Chapitre 6

LE PROBLÈME DE DIRICHLET

Dans ce chapitre nous allons étudier
une sous-variété fermée avec bord M de $\mathbb{R}^n$
de classe $\mathcal{C}^{(1)}$ et de dimension n .
Son bord est la frontière de M et
$M^\circ = M \smallsetminus \partial M$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Version du 18 février 2005

6.1 Le théorème de prolongement

DEFINITION 1 Nous dirons qu'un ouvert avec bord U de $\mathbb{R}^n$ (cf. cours d'Analyse [9], § 13.4) est *cylindrique* s'il est de la forme $]-a,0] \times V$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$. Soient

$$U^\circ := \left]-a,0\right[\times V \quad \text{et} \quad \widetilde{U} := \left]-a,a\right[\times V$$

l'intérieur et le symétrisé de U .

Pour toute fonction f sur U (ou mieux une classe de fonction) définie λ_U-p.p. , on définit

$$P_{pair} f\,(t,v) := \begin{cases} f\,(t,v) & t<0 \\ & \text{si} \\ f\,(-t,v) & t>0 \end{cases}$$

le *prolongement pair* et

$$P_{impair} f\,(t,v) := \begin{cases} f\,(t,v) & t<0 \\ & \text{si} \\ -f\,(-t,v) & t>0 \end{cases}$$

le *prolongement impair* de f sur $\widetilde{U}$.

LEMME (Prolongement par réflexion) *Si $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(U)$, alors $P_{pair}\xi \in \mathcal{H}^{(1)}\left(\widetilde{U}\right)$,*

$$\partial_1 P_{pair}\xi = P_{impair}\partial_1\xi \quad , \quad \partial_j P_{pair}\xi = P_{pair}\partial_j\xi \quad \text{pour tout } j = 2,\ldots,n \ ,$$

et

$$\left\|P_{pair}\xi\right\|_2 = \sqrt{2}\cdot\left\|\xi\right\|_2 \quad , \quad \left\|P_{pair}\xi\right\|_{2,(1)} = \sqrt{2}\cdot\left\|\xi\right\|_{2,(1)} \ .$$

Nous aurons besoin d'une fonction $\chi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ et

$$\chi\,(t) = \begin{cases} 0 & t \geqslant -\frac{1}{2} \\ & \text{si} \\ 1 & t \leqslant -1 \end{cases} \ ,$$

et soit $\chi_k := \chi\,(k\cdot\diamond)$.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}\left(\widetilde{U}\right)$, on a

$$\langle\varphi|\,\partial_1 P_{pair}\xi\rangle_{\mathcal{D}(\widetilde{U})} = -\,\langle\partial_1\varphi|\,P_{pair}\xi\rangle_{\mathcal{D}(\widetilde{U})} =$$

$$= -\int_V \left(\int_{-a}^0 \overline{\partial_1\varphi\,(t,v)}\cdot\xi\,(t,v)\;dt + \int_0^a \overline{\partial_1\varphi\,(t,v)}\cdot\xi\,(-t,v)\;dt\right)dv =$$

$$= -\int_V \left(\int_{-a}^0 \overline{\left[\partial_1 \varphi(t,v) + \partial_1 \varphi(-t,v)\right]} \cdot \xi(t,v)\ dt \right) dv = -\int_{U^\circ} \overline{\partial_1 \psi} \cdot \xi\ ,$$

en ayant défini $\psi \in \mathcal{D}\left(\widetilde{U}\right)$ par $\psi(t,v) := \varphi(t,v) - \varphi(-t,v)$. Pour tout $v \in V$, on a $\psi(0,v) = 0$; par compacité il existe donc $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\psi|(\diamond, v) \leqslant c \cdot |\diamond|$. En outre

$$\chi_k \otimes 1 \cdot \psi \in \mathcal{D}(U^\circ)\ ,$$

$$\partial_1 (\chi_k \otimes 1 \cdot \psi) = k \cdot \partial\chi(k \cdot \mathrm{id}) \otimes 1 \cdot \psi + \chi_k \cdot \partial_1 \psi$$

et, en posant $K := \mathrm{Pr}_1(\operatorname{supp}\psi) \in \mathfrak{K}(V)$, où Pr_1 désigne la projection

$$(t,v) \longmapsto v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}\ ,$$

on obtient

$$\left| \int k \cdot \partial\chi(k \cdot \mathrm{id}) \otimes 1 \cdot \psi \cdot \xi \right| \leqslant c \cdot \|\partial\chi\|_\infty \cdot k \cdot \int_{\left]-\frac{1}{k},0\right[\times K} |\mathrm{id}| \otimes 1 \cdot |\xi| \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \|\partial\chi\|_\infty \cdot \int_{\left]-\frac{1}{k},0\right[\times K} |\xi| \to 0$$

si $k \to \infty$. Puisque $\lim_k \chi_k = 1_{\mathbb{R}_-}$, en utilisant le théorème de Lebesgue il vient alors

$$\langle \varphi | \partial_1 P_{pair} \xi \rangle_{\mathcal{D}(\widetilde{U})} = -\lim_k \int_{U_<} \overline{\chi_k \otimes 1 \cdot \partial_1 \psi} \cdot \xi = -\lim_k \int_{U_<} \overline{\partial_1 (\chi_k \otimes 1 \cdot \psi)} \cdot \xi =$$

$$= -\lim_k \langle \partial_1 (\chi_k \otimes 1 \cdot \psi) | \xi \rangle_{\mathcal{D}(U^\circ)} = \lim_k \langle \chi_k \otimes 1 \cdot \psi | \partial_1 \xi \rangle_{\mathcal{D}(U^\circ)} =$$

$$= \lim_k \int_{U_<} \overline{\chi_k \otimes 1 \cdot \psi} \cdot \partial_1 \xi = \int_V \left(\int_{-a}^0 \overline{\left[\varphi(t,v) - \varphi(-t,v)\right]} \cdot \partial_1 \xi(t,v)\ dt \right) dv =$$

$$= \int_V \left(\int_{-a}^0 \overline{\varphi(t,v)} \cdot \partial_1 \xi(t,v)\ dt - \int_0^a \overline{\varphi(t,v)} \cdot \partial_1 \xi(-t,v)\ dt \right) dv =$$

$$= \int_V \int_{-a}^a \overline{\varphi(t,v)} \cdot P_{impair} \partial_1 \xi = \langle \varphi | P_{impair} \partial_1 \xi \rangle_{\mathcal{D}(\widetilde{U})}\ .$$

Pour $j = 2, \ldots, n$ la démonstration est analogue à un signe près ! Finalement

$$\|P_{pair}\xi\|_2^2 = \int_V \left(\int_{-a}^0 |\xi(t,v)|^2\ dt + \int_0^a |\xi(-t,v)|^2\ dt \right) dv =$$

$$= 2 \cdot \int_V \left(\int_{-a}^0 |\xi(t,v)|^2\ dt \right) dv = 2 \cdot \|\xi\|_2^2$$

et de même pour la dernière formule. □

REMARQUE 1 Puisque $M \smallsetminus \partial M = M^\circ$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, c'est une sous-variété sans bord de classe $\mathcal{C}^{(\infty)}$ paramétrée par $\gamma_0 := \mathrm{id} : M^\circ \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Nous pouvons donc utiliser la théorie des distributions sur M° . Par contre sur M , qui n'est que de classe $\mathcal{C}^{(1)}$, nous ne pouvons considérer que des application continûment dérivable, notion définie en 17.4 (voir aussi la définition 13.4.2 et le théorème du même paragraphe) du cours d'Analyse [9]. Nous utiliserons

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_{|M}$$

comme ersatz de l'espace des fonctions indéfiniment dérivable sur M .

D'autre part comme ∂M est une partie λ_M-négligeable, pour simplifier nous désignerons par $\mathcal{H}^{(1)}(M)$ et $\mathcal{H}^{(1),0}(M)$ les espaces de Sobolev $\mathcal{H}^{(1)}(M^\circ)$ et $\mathcal{H}^{(1),0}(M^\circ)$. Mais attention $\mathcal{H}^{(1)}(M), \mathcal{H}^{(1),0}(M) \hookrightarrow \mathcal{D}(M^\circ)^*$.

Nous supposerons que M satisfait en outre à la propriété suivante : il existe une suite de difféomorphismes à dérivées bornées $\Gamma_j :]-a_j, a_j[\times V_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j \in J \subset \mathbb{N}^*$ et V_j un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, telle que $\left(\Gamma_j\left(]-a_j, a_j[\times V_j\right)\right)_{j\in J}$ soit localement finie, $\Gamma_j\left(]-a_j, 0] \times V_j\right) = M \cap \Gamma_j\left(]-a_j, a_j[\times V_j\right)$ et $\partial M = \bigcup_{j\in J} \gamma_j\left(\{0\} \times V_j\right)$, et une suite $\left(\rho_j\right)_{j=\{0\}\cup J} \subset \mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp}\rho_0 \subset M^\circ$, $\operatorname{supp}\rho_j \subset \Gamma_j\left(]-a_j, a_j[\times V_j\right)$ pour $j \in J$ et $\sum_{j\in\{0\}\cup J} \rho_j = 1$ sur M .

REMARQUE 2 Si ∂M est compact, grâce au théorème 13.5.ii du cours d'Analyse [9] il existe un nombre fini de tels difféomorphismes. Si $\varepsilon > 0$ est le nombre de Lebesgue associé au recouvrement $\left(\Gamma_j\left(]-a_j, a_j[\times V_j\right)\right)_{j\in J}$ de ∂M (ibidem, lemme 17.4), alors la partition de l'unité $\left(\rho_{\varepsilon,z}\right)_{z\in\mathbb{Z}^n}$ associée est telle que, pour tout $z \in \mathbb{Z}^n$ satisfaisant à $\operatorname{supp}\rho_{\varepsilon,z} \cap \partial M \neq \emptyset$, on ait $\operatorname{supp}\rho_{\varepsilon,z} \subset \Gamma_{j_z}\left(]-a_{j_z}, a_{j_z}[\times V_{j_z}\right)$ pour un $j_z \in J$, il suffit alors de poser

$$\rho_0 := \sum_{\operatorname{supp}\varepsilon_{\varepsilon,z}\subset M^\circ} \rho_{\varepsilon,z} \quad \text{et} \quad \rho_j := \sum_{j_z=j} \rho_{\varepsilon,z} \ .$$

On a $\operatorname{supp}\rho_0 = \bigcup_{\operatorname{supp}\varepsilon_{\varepsilon,z}\subset M^\circ} \operatorname{supp}\rho_{\varepsilon,z} \subset M^\circ$ car la famille $\left(\operatorname{supp}\varepsilon_{\varepsilon,z}\right)_{z\in\mathbb{Z}^n}$ est localement finie.

THEOREME *Alors*

(i) Il existe une application linéaire continue

$$P : \mathcal{H}^{(1)}(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}^n)$$

telle que $P\xi_{|M} = \xi$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(M)$.

(ii) Le sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_{|M}$ est dense dans $\mathcal{H}^{(1)}(M)$.

Démonstration de (i) Pour $j \in J$, soit $\gamma_j := \Gamma_{j|]-a_j,0]\times V_j}$ le paramétrage de M défini par Γ_j . La définition de λ_M (ibidem, théorème 17.2) montre que

$$\int_{\gamma_j(]-a_j,0]\times V_j)} |\xi|^2 \, d\lambda_M = \int_{]-a_j,0]\times V_j} \left|\xi \circ \gamma_j\right|^2 \cdot \left(g^{\gamma_j}\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda_{]-a_j,0]\times V_j} \leqslant$$

$$\leqslant Cst \cdot \int_{]-a_j,0]\times V_j} \left|\xi \circ \gamma_j\right|^2 \, d\lambda_{]-a_j,0]\times V_j} \ ,$$

donc que $\xi \circ \gamma_j \in \mathcal{H}^{(1)}\left(]-a_j, 0[\times V_j\right)$ et utilisant le lemme de prolongement par réflexion soit

$$\Xi_j := P_{pair}\left(\xi \circ \gamma_j\right) \circ \overset{-1}{\Gamma_j} \in \mathcal{H}^{(1)}\left(\Gamma_j\left(]-a_j, a_j[\times V_j\right)\right) \ .$$

Il suffit alors de poser

$$P\xi := \rho_0 \cdot \xi + \sum_{j\in J} \rho_j \cdot \Xi_j \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}^n)$$

(cf. lemme 5.7). Pour tout $x \in M$, on a évidemment

$$P\xi(x) = \rho_0 \cdot \xi(x) + \sum_{j \in J} \rho_j(x) \cdot P_{pair}\left(\xi \circ \gamma_j\right) \circ \overset{-1}{\Gamma}_j(x) =$$

$$= \sum_{j \in \{0\} \cup J} \rho_j(x) \cdot \xi(x) = \xi(x) \quad \lambda_M\text{-p.p. .}$$

Démonstration de (ii) Si $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(M)$, par la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}^n)$ (cf. proposition 5.5.i), il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ proche de $P\xi$. Il est alors évident que $\varphi_{|M} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_{|M}$ est proche $\xi = P\xi_{|M}$, puisque la dérivée d'une restriction est la restriction de la dérivée (cf. remarque 4.6). □

REMARQUE 3 Pour être complet il faudrait, si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [1, \infty]$, introduire les *espaces de Sobolev*

$$\mathcal{W}^{(m),p}(X) := \{\mu \in \mathcal{D}(X)^* \mid \partial^\alpha \mu \in \mathbf{L}^p(X) \text{ si } |\alpha|_1 \leqslant m\} \ .$$

On définit comme ci-dessus $\mathcal{W}^{(m),p}(M) := \mathcal{W}^{(m),p}(M^\circ)$. Le théorème du prolongement est aussi valable dans ce cas, tandis que le théorème de densité ne l'est que si $p < \infty$.

On peut démontrer le théorème de régularité suivant :

THEOREME (de régularité) *Soient M une sous-variété compacte avec bord de $\mathbb{R}^n$ de dimension n , $p \in [1, \infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Définissons p^* par*

$$\frac{1}{p^*} := \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \ .$$

(i) Si $m < \frac{n}{p}$, alors $p^* > p$ et

$$\mathcal{W}^{(m),p}(M) \subset \mathbf{L}^r(M) \quad \textit{pour tout } r \in [p, p^*] \ .$$

(ii) Si $m = \frac{n}{p}$, alors $p^* = \infty$ et

$$\mathcal{W}^{(m),p}(M) \subset \mathbf{L}^r(M) \quad \textit{pour tout } r \in [p, \infty[\ .$$

(iii) Si $m > \frac{n}{p}$, alors

$$\mathcal{W}^{(m),p}(M) \subset \mathbf{L}^\infty(M) \ .$$

En outre soient $k := \left\lfloor m - \frac{n}{p} \right\rfloor$, $\sigma := m - \frac{n}{p} - \left\lfloor m - \frac{n}{p} \right\rfloor$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Il existe alors une constante $C \in \mathbb{R}_+$ (dépendant de M , n , p et m) telle que

(a)

$$\mathcal{W}^{(m),p}(M) \subset \mathcal{C}^{(k)}(M) \ .$$

(b) Si $|\alpha|_1 \leqslant k$

$$\|\partial^\alpha \mu\|_\infty \leqslant C \cdot \|\xi\|_{p,(m)} \ .$$

(c) Si $|\alpha|_1 < k$

$$\|\partial^\alpha \mu(x) - \partial^\alpha \mu(y)\|_\infty \leqslant C \cdot \|\xi\|_{p,(m)} \cdot |x - y| \quad \textit{pour tout } x, y \in M \ .$$

(d) Si $|\alpha|_1 = k$

$$\|\partial^\alpha \mu(x) - \partial^\alpha \mu(y)\|_\infty \leqslant C \cdot \|\xi\|_{p,(m)} \cdot |x - y|^\sigma \quad \textit{pour } \lambda_M\textit{-presque tous les } x, y \in M \ .$$

(iv) Dans les trois cas (i) - (iii) les injections canoniques sont compactes.

REMARQUE 4 Pour une démonstration voir Brezis [3], IX.3, p. 162 - 170. La notion d'opérateur compact intervient en théorie spectrale.

On pourrait en outre introduire les *espaces de Sobolev fractionnaires* sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ ou plus généralement une sous-variété (sans bord) de $\mathbb{R}^n$: pour $s \in \mathbb{R}_+^*$ soient $m := \lfloor s \rfloor$, $\sigma := s - \lfloor s \rfloor$ et

$$\mathcal{W}^{(s),p}(X) = \left\{ \mu \in \mathcal{W}^{(m),p}(X) \;\middle|\; \frac{|\partial^\alpha \mu \circ \mathrm{pr}_1 - \partial^\alpha \mu \circ \mathrm{pr}_2|}{|\mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2|^{\sigma + \frac{n}{p}}} \in \mathbf{L}^p(X \times X) \text{ si } |\alpha|_1 \leqslant k \right\} .$$

On peut même montrer que les fonctions μ de $\mathcal{W}^{(1),p}(X)$ sont λ_X-p.p. dérivables lorsque $p > n$: il existe une partie λ_X-négligeable $N \subset X$ telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \cdot |\mu(x+h) - \mu(x) - (\operatorname{grad}_X \mu | h)| = 0 \quad \text{pour tout } x \in X \setminus N$$

(cf. Stein [12], theorem 1, p. 242.).

6.2 Le théorème de trace

LEMME (Inégalité de trace) *Soit $U = \left]-a, 0\right] \times V$ un ouvert avec bord cylindrique. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}\left(\widetilde{U}\right)_{|U}$, on a*

$$\int_V |\varphi(0,v)|^2 \, dv \leqslant 2 \cdot \|\varphi\|_2 \cdot \|\partial_1 \varphi\|_2 \leqslant \|\varphi\|_{2,(1)}^2 \ .$$

Pour tout $v \in V$, on a

$$\varphi^2(0,v) = \int_{-a}^0 \partial_1\left(\varphi^2\right)(t,v) \, dt = 2 \cdot \int_{-a}^0 \varphi(t,v) \cdot \partial_1 \varphi(t,v) \, dt \ ,$$

donc

$$|\varphi(0,v)|^2 \leqslant 2 \cdot \int_{-a}^0 |\varphi(t,v)| \cdot |\partial_1 \varphi(t,v)| \, dt \ .$$

Grâce au théorème de Fubini et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_V |\varphi(0,v)|^2 \, dv \leqslant 2 \cdot \int_U |\varphi| \cdot |\partial_1 \varphi| \leqslant 2 \cdot \|\varphi\|_2 \cdot \|\partial_1 \varphi\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_2^2 + \|\partial_1 \varphi\|_2^2 = \|\varphi\|_{2,(1)}^2 \ .$$

DEFINITION Pour tout $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(M)$ et $v = (v_j)_{j=1,\ldots,n} \in \mathcal{H}^{(1)}(M)^n$, soit

$$\operatorname{grad} \xi := (\partial_j \xi)_{j=1,\ldots,n} \in \mathbf{L}^2(M)^n \quad \text{et} \quad \operatorname{div}_M v := \sum_{j=1}^n \partial_j v_j \in \mathbf{L}^2(M) \ .$$

PROPOSITION (Règle du produit) *Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_{|M}$ et*

$$v = (v_j)_{j=1,\ldots,n} \in \mathcal{H}^{(1)}(M)^n = \mathcal{H}^{(1)}(M, \mathbb{R}^n) \ ,$$

on a

$$\operatorname{div}(\overline{\varphi} \cdot v) = \overline{\varphi} \cdot \operatorname{div} v + (\operatorname{grad} \varphi | \, v) \ .$$

Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(M^\circ)$ et $j = 1, \ldots, n$, par la proposition 4.3 on a

$$\partial_j(\psi \cdot \varphi) = \partial_j \psi \cdot \varphi + \psi \cdot \partial_j \varphi$$

dans $\mathcal{D}(M^\circ)^*$, donc dans $\mathbf{L}^2(M)$, puisque le membre de droite y appartient. Ainsi

$$\langle \psi \, | \operatorname{div}(\overline{\varphi} \cdot v) \rangle = -\sum_{j=1}^n \langle \partial_j \psi | \, \overline{\varphi} \cdot v_j \rangle = -\sum_{j=1}^n \int \overline{\partial_j \psi \cdot \varphi} \cdot v_j \, d\lambda_M =$$

$$= -\sum_{j=1}^n \int \left(\overline{\partial_j(\psi \cdot \varphi) - \psi \cdot \partial_j \varphi}\right) \cdot v_j \, d\lambda_M = \sum_{j=1}^n \left[\langle \psi \cdot \varphi | \, \partial_j v \rangle - \langle \psi \, | \overline{\partial_j \varphi} \cdot v_j \rangle\right] =$$

$$= \langle \varphi \,|\overline{\varphi} \cdot \operatorname{div}_M v - (\operatorname{grad} \varphi |\, v) \rangle \ ,$$

puisque $\psi \cdot \varphi \in \mathcal{D}(M^\circ)$. $\square$

REMARQUE 1 En introduisant l'espace $\mathcal{W}^{(1),1}(M)^n$, on peut par densité et continuité montrer que cette proposition est encore vraie en remplaçant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_{|M}$ par $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(M)$. On prouve en outre que $\xi \cdot v \in \mathcal{W}^{(1),1}(M)^n$.

THEOREME *Soit M une sous-variété satisfaisant aux hypothèses du paragraphe précédent. Alors*

(i) ***Théorème de trace*** *Il existe une unique application linéaire continue*

$$\diamond^\partial : \mathcal{H}^{(1)}(M) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\partial M)$$

telle que $\varphi^\partial = \varphi_{|\partial M}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_{|M}$.

(ii) ***Théorème de la divergence*** *Pour tout champ de vecteur $v \in \mathcal{H}^{(1)}(M, \mathbb{R}^n)$, on a*

$$\int \operatorname{div}_M v \, d\lambda_M = \int \left(v^\partial \middle| \, \mathfrak{n} \right) d\lambda_{\partial M} \ .$$

(iii) ***Intégration par parties*** *Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_{|M}$ et $v \in \mathcal{H}^{(1)}(M, \mathbb{R}^n)$, on a*

$$\int \overline{\varphi} \cdot \operatorname{div} v \ d\lambda_M = \int \left((\varphi \cdot v)^\partial \middle| \, \mathfrak{n} \right) \ d\lambda_{\partial M} - \int (\operatorname{grad} \varphi |\, v) \ d\lambda_M \ .$$

(iv) Soit $\eta \in \mathcal{H}^{(1)}(M)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\eta \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$.

(b) $\eta^\partial = 0$.

(c) $\eta_0 \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\partial_j(\eta_0) = (\partial_j \eta)_0$ *pour tout* $j = 1, \ldots, n$.

Démonstration de (i) Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_{|M}$, avec les mêmes notations et méthodes que dans le paragraphe précédent et en posant $\varphi^\partial := \varphi_{|\partial M}$, on a

$$\left\| \varphi^\partial \right\|_2 = \left\| \sum_{j \in J} \rho_j \cdot \varphi^\partial \right\|_2 \leqslant \sum_{j \in J} \left\| \rho_j \cdot \varphi^\partial \right\|_2 \leqslant cst \cdot \sum_{j \in J} \left\| \rho_j \cdot \varphi \right\|_{2,(1)} \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \|\varphi\|_{2,(1)}$$

pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}_+$, d'où le résultat d'après le théorème de densité 6.1.ii.

Démonstration de (ii) D'après le théorème de la divergence 17.7 du cours d'Analyse [9], ce théorème est vrai pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)_{|M}$, d'où le résultat par densité (théorème 6.1.ii) et continuité.

Démonstration de (iii) La démonstration est identique à celle du cours d'Analyse [9], proposition 17.7, en utilisant la règle du produit démontrée dans la proposition ci-dessus.

Démonstration de (iv)

(a) $\Rightarrow$ (b) Par hypothèse il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(M^\circ) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_{|M}$ telle que $\eta = \lim_k \varphi_k$ dans $\mathcal{H}^{(1)}(M)$, donc

$$\eta^\partial = \lim_k (\varphi_k)^\partial = \lim_k \varphi_{k|\partial M} = 0 \ .$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Si $v := \eta \cdot e_j$, on a $\operatorname{div}_M v = \partial_j \eta$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on obtient alors

$$\langle \varphi | \partial_j (\eta_0) \rangle = -\int \overline{\partial_j \varphi} \cdot \eta \, d\lambda_M = -\int (\operatorname{grad} \varphi | v) \ d\lambda_M =$$

$$= \int \overline{\varphi} \cdot \operatorname{div} v \ d\lambda_M - \int \left((\varphi \cdot v)^\partial \middle| \mathfrak{n} \right) \ d\lambda_{\partial M} = \int \overline{\varphi} \cdot (\partial_j \eta)_0 \ d\lambda_{\mathbb{R}^n} = \left\langle \varphi \middle| (\partial_j \eta)_0 \right\rangle \ ,$$

donc $\partial_j (\eta_0) = (\partial_j \eta)_0$.

(c) $\Rightarrow$ (a) A nouveau à l'aide d'une partition de l'unité on se ramène à $]-a, 0] \times V$ (cf. Brezis [3], proposition IX.18, p. 172, ou Willem [13], proposition 18.5, p. 87). ——— $\square$

REMARQUE 2 Le théorème de trace est valable plus généralement : pour tout $p \in [1, \infty[$, il existe une unique application linéaire continue

$$\diamond^\partial : \mathcal{W}^{(1),p}(M) \longrightarrow \mathcal{W}^{\left(1-\frac{1}{p}\right),p}(\partial M)$$

telle que $\varphi^\partial = \varphi_{|\partial M}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_{|M}$. Cette application est surjective et son noyau est $\mathcal{W}^{(1),p,0}(M) := \overline{\mathcal{D}(M^\circ)}^{\mathcal{W}^{(1),p}(M)}$.

En outre dans la formule d'intégration par partie on peut remplacer $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_{|M}$ par $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(M)$.

6.3 Formulation variationnelle du problème de Dirichlet

Nous allons généraliser les résultats sur un intervalle compact du paragraphe 2.5 au cas d'une variété M compacte avec bord de classe $\mathcal{C}^{(1)}$ de $\mathbb{R}^n$ de dimension n .

Considérons tout d'abord le problème de Dirichlet homogène : étant donné une fonction $g \in \mathbf{L}^2(M)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on cherche une fonction f sur M solution du problème inhomogène avec condition aux limites homogène

$$\not{\Delta} f + \lambda \cdot f = g \quad \text{sur } M^\circ$$

et $\qquad (*)$

$$f = 0 \quad \text{sur } \partial M \ .$$

DEFINITION Une *solution . classique* du problème de Dirichlet homogène est une fonction $f \in \mathcal{C}^{(2)}(M)$ satisfaisant à $(*)$. Une solution *faible* est une fonction $\theta \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$ vérifiant

$$\int \left(\overline{\mathrm{gr\not{a}d}\gamma} \middle| \mathrm{gr\not{a}d}\theta \right) d\lambda_M + \lambda \cdot \int \overline{\gamma} \cdot \theta \, d\lambda_M = \int \overline{\gamma} \cdot g \, d\lambda_M \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}(M) \ . \qquad (**)$$

THEOREME

(i) Toute solution classique est une solution faible.

(ii) Pour tout $g \in \mathbf{L}^2(M)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, il existe une unique solution faible $\theta \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$. En outre elle s'obtient en minimisant

$$\gamma \longmapsto \frac{1}{2} \int \left(\left|\mathrm{gr\not{a}d}\gamma\right|^2 + \lambda \cdot |\gamma|^2 \right) d\lambda_M - \mathrm{Re} \int \overline{\gamma} \cdot g \, d\lambda_M : \mathcal{H}^{(1),0}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

(iii) On a $\theta \in \mathcal{H}^{(2)}(M)$, θ est solution de

$$\not{\Delta} f + \lambda \cdot f = g \quad \textit{au sens des distributions sur } M^\circ \quad , \quad f^\partial = 0 \quad \textit{sur } \partial M$$

et l'application

$$(\lambda + \not{\Delta})^{-1} : g \longmapsto \theta : \mathbf{L}^2(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{(2)}(M)$$

est continue.

Si M est de classe $\mathcal{C}^{(m+2)}$ et $g \in \mathcal{H}^{(m)}(M)$, alors $\theta \in \mathcal{H}^{(m+2)}(M)$ et

$$(\lambda + \not{\Delta})^{-1} : g \longmapsto \theta : \mathcal{H}^{(m)}(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{(m+2)}(M)$$

est continue.

En particulier si M est de classe $\mathcal{C}^{(\infty)}$ et $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(M)$, alors $\theta \in \mathcal{C}^{(\infty)}(M)$.

(iv) Plus généralement, pour tout $\mu \in \mathcal{H}^{(-1)}(M)$, il existe une unique solution $\theta \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$ de

$$\not{\Delta} f + \lambda \cdot f = \mu \quad \textit{au sens des distributions sur } M^\circ \quad , \quad f^\partial = 0 \quad \textit{sur } \partial M \ .$$

En outre elle s'obtient en minimisant

$$\gamma \longmapsto \frac{1}{2} \int \left(\left|\mathrm{gr\not{a}d}\gamma\right|^2 + \lambda \cdot |\gamma|^2 \right) d\lambda_M - \mathrm{Re} \langle \gamma | \mu \rangle : \mathcal{H}^{(1),0}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

En particulier

$$(1+\not\Delta) : \mathcal{H}^{(1),0}(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{(-1)}(M)$$

est l'application de Riesz.

Démonstration de (i) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(M^{\circ})$, on a

$$\int \overline{\varphi} \cdot g \, d\lambda_M = \int \overline{\varphi} \cdot (\not\Delta f + \lambda \cdot f) \, d\lambda_M = \int \overline{\varphi} \cdot (\mathrm{d\not{i}v} \ \mathrm{gr\not{a}d} f + \lambda \cdot f) \, d\lambda_M =$$

$$= \int \left(\overline{\mathrm{gr\not{a}d}\varphi} \middle| \mathrm{gr\not{a}d} f \right) d\lambda_M + \lambda \cdot \int \overline{\varphi} \cdot f \, d\lambda_M$$

par la formule d'intégration par partie (théorème 6.2.iii).

Démonstration de (ii) Il suffit dans $\mathcal{H}^{(1),0}(M)$ d'appliquer le théorème de Lax-Milgram 2.4 à la forme hermitienne bornée

$$\mathfrak{s} : (\gamma, \xi) \longmapsto \int \left(\overline{\mathrm{gr\not{a}d}\gamma} \middle| \mathrm{gr\not{a}d}\xi \right) d\lambda_M + \lambda \cdot \int \overline{\gamma} \cdot \xi \, d\lambda_M$$

et à la forme semi-linéaire continue

$$|g\rangle : \gamma \longmapsto \int \overline{\gamma} \cdot g \, d\lambda_M \ ,$$

puisque $(**)$ s'écrit sous la forme

$$\mathfrak{s}(\gamma, \theta) = \langle \gamma | \, g \rangle \ .$$

Remarquons que $\mathfrak{s}$ est coercitive car

$$\mathfrak{s}(\gamma, \gamma) = \int |\mathrm{gr\not{a}d}\gamma|^2 \, d\lambda_M + \lambda \cdot \int |\gamma|^2 \, d\lambda_M \geqslant c \cdot \|\gamma\|_{2,(1)}^2$$

pour une constante $c > 0$ en utilisant l'inégalité de Poincaré comme nous l'avons fait en 2.5.

Démonstration de (iii) Voir Brezis [3], théorème IX.25, p. 181 - 189.

Démonstration de (iv) C'est immédiat en utilisant la formule d'intégration par partie (cf. remarque 6.2.2). Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(M^{\circ})$ et $\gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$, on a

$$\langle \varphi \, | (1+\not\Delta) \, \gamma \rangle = (\varphi | \, \gamma) + (\mathrm{gr\not{a}d}\varphi | \, \mathrm{gr\not{a}d}\gamma) = (\varphi | \, \gamma)_{(1)} \ ,$$

ce qui montre que l'application de Riesz est $(1+\not\Delta)$. $\square$

6.4 L'équation des ondes

On se propose de résoudre une équation d'évolution, celle des ondes :

$$\partial_t^2 u = \Delta u \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times M^\circ \tag{$*$}$$

avec la condition au bord : condition de Dirichlet

$$u(t, \diamond) = 0 \quad \text{sur } \partial M \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+^* \tag{$**$}$$

et les conditions initiales : données de Cauchy

$$u(0, \diamond) = f_0 \quad , \quad \partial_t u(0, \diamond) = f_1 \quad \text{sur } M^\circ \tag{$***$}$$

Si $M = [0, 1]$ c'est l'équation de la corde vibrante, une approximation valable pour de petites oscillations. Si M est une sous-variété compacte avec bord de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 cette équation modélise les petites vibrations d'une membrane élastique.

Il est préférable de ne pas interpréter $(*)$ comme une équation aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}_+^* \times M^\circ$, mais au contraire comme une équation différentielle ordinaire à valeurs vectorielles. Plus précisément soient

$$f(t) := u(t, \diamond)$$

et

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H} : t \longmapsto f(t) \ ,$$

où $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des espaces de Hilbert que nous allons préciser. Nous dirons que $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathcal{G}$ est dérivable dans $\mathcal{H}$ de dérivée

$$\partial f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathcal{H} : t \longmapsto \partial f(t)$$

si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\partial f(t) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot [f(t+h) - f(t)] \quad \text{existe dans } \mathcal{H} \ .$$

Puisque Δ_M est un opérateur de $\mathcal{H}^{(1)}(M)$ dans $\mathcal{H}^{(-1)}(M)$, il est naturel de considérer

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathcal{H}^{(1),0}(M) : t \longmapsto f(t) \ ,$$

puisque la condition de Dirichlet signifie que $f(t) \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$. La première dérivée de f se calculera dans $\mathbf{L}^2(M)$, tandis que la seconde sera prise dans $\mathcal{H}^{(-1)}(M) = \mathcal{H}^{(1),0}(M)^\dagger$.

Nous supposerons que M est compacte et remarquons que l'opérateur

$$\Delta : \mathcal{H}^{(1),0}(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{(-1)}(M)$$

est continu et strictement positif : tout d'abord pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(M^\circ)$, on a

$$\langle \varphi | \Delta \varphi \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \varphi | \partial_j^2 \varphi \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \partial_j \varphi | \partial_j \varphi \rangle = \|\operatorname{grad} \varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(M)^n} \geqslant \varepsilon \cdot \|\varphi\|_2^2$$

pour un $\varepsilon > 0$ grâce à l'inégalité de Poincaré (cf. théorème 5.7.iv). Par continuité et densité on en déduit

$$\langle \xi | \Delta \gamma \rangle \geqslant \varepsilon \cdot \|\gamma\|_2^2 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}(M) \ .$$

Utilisant le théorème de régularité 6.1.iv et la théorie spectrale des operateur compact, on peut montrer qu'il existe une base hilbertienne $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}^{(1),0}(M)$ dans laquelle $\not\Delta$ est diagonalisable, i.e. il existe $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ (puisque $\not\Delta$ est strictement positif) tel que, pour tout $\gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$, on ait

$$\not\Delta\gamma = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \cdot (\epsilon_k|\,\gamma)_{(1)} \cdot \epsilon_k \ .$$

En particulier $\not\Delta\epsilon_k = \lambda_k\cdot\epsilon_k$ et le théorème de régularité 6.3.iii avec $\lambda := 0$ et $g := \lambda_k\cdot\epsilon_k \in \mathbf{L}^2(M)$ montre que $\epsilon_k \in \mathcal{H}^{(2)}(M)$. En outre en intégrant par partie (cf. théorème 6.2.iii) on obtient

$$(\epsilon_k|\,\gamma)_{(1)} = (\epsilon_k|\,\gamma) + (\mathrm{gr\not{a}d}\,\epsilon_k|\,\mathrm{gr\not{a}d}\,\gamma) = (\epsilon_k\,|\gamma) + \int \overline{\mathrm{d\not{i}v}\ \mathrm{gr\not{a}d}\,\epsilon_k} \cdot \gamma =$$

$$= (\epsilon_k|\,\gamma) + (\not\Delta\epsilon_k|\,\gamma) = (1+\lambda_k)\cdot(\epsilon_k|\,\gamma) \ .$$

En particulier pour tout $k, l \in \mathbb{N}$,

$$(1+\lambda_k)\cdot(\epsilon_k\,|\epsilon_l\,) = (\epsilon_k\,|\epsilon_l\,)_{(1)} = \delta_{k,l} \ .$$

Nous avons donc montré que $\left(\sqrt{1+\lambda_k}\cdot\epsilon_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(M)$. D'autre part l'application de Riesz

$$(1+\not\Delta) : \mathcal{H}^{(1),0}(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{(-1)}(M)$$

est un isomorphisme d'espace hilbertien, donc

$$(1+\lambda_k)\cdot(\epsilon_k|\,(1+\not\Delta)\,\gamma)_{(-1)} = ((1+\not\Delta)\,\epsilon_k|\,(1+\not\Delta)\,\gamma)_{(-1)} =$$

$$= (\epsilon_k|\,\gamma)_{(1)} = (1+\lambda_k)\cdot(\epsilon_k|\,\gamma)$$

et $((1+\not\Delta)\,\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} = ((1+\lambda_k)\cdot\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}^{(-1)}(M)$.

Pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(M)$, si $\xi = (1+\not\Delta)\,\gamma$ pour un $\gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$, il vient alors

$$(1+\lambda_k)\cdot(\epsilon_k|\,\xi)_{(-1)} = ((1+\not\Delta)\,\epsilon_k|\,\gamma) = \int \overline{(1+\not\Delta)\,\epsilon_k}\cdot\gamma =$$

$$= \int \overline{\epsilon_k}\cdot(1+\not\Delta)\,\gamma = (\epsilon_k|\,\xi)$$

en ayant intégré deux fois par parties, les termes sur le bord étant nuls puisque $\epsilon_k, \gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$.

Si $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathcal{H}^{(1),0}(M) : t \longmapsto f(t)$ est deux fois continûment dérivable, la première fois dans $\mathbf{L}^2(M)$, la seconde dans $\mathcal{H}^{(-1)}(M)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, il vient

$$\not\partial\,(\epsilon_k|\,f)\,(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i\cdot h}\cdot\left(\epsilon_k\,\middle|\,f(t+h)-f(t)\right) =$$

$$= \left(\epsilon_k\,\middle|\,\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i\cdot h}\cdot\left(f(t+h)-f(t)\right)\right) = (\epsilon_k|\,\not\partial f(t)) \ ,$$

donc

$$\not\partial\,(\epsilon_k|\,f)_{(1)} = (1+\lambda_k)\cdot(\epsilon_k|\,\not\partial f(t))$$

et

$$\not\partial\,(\epsilon_k|\,\not\partial f)_{(-1)}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i\cdot h}\cdot\left(\epsilon_k\,\middle|\,\not\partial f(t+h)-\not\partial f(t)\right)_{(-1)} =$$

$$= \left(\epsilon_k \middle| \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi i \cdot h} \cdot \left(\partial\!\!\!/ f(t+h) - \partial\!\!\!/ f(t)\right)\right)_{(-1)} = \left(\epsilon_k \middle| \partial\!\!\!/^2 f(t)\right)_{(-1)} ,$$

donc

$$\partial\!\!\!/^2 (\epsilon_k | f)_{(1)} = (1+\lambda_k) \cdot \partial\!\!\!/ (\epsilon_k | \partial\!\!\!/ f) = (1+\lambda_k)^2 \cdot \partial\!\!\!/ (\epsilon_k | \partial\!\!\!/ f)_{(-1)} = (1+\lambda_k)^2 \cdot \left(\epsilon_k \middle| \partial\!\!\!/^2 f\right)_{(-1)} .$$

Puisque $\partial\!\!\!/ f(t) \in \mathbf{L}^2(M)$ et $\partial\!\!\!/^2 f(t) \in \mathcal{H}^{(-1)}(M)$, on obtient alors

$$\partial\!\!\!/ f(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k \middle| \partial\!\!\!/ f(t)\right) \cdot \sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \partial\!\!\!/ (\epsilon_k | f)_{(1)}(t) \cdot \epsilon_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}} \cdot \partial\!\!\!/ \left((\epsilon_k | f)_{(1)}\right)(t) \cdot \sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k$$

et

$$\partial\!\!\!/^2 f(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left((1+\lambda_k) \cdot \epsilon_k \middle| \partial\!\!\!/^2 f(t)\right)_{(-1)} \cdot (1+\lambda_k) \cdot \epsilon_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \partial\!\!\!/^2 (\epsilon_k | f)_{(1)}(t) \cdot \epsilon_k =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+\lambda_k} \cdot \partial\!\!\!/^2 (\epsilon_k | f)_{(1)}(t) \cdot (1+\lambda_k) \cdot \epsilon_k .$$

D'autre part, puisque $\Delta\!\!\!/ : \mathcal{H}^{(1),0}(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{(-1)}(M)$ est continu, on a

$$\Delta\!\!\!/ f(t) = \Delta\!\!\!/ \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} (\epsilon_k | f(t))_{(1)} \cdot \epsilon_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_k}{1+\lambda_k} \cdot (\epsilon_k | f(t))_{(1)} \cdot (1+\lambda_k) \cdot \epsilon_k .$$

Dans ce cas f est solution de

$$\partial\!\!\!/^2 f = \Delta\!\!\!/ f \quad \text{dans } \mathcal{H}^{(-1)}(M)$$

si, et seulement si,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+\lambda_k} \cdot \partial\!\!\!/^2 (\epsilon_k | f)_{(1)} \cdot (1+\lambda_k) \cdot \epsilon_k = \partial\!\!\!/^2 f =$$

$$= \Delta\!\!\!/ f(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_k}{1+\lambda_k} \cdot (\epsilon_k | f)_{(1)} \cdot (1+\lambda_k) \cdot \epsilon_k ,$$

ce qui est équivalent à

$$\partial\!\!\!/^2 (\epsilon_k | f)_{(1)} = \lambda_k \cdot (\epsilon_k | f)_{(1)} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} .$$

La solution générale est évidemment de la forme

$$(\epsilon_k | f)_{(1)} = A_k \cdot \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot \diamond\right) + B_k \cdot \frac{i \cdot \sqrt{1+\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot \diamond\right) .$$

Les conditions initiales

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} A_k \cdot \epsilon_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\epsilon_k | f)_{(1)}(0) \cdot \epsilon_k =$$

$$= f(0) = f_0 = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\epsilon_k | f_0)_{(1)} \cdot \epsilon_k \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$$

et

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} B_k \cdot \sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}} \cdot \partial\!\!\!/ \left((\epsilon_k | f)_{(1)}\right)(0) \cdot \sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k =$$

$$= \partial\!\!\!/ f(0) = f_1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k \middle| f_1 \right) \cdot \sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k \in \mathbf{L}^2(M)$$

montrent alors que

$$(\epsilon_k | f)_{(1)} = (\epsilon_k | f_0)_{(1)} \cdot \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot \diamond\right) + \left(\sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k \middle| f_1 \right) \cdot \frac{i \cdot \sqrt{1+\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot \diamond\right) ,$$

donc que

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[(\epsilon_k | f_0)_{(1)} \cdot \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot \diamond\right) + \left(\sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k \middle| f_1 \right) \cdot \frac{i \cdot \sqrt{1+\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot \diamond\right) \right] \cdot \epsilon_k .$$

Ceci prouve l'unicité. Pour l'existence il suffit de montrer que f définie par cette formule est deux fois continûment dérivable. Remarquons que la suite des coefficients est de carré sommable ! Soit

$$F_1 := \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[(\epsilon_k | f_0)_{(1)} \cdot \frac{i \cdot \sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{1+\lambda_k} \cdot} \cdot \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot \diamond\right) \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k \middle| f_1 \right) \cdot \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot \diamond\right) \right] \cdot \sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k \in \mathbf{L}^2(M)$$

et

$$F_2 := \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[(\epsilon_k | f_0)_{(1)} \cdot \frac{\lambda_k}{1+\lambda_k} \cdot \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot \diamond\right) \right.$$

$$\left. - \left(\sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k \middle| f_1 \right) \cdot \frac{i \cdot \sqrt{\lambda_k} \cdot}{\sqrt{1+\lambda_k}} \cdot \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot \diamond\right) \right] \cdot (1+\lambda_k) \cdot \epsilon_k \in \mathcal{H}^{(-1)}(M) .$$

Mais

$$\left\| \frac{1}{2\pi i \cdot h} \cdot \Big(f(t+h) - f(t) \Big) - F_1(t) \right\|_2^2 =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{(\epsilon_k | f_0)_{(1)}}{i \cdot \sqrt{1+\lambda_k}} \cdot \left[\frac{\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot (t+h)\right) - \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot t\right)}{2\pi \cdot h} + \sqrt{\lambda_k} \cdot \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot t\right) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\sqrt{1+\lambda_k} \cdot \epsilon_k \middle| f_1\right)}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \left[\frac{\sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot (t+h)\right) - \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot t\right)}{2\pi \cdot h} - \sqrt{\lambda_k} \cdot \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot t\right) \right] \right|^2$$

tend vers 0 par le théorème de Lebesgue dans $\ell^2(\mathbb{N}) = \mathbf{L}^2(\mathbb{N}, \#)$, puisque par exemple en utilisant la formule des accroissements finis, il existe un $t_{k,h}$ entre t et $t+h$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}} \cdot \left| \frac{\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot (t+h)\right) - \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot t\right)}{2\pi \cdot h} + \sqrt{\lambda_k} \cdot \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot t\right) \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{1+\lambda_k}} \cdot \left| \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot t_{k,h}\right) + \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k} \cdot t\right) \right| \leqslant 2 .$$

On démontre de la même manière que

$$\left\| \frac{1}{2\pi i \cdot h} \cdot \Big(F_1(t+h) - F_1(t) \Big) - F_2(t) \right\|_2^2 =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{(\epsilon_k|\, f_0)_{(1)} \cdot \sqrt{\lambda_k}}{1+\lambda_k} \cdot \left[\frac{\sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot(t+h)\right) - \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot t\right)}{2\pi\cdot h} - \sqrt{\lambda_k}\cdot\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot t\right)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\left(\sqrt{1+\lambda_k}\cdot\epsilon_k\middle|\, f_1\right)}{i\cdot\sqrt{1+\lambda_k}} \cdot \left[\frac{\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot(t+h)\right) - \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot t\right)}{2\pi\cdot h} - \sqrt{\lambda_k}\cdot\sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot t\right)\right]\right|^2$$

tend vers 0 .

Nous avons donc démontré le

THEOREME *Si $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}^{(1),0}(M)$ dans laquelle $\not\Delta$ est diagonalisable et $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ sont les valeurs propres correspondantes, alors l'équation des ondes*

$$\not\partial^2 f = \not\Delta f$$

possède une unique solution dans

$$\mathcal{H}^{(1),0}(M) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(M) \hookrightarrow \mathcal{H}^{(-1)}(M)$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$f(0) = f_0 \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$$

et

$$\not\partial f(0) = f_1 \in \mathbf{L}^2(M) \ \ .$$

Elle est de la forme

$$f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left[(\epsilon_k|\, f_0)_{(1)} \cdot \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot\diamond\right) \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{1+\lambda_k}\cdot\epsilon_k\middle|\, f_1\right) \cdot \frac{i\sqrt{1+\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot\diamond\right)\right] \cdot \epsilon_k \in \mathcal{H}^{(1),0}(M)$$

et

$$\not\partial f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left[(\epsilon_k|\, f_0)_{(1)} \cdot \frac{i\cdot\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{1+\lambda_k}\cdot} \cdot \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot\diamond\right) \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{1+\lambda_k}\cdot\epsilon_k\middle|\, f_1\right) \cdot \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot\diamond\right)\right] \cdot \sqrt{1+\lambda_k}\cdot\epsilon_k \in \mathbf{L}^2(M) \ \ ,$$

$$\not\partial^2 f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left[(\epsilon_k|\, f_0)_{(1)} \cdot \frac{\lambda_k}{1+\lambda_k} \cdot \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot\diamond\right) \right.$$

$$\left. - \left(\sqrt{1+\lambda_k}\cdot\epsilon_k\middle|\, f_1\right) \cdot \frac{i\cdot\sqrt{\lambda_k}\cdot}{\sqrt{1+\lambda_k}} \cdot \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda_k}\cdot\diamond\right)\right] \cdot (1+\lambda_k)\cdot\epsilon_k \in \mathcal{H}^{(-1)}(M) \ \ .$$

EXEMPLE (La corde vibrante)

La suite $(\sin(k\pi\cdot))_{k\geqslant 1} \subset \mathcal{H}^{(1),0}([0,1])$ est formées de fonctions propres de $\not\Delta := \not\partial^2$ de valeurs propres $\left(\frac{k^2}{4}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. D'autre part nous savons que $\left(\sqrt{2}\cdot\sin(k\pi\cdot)\right)_{k\geqslant 1}$ et $(1)\cup\left(\sqrt{2}\cdot\cos(k\pi\cdot)\right)_{k\geqslant 1}$

sont des bases hilbertiennes de $\mathbf{L}^2([0,1])$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}([0,1])$ et tout $k \geqslant 1$, on a

$$(\sin(k\pi\cdot)|\,\gamma)_{(1)} = (\sin(k\pi\cdot)|\,\gamma) + (\partial\!\!\!/ \sin(k\pi\cdot)|\,\partial\!\!\!/\gamma) =$$

$$= (\sin(k\pi\cdot)|\,\gamma) + i\cdot\frac{k}{2}\cdot\int_0^1 \overline{\cos(k\pi\cdot)}\cdot\partial\!\!\!/\gamma = (\sin(k\pi\cdot)|\,\gamma) + i\cdot\frac{k}{2}\cdot\int_0^1 \overline{\partial\!\!\!/\cos(k\pi\cdot)}\cdot\gamma =$$

$$= (\sin(k\pi\cdot)|\,\gamma) + \frac{k^2}{4}\cdot(\sin(k\pi\cdot)|\,\gamma) = \left(1+\frac{k^2}{4}\right)\cdot(\sin(k\pi\cdot)|\,\gamma)\ .$$

Si γ est orthogonal à $(\sin(k\pi\cdot))_{k\geqslant 1}$ dans $\mathcal{H}^{(1),0}([0,1])$, on en déduit que $\gamma = 0$, puisque $(\sin(k\pi\cdot))_{k\geqslant 1}$ est total dans $\mathbf{L}^2([0,1])$. Ceci montre que $(\sin(k\pi\cdot))_{k\geqslant 1}$ est total dans $\mathcal{H}^{(1),0}([0,1])$. D'autre part

$$(\sin(k\pi\cdot)|\,\sin(l\pi\cdot))_{(1)} = \left(1+\frac{k^2}{4}\right)\cdot(\sin(k\pi\cdot)|\,\sin(l\pi\cdot)) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{k^2}{4}\right)\cdot\delta_{k,l}\ ,$$

donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}}\cdot\sin(k\pi\cdot)\right)_{k\geqslant 1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}^{(1),0}([0,1])$ diagonalisant

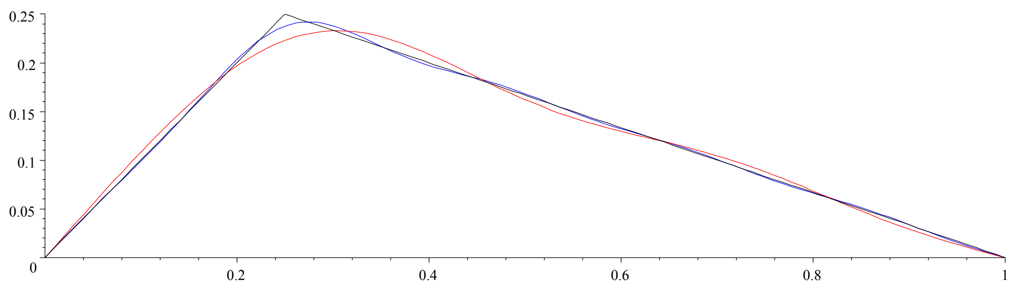
$$\Delta\!\!\!\!/ : \mathcal{H}^{(1),0}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{H}^{(-1)}([0,1])\ .$$

En outre $\left(\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(k\pi\cdot)\right)_{k\geqslant 1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}^{(-1)}([0,1])$

Sur $[0,1]$ considérons les fonctions initiales

$$f_0 := b\cdot\min\left(\frac{\mathrm{id}}{a},\frac{1-\mathrm{id}}{1-a}\right) \quad \text{et} \quad f_1 = 0\ .$$

Pour $a = b = \frac{1}{4}$, on a le graphe suivant :



$\min\left(\mathrm{id},\frac{1}{3}(1-\mathrm{id})\right)$: en noir

$\frac{8}{3\pi^2}\sum_{k=1}^{5}\frac{\sin\frac{k\pi}{4}}{k^2}\cdot\sin(k\pi x)$: en rouge

$\frac{8}{3\pi^2}\sum_{k=1}^{10}\frac{\sin\frac{k\pi}{4}}{k^2}\cdot\sin(k\pi x)$: en bleu

Calculons les coefficients de Fourier de f_0 : il vient

$$\int_0^1 \sin(k\pi x)\cdot\min\left(\frac{x}{a},\frac{1-x}{1-a}\right)\,dx = \frac{1}{a(1-a)}\cdot\frac{\sin ak\pi}{k^2\pi^2}\ ,$$

donc

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}}\cdot\sin(k\pi\cdot)\,\middle|\, b\cdot\min\left(\frac{x}{a},\frac{1-x}{1-a}\right)\right)_{(1)} =$$

$$= b\cdot\left(1+\frac{k^2}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}}\cdot\left(\sin(k\pi\cdot)\,\middle|\min\left(\frac{x}{a},\frac{1-x}{1-a}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{b}{a(1-a)}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}}{k^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin ak\pi$$

et par suite

$$f(t) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{b}{a(1-a)}\cdot\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}}{k^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin ak\pi\cdot\cos(k\pi\cdot t)\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}}\cdot\sin(k\pi\cdot) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{b}{a(1-a)}\cdot\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sin ak\pi}{k^2}\cdot\cos(k\pi\cdot t)\cdot\sin(k\pi\cdot)\in\mathcal{H}^{(1),0}([0,1])$$

La deuxième dérivée (par rapport au temps) est

$$\partial^2 f(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a(1-a)}\cdot\sum_{k\geqslant 1}\sin ak\pi\cdot\cos(k\pi\cdot t)\cdot\sin(k\pi\cdot)\in\mathcal{H}^{(-1)}([0,1]) \ .$$

Sous cette forme la série converge dans $\mathcal{D}(]0,1[)^*$, mais aussi dans $\mathcal{H}^{(-1)}([0,1])$ en l'écrivant sous la forme

$$\partial^2 f(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{b}{a(1-a)}\cdot\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sin ak\pi}{\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}}\cdot\cos(k\pi\cdot t)\cdot\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(k\pi\cdot) \ ,$$

puisque $\left(\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(k\pi\cdot)\right)_{k\geqslant 1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}^{(-1)}([0,1])$ et

$$\left(\frac{\sin ak\pi}{\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}}\cdot\cos(k\pi\cdot t)\right)_{k\geqslant 1}\in\ell^2(\mathbb{N}^*) \ .$$