2 l} x^l \;.$$

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt mit einem ξ zwischen $x = 0$ und y , insbesondere $\xi \in \left]-\delta, \infty\right[$, die Restglieddarstellung

$$R_k(y) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} y^k = \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{2^{2k-1} k (k-1)!^2} \cdot (1+\xi)^{\frac{1}{2}-k} y^k \;,$$

und da für $k \geqslant 1$ die Funktion $|1 + \mathrm{id}|^{\frac{1}{2}-k}$ in $\left]-1, \infty\right[$ strikt fallend ist, gilt

$$|1+\xi|^{\frac{1}{2}-k} \leqslant |1-\delta|^{\frac{1}{2}-k} \;.$$

Es folgt

$$|R_k(y)| \leqslant \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} k (k-1)!^2} \cdot (1-\delta)^{\frac{1}{2}-k} \cdot |y|^k \quad \text{für alle } y \in \left[-\delta, \infty\right[\;.$$

Aufgabe 3

(a) Sei zunächst $a \leqslant y \leqslant x$. Dann gilt

$$y = \frac{x-y}{x-a} \cdot a + \frac{y-a}{x-a} \cdot x$$

mit

$$\frac{x-y}{x-a} + \frac{y-a}{x-a} = 1 \;.$$

Damit haben wir, da f konvex,

$$f(y) \leqslant \frac{x-y}{x-a} \cdot f(a) + \frac{y-a}{x-a} \cdot f(x) = f(x) + \frac{x-y}{x-a} \cdot f(a) + \left(\frac{y-a}{x-a} - 1\right) \cdot f(x) =$$

$$= f(x) + \frac{x-y}{x-a} \cdot (f(a) - f(x)) = f(x) + \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot (y-x)$$

Andererseits ist

$$x = \frac{b-x}{b-y} \cdot y + \frac{x-y}{b-y} \cdot b$$

mit

$$\frac{b-x}{b-y} + \frac{x-y}{b-y} = 1 \ .$$

Wir erhalten somit

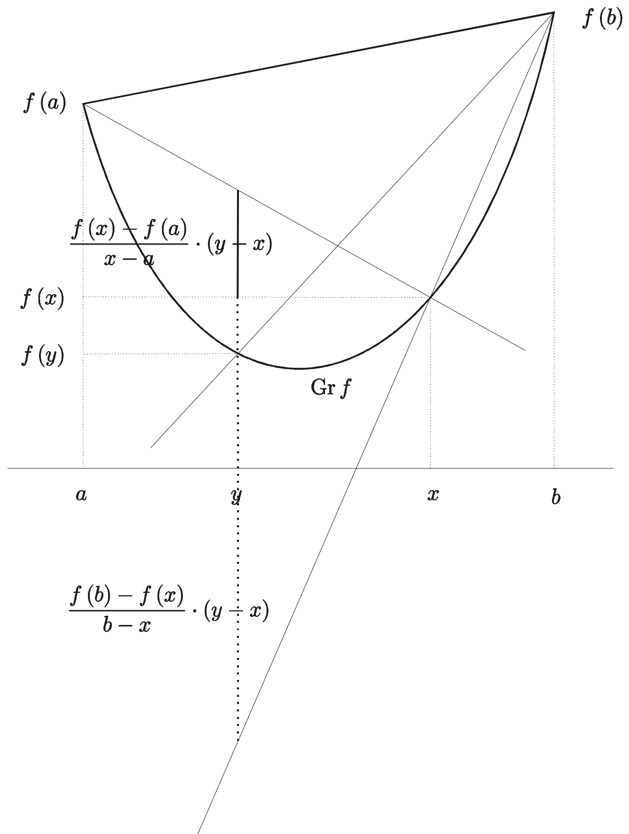
$$f(x) \leqslant \frac{b-x}{b-y} \cdot f(y) + \frac{x-y}{b-y} \cdot f(b) \ .$$

Aufgelöst nach $f(y)$ liefert das

$$f(y) \geqslant \frac{b-y}{b-x} \cdot \left(f(x) - \frac{x-y}{b-y} \cdot f(b) \right) = f(x) + \left(\frac{b-y}{b-x} - 1 \right) f(x) - \frac{x-y}{b-x} \cdot f(b) =$$

$$= f(x) + \frac{x-y}{b-x} \cdot (f(x) - f(b)) = f(x) + \frac{f(b) - f(x)}{b-x} \cdot (y-x)$$

und jetzt bilden wir den $\lim_{y \to x}$ und erhalten die linksseitige Stetigkeit von f im Punkt x . Die rechtsseitige Stetigkeit erhalten wir, indem wir den Fall $x \leqslant y \leqslant b$ betrachten. Dieser Fall ist analog zu $a \leqslant y \leqslant x$, nur die Rollen von a und b sind vertauscht.



(b) „$\Longrightarrow$“: Sei f konvex. Da f zweimal stetig differenzierbar, gilt nach der Taylorformel mit

Restglied für ein ξ zwischen x und y

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(y-x)^2 \ .$$

Da f konvex, ist nach Korollar 8.11 $f''(\xi) \geqslant 0$, und daraus folgt die Behauptung.

„$\Longleftarrow$“: Es genügt wieder nach Korollar 8.11 zz. $f'' \geqslant 0$. Sei $x \in J$ beliebig. Dann gilt nach Voraussetzung

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x) \ ,$$

also besitzt $f - f'(x)(\mathrm{id} - x)$ ein Minimum im Punkt x . Da mit f auch $f - f'(x)(\mathrm{id} - x)$ zweimal stetig differenzierbar, folgt

$$f''(x) = \partial^2 \left[f - f'(x)(\mathrm{id} - x)\right](x) \geqslant 0 \ .$$

Aufgabe 4 f ist auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \quad , \quad f''(x) = 4\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3} \quad \text{auf ganz } \mathbb{R} \ .$$

Für $x \neq 0$ ist $f(x) = \frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}$, also folgt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1 \ .$$

f hat genau in -1 und $+1$ Nullstellen, sowie einen kritischen Wert in $x = 0$. Da

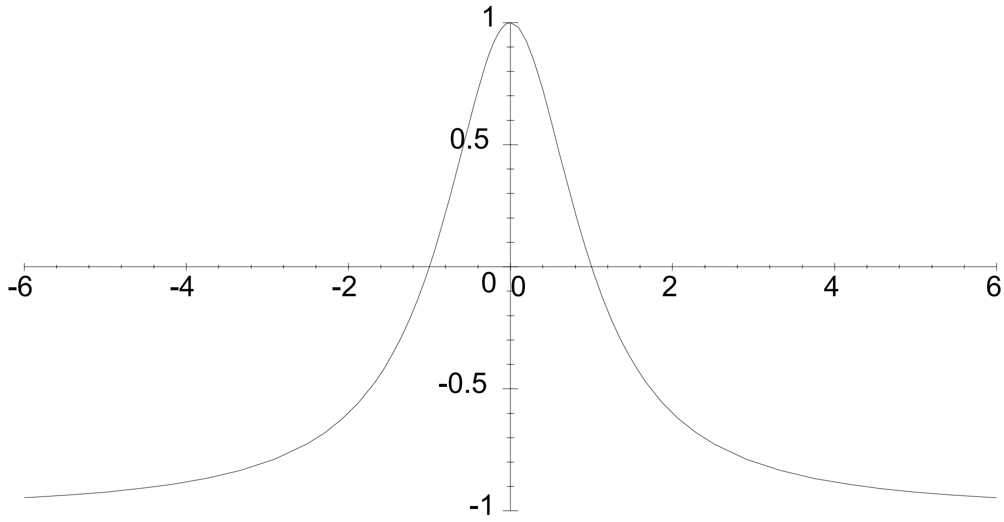
$$f'|_{\mathbb{R}_-} > 0 \quad \text{und} \quad f'|_{\mathbb{R}_+} < 0 \ ,$$

ist f auf $\mathbb{R}_-$ streng wachsend und auf $\mathbb{R}_+$ streng fallend, d.h. in $x = 0$ liegt ein Maximum vor. Dies ist das einzige Extremum von f . Für $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ist $f''(x) < 0$, für $|x| \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$ist $f''(x) \geqslant 0$, wobei Gleichheit genau in $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ gilt, also hat f dort Wendepunkte. Daraus folgt auch, daß f genau in

$$\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right[$$

konvex ist; konkav ist f genau in

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \ .$$



$$x \longmapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Analysis II

Lösungsblatt 5

Aufgabe 1

(a) Man nehme an, f sei eine Lösung des AWP's und man mache den Ansatz $f = g \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}}$ bzw. $g := f \cdot e^{c_1 \cdot \mathrm{id}}$. Es folgt durch Ableiten und Einsetzen der Differentialgleichung

$$g' = f' \cdot e^{c_1 \cdot \mathrm{id}} + c_1 \cdot f \cdot e^{c_1 \cdot \mathrm{id}} = c_2 \cdot e^{c_1 \cdot \mathrm{id}} \ ,$$

also (Existenz und Eindeutigkeit der Stammfunktion)

$$g = \frac{c_2}{c_1} \cdot e^{c_1 \cdot \mathrm{id}} + c \ ,$$

wobei für die Konstante c aus der Anfangsbedingung folgt

$$c = g(0) - \frac{c_2}{c_1} = \eta - \frac{c_2}{c_1} \ .$$

Somit

$$f = \frac{c_2}{c_1} + \left(\eta - \frac{c_2}{c_1}\right) \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}} \ .$$

Dass dieses f auch tatsächlich eine Lösung des AWP ist verifizieren wir direkt: $f(0) = \eta$ und

$$f' + c_1 \cdot f = -c_1 \cdot \left(\eta - \frac{c_2}{c_1}\right) \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}} + c_1 \cdot \left(\frac{c_2}{c_1} + \left(\eta - \frac{c_2}{c_1}\right) \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}}\right) =$$

$$= (-c_1 \cdot \eta + c_1 \cdot c_2) \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}} + c_2 + \left(c_1 \cdot \eta - c_1 \cdot c_2 \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}}\right) = c_2 \ .$$

(b) Setzen wir $g = f \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}}$, so ist

$$g' = f' \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} - i \cdot f \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} \tag{$*$}$$

und

$$g'' = f'' \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} - 2i \cdot f' \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} + i^2 \cdot f \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} \ .$$

Es folgt

$$g'' + 2i \cdot g' = f'' \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} + f \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} = (f'' + f) \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} = 0 \ .$$

Hieraus erhalten wir das AWP

$$g' + 2i \cdot g = c$$

mit

$$c = g'(0) + 2i \cdot g(0) \overset{(*)}{=} f'(0) + 2i \cdot f(0) = \eta_1 + i \cdot \eta_0$$

und

$$g(0) = f(0) = \eta_0 \ .$$

Dieses AWP hat nach Teil (a) die eindeutige Lösung

$$g = \frac{\eta_1 + i \cdot \eta_0}{2i} + \left(\eta_0 - \frac{\eta_1 + i \cdot \eta_0}{2i}\right) \cdot e^{-2i \cdot \mathrm{id}} \ ,$$

also ist

$$f = \frac{1}{2} \cdot (\eta_0 - i\eta_1) \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}} + \frac{1}{2} \cdot (\eta_0 + i\eta_1) \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} \ .$$

(c) Für $(\eta_0, \eta_1) = (1, 0)$ ist $f = \cos$ und für $(\eta_0, \eta_1) = (0, 1)$ ist $f = \sin$.

Aufgabe 2 Man schreibt die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln^2 x - \ln x^2 = \ln(x)(\ln(x) - 2)$$

und erhält sofort die (einzigen) zwei Nullstellen $x_{0,1} = 1$ und $x_{0,2} = e^2$, sowie das Grenzverhalten

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty = \lim_{x \to 0+} f(x) \ .$$

Die Funktion ist beliebig oft differenzierbar mit Ableitungen

$$f'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln(x) - 1)$$

$$f''(x) = \frac{-2}{x^2}(\ln(x) - 1) + \frac{2}{x^2} = \frac{-2}{x^2}(\ln(x) - 2) \ .$$

Aufgabe 3 Aufgrund der Monotonie des Logarithmus ist

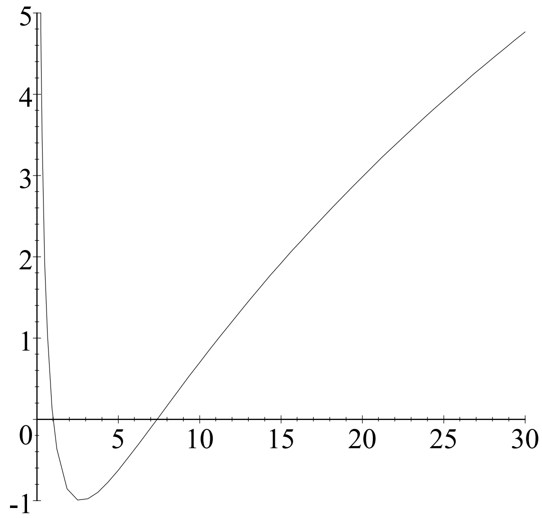
$$f'(x) \quad \begin{cases} < 0 & x < e \\ = 0 & x = e \\ > 0 & x > e \end{cases} \ ,$$

so dass f auf $]0, e[$ strikt fallend und auf $]e, \infty[$ strikt wachsend ist; in $x = e$ hat f ein globales Minimum. Eine analoge Untersuchung der zweiten Ableitung zeigt, dass

$$f''(x) \quad \begin{cases} > 0 & x < e^2 \\ = 0 & x = e^2 \\ < 0 & x > e^2 \end{cases} \ ,$$

so dass f auf $]0, e^2]$ konvex und auf $[e^2, \infty[$ konkav ist; in $x = e^2$ hat f einen Wendepunkt. Als

Skizze des Graphen möge das folgende Bild dienen.



Aufgabe 4 Nach Voraussetzung ist f' streng monoton wachsend mit (einziger Nullstelle ξ), so dass ξ ein striktes globales Minimum von f ist.

(a) Ohne Einschränkung nehmen wir $J \ni x_0 > \xi$ an, insbesondere $f(x_0), f'(x_0) > 0$. Wir zeigen induktiv, dass $x_k \in]\xi, x_0]$ für alle k gilt (dies entspricht der Wohldefiniertheit); die strikte Monotonie ist dann trivial ! Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen.

Aus der Annahme $x_k \in]\xi, x_0]$ folgt $f(x_k), f'(x_k) > 0$, so dass

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

wohldefiniert ist. Die Funktion $g : [\xi, x_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := f(x) - f(x_k) - f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

ist differenzierbar mit Ableitung

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_k) < 0 \quad \text{für alle } x < x_k \ .$$

Sie ist demnach auf $[\xi, x_k]$ streng monoton fallend mit $g(x_k) = 0$, woraus $g > 0$ auf $[\xi, x_k[$ folgt. Desweiteren

$$0 < g(\xi) = f(\xi) - f(x_k) - f'(x_k) \cdot (\xi - x_k) = -f(x_k) - f'(x_k) \cdot (\xi - x_k)$$

bzw.

$$\xi < x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1} < x_k \leqslant x_0 \ .$$

Als monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert $(x_k)_k$ in $[\xi, x_0]$. Nimmt man für den Limes $\lim_k x_k > \xi$ an, so ist $\lim_k f'(x_k) = f'(\lim_k x_k) > 0$, sowie $\lim_k f(x_k) = f(\lim_k x_k) > 0$, und die Grenzwertsätze liefern

$$\lim_k x_k = \lim_k x_{k+1} = \lim_k \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) = \lim_k x_k - \lim_k \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} =$$

$$= \lim_k x_k - \frac{f(\lim_k x_k)}{f'(\lim_k x_k)} < \lim_k x_k \ ;$$

ein Widerspruch ! Es muss also $\lim_k x_k = \xi$ folgen.

(b) Für

$$\varphi :]\xi, x_0] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

zeigen wir die Existenz eines $c \in]0,1[$ mit

$$\Phi(x) := \frac{\varphi(x) - \xi}{x - \xi} \leqslant c < 1 \quad \text{für alle } x \in]\xi, x_0]$$

und erhalten somit die gewünschte Aussage.

Zunächst gilt natürlich $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x$, also $\varphi(x) - \xi < x - \xi$ und somit $0 \leqslant \Phi(x) < 1$ für alle $x \in]\xi, x_0]$ und Φ ist dort stetig. Ferner lässt sich Φ stetig in ξ fortsetzen, denn l'Hospital liefert neben

$$\lim_{x \longrightarrow \xi+} \left(\frac{f(x)}{(f'(x))^2} \right) = \frac{\lim_{x \longrightarrow \xi+} f'(x)}{\lim_{x \longrightarrow \xi+} 2 \cdot f'(x) \cdot f''(x)} = \frac{1}{2f''(\xi)}$$

auch

$$\lim_{x \longrightarrow \xi+} \varphi'(x) = 1 - \lim_{x \longrightarrow \xi+} \frac{(f'(x))^2 - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \lim_{x \longrightarrow \xi+} \left(\frac{f(x)}{(f'(x))^2} \cdot f''(x) \right) = \frac{1}{2} \ ,$$

also zusammen

$$\lim_{x \longrightarrow \xi+} \Phi(x) = \frac{\lim_{x \longrightarrow \xi+} \varphi'(x)}{1} = \lim_{x \longrightarrow \xi+} \varphi'(x) = \frac{1}{2} \ .$$

Insgesamt ist die Fortsetzung eine stetige Funktion auf $[\xi, x_0]$ und nimmt ihr Maximum, es sei c , an; es gilt also $c < 1$.

Aufgabe 5

(a) Wir definieren Folgen von Treppenfunktionen durch

$$\varphi_k := \sum_{j=0}^{m_k - 1} \sup f([x_{k,j}, x_{k,j+1}[) \cdot 1_{[x_{k,j}, x_{k,j+1}[} + f(b) \cdot 1_{\{b\}}$$

und

$$\psi_k := \sum_{j=0}^{m_k - 1} \inf f([x_{k,j}, x_{k,j+1}[) \cdot 1_{[x_{k,j}, x_{k,j+1}[} + f(b) \cdot 1_{\{b\}} \ .$$

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [a, b[$ beliebig. Es gibt dann ein $j \in \mathbb{N}$, so dass $x \in [x_{k,j}, x_{k,j+1}[$, also ist

$$\psi_k(x) = \inf([x_{k,j}, x_{k,j+1}[) \leqslant f(x) \leqslant \sup f([x_{k,j}, x_{k,j+1}[) = \varphi_k(x) \ ,$$

d.h. es ist $\psi_k \leqslant f \leqslant \varphi_k$, da $\psi_k(b) = f(b) = \varphi_k(b)$. Weiter gilt

$$\int_a^b \varphi_k = \sum_{j=0}^{m_k - 1} \sup f([x_{k,j}, x_{k,j+1}[) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j})$$

und

$$\int_a^b \psi_k = \sum_{j=0}^{m_k-1} \inf f\left([x_{k,j}, x_{k,j+1}[\right) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) \ .$$

Offenbar gilt für alle k

$$\int_a^b \psi_k \leqslant \sup_{\psi \in \mathcal{T}([a,b]), \psi \leqslant f} \int_a^b \psi = \int_{a*}^b f$$

und

$$\int_a^b \varphi_k \geqslant \inf_{\varphi \in \mathcal{T}([a,b]), \varphi \geqslant f} \int_a^b \varphi = \int_a^{b*} f \ ,$$

also

$$C = \lim_k \int_a^b \psi_k \leqslant \int_{a*}^b f \leqslant \int_a^{b*} f \leqslant \lim_k \int_a^b \varphi_k = C \in \mathbb{R} \ .$$

Daraus folgt

$$\int_a^{b*} f = \int_{a*}^b f \in \mathbb{R} \ ,$$

d.h. f ist integrierbar und es ist

$$\int_a^b f = C \ .$$

(b) Falls $x = a$ ist, wählen wir für $k \geqslant 2$ eine Unterteilung von $[a, b]$ wie folgt:

$$x_{k,0} := a \quad , \quad x_{k,1} := a + \frac{b-a}{k} \quad , \quad x_{k,2} := b \ .$$

Dann gilt

$$\lim_k \sum_{j=0}^{1} \sup 1_{\{a\}}\left([x_{k,j}, x_{k,j+1}[\right) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) = \lim_k \frac{b-a}{k} = 0$$

und

$$\lim_k \sum_{j=0}^{1} \inf 1_{\{a\}}\left([x_{k,j}, x_{k,j+1}[\right) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) = 0 \ ,$$

also ist $1_{\{a\}}$ nach (a) integrierbar.

Falls $x \in \,]a, b[$, so definieren wir für $k \geqslant 2$ eine Unterteilung von $[a, b]$ wie folgt:

$$x_{k,0} := a \quad , \quad x_{k,1} := x \quad , \quad x_{k,2} := x + \frac{b-x}{k} \quad , \quad x_{k,3} := b \ .$$

Dann gilt

$$\lim_k \sum_{j=0}^{2} \sup 1_{\{x\}}\left([x_{k,j}, x_{k,j+1}[\right) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) = \lim_k \frac{x-a}{k} = 0$$

und

$$\lim_k \sum_{j=0}^{2} \inf 1_{\{a\}} \left([x_{k,j}, x_{k,j+1}[\right) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) = 0 \ ,$$

also ist $1_{\{x\}}$ nach (a) integrierbar.

Der Fall $x = b$ ist trivial, da $1_{\{b\}}$ eine Treppenfunktion mit zugehöriger Unterteilung (a, b) ist und es gilt

$$\int_a^b 1_{\{b\}} = 0$$

nach der Definition !

(c) Wir definieren $x_{k,j} := \frac{j}{k}$, $j = 0, \ldots, k$, d.h. $m_k = k$. Es ist

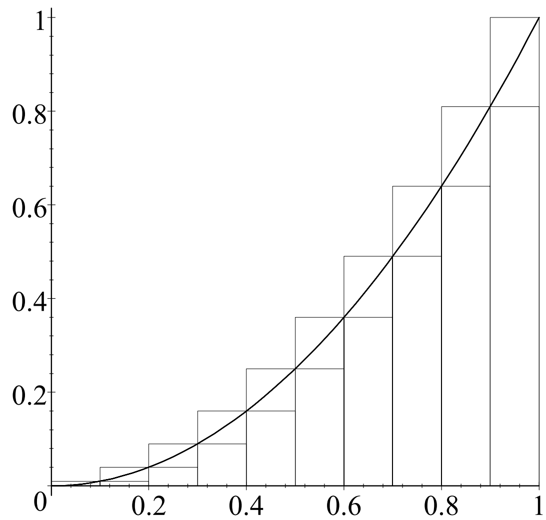
$$\sup \mathrm{id}^2 \left([x_{k,j}, x_{k,j+1}[\right) = \left(\frac{j+1}{k}\right)^2 \quad , \quad \inf \mathrm{id}^2 \left([x_{k,j}, x_{k,j+1}[\right) = \left(\frac{j}{k}\right)^2 \ .$$

Somit erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{m_k-1} \sup \mathrm{id}^2 \left([x_{k,j}, x_{k,j+1}[\right) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{j+1}{k}\right)^2 \cdot \left(\frac{j+1}{k} - \frac{j}{k}\right) = \frac{1}{k^3} \cdot \sum_{j=1}^{k} j^2$$

und

$$\sum_{j=0}^{m_k-1} \inf f \left([x_{k,j}, x_{k,j+1}[\right) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{j}{k}\right)^2 \cdot \left(\frac{j+1}{k} - \frac{j}{k}\right) = \frac{1}{k^3} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} j^2 \ .$$



$k = 10$

Nun gilt, wie man per vollständiger Induktion beweist

$$\sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{m\,(m+1)\,(2m+1)}{6} \ ,$$

also folgt

$$\lim_k \frac{1}{k^3} \cdot \sum_{j=1}^{k} j^2 = \lim_k \frac{k\,(k+1)\,(2k+1)}{6k^3} = \frac{1}{3}$$

und

$$\lim_k \frac{1}{k^3} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} j^2 = \frac{(k-1)\,k\,(2k-1)}{6k^3} = \frac{1}{3}\ ,$$

d.h.

$$\int_0^1 \mathrm{id}^2 = \frac{1}{3}\ .$$

Analysis II

Lösungsblatt 6

Aufgabe 1

(a) Wir definieren die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{1+x} \ ,$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Unterteilung von $[0,1]$ durch

$$x_{k,j} := \frac{j}{k} \quad , \quad j = 0, \ldots, k \ ,$$

sowie Folgen von Treppenfunktionen auf $[0,1]$ durch

$$\psi_k := \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1+x_{k,j+1}} \cdot 1_{[x_{k,j}, x_{k,j+1}[}$$

und

$$\varphi_k := \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1+x_{k,j}} \cdot 1_{[x_{k,j}, x_{k,j+1}[} + 1_{\{1\}} \ .$$

Offenbar ist $\psi_k \leqslant f \leqslant \varphi_k$. Also folgt

$$\int_0^1 \psi_k \leqslant \int_0^1 f \leqslant \int_0^1 \varphi_k \ .$$

Es gilt

$$\int_0^1 \psi_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k} \frac{1}{1+\frac{j+1}{k}} = a_k - \frac{1}{k}$$

und

$$\int_0^1 \varphi_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k} \frac{1}{1+\frac{j}{k}} = a_k - \frac{1}{2k} \ .$$

Insgesamt erhält man

$$a_k - \frac{1}{k} \leqslant \int_0^1 f \leqslant a_k - \frac{1}{2k} \ ,$$

also

$$\left(\int_0^1 f \right) + \frac{1}{2k} \leqslant a_k \leqslant \left(\int_0^1 f \right) + \frac{1}{k} \ .$$

Somit

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{id}} = [\ln(1+\mathrm{id})]_0^1 = \ln 2 \ .$$

(b) Es gilt

$$a_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{(j^2+k^2)(2j+1)}{k^4} \left(\ln\left(j^2+k^2\right) - 2\ln k\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{j^2}{k^2}+1\right)\left(\frac{(j+1)^2}{k^2} - \frac{j^2}{k^2}\right)\left(\ln\left(\frac{j^2}{k^2}+1\right)\right) \ .$$

Die Funktion f definieren wir jetzt durch

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto (x+1)\ln(x+1) \ ,$$

die Unterteilung von $[0,1]$ durch

$$x_{k,j} := \frac{j^2}{k^2} \quad , \quad j = 0, \ldots, k \ ,$$

sowie die Folgen von Treppenfunktionen auf $[0,1]$ durch

$$\psi_k := \sum_{j=0}^{k-1} (x_{k,j}+1)\ln(x_{k,j}+1) \cdot 1_{[x_{k,j},x_{k,j+1}[}$$

und

$$\varphi_k := \sum_{j=0}^{k-1} (x_{k,j+1}+1)\ln(x_{k,j+1}+1) \cdot 1_{[x_{k,j},x_{k,j+1}[} + 1_{\{1\}} \ .$$

Wieder gilt (man beachte, dass f jetzt monoton wachsend ist !)

$$\int_0^1 \psi_k \leqslant \int_0^1 f \leqslant \int_0^1 \varphi_k$$

mit

$$\int_0^1 \psi_k = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{j^2}{k^2}+1\right)\ln\left(\frac{j^2}{k^2}+1\right)\left(\frac{(j+1)^2}{k^2} - \frac{j^2}{k^2}\right) =$$

$$= a_k - \frac{2(2k+1)}{k^2}\ln 2$$

und nach Indexverschiebung

$$\int_0^1 \varphi_k = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{(j+1)^2}{k^2}+1\right)\ln\left(\frac{(j+1)^2}{k^2}+1\right)\left(\frac{(j+1)^2}{k^2} - \frac{j^2}{k^2}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{(j^2+k^2)}{k^2}\left(\frac{j^2}{k^2} - \frac{(j-1)^2}{k^2}\right)\ln\left(\frac{j^2}{k^2}+1\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{(j^2+k^2)}{k^2} \left(\frac{(j+1)^2}{k^2} - \frac{j^2}{k^2} - \frac{1}{k^2} \right) \ln \left(\frac{j^2}{k^2} + 1 \right) =$$

$$= a_k - \sum_{j=1}^{k} \frac{(j^2+k^2)}{k^4} \ln \left(\frac{j^2}{k^2} + 1 \right) \quad .$$

Da

$$\left(\int_0^1 f \right) + \sum_{j=1}^{k} \frac{(j^2+k^2)}{k^4} \ln \left(\frac{j^2}{k^2} + 1 \right) \leqslant a_k \leqslant \left(\int_0^1 f \right) + \frac{2\,(2k+1)}{k^2} \ln 2 \ .$$

und

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \frac{(j^2+k^2)}{k^4} \ln \left(\frac{j^2}{k^2} + 1 \right) \right| \leqslant \frac{2 \ln 2}{k} \to 0$$

bei $k \to \infty$, folgt

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \int_0^1 (\mathrm{id}+1) \ln (\mathrm{id}+1) = \left[\frac{\mathrm{id}^2\,(2\ln -1)}{4} \right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4} \ .$$

Aufgabe 2 Wir wissen, daß $c \cdot e^{\mathrm{id}^2}$ mit $c \in \mathbb{C}$ Lösung der homogenen DGL $f' = 2 \cdot \mathrm{id} \cdot f$ ist. Also wählen wir für die inhomogene DGL den Ansatz (wieder Variation der Konstanten)

$$f(x) = c(x) \cdot e^{x^2} \ .$$

Somit erhalten wir

$$2x \cdot f(x) + x = f'(x) = c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x) \cdot 2 \cdot x \cdot e^{x^2} = c'(x) \cdot e^{x^2} + 2 \cdot x \cdot f(x) \ ,$$

also

$$c' = \mathrm{id} \cdot e^{-\mathrm{id}^2} \ .$$

Damit muss c die Form haben

$$c = \int \mathrm{id} \cdot e^{-\mathrm{id}^2} = -\frac{1}{2} \cdot \int \left(e^{-\mathrm{id}^2} \right)' = -\frac{e^{-\mathrm{id}^2}}{2} + \alpha \ , \quad \alpha \in \mathbb{C} \ .$$

Es folgt

$$f = e^{\mathrm{id}^2} \cdot \left(-\frac{e^{-\mathrm{id}^2}}{2} + \alpha \right) = -\frac{1}{2} + \alpha \cdot e^{\mathrm{id}^2} \ .$$

Für die Konstante α folgt aus der Anfangsbedingung $f(0) = 0$, daß $\alpha = \frac{1}{2}$ sein muß, also

$$f = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\mathrm{id}^2} - 1 \right) \ .$$

Daß f tatsächlich eine Lösung des AWP ist, verifiziert man durch Ableiten und Einsetzen des Anfangswertes:

$$f' - 2\,\mathrm{id} \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{\mathrm{id}^2} - 2\,\mathrm{id} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\mathrm{id}^2} - 1 \right) = \mathrm{id} \quad , \quad f(0) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^0 - 1 \right) = 0 \ .$$

Aufgabe 3

(a) Wir zeigen

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{1}{x}\int_0^x f\right)-\eta\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x g\right)=0$$

mit $g := f-\eta$. Da mit f auch g auf jedem Intervall $J\subset\mathbb{R}_+$ integrierbar ist und $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existiert, ist insbesondere g beschränkt, z.B. durch $M\in\mathbb{R}_+$. Also gilt für $x\in\mathbb{R}_+^*$

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x g\right|\leqslant\frac{1}{x}\left|\int_0^{\sqrt{x}} g\right|+\frac{1}{x}\left|\int_{\sqrt{x}}^x g\right|\leqslant\frac{1}{x}\left(M\cdot\sqrt{x}+\max_{t\in\left[\sqrt{x},x\right]}|g(t)|\cdot\left(x-\sqrt{x}\right)\right)\leqslant$$

$$=\frac{M}{\sqrt{x}}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\max_{t\in\left[\sqrt{x},x\right]}|g(t)|\ .$$

(vgl. Satz 9.7). Da $\lim_{t\to\infty} g(t)=0$, existiert für jedes $\varepsilon>0$ ein $b\in\mathbb{R}_+$ mit

$$|g(t)|\leqslant\varepsilon\quad\text{für alle } t\geqslant b$$

(vgl. Bemerkung 7.9.2), also

$$\left|\max_{t\in\left[\sqrt{x},x\right]}|g(t)|\right|\leqslant\varepsilon\quad\text{für alle } x \text{ mit } x\geqslant b^2\ .$$

Damit folgt $\lim_{x\to\infty}\max_{t\in\left[\sqrt{x},x\right]}|g(t)|=0$ und somit

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x g=0\ .$$

(b) Es ist nützlich für andere Zwecke zu wissen, dass

$$\int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt=\int_0^x f(s)\,g(x-s)\,ds$$

(Substitution $s=x-t$).

Da f und g stetig sind mit existierenden Limites $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} g(x)$, sind f und g beschränkt, z.B. durch $M\in\mathbb{R}_+$.

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt=\frac{1}{x}\left(\int_0^{\sqrt{x}}+\int_{\sqrt{x}}^{x-\sqrt{x}}+\int_{x-\sqrt{x}}^x\right)f(x-t)\,g(t)\,dt\ .$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung angewandt auf $f\cdot g(x-\mathrm{id})$ ist nun

$$\int_{\sqrt{x}}^{x-\sqrt{x}} f(x-t)\,g(t)\,dt=\left(x-2\sqrt{x}\right)f(x-\zeta)\,g(\zeta)$$

mit einem $\zeta\in\left[\sqrt{x},x-\sqrt{x}\right]$, und damit, da $\lim_{x\to\infty}\zeta=\lim_{x\to\infty}(x-\zeta)=\infty$, auch

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^{x-\sqrt{x}} f(x-t)\,g(t)\,dt=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2\sqrt{x}}{x}f(x-\zeta)\,g(\zeta)=\eta\xi\ ,$$

während gleichzeitig

$$\left|\frac{1}{x}\left(\int_0^{\sqrt{x}} + \int_{x-\sqrt{x}}^{x}\right) f(x-t)\, g(t)\ dt\right| \leqslant 2\frac{M^2}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0$$

bei $x \to \infty$.

Aufgabe 4

(a) Es ist (vgl. Beispiel 9.10.4)

$$\int_a^b \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int_a^b \frac{\ln' x}{\ln x} dx = \ln\ln b - \ln\ln a = \ln\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right) \ ,$$

vorausgesetzt dass $a, b \in \,]0,1[$ oder $a, b \in \,]1,\infty[$!

(b) Wir substituieren $x = a\sqrt{t}$ und erhalten

$$\int_0^a x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^k dx = \int_0^1 a\sqrt{t} \cdot (1-t)^k\ \frac{a\ dt}{2\sqrt{t}} = \frac{a^2}{2} \cdot \int_0^1 (1-t)^k\ dt\ .$$

Setzen wir nun $u = 1 - t$, so folgt

$$\int_0^1 (1-t)^k\ dt = -\int_1^0 u^k\, du =$$

$$= \int_0^1 u^k\, du = \left.\frac{\mathrm{id}^{k+1}}{k+1}\right|_0^1 = \frac{1}{k+1}\ .$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_0^1 x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^k dx = \frac{a^2}{2 \cdot (k+1)}\ .$$

(c)

$$\int_a^0 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = -a - 2\int_a^0 \frac{dx}{e^x + 1}\ .$$

Nun substituieren wir $x = \ln t$ und erhalten

$$\int_a^0 \frac{dx}{e^x+1} = \int_{e^a}^1 \frac{1}{t+1} \cdot \frac{dt}{t} = \int_{e^a}^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln\frac{1}{e^a} - \ln\frac{2}{e^a+1} = -a - \ln\frac{2}{e^a+1}\ .$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_a^0 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = a + 2\ln\frac{2}{e^a+1} = \ln\frac{4}{e^a + e^{-a} + 2}\ .$$

Analysis II

Lösungsblatt 7

Aufgabe 1 Bezeichnet m die Majorante von $|f'|$, dann gilt nach der Mittelwertungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{2} \cdot m \cdot |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in J \ .$$

Damit weißt man zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ sofort nach, dass $\delta := \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} \cdot m} > 0$ das in der gleichmäßigen Stetigkeit Verlangte leistet.

Aufgabe 2 Bezeichnet F eine Stammfunktion von $\sqrt{1 + \sin^2}$, so gilt

$$f'(x) = \left(F\left(\diamond^2 + \pi\right) - F\right)'(x) = F'\left(x^2 + \pi\right) \cdot 2x - F'(x) =$$

$$= 2x \cdot \sqrt{1 + \sin^2\left(x^2\right)} - \sqrt{1 + \sin^2(x)} \ .$$

Aufgabe 3

(a) Existiert eine Nullstelle ν von f , so ist $f = 0$ (auf $\mathbb{R}_+^*$), denn

$$f(x) = f\left(\frac{x}{\nu} \cdot \nu\right) = f\left(\frac{x}{\nu}\right) \cdot f(\nu) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

Wir schließen von nun an den trivialen Fall $f = 0$ aus, wonach f keine Nullstellen haben darf, also auch keinen Vorzeichenwechsel . Aufgrund der Stetigkeit würde ein Vorzeichenwechsel eine Nullstelle nach sich ziehen. Die Gleichung $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$ zeigt, dass $f(1) \in \{0, 1\}$ und es folgt automatisch $f(1) = 1$, sowie $f > 0$ auf $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Es gilt

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{\left(f\left(\frac{y}{x}\right) - 1\right) \cdot f(x)}{\left(\frac{y}{x} - 1\right) \cdot x} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}_+^* \ ,$$

so dass für festes $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

genau dann existiert, wenn

$$\lim_{y \to x} \frac{\left(f\left(\frac{y}{x}\right) - 1\right) \cdot f(x)}{\left(\frac{y}{x} - 1\right) \cdot x} = \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{1 \neq z \to 1} \frac{(f(z) - 1)}{(z - 1)} = \frac{f(x)}{x} \cdot f'(1)$$

existiert. In diesem Fall gilt

$$f'(x) = f'(1) \cdot \frac{f(x)}{x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung.

(c) Es gilt

$$\int_1^x f = f(\xi) \cdot (x-1)$$

für ein ξ zwischen x und 1 , also

$$\int_1^x f \neq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$$

nach Teil (a).

Sei F eine Stammfunktion von f . Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_1^x f(t)\, dt = \int_1^x f\left(x \cdot \frac{t}{x}\right) dt = x \cdot \int_{\frac{1}{x}}^1 f(x \cdot y)\, dy = x \cdot \int_{\frac{1}{x}}^1 f(y)\, dy \cdot f(x) \ ,$$

also (alle Integrale > 0 !)

$$f(x) = \frac{\int_1^x f}{x \cdot \int_{\frac{1}{x}}^1 f} = \frac{F(x) - F(1)}{x \cdot \left(F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

und dies ist offensichtlich eine auf $]1,\infty[$ stetig differenzierbare Funktion. Nach Teil (b) ist f auf ganz $\mathbb{R}_+^*$ differenzierbar et f ist stetig differenzierbar, da sie die Differentialgleichung erfüllt.

(d) Die obigen Teilaufgaben besagen, dass jede stetige Funktion, die der angegebenen Funktionalgleichung genügt, Lösung des AWPs

$$f' = \frac{f'(1)}{\mathrm{id}} \cdot f \quad \text{und} \quad f(1) = 1$$

sein muss. Dieses ist linear und nach Satz 9.8.i gilt

$$f(x) = \exp\left(\int_1^x \frac{f'(1)}{\mathrm{id}}\right) = \exp\left(f'(1) \cdot \ln x\right) = x^{f'(1)} \ ,$$

so dass nur die Funktionen id^α gleichzeitig Stetigkeit und Funktiongleichung erfüllen können. In der Tat erfüllt auch jede solche Funktion beide Bedingungen.

Aufgabe 4 Nehmen wir an, $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Lösung des AWP, d.h.

$$1 = \frac{f'}{1+f^2} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ ,$$

und deshalb für alle $t \in J$

$$t - \frac{\pi}{2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^t 1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{f'}{1+f^2} = \int_{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{f(t)} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan\Big]_0^{f(t)} \ ,$$

also

$$t - \frac{\pi}{2} = \arctan f(t) \ .$$

Daraus folgt

$$J = \arctan f(J) + \frac{\pi}{2} \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \frac{\pi}{2} =]0,\pi[\quad \text{und} \quad f = \tan\left(\mathrm{id} - \frac{\pi}{2}\right) \ .$$

Schließlich verifiziert man, dass

$$f = \tan\left(\mathrm{id} - \frac{\pi}{2}\right) :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

tatsächlich das AWP löst. Dies zeigt, dass diese Lösung maximal ist.

Benützt man lieber Hauptsatz 9.15, so ist

$$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto 1 \quad \text{und} \quad \rho : \mathbb{R} \longrightarrow [1, \infty[: x \longmapsto 1 + x^2 \ ,$$

sowie

$$S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \sigma = t - \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int_0^x \frac{1}{\rho} = \arctan x \ .$$

Dann ist $R(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ und $R^{-1} = \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$. Da

$$S^{-1}(R(\mathbb{R})) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \frac{\pi}{2} =]0, \pi[\ ,$$

ist

$$R^{-1} \circ S = \tan\left(\mathrm{id} - \frac{\pi}{2}\right) :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

die eindeutige maximale Lösung des AWP.

Aufgabe 5 Da $\frac{\sin}{\mathrm{id}}$ in 0 stetig fortsetzbar ist, genügt es die Konvergenz von

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{z} \frac{\sin}{\mathrm{id}} = \left[-\frac{\cos}{\mathrm{id}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{z} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{z} \frac{\cos}{\mathrm{id}^2}$$

für $z \to \infty$ nachzuweisen. Der mittels partieller Integration erhaltene erste Term

$$\left[-\frac{\cos}{\mathrm{id}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{z} = -\frac{\cos z}{z}$$

konvergiert für $z \to \infty$ sicherlich gegen Null. Der zweite Term erfüllt für $y, z > \frac{\pi}{2}$ die Ungleichung

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{y} \frac{\cos}{\mathrm{id}^2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{z} \frac{\cos}{\mathrm{id}^2}\right| \leqslant \int_{\min(y,z)}^{\max(y,z)} \frac{1}{\mathrm{id}^2} = \frac{1}{\min(y,z)} - \frac{1}{\max(y,z)} \leqslant \frac{2}{\min(y,z)}$$

und somit die Cauchy-Bedingung. Daraus folgt die Konvergenz des zweiten Terms und die Grenzwertsätze zeigen, dass $\int_0^\infty \frac{\sin}{\mathrm{id}}$ existiert.

Analysis II

Lösungsblatt 8

Aufgabe 1 Sei $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP. Es muß gelten $0 \notin J$, $1 \in J$, also $J \subset \mathbb{R}_+^*$. Wir definieren zunächst

$$g := \frac{f}{\mathrm{id}} : J \longrightarrow \mathbb{R} \, .$$

Setzen wir dies in die DGL ein, so erhalten wir die DGL für g :

$$g' \cdot \mathrm{id}^2 \cdot \exp(g) = \mathrm{id} \ \ ,$$

bzw.

$$g' = \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \exp(-g) \ \ ,$$

sowie die Anfangsbedingung $g(1) = 0$. Wir haben also ein AWP mit getrennten Variablen für g gefunden. Es folgt

$$\ln = \int_1^\diamond \frac{1}{\mathrm{id}} = \int_1^\diamond \exp(g) \cdot g' = \exp(g) - 1 \ ,$$

ferner

$$\ln(J) = \exp(g(J)) - 1 \subset \left]-1, \infty\right[\ \ ,$$

d.h. $J \subset \left]\frac{1}{e}, \infty\right[$, und

$$g = \ln(1 + \ln) \ \ .$$

Schließlich verifiziert man, daß

$$f = \mathrm{id} \cdot \ln(1 + \ln) : \left]\frac{1}{e}, \infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

tatsächlich das AWP löst. Dies zeigt, daß diese Lösung maximal ist.

Aufgabe 2 Es sind sämtliche Integrale an jeweils beiden Grenzen kritisch.

(a) Das Integral konvergiert, denn es ist für alle $t \in \left]-1, 1\right[$

$$\left| \frac{t^3 e^t}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leqslant \frac{e}{\sqrt{1-t^2}} \ ,$$

und das Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

konvergiert nach Vorlesung (arcsin !).

(b) Mit der Substitution $t = e^u$ folgt

$$\int_x^y \frac{dt}{t(\ln t)^5} = \int_{\ln x}^{\ln y} \frac{du}{u^5} \ ,$$

und dieses Integral konveriert an der oberen, nicht aber an der unteren Grenze.

(c) Das Integral konvergiert, was man z.B. mit partieller Integration sieht (man beachte $\cos\left(\mathrm{id}^2\right)$ gerade) :

$$\int_1^x \cos\left(t^2\right)\,dt = \int_1^x 2t\cdot\cos\left(t^2\right)\cdot\frac{1}{2t}\,dt = \left[\sin\left(t^2\right)\cdot\frac{1}{2t}\right]_1^x + \int_1^x \sin\left(t^2\right)\cdot\frac{1}{2t^2}\,dt\ .$$

Der erste Summand konvergiert für $x\to\infty$, desweiteren gilt für alle $t\in\,]1,\infty[$

$$\left|\sin\left(t^2\right)\cdot\frac{1}{2t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}\ ,$$

und das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ konvergiert.

(d) Das Integral kovergiert. Für $t\in\left]0,\frac{1}{e}\right[$ ist

$$\left|\frac{1+\ln t}{\sqrt{t^4+t+1}}\right|\leqslant -1-\ln t\ ,$$

und das Integral $\int_0^{\frac{1}{e}}(1+\ln t)\,dt$ konvergiert. Für $t\in\mathbb{R}_+^*$ ist $1+\ln t\leqslant 2\sqrt{t}$, also

$$\left|\frac{1+\ln t}{\sqrt{t^4+t+1}}\right|\leqslant 2t^{-\frac{3}{2}}\ ,$$

und das Integral $\int_1^\infty t^{-\frac{3}{2}}\,dt$ konvergiert ebenfalls.

Aufgabe 3 Seien $x\in\mathbb{C}^n$ und $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dann ist

$$|x|_\infty = \max\nolimits_{k=1,\ldots,n}|x_k| = \left(\max\nolimits_{k=1,\ldots,n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant |x|_p = \left(\sum_{k=0}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(n\cdot\max\nolimits_{k=1,\ldots,n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n}\cdot\left(\left(\max\nolimits_{k=1,\ldots,n}|x_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n}\cdot|x|_\infty\ .$$

Da $\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{n}=1$, folgt die Behauptung.

Aufgabe 4

(a) Die Eigenschaften $\|f\|_1\geqslant 0$, $\|\alpha\cdot f\|_1 = |\alpha|\cdot\|f\|_1$ und $\|f+g\|_1\leqslant\|f\|_1+\|g\|_1$ folgen aus der Linearität und Positivität des Funktionals

$$f\longmapsto\int_0^1 f$$

für alle $f,g\in\mathcal{R}([0,1])$ und alle $\alpha\in\mathbb{R}$. Sei $f\in\mathcal{C}([0,1])$ mit $f\neq 0$. Dann existiert ein $\xi\in[0,1]$, und damit auch $\in\,]0,1[$ mit

$$|f(\xi)|>0\ ,$$

und da $|f|$ stetig ist, auch ein $\delta>0$ mit $]\xi-\delta,\xi+\delta[\,\in[0,1]$ und

$$|f(t)|\geqslant\frac{|f(\xi)|}{2}\quad\text{für alle } t\in\,]\xi-\delta,\xi+\delta[\ .$$

Es folgt

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt = \int_0^{\xi-\delta} |f(t)|\,dt + \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} |f(t)|\,dt + \int_{\xi+\delta}^1 |f(t)|\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \frac{|f(\xi)|}{2} dt \geqslant \delta \cdot |f(\xi)| > 0 \ ,$$

also gilt für $f \in \mathcal{C}([0,1])$ genau dann $\|f\|_1 = 0$, wenn $f = 0$ ist, d.h. $\|\cdot\|_1$ ist eine Norm auf $\mathcal{C}([0,1])$. Die Trennungseigenschaft geht auf $\mathcal{R}([0,1])$ jedoch verloren, da z.B. für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$1_{\{x\}} \in \mathcal{R}([0,1]) \quad \text{und} \quad \int_0^1 1_{\{x\}} = 0 \ .$$

(vgl. Aufgabe 5.4). Man spricht in so einem Fall von einer *Halbnorm*.

(b) Sei (f_k) eine gleichmäßig konvergente Folge in $\mathcal{C}([0,1])$ mit Grenzfunktion f . Dann ist

$$\|f_k - f\|_1 = \int_0^1 |f_k(t) - f(t)|\,dt \leqslant \sup\nolimits_{t\in[0,1]} |f_k(t) - f(t)| \cdot 1 =$$

$$= \|f_k - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

für $k \to \infty$. Damit folgt die Behauptung.

(c) Wir betrachten die Folge $\left(\mathrm{id}^k|_{[0,1]}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Dann ist

$$\left\|\mathrm{id}^k|_{[0,1]}\right\|_1 = \frac{1}{k+1} \ ,$$

d.h. die Folge $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_1$ gegen die Nullfunktion, jedoch ist

$$\left\|\mathrm{id}^k\right\|_\infty = 1 \ .$$

Also konvergiert die Folge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ nicht gegen die Nullfunktion (sogar überhaupt nicht in $\mathcal{C}([0,1])$, denn die punktweise Grenzfunktion ist $1_{\{1\}} \notin \mathcal{C}([0,1])$).

(d) Es ist klar, daß alle f_k stetig sind. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann ist für $k \geqslant l \geqslant 2$

$$\|f_l - f_k\|_1 = \int_0^1 |f_l - f_k| =$$

$$= \int_0^{\frac12} |f_l - f_k| + \int_{\frac12}^{\frac12+\frac1k} |f_l - f_k| + \int_{\frac12+\frac1k}^{\frac12+\frac1l} |f_l - f_k| + \int_{\frac12+\frac1l}^1 |f_l - f_k| \ .$$

Nach Definition der f_k ist $|f_l - f_k| \leqslant 1$, und die beiden äußeren Integrale verschwinden, da f_k und f_l dort übereinstimmen. Somit folgt

$$\|f_l - f_k\|_1 \leqslant \int_{\frac12}^{\frac12+\frac1k} 1 + \int_{\frac12+\frac1k}^{\frac12+\frac1l} 1 = \frac{1}{l} \leqslant \varepsilon \ ,$$

falls nur $l \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, d.h. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1)$.

Sie ist jedoch in $\mathcal{C}([0,1])$ nicht konvergent. Angenommen, $f \in \mathcal{C}([0,1])$ ist die Grenzfunktion, damit ist insbesondere f beschränkt. Für $k \to \infty$ ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f| = \int_0^{\frac{1}{2}} |f - f_k| \leqslant \|f - f_k\|_1 \to 0 \ ,$$

also $\int_0^{\frac{1}{2}} |f| = 0$, sowie

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 |f-1| &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} |f-1| + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{k}}^1 |f-f_k| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{k} \cdot \left(\sup |f| \left(\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{k}\right]\right) + 1\right) + \|f-f_k\|_1 \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{k} \cdot \Big(\|f\|_{\infty,[0,1]} + 1\Big) + \|f-f_k\|_1 \to 0 \ ,\end{aligned}$$

also $\int_{\frac{1}{2}}^1 |f-1| = 0$. Mit der selben Begründung wie unter (a) folgt nun aus der Stetigkeit von f und $f-1$

$$f_{|[0,\frac{1}{2}]} = 0 \quad \text{und} \quad f_{|[\frac{1}{2},1]} = 1 \ .$$

Widerspruch!

Analysis II

Lösungsblatt 9

Aufgabe 1

(a) Nach Voraussetzung existiert ein N und ein $\varepsilon \in \,]0,1[$ mit $1-\varepsilon \leqslant \frac{a_k}{b_k} \leqslant 1+\varepsilon$ für alle $k \geqslant N$, also mit

$$(1-\varepsilon) \cdot b_k \cdot c_k \leqslant a_k \cdot c_k \leqslant (1+\varepsilon) \cdot b_k \cdot c_k \quad \text{für alle } k \geqslant N \ ,$$

und die Behauptung folgt mit dem Majorantenkriterium.

(b) Aus der Stirling-Formel folgt

$$\frac{(2k)!}{4^k \cdot (k!)^2 \cdot (2k+1)} \backsim \frac{\sqrt{4\pi k} \cdot (2k)^{2k} \cdot \left(e^k\right)^2}{4^k \cdot e^{2k} \cdot \left(\sqrt{2\pi k}\right)^2 \cdot k^{2k} \cdot (2k+1)} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{\pi k}\right)} \cdot \frac{1}{(2k+1)}$$

und die Reihe über die Terme $\left(\frac{\sqrt{2}}{(2k+1)\cdot\sqrt{\pi k}}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ist klar (absolut) konvergent.

Aufgabe 2 Wir berechnen zunächst die Supremumsnorm der f_k für beliebiges $c \in \mathbb{R}$. Offensichtlich gilt stets

$$0 = f_k(0) \leqslant f_k(x) \leqslant \|f_k\|_\infty < \infty \quad \text{für alle } x \in [0,1] \ .$$

Es ist

$$f_k'(x) = \frac{k^c \cdot (1+k^2\cdot x^2) - k^c \cdot x \cdot 2k^2 \cdot x}{(1+k^2x^2)^2} = k^c \cdot \frac{1-k^2\cdot x^2}{(1+k^2x^2)^2} \ .$$

Damit hat jedes f_k genau einen kritischen Punkt in $[0,1]$, nämlich $x = \frac{1}{k}$. Da f_k nach dem Satz von Weierstraß ein Maximum in $[0,1]$ besitzt und das Minimum in $x = 0$ angenommen wird, folgt

$$\|f_k\|_\infty = f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k^{c-1}}{2} \ . \qquad (*)$$

Weiter gilt

$$0 \leqslant f_k(x) = \frac{k^c \cdot x}{k^2 \cdot \left(\frac{1}{k^2} + x^2\right)} = k^{c-2} \cdot \frac{x}{\frac{1}{k^2} + x^2} \ .$$

(a) Für $c < 2$ gilt für alle $x \in [0,1]$, dass $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$, d.h. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen Null.

Für $c = 2$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \phantom{\text{falls }} x \in \,]0,1] \end{cases} =: f(x) \ .$$

Für $c > 2$ und $x \in \,]0,1]$ ist die Folge $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ divergent, da dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{k^2}+x^2} = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} k^{c-2} = \infty \ .$$

Somit ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau für $c \in \,]-\infty, 2]$ punktweise konvergent, wobei die Grenzfunktionen jedoch, wie gesehen, für $c < 2$ und für $c = 2$ verschieden sind.

(b) Für $c < 1$ gilt $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_\infty = 0$ (nach $(*)$), d.h. die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Für $1 \leqslant c < 2$ konvergiert sie nach (a) immer noch punktweise gegen Null, aber es ist dann $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_\infty \neq 0$, also liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Für $c = 2$ ist die Konvergenz nach Hauptsatz 10.5 ebenfalls nicht gleichmäßig, da die Grenzfunktion f unstetig ist. Alternativ zu diesem Argument kann man auch direkt die Supremumsnorm ausrechnen : es ist für alle $k \in \mathbb{N}^*$

$$\sup_{x\in]0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x\in]0,1]} \left| \frac{x}{\frac{1}{k^2}+x^2} - \frac{1}{x} \right| = \sup_{x\in]0,1]} \left| \frac{1}{x\cdot(1+k^2\cdot x^2)} \right| = \infty \ ,$$

also ist die Konvergenz auch für $c = 2$ nicht gleichmäßig.

Da für $c > 2$ keine punktweise Konvergenz vorliegt, konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erst recht nicht gleichmäßig (vgl. Satz 10.4).

(c) Es gilt auf jeden Fall für die c , für welche $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, also für $c < 1$, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k \ .$$

Dies folgt aus Hauptsatz 10.6. Offensichtlich können wir diejenigen c , für die $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ garnicht konvergiert, ausschließen. Untersuchen wir die Frage also noch für $c \in [1, 2[$ und für $c = 2$. Es ist

$$\int_0^1 f_k = k^c \cdot \int_0^1 \frac{x}{1+k^2\cdot x^2} dx = \frac{k^c}{2k^2} \cdot \int_0^1 \frac{2k^2\cdot x}{1+k^2\cdot x^2} dx =$$

$$= \frac{k^{c-2}}{2} \cdot \int_0^1 \frac{(1+k^2\cdot x^2)'}{1+k^2\cdot x^2} dx = \frac{k^{c-2}}{2} \cdot \left[\ln\left(1+k^2\cdot x^2\right) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{k^{c-2}}{2} \cdot \ln\left(1+k^2\right) \ .$$

Es folgt, dass für $c = 2$ die Folge $\left(\int_0^1 f_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ offenbar divergent ist. Für $c \in [1, 2[$ gilt für $k \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leqslant \frac{k^{c-2}}{2} \cdot \ln\left(1+k^2\right) \to 0 \ , \ k \to \infty \ ,$$

denn mit der Regel von de l'Hospital gilt für beliebiges $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{c-2}}{2} \cdot \ln\left(1+x^2\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2x^{2-c}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2(2-c)\cdot x^{1-c}} =$$

$$= \frac{1}{2-c} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{x^{c-2}}{\frac{1}{x^2}+1} = 0 \ ,$$

also folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k = 0 = \int_0^1 0 = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k \ .$$

Aufgabe 3

(a) Offenbar ist $\|f\|_{(1)} \geqslant \|f\|_\infty \geqslant 0$ für alle $f \in \mathcal{C}^{(1)}([a,b])$. Da $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{C}([a,b])$ ist, sind $\|f\|_{(1)} = 0$ und $f = 0$ äquivalente Aussagen. Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $f, g \in \mathcal{C}^{(1)}([a,b])$. Dann ist

$$\|\alpha \cdot f\|_{(1)} = \|\alpha \cdot f\|_\infty + \left\|(\alpha \cdot f)'\right\|_\infty = |\alpha| \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) = |\alpha| \cdot \|f\|_{(1)}$$

und

$$\|f+g\|_{(1)} = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|f\|_{(1)} + \|g\|_{(1)} \ ,$$

d.h. $\|\cdot\|_{(1)}$ ist eine Norm auf $\mathcal{C}^{(1)}([a,b])$.

(b) Es folgt aus den Differentiationsregeln und den Rechenregeln für stetige Abbildungen, dass $\mathcal{C}^{(1)}([a,b])$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist (was wir in (a) auch bereits benutzt haben.) Wir müssen also nur noch die Vollständigkeit bzgl. $\|\cdot\|_{(1)}$ beweisen. Sei dazu $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\left(\mathcal{C}^{(1)}([a,b]), \|\cdot\|_{(1)}\right)$. Da für alle $k, l \in \mathbb{N}$

$$\|f_l - f_k\|_{(1)} \geqslant \|f_l - f_k\|_\infty$$

gilt und $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ nach Hauptsatz 10.5 ein Banachraum ist, existiert ein $f \in \mathcal{C}([a,b])$ mit $f = \lim_k f_k$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Wir zeigen, dass f sogar stetig differenzierbar ist. Dazu betrachten wir die Folge $(f_k')_{k\in\mathbb{N}}$ der Ableitungen. Es gilt

$$\|f_l' - f_k'\|_\infty \leqslant \|f_l - f_k\|_{(1)} \ ,$$

d.h $(f_k')_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ und somit gleichmäßig konvergent . Aus Korollar 10.6 folgt, dass f stetig differenzierbar ist und dass gilt

$$\lim_k f_k' = f' \quad \text{auf } [a,b] \ ,$$

also

$$\lim_k \|f_k - f\|_{(1)} = \lim_k (\|f_k - f\|_\infty + \|f_k' - f'\|_\infty) = \lim_k \|f_k - f\|_\infty + \lim_k \|f_k' - f'\|_\infty = 0 \ .$$

Damit ist $\left(\mathcal{C}^{(1)}([a,b]), \|\cdot\|_{(1)}\right)$ als Banachraum nachgewiesen.

(c) Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\left(\mathcal{C}^{(1)}([a,b]), \|\cdot\|_{(1)}\right)$ mit Grenzfunktion f . Dann ist

$$\|\partial f_k - \partial f\|_\infty = \|f_k' - f'\|_\infty \leqslant \|f_k - f\|_{(1)} \to 0 \quad , \quad k \to \infty \ ,$$

d.h. ∂ ist stetig.

(d) Die Folge $\left(\frac{\mathrm{id}^k}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ konvergiert wegen $\left\|\frac{\mathrm{id}^k}{k}\right\|_{\infty,[0,1]} = \frac{1}{k}$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen die Nullfunktion, aber die Folge $\left(\partial\frac{\mathrm{id}^k}{k}\right)_{k\geqslant 1} = \left(\mathrm{id}^{k-1}\right)_{k\geqslant 1}$ konvergiert in $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ überhaupt nicht (vgl. Beispiel 10.3.1), also ist ∂ nicht stetig, wenn wir beidesmal die Supremumsnorm verwenden. $\left(\mathcal{C}^{(1)}([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right)$ ist auch nicht vollständig, denn z.B. die Folge $\left(\sqrt{\mathrm{id}^2+\frac{1}{k}}\right)_{k\geqslant 1}$ konvergiert wegen

$$\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{k}}-\sqrt{x^2}\right| \leqslant \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{k}-x^2}\right| = \left|\sqrt{\frac{1}{k}}\right|$$

gleichmäßig auf $[-1,1]$ gegen $\sqrt{\mathrm{id}^2} = |\mathrm{id}|$, doch ist $|\mathrm{id}|$ nicht differenzierbar im Nullpunkt.

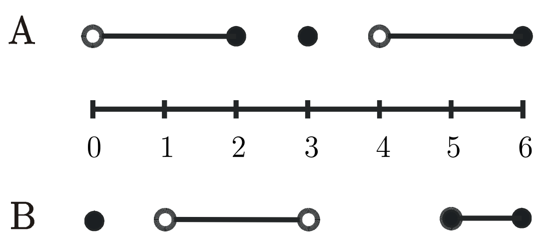
Aufgabe 4 Man beachte, dass folgende Inklusionen gelten

$$(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \subset \left\{ \begin{array}{c} A^\circ \cap B \\ A\cap B^\circ \end{array} \right\} \subset A\cap B \subset \left\{ \begin{array}{c} \overline{A}\cap B \\ \overline{A\cap B} \\ A\cap \overline{B} \end{array} \right\} \subset \overline{A}\cap\overline{B} \ ,$$

und dass keine andere allgemein gültig ist, wie das folgende Beispiel zeigt.

Wir wählen

$$A := \,]0,2] \cup \{3\} \cup \,]4,6] \quad \text{und} \quad B := \{0\} \cup \,]1,3[\, \cup [5,6] \ .$$



Dann ist

$$A^\circ \cap B^\circ = \,]1,2[\, \cup \,]5,6[\quad , \quad A^\circ \cap B = \,]1,2[\, \cup [5,6[\quad , \quad A\cap B^\circ = \,]1,2] \cup \,]5,6[\ ,$$

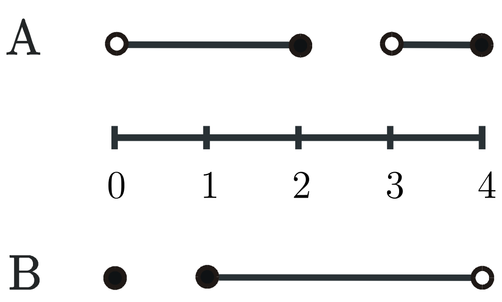
$$A\cap B = \,]1,2] \cup [5,6] \quad , \quad \overline{A}\cap B = \{0\} \cup \,]1,2] \cup [5,6] \quad , \quad A\cap\overline{B} = [1,2] \cup \{3\} \cup [5,6]$$

und

$$\overline{A\cap B} = [1,2] \cup [5,6] \quad , \quad \overline{A}\cap\overline{B} = \{0\} \cup [1,2] \cup [5,6] \ .$$

Das folgende einfachere Beispiel zeigt, dass alle Mengen verschieden sind, aber nicht, dass andere Inklusionen ausgeschlossen sind; hier gilt $A\cap\overline{B} \subset \overline{A\cap B}$. Sei

$$A := \,]0,2] \cup \,]3,4] \quad \text{und} \quad B := \{0\} \cup [1,4[\ .$$



Dann ist

$$A^\circ \cap B^\circ = \,]1,2[\, \cup \,]3,4[\quad , \quad A^\circ \cap B = [1,2[\, \cup \,]3,4[\quad , \quad A\cap B^\circ = \,]1,2] \cup \,]3,4[\ ,$$

$$A \cap B = [1,2] \cup]3,4[\quad , \quad \overline{A} \cap B = \{0\} \cup [1,2] \cup [3,4[\quad , \quad A \cap \overline{B} = [1,2] \cup]3,4]$$

und

$$\overline{A \cap B} = [1,2] \cup [3,4] \quad , \quad \overline{A} \cap \overline{B} = \{0\} \cup [1,2] \cup [3,4] \ .$$

Analysis II

Lösungsblatt 10

Aufgabe 1

(a) Für $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ zeigen wir die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha \cdot u} \cdot u^k \cdot du = \frac{(-1)^k}{\alpha^{k+1}} \cdot k!$$

per vollständiger Induktion nach k mit Hilfe der partiellen Integration. Der Induktionsanfang $k = 0$ ist

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha \cdot u} du = \left[\frac{e^{\alpha \cdot u}}{\alpha} \right]_{u=-\infty}^{0} = \frac{1}{\alpha} .$$

Von k auf $k+1$ schließen wir

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha \cdot u} \cdot u^{k+1} \cdot du = \left[\frac{e^{\alpha \cdot u}}{\alpha} \cdot u^{k+1} \right]_{u=-\infty}^{0} - \frac{k+1}{\alpha} \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha \cdot u} \cdot u^k \cdot du =$$

$$= 0 - \frac{k+1}{\alpha} \cdot \frac{(-1)^k}{\alpha^{k+1}} \cdot k! = \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha^{k+2}} \cdot (k+1)! .$$

(b) Wegen $\lim_{x \to 0} x^x = 1$ können wir die Funktion $\frac{1}{\mathrm{id}^{\mathrm{id}}}$ im Nullpunkt stetig fortsetzen, d.h. das Integral $\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{id}^{\mathrm{id}}}$ existiert. Weiter gilt für alle $x \in [0,1]$

$$\frac{1}{x^x} = e^{-x \cdot \ln x} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-x \cdot \ln x)^k}{k!} .$$

Die Funktion $\mathrm{id} \cdot \ln$ ist stetig (ergänzbar) auf $[0,1]$, also nach dem Satz von Weierstraß beschränkt, d.h. es gilt

$$M := \|\mathrm{id} \cdot \ln\|_{\infty,[0,1]} < \infty .$$

Es folgt, dass

$$\sum_{k \geqslant 0} \left\| \frac{(-\,\mathrm{id} \cdot \ln)^k}{k!} \right\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \sum_{k \geqslant 0} \frac{M^k}{k!} = e^M < \infty ,$$

d.h. die Reihe ist normal konvergent und somit nach dem Weierstraß-Kriterium (Hauptsatz 10.7) gleichmäßig konvergent auf $[0,1]$. Mit Hauptsatz 10.6 folgt

$$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{id}^{\mathrm{id}}} = \int_0^1 \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-\,\mathrm{id} \cdot \ln)^k}{k!} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 (x \cdot \ln x)^k \, dx .$$

Wir machen die Substitution $u := \ln x$ und erhalten (mit $\alpha = k+1$) aus Teil (a)

$$\int_0^1 (x \cdot \ln x)^k \, dx = \int_{-\infty}^0 e^{k \cdot u} \cdot u^k \cdot e^u du = \int_{-\infty}^0 e^{(k+1) \cdot u} \cdot u^k \cdot du = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} \cdot k! \ ,$$

also

$$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{id}^{\mathrm{id}}} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} \cdot k! = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^k} \ .$$

Aufgabe 2

(a) f_k konvergiert punktweise gegen 0 genau für $\alpha > 0$. Denn für $\alpha > 0$ und $x \in]0, \infty[$ ist

$$|f_k(x)| \leqslant \frac{1}{k^{2\alpha}} \frac{2}{x^\alpha} \to 0$$

bei $k \to \infty$, und z.B. für $x_0 := \pi$, $\alpha \leqslant 0$ und k ungerade ist

$$f_k(x_0) = k^{-2\alpha} \frac{2}{x_0^\alpha}$$

nicht konvergent gegen 0 .

(a) Mit der Substitution $x := \frac{t}{k}$ sieht man

$$\|f_k\|_\infty = \frac{1}{k^\alpha} \sup\nolimits_{t \in]0,\infty[} \left| \frac{1 - \cos t}{t^\alpha} \right| \ .$$

Somit konvergiert (f_k) genau dann gleichmäßig gegen 0 , wenn $\alpha > 0$ und

$$\sup\nolimits_{t \in]0,\infty[} \left| \frac{1 - \cos t}{t^\alpha} \right| < \infty \quad ,$$

was nach der Reihenentwicklung und Beschränktheit des cos genau dann der Fall ist, wenn $0 < \alpha \leqslant 2$. Damit (f_k) gleichmäßig konvergent genau für $\alpha \in]0, 2]$.

(b) Für alle $x \in]0, \infty[$ ist

$$f_k'(x) = \frac{1}{k^{2\alpha-1}} \cdot \frac{\sin kx}{x^\alpha} - \frac{\alpha}{k^{2\alpha}} \frac{1 - \cos kx}{x^{\alpha+1}} \quad .$$

Für $\alpha > \frac{1}{2}$ konvergieren beide Summanden analog zu (a) punktweise gegen 0 . Andererseits ist z.B. für $x_0 := \frac{\pi}{2}$, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ und $k = 4j + 1, \ j \in \mathbb{N}$

$$f'(x_0) = k^{1-2\alpha} \left(\frac{1}{x_0^\alpha} - \frac{1}{k} \frac{\alpha}{x_0^{\alpha+1}} \right)$$

nicht konvergent gegen 0 . Insgesamt ist also $\lim_k f_k' = 0$ punktweise genau für $\alpha > \frac{1}{2}$.

(c) Wieder mit der Substitution $x := \frac{t}{k}$ erhält man

$$\|f_k'\|_\infty = \frac{1}{k^{\alpha-1}} \sup\nolimits_{t \in]0,\infty[} \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} - \alpha \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} \right| = \frac{1}{k^{\alpha-1}} \sup\nolimits_{t \in]0,\infty[} \left| \partial_t \left(\frac{1 - \cos t}{t^\alpha} \right) \right| \ .$$

Somit konvergiert (f_k') genau dann gleichmäßig gegen 0 , wenn $\alpha > 1$ und

$$\sup_{t\in]0,\infty[} \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} - \alpha \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} \right| < \infty \ .$$

Da

$$\frac{\sin t}{t^\alpha} - \alpha \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$$

stetig in $]0,\infty[$ und bei $t \longrightarrow \infty$ schon für $\alpha > 0$ beschränkt, untersuchen wir

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t^\alpha} - \alpha \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} \right) \ .$$

1. Fall: $\alpha \neq 2$. Wendet man zweimal die Regel von de l'Hospital an, so erhält man

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t^\alpha} - \alpha \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} \right) = \lim_{t\to 0} \frac{(2-\alpha)\cos t - t \sin t}{\alpha\,(\alpha+1)\, t^{\alpha-1}} = \infty$$

falls $\alpha > 1$.

2.Fall: $\alpha = 2$. Es ist

$$\frac{\sin t}{t^2} - 2\frac{1-\cos t}{t^3} = \partial_t \left(\frac{1-\cos t}{t^2} \right) \ ,$$

und das ist bekanntlich stetig ergänzbar durch den Wert 1 in $t = 0$. Somit existiert

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t^2} - 2\frac{1-\cos t}{t^3} \right) \ ,$$

und damit ist

$$\sup_{t\in]0,\infty[} \left| \frac{\sin t}{t^2} - 2\frac{1-\cos t}{t^3} \right| < \infty \ .$$

Insgesamt also $\lim_k f_k' = 0$ gleichmäßig nur für $\alpha = 2$.

Aufgabe 3

(a) Es ist

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \right| = \left| \frac{\alpha - k}{k+1} \right| = \left| \frac{\alpha}{k+1} - \frac{k}{k+1} \right| \to 1 \quad , \quad k \to \infty \ .$$

Mit dem Quotientenkriterium folgt, daß die Binomialreihe den Konvergenzradius Eins hat.

(b) Nach Korollar 10.8 dürfen Potenzreihen im Innern ihres Konvergenzintervalles gliedweise differenziert werden. Man erhält für $x \in]-1,1[$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k+1} \cdot (k+1) \cdot x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot (\alpha - k) \cdot x^k = \alpha \cdot f(x) - x \cdot f'(x) \ ,$$

also folgt

$$(1 + \mathrm{id}) \cdot f' = \alpha \cdot f \ .$$

Weiter ist

$$f(0) = \binom{\alpha}{0} = 1 \ .$$

Sei g eine weitere Lösung des AWP. Wir setzen $h := f - g$. Dann erfüllt h auf $]-1,1[$ das AWP

$$h' = \frac{\alpha}{(1+\mathrm{id})} \cdot h \quad \text{und} \quad h(0) = 0 \ ,$$

dessen eindeutige Lösung nach Satz 9.8 gegeben ist durch $h = 0$, d.h. es ist $g = f$.

(c) Es gilt

$$(1+0)^\alpha = 1 \quad \text{und} \quad (1+\mathrm{id}) \cdot ((1+\mathrm{id})^\alpha)' = \alpha \cdot (1+\mathrm{id})^\alpha \ ,$$

d.h. $(1+\mathrm{id})^\alpha$ löst ebenfalls das AWP auf $]-1,1[$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung muß

$$f = (1+\mathrm{id})^\alpha$$

sein.

Aufgabe 4 Wir zeigen, daß gilt

$$\overline{A} \subset B \subset C \subset \overline{A} \ .$$

Sei $x \in \overline{A}$. Dann existiert nach Definition für jedes $\varepsilon > 0$ ein $y \in A$ mit $d(x,y) < \varepsilon$, also $d(x,A) < \varepsilon$. Damit $d(x,A) = 0$, also $x \in B$.

Sei $x \in B$, d.h. $d(x,A) = 0$. Dann folgt aus der Definition des Infimums, daß es zu jedem $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein $x_k \in A$ gibt mit $d(x,x_k) \leqslant \frac{1}{k}$, also gilt $\lim_k x_k = x$. Damit haben wir $x \in C$.

Seien nun $x \in C$ und $(x_k) \subset A$ mit $\lim_k x_k = x$. Es ist $A \subset \overline{A}$, also $(x_k) \subset \overline{A}$. Da $\overline{A}$ nach Satz 10.16.ii abgeschlossen ist, folgt nach Hauptsatz 10.16

$$x = \lim_k x_k \in \overline{A} \ .$$

Analysis II

Lösungsblatt 11

Aufgabe 1

(a) Die in der Aufgabenstellung genannte Menge ist der Schnitt von A mit der folgenden Menge:

$$\{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) \cdot g(y) = h(x,y)\} = (f \circ \mathrm{pr}_1 \cdot g \circ \mathrm{pr}_2 - h)^{-1}(\{0\}) \ .$$

Es genügt die Abgeschlossenheit von dieser zu zeigen, welches aufgrund der Stetigkeit der Abbildungen aus Satz 10.15 folgt.

(b) Ist $x \in \mathrm{pr}_1(O)$ für offenes O , so existiert ein $y \in Y$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$(x,y) \in B((x,y), \varepsilon, d_\infty) \subset O$$

(vgl. Def. 10.12 und Bem. 10.13.1). Es folgt $B(x, \varepsilon, d_X) \times \{y\} \subset O$, also $B(x, \varepsilon, d_X) \subset \mathrm{pr}_1(O)$. Dies zeigt, dass $\mathrm{pr}_1(O)$ offen ist.

(c) Wähle

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0\right\} = \mathrm{pr}_1^{-1}([0,\infty[) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}([0,\infty[)$$

und $f = \mathrm{pr}_1$, $g = \mathrm{pr}_2$, $h = 1$. Dann ist nach a) die Menge

$$H := A \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\right\}$$

abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$, mit der Eigenschaft $\mathrm{pr}_1(H), \mathrm{pr}_2(H) \subset \mathbb{R}_+$. Weiter gilt sogar $x \cdot 0 = 0 \cdot y = 0 \neq 1$ für alle $x, y \geqslant 0$, so dass $0 \notin \mathrm{pr}_1(H) \cup \mathrm{pr}_2(H)$. Es verbleibt zu zeigen: $]0,\infty[\subset \mathrm{pr}_1(H) \cap \mathrm{pr}_2(H)$.

Für $x > 0$ prüft man sofort $\left(x, \frac{1}{x}\right) \in H$ nach, also $]0,\infty[\subset \mathrm{pr}_1(H)$ (und für $\mathrm{pr}_2(H)$ analog).

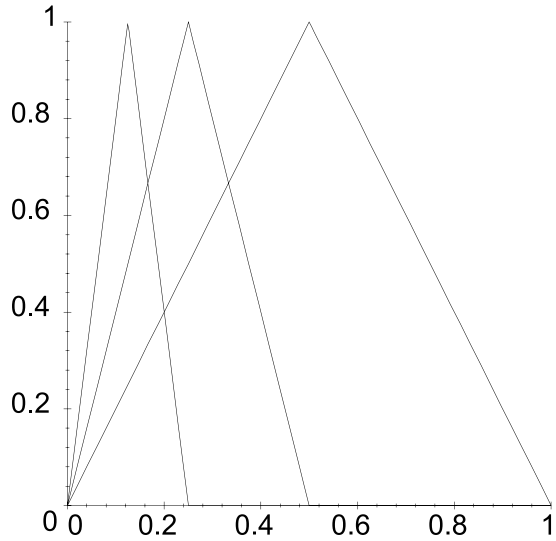
Aufgabe 2 Offensichtlich ist $\mathbb{B}$ beschränkt, da $\|f\|_\infty \leqslant 1$ für alle $f \in \mathbb{B}$ ist. Die Norm ist stetig und $[0,1]$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, also folgt die Abgeschlossenheit von $\mathbb{B}$ aus der Darstellung

$$\mathbb{B} = \|\cdot\|_\infty^{-1}([0,1])$$

mit Satz 10.15. $\mathbb{B}$ ist jedoch nicht kompakt, denn nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Hauptsatz 10.17) besitzt in einer kompakten Menge jede Folge eine konvergente Teilfolge. Betrachten wir jedoch die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{B}$ von "Hutfunktionen", welche definiert sind durch

$$f_k(x) := \begin{cases} 2^k \cdot x & x \in \left[0, \frac{1}{2^k}\right] \\ 2 - 2^k \cdot x \quad \text{falls} & x \in \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right] \\ 0 & x \in \left[\frac{1}{2^{k-1}}, 1\right] \end{cases} ,$$

so gilt $\left|f_k\left(\frac{1}{2^k}\right) - f_l\left(\frac{1}{2^k}\right)\right| = 1$ für alle $k, l \in \mathbb{N}^*$ mit $k < l$, also ist $\|f_k - f_l\|_\infty \geqslant 1$ für alle $k, l \in \mathbb{N}^*$ mit $k \neq l$. Somit kann (f_k) keine Cauchy-Teilfolge und daher auch keine konvergente Teilfolge enthalten.



Hutfunktionen f_1 , f_2 , f_3

Bemerkung: Nach dem *Satz von Riesz* aus der Funktionalanalysis ist die Einheitskugel in einem normierten Raum genau dann kompakt, wenn der Raum endlichdimensional ist.

Aufgabe 3 Sei X ein diskreter metrischer Raum, d.h. alle Teilmengen sind offen (beachte $B(x, 0.5) = \{x\}$). Ist nun K eine kompakte Teilmenge von X , so ist $K \subset \bigcup_{x \in K} \{x\}$ eine offene Überdeckung, von der nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung genügen muss. D.h. es gibt eine endliche Teilmenge $\widetilde{K} \subset K$ mit $K \subset \bigcup_{x \in \widetilde{K}} \{x\}$, K muss selbst endlich sein.

Endliche Mengen sind offensichtlich in jedem topologischen (Hausdorff-)Raum kompakt. Insgesamt sind also die kompakten Teilmengen eines diskreten Raums genau die endlichen Teilmengen.

Aufgabe 4

(a) Φ ist stetig, da die Komponenten von Φ

$$\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto e^x + y = (e^{\mathrm{pr}_1} + \mathrm{pr}_2)(x, y)$$

und

$$\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto e^y + y = (e^{\mathrm{pr}_2} + \mathrm{pr}_2)(x, y) \ ,$$

als Zusammensetzung von stetigen Abbildungen, stetig sind. Die Funktion

$$f := \exp + \mathrm{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist bijektiv und $\overset{-1}{f}$ ist stetig (Hauptsatz 7.11 oder Korollar 10.20). Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(x_1, y_1) = \Phi(x_2, y_2)$. Es gilt also

$$e^{x_1} + y_1 = e^{x_2} + y_2 \quad \text{und} \quad f(y_1) = e^{y_1} + y_1 = e^{y_2} + y_2 = f(y_2) \ .$$

Da f injektiv ist, folgt $y_1 = y_2$ und somit $e^{x_1} + y_1 = e^{x_2} + y_2 = e^{x_2} + y_1$, also $e^{x_1} = e^{x_2}$ und schließlich $x_1 = x_2$. Somit ist Φ injektiv.

Wir können auch gleichzeitig das Bild von Φ bestimmen und zeigen, dass Φ injektiv ist. Es genügt die $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ zu bestimmen, für die eine Lösung $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(x,y) = (u,v)$ existiert und zeigen, dass diese Lösung eindeutig ist. Aber aus

$$e^x + y = u \quad \text{und} \quad f(y) = e^y + y = v$$

folgt $y = \overset{-1}{f}(v)$ für jedes $v \in \mathbb{R}$, d.h. y ist für jedes $v \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt. Eingesetzt in die erste Gleichung bekommen wir

$$e^x = u - \overset{-1}{f}(v)$$

und stellen fest, dass $x = \ln\left(u - \overset{-1}{f}(v)\right)$ auch eindeutig für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $u > \overset{-1}{f}(v)$ festgelegt ist. Somit ist Φ injektiv und das Bild ist

$$Y = \Phi\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u > \overset{-1}{f}(v)\right\} .$$

(b) Durch die Gleichungen $x = a$ bzw. $y = b$ werden die Geraden

$$A(a) := \left\{ (a,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \in \mathbb{R}\right\} = \{a\} \times \mathbb{R}$$

und

$$B(b) := \left\{ (x,b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} \times \{b\}$$

definiert. Setzt man $f_a := f(\diamond - e^a)$, so ist

$$\Phi(A(a)) = \{ (e^a + y, e^y + y) \mid y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u = e^a + \overset{-1}{f}(v)\right\} = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; v = f(u - e^a)\right\} = \operatorname{Gr} f_a .$$

Man braucht nur zu beachten, dass die Gleichungen

$$u = e^a + y \quad \text{und} \quad v = e^y + y = f(y)$$

zu $u - e^a = y = \overset{-1}{f}(v)$, also zu $v = f(u - e^a)$ äquivalent sind, da f bijektiv ist. Weiter gilt

$$\Phi(B(b)) = \left\{ \left(e^x + b, e^b + b\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \text{ , } u > b \text{ und } v = e^b + b\right\} =]b,\infty[\times \left\{e^b + b\right\} ,$$

da $e^{\mathbb{R}} + b =]b,\infty[$.

(c) Es ist

$$Y := \Phi\left(\mathbb{R}^2\right) = \Phi\left(\bigcup_{b \in \mathbb{R}} B(b)\right) = \bigcup_{b \in \mathbb{R}}]b,\infty[\times \left\{e^b + b\right\} =$$

$$= \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \text{ und } v < e^u + u = f(u)\right\} .$$

In der Tat ist die Bedingung auf $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{es gibt } b \in \mathbb{R} \text{ mit } u > b \text{ und } v = e^b + b$$

zu

$$\text{es gibt } b \in \mathbb{R} \text{ mit } f(u) > f(b) = v \ ,$$

also zu $v < e^u + u$ äquivalent, da f bijektiv und strikt wachsend ist. Weiter gilt

$$Y := \Phi\left(\mathbb{R}^2\right) = \Phi\left(\bigcup_{a\in\mathbb{R}} A(a)\right) = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \operatorname{Gr} f_a \ .$$

Seien $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2$. Das von den Geraden $A(a_1)$, $A(a_2)$, $B(b_1)$ und $B(b_2)$ eingegrenzte Flächenstück ist das kompakte Rechteck $K = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. Wie oben bekommt man

$$\Phi(K) = \bigcup_{b\in[b_1,b_2]} \Phi([a_1, a_2] \times \{b\}) = \bigcup_{b\in[b_1,b_2]} [e^{a_1} + b, e^{a_2} + b] \times \left\{e^b + b\right\} =$$

$$= \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; e^{a_1} + \overset{-1}{f}(v) \leqslant u \leqslant e^{a_2} + \overset{-1}{f}(v) \ , \ e^{b_1} + b_1 \leqslant v \leqslant e^{b_2} + b_2\right\} =$$

$$= \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(u - e^{a_2}) \leqslant v \leqslant f(u - e^{a_1}) \ , \ e^{b_1} + b_1 \leqslant v \leqslant e^{b_2} + b_2\right\} =$$

$$= \left(\mathrm{pr}_1 - \overset{-1}{f} \circ \mathrm{pr}_2\right)^{-1} ([e^{a_1}, e^{a_2}]) \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}_2}([e^{a_1} + b, e^{a_2} + b]) \ .$$

Präziser ist die Aussage

$$\text{es gibt } x \in [a_1, a_2] \text{ und } y \in [b_1, b_2] \text{ mit } u = e^x + y \quad \text{und} \quad v = e^y + y = f(y)$$

zu

$$u - f^{-1}(v) \in e^{[a_1,a_2]} \quad \text{und} \quad v \in f([b_1, b_2]) \ ,$$

also zu

$$e^{a_1} + \overset{-1}{f}(v) \leqslant u \leqslant e^{a_2} + \overset{-1}{f}(v) \quad , \quad e^{b_1} + b_1 \leqslant v \leqslant e^{b_2} + b_2$$

und schließlich zu

$$f(u - e^{a_2}) \leqslant v \leqslant f(u - e^{a_1}) \quad , \quad e^{b_1} + b_1 \leqslant v \leqslant e^{b_2} + b_2$$

äquivalent. Es ist $K^\circ =]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[$, und analog folgt

$$\Phi(K^\circ) = \left(\mathrm{pr}_1 - \overset{-1}{f} \circ \mathrm{pr}_2\right)^{-1} (]e^{a_1}, e^{a_2}[) \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}_2}(]e^{a_1} + b, e^{a_2} + b[) \ .$$

Diese Menge ist offen in Y nach Satz 10.15.ii, da die Abbildungen

$$\left(\mathrm{pr}_1 - \overset{-1}{f} \circ \mathrm{pr}_2\right)^{-1} \ , \ \overset{-1}{\mathrm{pr}_2} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

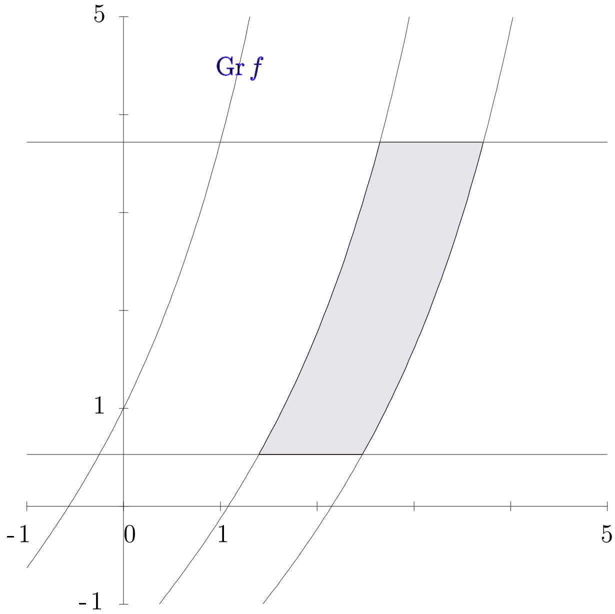
stetig sind. Anschaulich ist dies ein "verzerrtes offenes Rechteck" im $\mathbb{R}^2$. Da nach Satz 10.16 $\Phi(K)^\circ$ die größte in Y offene Teilmenge von $\Phi(K)$ ist, gilt daher $\Phi(K)^\circ \supset \Phi(K^\circ)$. Sei

$$\mathfrak{R} := \left\{K = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \in \mathfrak{P}\left(\mathbb{R}^2\right) \;\middle|\; a_1 < a_2 \ , \ b_1 < b_2\right\} \ .$$

Es gilt somit

$$\Phi\left(\mathbb{R}^2\right) = \Phi\left(\bigcup_{K\in\mathfrak{K}} K^\circ\right) = \bigcup_{K\in\mathfrak{K}} \Phi\left(K^\circ\right) = \bigcup_{K\in\mathfrak{K}} \Phi\left(K\right)^\circ \ .$$

Man kann sogar zeigen, dass $\Phi\left(K\right)^\circ = \Phi\left(K^\circ\right)$ gilt; dies ist aber für den obigen Schluß nicht notwendig. Nach Korollar 10.20 ist Φ ein Homöomorphismus.



$\Phi\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\times\left[-\frac{1}{4},1\right]\right)$

Analysis II

Lösungsblatt 12

Aufgabe 1

(a) Sei $I \subset \mathbb{N}^*$ eine endliche nichtleere Teilmenge. Dann existiert $\max I \in \mathbb{N}^*$. Somit

$$\bigcap_{k \in I} \left]0, \frac{1}{k}\right] = \left]0, \frac{1}{\max I}\right] \neq \emptyset \ ,$$

die Folge besitzt also die endliche Durchschnittseigenschaft. Nehmen wir andererseits an

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{k}\right] \ ,$$

so ist insbesondere $x \in \mathbb{R}_+^*$ und damit $x \notin \left]0, \frac{1}{k}\right]$ z.B. für $k := \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$. Wiederspruch! Also ist

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{k}\right] = \emptyset \ .$$

(b) Angenommen

$$\bigcap_{j \in J} A_j = \emptyset \ .$$

Dann ist

$$K \subset X = \bigcup_{j \in J} (X \setminus A_j)$$

eine offene Überdeckung von K , da alle A_j abgeschlossen. Also existiert wegen der Kompaktheit von K eine nichtleere endliche Teilmenge $I \subset J$ mit

$$K \subset \bigcup_{j \in I} (X \setminus A_j) = X \setminus \left(\bigcap_{j \in I} A_j \right) \ .$$

Andererseits ist aber nach der endlichen Durchschnittseigenschaft von $(A_j)_{j \in J}$

$$\emptyset \neq \bigcap_{j \in I} A_j \subset K \ ,$$

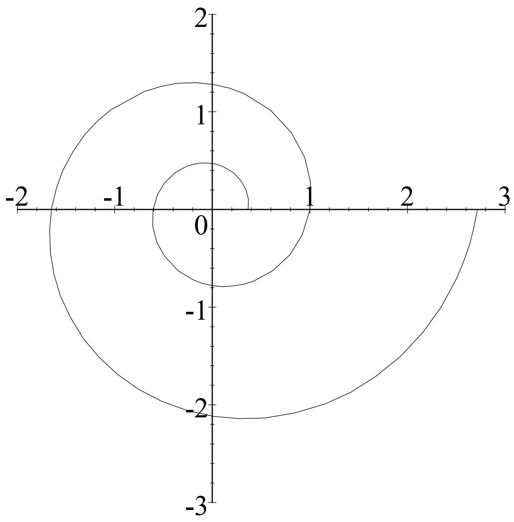
und damit haben wir einen Widerspruch. Da Aussage und Beweis nur von topologischen Begriffen Gebrauch machen, gilt die Aussage in jedem topologischen Raum.

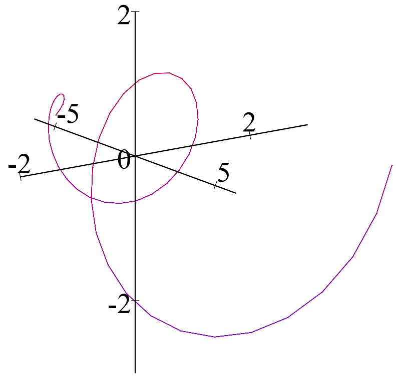
Aufgabe 2

(a) γ ist offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar, da beide Komponenten Kompositionen von $\mathcal{C}^{(\infty)}$-Funktionen sind. Ferner

$$\gamma'(t) = e^{c \cdot t} (c \cdot \cos t - \sin t, c \cdot \sin t + \cos t) \ .$$

Skizze:





$\gamma\left([-2\pi, 2\pi]\right) \quad , \quad c = \frac{1}{2\pi}$ $\qquad\qquad t \longmapsto e^{\frac{t}{2\pi}} \cdot (\cos t, \sin t)$

(b) Nach Hauptsatz 11.2 ist γ rektifizierbar, da stetig differenzierbar, und für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt

$$L_{[a,b]} = \int_a^b |\gamma'| = \sqrt{1+c^2} \int_a^b e^{c\,\mathrm{id}} = \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}} \left(e^{cb} - e^{ca}\right) \ ,$$

da

$$|\gamma'|^2 = e^{2c\cdot t} \cdot \left(c^2 \cdot \cos^2 t - 2c \cdot \cos t \sin t + \sin^2 t + c^2 \cdot \sin^2 t + 2c \cdot \sin t \cos t + \cos^2 t\right) =$$

$$= e^{2c\cdot t} \cdot \left(1 + c^2\right) \ .$$

Damit gilt insbesondere

$$L_{[a,0]} = \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}} \left(1 - e^{ca}\right) \longrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}}$$

für $a \longrightarrow -\infty$.

(c) Sei $r \in \mathbb{R}_+^*$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$: $\gamma(t)$ liegt auf dem Kreis $x^2 + y^2 = r^2$. d.h. $|(x, y)| = r$, genau dann wenn

$$e^{c\cdot t} = |\gamma(t)| = r \ ,$$

also $t = \frac{\ln r}{c} =: \tau$. Damit ergibt sich

$$S = (r \cdot \cos \tau, r \cdot \sin \tau)$$

als eindeutiger Schnittpunkt. Wird der Kreis mit Radius r durch

$$t \longmapsto r \cdot (\cos t, \sin t)$$

parametrisiert, so ist der tangentiale Vektor an den Kreis im Punkt S durch

$$v = r \cdot (-\sin\tau, \cos\tau)$$

gegeben. Der Schnittwinkel ist der von den Geraden $\mathbb{R}\cdot v$ und $\mathbb{R}\cdot\gamma'(\tau)$ eingeschlossene Winkel $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ und es gilt

$$\cos\alpha = \frac{|(v\,|\gamma'(\tau))|}{|v| \cdot |\gamma'(\tau)|} = \frac{1}{r \cdot r \cdot \sqrt{1+c^2}} \left|\left(r \cdot \begin{pmatrix} -\sin\tau \\ \cos\tau \end{pmatrix}\right| r \cdot \begin{pmatrix} c\cdot\cos\tau - \sin\tau \\ c\cdot\sin\tau + \cos\tau \end{pmatrix}\right)\right| =$$

$$= \frac{\left|-c\cdot\sin\tau\cos\tau + \sin^2\tau + c\cdot\cos\tau\sin\tau + \cos^2\tau\right|}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\ ,$$

also $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ unabhängig von r . Bemerkt man, daß $\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{1+c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$, so bekommt man

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = c\ ,$$

d.h. $\alpha = \arctan c$.

Aufgabe 3

(a) Wegen

$$\mathbb{S}^n = |\cdot|_2^{-1}(\{1\})$$

ist $\mathbb{S}^n$ offensichtlich beschränkt und auch abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n+1}$, denn $|\cdot|_2$ ist stetig und $\{1\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Nach dem Satz von Heine-Borel (Hauptsatz 10.18) ist $\mathbb{S}^n$ kompakt.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{S}^n$, OE $x \neq y$. Falls $x \neq -y$, sind x und y offensichtlich linear unabhängig, also

$$0 \notin \{x + t\cdot(y-x)|\ t \in [0,1]\}\ .$$

Es folgt, daß

$$\gamma_{x,y} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n : t \longmapsto \frac{x + t\cdot(y-x)}{|x + t\cdot(y-x)|_2}$$

eine stetige parametrisierte Kurve in $\mathbb{S}^n$ ist mit

$$\gamma_{x,y}(0) = \frac{x}{|x|_2} = \frac{x}{1} = x \quad \text{und} \quad \gamma_{x,y}(1) = \frac{x+y-x}{|x+y-x|_2} = \frac{y}{|y|_2} = y\ .$$

Sind jedoch x und y Antipodenpunkte, d.h. $y = -x$, so verläuft die Verbindungsstrecke durch Null, also können wir nicht die gleiche Kurve wie oben wählen. Da $n \geqslant 1$, existiert ein $z' \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, welches nicht im von x und y aufgespannten Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ liegt, also insbesondere kein Antipodenpunkt zu x bzw. y ist. Setzen wir

$$z := \frac{z'}{|z'|_2}\ ,$$

so ist $z \in \mathbb{S}^n$, und die Verbindungsstrecken zwischen x und z bzw. z und y laufen nicht durch den Nullpunkt, vgl. oben. Dann gibt es also, wie eben gesehen, stetige parametrisierte Kurven

$\gamma_{x,z}$ und $\gamma_{z,y}$, die x mit z bzw. z mit y innerhalb $\mathbb{S}^n$ verbinden. Definieren wir nun

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n : t \longmapsto \begin{cases} \gamma_{x,z}(2t) \ , & \\ & \text{falls} \\ \gamma_{z,y}(2t-1) \ , & \end{cases} \begin{matrix} t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{matrix} \ ,$$

so ist γ wegen

$$\gamma_{x,z}(1) = z = \gamma_{z,y}(0)$$

eine stetige parametrisierte Kurve, welche x mit y innerhalb $\mathbb{S}^n$ miteinander verbindet. Alternativ leistet auch die parametrisierte Kurve

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n : t \longmapsto \frac{(2t-1)\, y + t\,(t-1)\, z'}{|(2t-1)\, y + t\,(t-1)\, z'|_2}$$

im Falle $y = -x$ das Gewünschte, da z' zu x und damit zu y linear unabhängig gewählt wurde.

(c) Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) - f(-x) \ .$$

Nach Teil (b) gibt es zu jedem $y \in \mathbb{S}^n$ eine stetige parametrisierte Kurve $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$, welche y mit $-y$ verbindet. Es folgt, daß die Funktion

$$\varphi := g \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist mit

$$\varphi(0) = g(y) = -g(-y) = -\varphi(1) \ .$$

Nach dem Satz von Bolzano besitzt φ , da stetig, eine Nullstelle, d.h. es gibt ein $x \in \mathbb{S}^n$ mit

$$f(x) = f(-x) \ ,$$

also hat f einen Antipodenpunkt. (Für $n = 1$ haben wir diesen Beweis bereits in Aufgabe 1.1 geführt.)

(d) Da γ in S^n verläuft, ist $|\gamma|_2^2 \equiv 1$ konstant. Somit

$$0 = \partial\, |\gamma|_2^2 = 2\gamma \bullet \gamma' \ .$$

Daraus folgt die erste Behauptung. Ferner, dort wo γ zweimal differenzierbar ist, haben wir sogar

$$0 = \partial^2\, |\gamma|_2^2 = 2\,(\gamma' \bullet \gamma' + \gamma \bullet \gamma'') = 2\left(|\gamma'|_2^2 - \gamma \bullet \gamma''\right) \geqslant 2\left(|\gamma'|_2^2 - |\gamma''|_2\right) \ ,$$

wobei wir im letzten Schritt die Schwarzsche Ungleichung unter Beachtung von $|\gamma|_2 = 1$ ausgenutzt haben. Daraus folgt die zweite Behauptung.

Aufgabe 4 Es gilt

$$\Delta_x F(x,t) = (a \bullet a)\, f''(a \bullet x - ct) = |a|_2^2\, f''(a \bullet x - ct) \ ,$$

was man durch komponentenweises Differenzieren erhält, und ferner

$$\partial_t^2 F(x,t) = c^2 f''(a \bullet x - ct) \ .$$

Eingesetzt in die Wellengleichung liefert das, da $|a|_2 = 1$,

$$\Delta_x F(x,t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 F(x,t) = f''(a \bullet x - ct) - f''(a \bullet x - ct) = 0 \ .$$

Anschaulich ist diese Lösung der Wellengleichung eine in Richtung des Vektors a mit Geschwindigkeit c laufende ebene Welle.

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Ralf Jäger und Roland Knevel
Sommersemester 2002

Analysis II

Lösungsblatt 13

Aufgabe 1

(a) Stetigkeit ist klar (beachte: $|xy^3| \cdot (x^2+y^2)^{-1} \leqslant |xy|$). Außerhalb des Nullpunktes ist f stetig und stetig partiell differenzierbar, denn dort ist

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} - 2x^2 \cdot \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} = -y^3 \cdot \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \ ,$$

$$\partial_2 f(x,y) = 3x \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} - 2x \cdot \frac{y^4}{(x^2+y^2)^2} = y^2 \cdot x \cdot \frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \ .$$

Im Nullpunkt erhalten wir

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \ ,$$

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \ .$$

Damit ist auch die Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Nullpunkt einzusehen.

(b) f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zweimal stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_1\partial_1 f(x,y) = -6x \cdot \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} + 8x^3 \cdot \frac{y^3}{(x^2+y^2)^3} = 2y^3 \cdot x \cdot \frac{x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^3} \ ,$$

$$\partial_1\partial_2 f(x,y) = \frac{3y^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^4}{(x^2+y^2)^2} - 6x^2 \cdot \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + 8x^2 \cdot \frac{y^4}{(x^2+y^2)^3} \ ,$$

$$= -y^2 \cdot \frac{3x^4 - 6x^2 \cdot y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^3} = \partial_2\partial_1 f(x,y) \ ,$$

$$\partial_2\partial_2 f(x,y) = 6x \cdot \frac{y}{x^2+y^2} - 14x \cdot \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} + 8x \cdot \frac{y^5}{(x^2+y^2)^3} = 2x^3 \cdot y \cdot \frac{3x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3} \ .$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen in 0 gilt

$$\partial_1\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(t,0) - \partial_1 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \ ,$$

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_2 f(t,0) - \partial_2 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \ ,$$

$$\partial_2\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(0,t) - \partial_2 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t} = 1 \ ,$$

$$\partial_2\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_2 f(0,t) - \partial_2 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \ .$$

(c) Die ungleichen partiellen Ableitungen sind schon im Teil (b) nachzulesen. Die zweite partielle Ableitung $\partial_2\partial_1 f$ ist im Nullpunkt unstetig, denn für die Nullfolge $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ gilt

$$\partial_2\partial_1 f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{\frac{3}{n^4} - \frac{6}{n^4} - \frac{1}{n^4}}{\left(\frac{2}{n^2}\right)^3} = \frac{4}{n^6} \cdot \frac{n^6}{8} = \frac{1}{2} \neq \partial_2\partial_1 f(0,0) = 1 \ .$$

Aufgabe 2

(a) Wegen $\left|x^3 \cdot (x^2+y^2)^{-1}\right| \leqslant |x|$ ist die Stetigkeit in 0 klar. Weiter gilt

$$f(x,0) = x \quad \text{und} \quad f(0,y) = 0 \ ,$$

also

$$\partial_1 f(0,0) = 1 \quad \text{und} \quad \partial_2 f(0,0) = 0 \ ,$$

so dass die partielle Differenzierbarkeit auch gezeigt ist.

Wäre die Funktion in 0 total differenzierbar, so wäre die Ableitung durch

$$(x,y) \longmapsto Df(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\cdot x + 0 \cdot y = x$$

gegeben. Die zugehörige Fehlerfunktion

$$\varphi(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 - 1\cdot x - 0\cdot y = \frac{x^3 - x^3 - xy^2}{x^2+y^2} = -\frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

erfüllt jedoch

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)}{\left|\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right|} = -\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{2^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{k^3}} = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$$

und nicht die verlangte Bedingung $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi(x,y)}{|(x,y)|} = 0$.

(b) Es gilt $\gamma(t) = \gamma'(0)\cdot t + \psi(t)$, wobei die Fehlerfunktion $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ die Eigenschaft

$$\lim_{0\neq t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \psi(t) = 0$$

besitzt. Es folgt für $t \neq 0$

$$\frac{f\circ\gamma(t) - f\circ\gamma(0)}{t} = \frac{(\gamma_1'(0)\cdot t + \psi_1(t))^3}{t\cdot|\gamma'(0)\cdot t + \psi(t)|^2} = \frac{t^3\cdot\left(\gamma_1'(0) + \frac{1}{t}\cdot\psi_1(t)\right)^3}{t^3\cdot\left|\gamma'(0) + \frac{1}{t}\cdot\psi(t)\right|^2}$$

und dies konvergiert für $t \to 0$ gegen

$$(f\circ\gamma)'(0) = \frac{(\gamma_1'(0))^3}{|\gamma'(0)|^2} \ .$$

Aufgabe 3 Nach Kettenregel muss

$$D\left(f \circ \gamma\right)(t) = \operatorname{grad} f\left(\gamma\left(t\right)\right) \bullet \gamma'\left(t\right) = 0$$

sein, da $f \circ \gamma$ konstant ist. Geometrisch bedeutet dies, dass sich die Kurve γ stets senkrecht zu der Richtung verläuft, in welcher f die gößte Veränderung erfährt.

Aufgabe 4

(a) Die Funktion f ist stetig, also insbesondere partiell stetig. Es gilt

$$f\left(x, 0\right) = 3x - x^3 - 1 \ .$$

Daraus folgt $\lim_{x \to \pm\infty} f\left(x, 0\right) = \pm\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz ist

$$f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f\left(x, 0\right)$$

surjektiv, also ist auch f surjektiv.

(b) Es ist

$$\operatorname{grad} f\left(x, y\right) = 3 \cdot \begin{pmatrix} e^y - x^2 \\ x \cdot e^y - e^{3y} \end{pmatrix}$$

und

$$\operatorname{Hess} f\left(x, y\right) = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot x & e^y \\ e^y & x \cdot e^y - 3 \cdot e^{3y} \end{pmatrix} \ .$$

Wir erhalten, dass der Gradient von f genau dann verschwindet, wenn

$$e^y = x^2 \quad \text{und} \quad x \cdot e^y = e^{3y}$$

ist, d.h.

$$e^y = x^2 \quad \text{und} \quad x = e^{2y} \ ,$$

und daraus bekommen wir die Gleichung $e^y = e^{4y}$, welche genau für $y = 0$ erfüllt ist. Damit ist $x = 1$, d.h. der Punkt $(1, 0)$ ist der einzige kritische Punkt von f . Weiter ist

$$\operatorname{Hess} f\left(1, 0\right) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom

$$\chi_{\operatorname{Hess} f(1,0)}\left(\lambda\right) = \left(\lambda + 6\right)^2 - 9$$

mit Nullstellen $\lambda = -3 < 0$ und $\lambda = -9 < 0$, also ist $\operatorname{Hess} f\left(1, 0\right)$ negativ definit, d.h. im Punkt $(1, 0)$ hat f ein striktes lokales Maximum und dieses ist das einzige kritische Punkt von f .

Aufgabe 5

(a) Für eine lokale Extremstelle ξ in der offenen Kreisscheibe gilt notwendig

$$0 = \operatorname{grad} f\left(\xi\right) = \left(8\xi_1 - 3\xi_2, -3\xi_1\right)^{\intercal} \ ,$$

also ist $(0, 0)$ die einzig mögliche Extremstelle dort. Dort ist aber die Hesse-Matrix durch

$$\operatorname{Hess} f\left(0, 0\right) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, eine indefinite Matrix (z.B. ein strikt negativer und einstrikt positiver Eigenwert), weswegen $(0,0)$ keine Extremstelle sein kann. In der Tat erhält man für $y := x$ positive Funktionswerte $f(x,x) = 4x^2 - 3x^2 = x^2$ und für $y := \frac{5}{3}x$ negative Funktionswerte $f\left(x, \frac{5}{3}x\right) = -x^2$. In jeder Umgebung von 0 gibt es also Werte strikt größer und strikt kleiner als der Funktionswert $f(0,0) = 0$.

(b) Da die Einheitskreislinie kompakt ist, muss die stetige Funktion f Maximum und Minimum darauf annehmen. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren, angewandt auf f und $F : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1$ (beachte, dass $\operatorname{grad} F(x,y) = (2x, 2y)^\intercal \neq 0$ auf $\{F = 0\}$) liefert als notwendiges Kriterium für eine solche Extremstelle ξ

$$\begin{pmatrix} 8\xi_1 - 3\xi_2 \\ -3\xi_1 \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f(\xi) = \lambda \cdot \operatorname{grad} F(\xi) = \begin{pmatrix} 2\xi_1 \\ 2\xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R} .$$

Wir müssen also das Gleichungssystem (x statt ξ_1 , y statt ξ_2)

$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 2\lambda x \\ -3x &= 2\lambda y \end{aligned}$$

lösen. Man sieht sofort, dass man $x, y \neq 0$ (insbesondere $\lambda \neq 0$) annehmen kann, denn sonst gilt gleichzeitig $x = y = 0$, was der Voraussetzung $x^2 + y^2 = 1$ widerspräche. Teilt man nun die Gleichungen und substituiert $z := \frac{y}{x}$ so erhält man

$$-\frac{8}{3} + z = \frac{1}{z} \quad \text{bzw.} \quad z^2 - \frac{8}{3}z - 1 = 0$$

oder auch

$$\left(z - \frac{4}{3}\right)^2 = z^2 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot z + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$$

mit möglichen Lösung $z_1 = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3$ und $z_2 = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{-1}{3}$. Zusammen mit der Bedingung $x^2 + y^2 = 1$ ergeben sich die folgenden Kandidaten für Extremstellen:

$$x_{1,\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{mit} \quad y_{1,\pm} = \pm\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{und} \quad y_{2,\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{mit} \quad x_{2,\pm} = \mp\frac{3}{\sqrt{10}} .$$

Durch Auswertung erhält man

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{10}}, \tfrac{3}{\sqrt{10}}\right) = \tfrac{4}{10} - \tfrac{9}{10} = -\tfrac{5}{10} = \ldots = f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{10}}, -\tfrac{3}{\sqrt{10}}\right) ,$$

$$f\left(-\tfrac{3}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}\right) = \tfrac{4\cdot 9}{10} - \tfrac{-9}{10} = \tfrac{45}{10} = \ldots = f\left(\tfrac{3}{\sqrt{10}}, -\tfrac{1}{\sqrt{10}}\right) ,$$

Damit sind die Maximalstellen als $\pm\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ und die Minimalstellen als $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ identifiziert.

(c) Nach den obigen Resultaten sind die Randextrema aus Teil b) schon die globalen Extremstellen auf der gesamten abgeschlossenen Kreisscheibe.

Analysis II

Lösungsblatt 14

Aufgabe 1

(a) Angenommen φ ist eine solche Funktion. Da X offen und nicht leer, existieren ein $x \in X$ und ein $r \in \mathbb{R}_+^*$ mit $B(x,r) \subset X$. Die Funktion

$$f : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \varphi(x + r(\cos t, \sin t))$$

ist somit wohldefiniert, stetig und injektiv, also streng monoton. Andererseits ist aber wegen der Stetigkeit von φ

$$\lim_{t \to 2\pi} f(t) = f(0) \quad !$$

Widerspruch!

(b) Wir definieren die stetige Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto x + y\sqrt{2} \quad .$$

Seien nun $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Q}^2$ mit $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$. Dann gilt also

$$x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)\sqrt{2} = 0 \; .$$

Angenommen, $y_1 \neq y_2$. Dann folgt

$$\sqrt{2} = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \in \mathbb{Q} \; !$$

Widerspruch, da $\sqrt{2}$ irrational. Somit

$$y_1 = y_2 \text{ , und damit } \quad x_1 = x_2 \; .$$

Das zeigt φ injektiv. Die Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : \varphi(\mathbb{Q}^2) \longrightarrow \mathbb{Q}^2$ ist übrigens unstetig.

Aufgabe 2

(a) Da f nach Voraussetzung in a differenzierbar, gilt

$$f = f(a) + f'(a)(\mathrm{id} - a) + \varphi$$

mit einer Funktion $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{x - a} = 0 \; .$$

Setzt man dieses Ergebnis ein, so erhält man

$$\frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k} = f'(a) + \frac{\varphi(y_k) - \varphi(a)}{y_k - x_k} + \frac{\varphi(a) - \varphi(x_k)}{y_k - x_k} \quad .$$

Da $x_k \leqslant a < y_k$, ist

$$\left|\frac{\varphi(y_k)-\varphi(a)}{y_k-x_k}\right| \leqslant \frac{|\varphi(y_k)-\varphi(a)|}{y_k-a} \to 0$$

für $k \to \infty$. Analog folgt

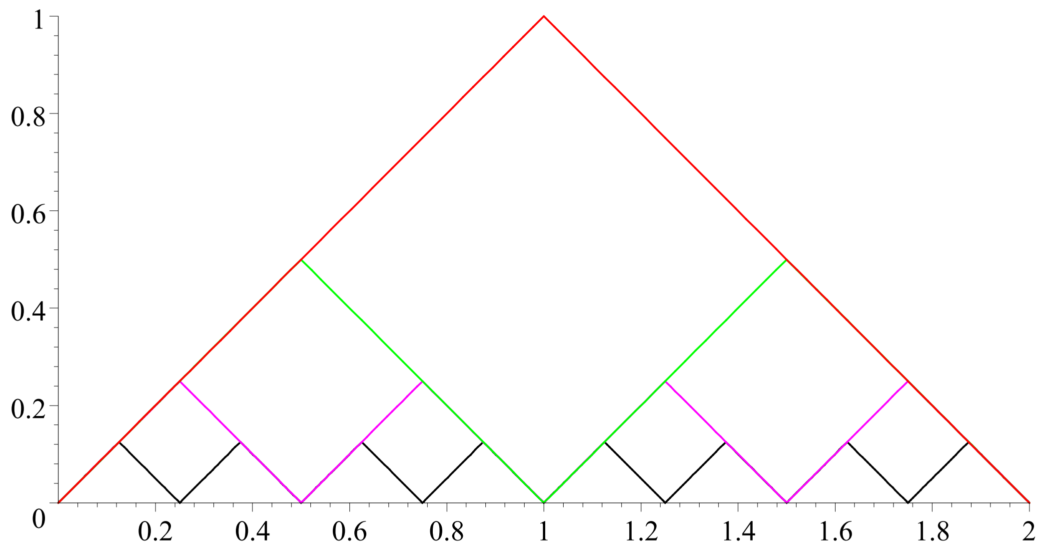
$$\left|\frac{\varphi(a)-\varphi(x_k)}{y_k-x_k}\right| \to 0$$

für die $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \neq a$, für die restlichen ist es ohnehin trivial. Insgesamt folgt die Behauptung.

(b) Wie man leicht nachrechnet, besitzt f_0 die Periode 2 , und es gilt $f_0 = |\cdot|$ auf $[-1,1]$. Damit kann man die Graphen zu f_0 , f_1 und f_2 gut zeichnen. Zudem folgt f_n stetig und

$$f_n(\mathbb{R}) = \left[0, \tfrac{1}{2^n}\right]$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und für alle $r \in \mathbb{Z}$ ist $f_0\,|_{[r,r+1]} = \varepsilon \cdot \mathrm{id}_{[r,r+1]} + b$ mit $\varepsilon \in \{-1,1\}$ und $b \in \mathbb{R}$ geeignet.



f_0 rot f_1 grün f_2 magenta f_3 schwarz

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $||f_n||_\infty = \frac{1}{2^n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 < \infty$. Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ normal konvergent, definiert somit, da alle f_n stetig, eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei nun $a \in \mathbb{R}$. Es bleibt zu zeigen, daß f in a nicht differenzierbar ist. Dazu definieren wir für alle $k \in \mathbb{N}$

$$m_k := \lfloor 2^k a \rfloor \in \mathbb{Z} \quad ; \quad x_k := \frac{m_k}{2^k} \leqslant a \quad \text{und} \quad y_k := \frac{m_k+1}{2^k} > a \quad .$$

Da $|x_k - y_k| = \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0$, gilt $\lim_k x_k = \lim_k y_k = a$. Angenommen, f in a differenzierbar. Dann folgt mittels (a)

$$\lim_k \frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k} = f'(a) \quad .$$

Andereseits ist aber

$$\frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f_n(y_k)-f_n(x_k))}{\frac{1}{2^k}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-k}}\left(f_0\left(2^{n-k}(m_k+1)\right)-f_0\left(2^{n-k}m_k\right)\right) \quad .$$

1. Fall: $n>k$ *:* Dann ist $f_0\left(2^{n-k}(m_k+1)\right)-f_0\left(2^{n-k}m_k\right)=0$ wegen der Periodizität von f_0 .

2. Fall: $n\leqslant k$ *:* In diesem Fall liegen $2^{n-k}m_k$ und $2^{n-k}(m_k+1)$ beide im Intervall $\left[\lfloor 2^{n-k}m_k\rfloor, \lfloor 2^{n-k}m_k\rfloor+1\right]$, da entweder $2^{n-k}m_k$ selbst eine ganze Zahl ist, oder $2^{n-k}m_k$ von der nächstgelegenen ganzen Zahl mindestens den Abstand 2^{n-k} besitzt. Damit ist nach den Ausführungen unter (b)

$$\frac{1}{2^{n-k}}\left(f_0\left(2^{n-k}(m_k+1)\right)-f_0\left(2^{n-k}m_k\right)\right)=\frac{1}{2^{n-k}}\left(\varepsilon 2^{n-k}(m_k+1)+b-\varepsilon 2^{n-k}m_k-b\right)=\varepsilon$$

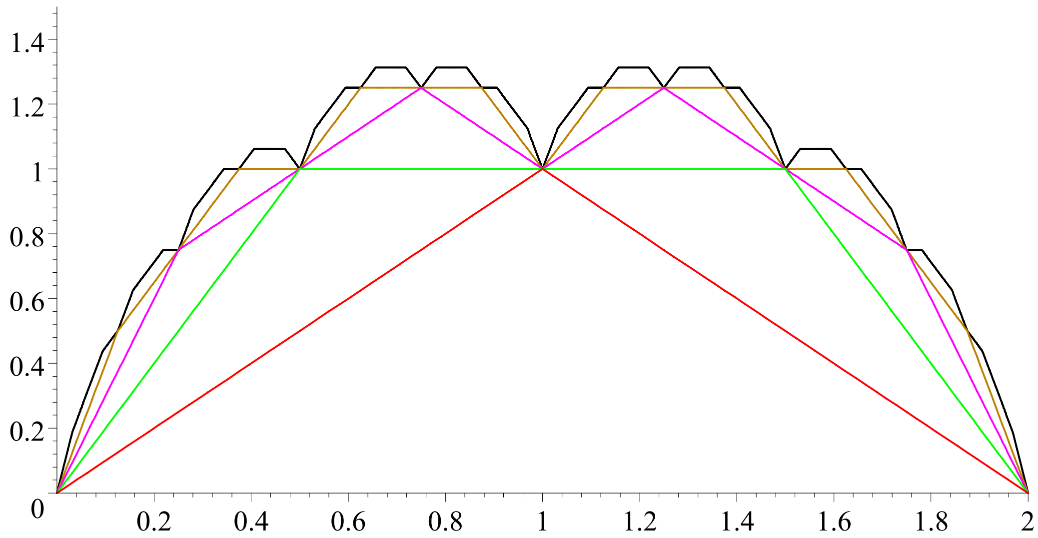
mit geeigneten $\varepsilon\in\{-1,1\}$ und $b\in\mathbb{R}$.

Insgesamt ist also

$$\frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k}=\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2^{n-k}}\left(f_0\left(2^{n-k}(m_k+1)\right)-f_0\left(2^{n-k}m_k\right)\right)$$

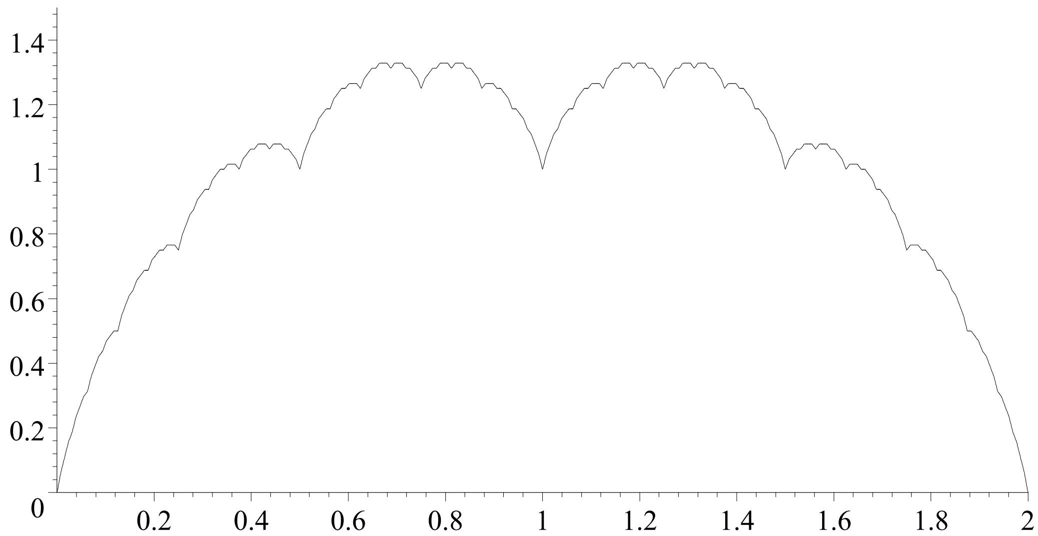
$$\in\begin{cases}2\mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ ungerade}\\ 2\mathbb{Z}+1 & \text{falls } k \text{ gerade}\end{cases} \quad .$$

Damit kann die Folge $\left(\frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent sein. Die Annahme f in a differenzierbar ist also widerlegt.



$\sum_{k=0}^{n} f_k$ für $n=0,1,2,3$ und 5

Höhere Verfeinerungen als 7 kann man am im Druck nicht mehr erkennen. Die Funktion f wird übrigens *Takagi-Funktion* genannt (Teiji TAKAGI - Japanischer Mathematiker, 1875 - 1960).



$\sum_{k=0}^{7} f_k$

Aufgabe 3 Es ist

$$\partial_t f(t,x) = -\frac{n}{2} \cdot t^{-\frac{n}{2}-1} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) + t^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \cdot \frac{|x|^2}{4t^2} =$$

$$= f(t,x) \cdot \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) \ ,$$

$$\partial_{x_k} f(t,x) = t^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \cdot \left(-\frac{2x_k}{4t}\right) = -\frac{x_k}{2t} \cdot f(t,x) \ ,$$

$$\partial_{x_k}^2 f(t,x) = \partial_{x_k}\left(-\frac{x_k}{2t} \cdot f(t,x)\right) = -\frac{1}{2t} \cdot f(t,x) - \frac{x_k}{2t} \cdot \partial_{x_k} f(t,x) =$$

$$= f(t,x) \cdot \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x_k^2}{4t^2}\right) \ .$$

Es folgt

$$(\Delta_x f - \partial_t f)(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}^2 f(t,x) - \partial_t f(t,x)\right) =$$

$$= f(t,x) \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x_k^2}{4t^2}\right) - f(t,x) \cdot \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) =$$

$$= f(t,x) \cdot \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} + \frac{n}{2t} - \frac{|x|^2}{4t^2}\right) = 0 \ .$$

Physikalisch gesehen stellt für festes t die Funktion $x \longmapsto f(x,t)$ eine kugelsymmetrische (Wärme)konzentration um den Koordinatenursprung herum dar. Mit zunehmendem t nimmt das Konzentrationsgefälle ab, die Wärmemenge wird zunehmend delokalisiert. Sieht man die Funktion f nicht als Wärmekonzentration, sondern als Stoffkonzentration an, so beschreibt f einen Diffusionsvorgang. Mathematisch betrachtet sind Wärmeleitung und Diffusion äquivalente Prozesse.

Aufgabe 4 Gesucht sind offenbar Länge, Breite und Höhe $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ des Kastens, sodaß die Oberfläche $F(a,b,c) := ab + 2(a+b)c$ des oben offenen Kastens minimal wird unter der Nebenbedingung $V(a,b,c) = abc = V_0 := 32$. Die Menge $M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^{*3} \mid xyz = V_0\right\}$ ist zwar abgeschlossen, aber leider nicht kompakt. Daher muss eine Grenzwertbetrachtung für $(x,y,z) \to \infty$ durchgeführt werden. Es gelten wegen der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel

$$F(x,y,z) \geqslant xy + xz + yz \geqslant x\sqrt{yz} = \sqrt{xV_0}$$

sowie analoge Resultate für y, z , sodaß wir

$$F(x,y,z) \geqslant \sqrt{|(x,y,z)|_\infty V_0} \longrightarrow \infty$$

bei $|(x,y,z)|_\infty \to \infty$ haben und deshalb in einer genügend großen kompakten Teilmenge von M ein absolutes Minimum von F unter der Nebenbedingung erwarten. Geht man nun das Problem mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren an, so erhält man als Gleichungssystem für a, b und c und den Multiplikator λ

$$(b+2c, a+2c, 2(a+b))^\intercal = \operatorname{grad} F(a,b,c) = \lambda \operatorname{grad} V(a,b,c) = \lambda (bc, ac, ab)^\intercal$$

$$abc = V_0 \quad ,$$

also

$$\begin{matrix} b+2c = \lambda bc \\ a+2c = \lambda ac \\ 2a+2b = \lambda ab \\ abc = V_0 \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} ab+2ac = \lambda V_0 \\ ab+2bc = \lambda V_0 \\ 2ac+2bc = \lambda V_0 \\ abc = V_0 \end{matrix}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen sieht man sofort $a = b$. Substrahiert man die 2. und 3. Gleichung voneinander, so erhält man

$$a^2 = 2ac \ ,$$

also $c = \frac{a}{2}$. Setzt man dies noch in die 4. Gleichung ein, so sieht man

$$a^3 = 2V_0 \ ,$$

insgesamt ergibt sich also als einzige Lösung

$$a = b = (2V_0)^{\frac{1}{3}} = 4\,\mathrm{m} \quad , \quad c = 2\,\mathrm{m} \quad .$$

Da dies das einzig mögliche lokale Extremum von F unter der Nebenbedingung ist, muß hier das gesuchte absolute Minimum liegen. Es gilt

$$F(a,b,c) = 48\,\mathrm{m}^2 \quad .$$

Aufgabe 5 Gleichung $(*)$ ist unabhängig von b . Wir bestimmen also zunächst alle Lösungen m von $(*)$ und der Anfangsbedingung $m(0) = m_0$. Sei also m eine Lösung. Dann gilt

$$-\alpha t = \int_0^t \frac{m'}{m} = \ln m\,(t) - \ln m_0 \ ,$$

also

$$m\,(t) = m_0 \cdot e^{-\alpha t} \ .$$

Dies ist die einzig mögliche Lösung; daß sie tatsächlich Lösung des Anfangswertproblems ist, verifiziert man durch Probe. Setzen wir diese Lösung nun in $(**)$ ein, so erhalten wir als Anfangswertproblem für b

$$b' = -\beta b + \alpha m_0 e^{-\alpha\,\mathrm{id}} \quad \text{und} \quad b\,(0) = b_0 \ .$$

Die Lösung des zugehörigen homogenen Problems lautet

$$b = b_0 \cdot e^{-\beta\,\mathrm{id}} \ ,$$

man bestimmt sie analog zu der von $(*)$. Somit setzen wir für die Lösung des inhomogenen Problems an (Variation der Konstanten)

$$b = g \cdot e^{-\beta\,\mathrm{id}} \ .$$

Wir erhalten als Anfangswertproblem für g

$$g' = \alpha m_0 \cdot e^{(\beta-\alpha)\,\mathrm{id}} \quad ; \quad g\,(0) = b_0 \ ,$$

sowie als einzige Lösung

$$g = \int_0^t \alpha m_0 \cdot e^{(\beta-\alpha)\,\mathrm{id}} + b_0 = \frac{\alpha}{\beta-\alpha} m_0 \cdot e^{(\beta-\alpha)\,\mathrm{id}} + b_0 - \frac{\alpha}{\beta-\alpha} m_0 \ .$$

Damit ergibt sich als eindeutige Lösung des Anfangswertproblems für b :

$$b = g \cdot e^{-\beta\,\mathrm{id}} = \frac{\alpha}{\beta-\alpha} m_0 \cdot e^{-\alpha\,\mathrm{id}} + \left(b_0 - \frac{\alpha}{\beta-\alpha} m_0 \right) \cdot e^{-\beta\,\mathrm{id}} \ .$$

Für $b_0 = 0$ erhält man

$$b = \frac{\alpha}{\beta-\alpha} m_0 \cdot \left(e^{-\alpha\,\mathrm{id}} - e^{-\beta\,\mathrm{id}} \right) \ .$$

Offenbar $b \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ mit $b \geqslant 0$, $b\,(0) = \lim_{t\to\infty} b\,(t) = 0$. Somit besitzt b auf $\mathbb{R}_+$ ein globales Maximum. Ferner

$$b' = \frac{\alpha}{\beta-\alpha} m_0 \cdot \left(-\alpha e^{-\alpha\,\mathrm{id}} + \beta e^{-\beta\,\mathrm{id}} \right) \ .$$

Also ist

$$t_0 := \frac{\ln \alpha - \ln \beta}{\alpha - \beta}$$

einzige Nullstelle von b' auf $\mathbb{R}_+$, daher muß an t_0 das globale Maximum von b vorliegen.