Chapitre 4

THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

Dans tout ce qui suit
X **est un ouvert de** $\mathbb{R}^n$ **,**
ou plus généralement
une sous-variété avec bord de $\mathbb{R}^n$ **.**

Version du 5 février 2005

4.1 La notion de distribution

Rappelons que $\mathcal{D}(X)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions complexes indéfiniment dérivables à support compact dans X . L'exemple standard d'une telle fonction est

$$\rho(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{(|x|^2-1)}} & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

DEFINITION 1 Nous dirons qu'une forme linéaire

$$\mu : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \mu(\varphi) \ ,$$

i.e. un élément du dual algébrique $\mathcal{D}(X)^*$ de $\mathcal{D}(X)$, est une *distibution (algébrique)* sur X .

Par compatibilité avec le produit scalaire de $\mathbf{L}^2(X)$, introduisons la semi-dualité entre $\mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{D}(X)^*$ définie par

$$\langle \varphi | \mu \rangle := \mu(\overline{\varphi}) \ .$$

Remarquons que

$$|\mu\rangle : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \langle \varphi | \mu \rangle$$

est une forme semi-linéaire. En d'autres termes la correspondance bijective entre formes linéaires et formes semi-linéaires $\mu \longmapsto |\mu\rangle$ nous permet de considérer μ comme une forme semi-linéaire. Nous ne ferrons pas de distinction, ce formalisme dû à Dirac étant suffisamment explicite !

Nous écrirons $\langle \varphi | \mu \rangle_{\mathcal{D}(X)}$ si cela est nécessaire.

REMARQUE La notion de distribution habituelle nécessite encore une condition de continuité pour restreindre la classe d'objets considérés et obtenir des théorèmes de structure intéressants. Il n'est pas nécessaire dans beaucoup de situations de connaître explicitement la topologie localement convexe (non-métrisable) à introduire ; en effet on peut voir qu'une forme linéaire $\mu \in \mathcal{D}(X)^*$ est continue, i.e. $\mu \in \mathcal{D}(X)'$ si, et seulement si, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ et toute suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(X)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\lim_k \partial^\alpha \varphi_k = 0$ uniformément pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $\lim_k \langle \varphi_k | \mu \rangle = 0$.

Nous n'en n'aurons pas besoin dans la suite, sauf dans certaine remarques pour bien montrer les limites de la notion de distribution algébrique (voir par exemple la remarque 5.4.2). Pour plus de détails le lecteur peut consulter mon cours d'Analyse fonctionnelle [10], chap. 4.

Rappelons que la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{D}(X)^*$ est donnée (dans la notation semi-linéaire !), pour tout $\mu, \nu \in \mathcal{D}(X)^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, par

$$\langle \varphi | \alpha \cdot \mu \rangle = \alpha \cdot \langle \varphi | \mu \rangle \quad \text{et} \quad \langle \varphi | \mu + \nu \rangle = \langle \varphi | \mu \rangle + \langle \varphi | \nu \rangle \ .$$

PROPOSITION *Pour tout $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$, on considère la distribution sur X*

$$|f\rangle : \varphi \longmapsto \langle \varphi | f \rangle := \int \overline{\varphi} \cdot f = \int \overline{\varphi(x)} \cdot f(x)\, dx : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

L'application

$$f \longmapsto |f\rangle : \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)^*$$

est linéaire et injective.

Cela signifie que la forme linéaire $|f\rangle$ détermine parfaitement la classe $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ ou bien la fonction f à un ensemble de mesure nulle près. C'est évident puisque $\mathcal{D}(X)$ est un espace-test (cf. exemple 1.4.3). □

Ceci montre que les distributions sont des “fonctions généralisées” .

DEFINITION 2 Pour tout $x \in X$, on dit que la forme linéaire d'évaluation en x

$$\delta_x : \varphi \longmapsto \varphi(x)$$

est la *distribution de Dirac* en x . Si X est une partie de $\mathbb{R}^n$ et $0 \in X$, on écrit souvent δ à la place de δ_0 .

EXEMPLE 1 Pour $x \in X$, la distribution de Dirac $\delta_x \in \mathcal{D}(X)^*$, n'est pas de la forme $|f\rangle$ pour un $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$.

La démonstration est laissée en exercice.

EXEMPLE 2 Soit α une fonction croissante sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$. Il est clair que

$$\lambda_\alpha : \varphi \longmapsto \int \varphi(t)\, d\alpha(t)$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(J)$, i.e une distribution sur J (cf. cours d'Analyse [9], exemple 14.6.2)

Par exemple

$$\lambda := \lambda_{\mathrm{id}} : \varphi \longmapsto \int \varphi$$

est l'intégrale de Lebesgue. Avec les notations ci-dessus on a

$$\langle \varphi | \lambda_J \rangle = \int \varphi\, d\lambda_J = \Big\langle \varphi \Big| |1\rangle \Big\rangle \ ,$$

i.e. l'intégrale de Lebesgue λ_J est la fonction généralisée 1 !

DEFINITION 3 Pour tout $t \in J$, on pose $h_t := 1_{[t,\infty[\cap J}$ et on dit que c'est la *fonction de Heaviside* en t . Si $0 \in J$, on écrit par commodité h à la place de h_0 .

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(J)$, on a

$$\langle \varphi | \lambda_{h_t} \rangle = \int \overline{\varphi}\, dh_t = \overline{\varphi(t)} = \langle \varphi | \delta_t \rangle \ ,$$

ce qui montre que $\lambda_{h_t} = \delta_t$ est la distribution de Dirac en t .

EXEMPLE 3 La fonction α strictement croissante et continue, dont le graphe est en première approximation esquissé dans la figure qui suit définit la mesure de Hausdorff sur l'ensemble de Cantor. Rappelons que cet ensemble a une mesure de Lebesgue nulle !

4.2 Dérivation

Si $f \in \mathcal{C}^{(1)}(X)$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| \left|\partial_j f\right\rangle \right\rangle = \int \overline{\varphi} \cdot \partial_j f = -\int \overline{\partial_j \varphi} \cdot f = -\left\langle \partial_j \varphi \middle| \left|f\right\rangle \right\rangle$$

en ayant utilisé une partition de l'unité, le théorème de Fubini et la formule d'intégration par parties. Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION 1 Pour tout $\mu \in \mathcal{D}(X)^*$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit une distribution $\partial_j \mu$ par

$$\langle \varphi | \partial_j \mu \rangle := -\langle \partial_j \varphi | \mu \rangle \ ,$$

dite la *dérivée partielle* de μ *(au sens des distributions)* . Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on pose $|\alpha| := |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|$ et on définit la distribution $\partial^\alpha \mu$ par

$$\langle \varphi | \partial^\alpha \mu \rangle := (-1)^{|\alpha|} \cdot \langle \partial^\alpha \varphi | \mu \rangle \ .$$

Le calcul du début montre par récurrence que :

PROPOSITION *Si $f \in \mathcal{C}^{(k)}(X)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leqslant k$, la dérivée au sens des distributions coïncide avec la dérivée classique $\partial^\alpha f$, i.e.*

$$\partial^\alpha |f\rangle = |\partial^\alpha f\rangle \ .$$

Nous travaillons dans les exemples qui suivent dans l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle J de $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 1 Calculons

$$\left\langle \varphi \middle| \partial \left||\mathrm{id}|\right\rangle \right\rangle = -\left\langle \partial\varphi \middle| \left||\mathrm{id}|\right\rangle \right\rangle = -\int \overline{\partial\varphi(s)} \cdot |s| \, ds = \int_{-\infty}^0 \overline{\partial\varphi(s)} \cdot s \, ds - \int_0^\infty \overline{\partial\varphi(s)} \cdot s \, ds =$$

$$= -\int_{-\infty}^0 \overline{\varphi(s)} \, ds + \int_0^\infty \overline{\varphi(s)} \, ds = \int \overline{\varphi(s)} \cdot \mathrm{signum}(s) \, ds = \left\langle \varphi \middle| \left|\mathrm{signum}\right\rangle \right\rangle \ .$$

Ceci montre que

$$\partial \left||\mathrm{id}|\right\rangle = |\mathrm{signum}\rangle \ .$$

EXEMPLE 2 De même, on a

$$\left\langle \varphi \middle| \partial \left|\mathrm{signum}\right\rangle \right\rangle = -\left\langle \partial\varphi \middle| \left|\mathrm{signum}\right\rangle \right\rangle = \int_{-\infty}^0 \overline{\partial\varphi(s)} \, ds - \int_0^\infty \overline{\partial\varphi(s)} \, ds =$$

$$= \overline{\varphi(0)} + \overline{\varphi(0)} = \langle \varphi | 2 \cdot \delta \rangle \ ,$$

ce qui montre que

$$\partial \left|\mathrm{signum}\right\rangle = 2\delta \ .$$

Avec un calcul analogue on obtient

$$\partial \left| h_t \right\rangle = \delta_t \ .$$

Plus généralement :

EXEMPLE 3 Soit α une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\Delta = (t_j)$ une subdivision d'un intervalle contenant le support de φ , il existe $s_j \in [t_j, t_{j+1}]$ tel que

$$\partial\varphi(s_j) = \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \ .$$

Grâce au théorème de Lebesgue, il vient alors

$$\left\langle \varphi \middle| \left|\alpha\right\rangle \right\rangle = -\left\langle \partial\varphi \middle| \left|\alpha\right\rangle \right\rangle = -\int \overline{\partial\varphi(x)} \cdot \alpha(x-)\ dx =$$

$$= -\lim_{fin(\Delta)\to 0} \sum \overline{\partial\varphi(s_j)} \cdot \alpha(t_{j+1}-) \cdot (t_{j+1} - t_j) =$$

$$= -\lim_{fin(\Delta)\to 0} \sum \left[\overline{\varphi(t_{j+1})} - \overline{\varphi(t_j)}\right] \cdot \alpha(t_{j+1}-) =$$

$$= -\lim_{fin(\Delta)\to 0} \left[\sum \overline{\varphi(t_j)} \cdot \alpha(t_j-) - \sum \overline{\varphi(t_j)} \cdot \alpha(t_{j+1}-)\right] =$$

$$= \lim_{fin(\Delta)\to 0} \sum \overline{\varphi(t_j)} \cdot [\alpha(t_{j+1}-) - \alpha(t_j-)] = \int \overline{\varphi}\, d\alpha = \langle \varphi | \lambda_\alpha \rangle \ ,$$

car $\sum \overline{\partial\varphi(s_j)} \cdot 1_{[t_j,t_{j+1}[}$ converge ponctuellement vers $\overline{\partial\varphi}$ et $\sum \alpha(t_{j+1}-) \cdot 1_{[t_j,t_{j+1}[}$ vers $\alpha(\diamond-)$. Ainsi $\partial\left|\alpha\right\rangle = \lambda_\alpha$. □

Avant la théorie des distributions, les électrotechniciens et les physiciens ont "résolu" le problème de l'impulsion initiale ou du choc d'une boule de billard en introduisant un nouvel objet δ , dite fonction de Dirac , ayant les propriétés suivantes :

$$\delta(t) = 0 \text{ pour tout } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \delta(0) = \infty \ ,$$

mais

$$\int \delta(t)\ dt = 1\,!$$

On en "déduisait" que

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(s)\ ds \quad \text{, i.e.} \quad \partial h = \delta \ ,$$

puis que

$$\int \varphi(t) \cdot \delta(t)\ dt = \Big[\varphi(t) \cdot h(t)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int \partial\varphi(t) \cdot h(t)\ dt = -\int_0^\infty \partial\varphi(t)\ dt = \varphi(0) \ .$$

Ces calculs sont analogues à ceux que nous avons fait ci-dessus, la seule différence provenant du fait que les objets avec lesquels nous travaillons sont mathématiquement bien définis.

EXEMPLE 4 Soient F une fonction localement absolument continue sur J . On a

$$\partial\left|F\right\rangle = \left|f\right\rangle \ ,$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(J)$, puisque

$$1_{\tau,t}(s) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau \leqslant s < t$$

et

$$1_{\tau,t}(s) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad t \leqslant s < \tau \ ,$$

grâce au théorème de Fubini on obtient

$$\left\langle \varphi \middle| \partial |F\rangle \right\rangle = -\left\langle \partial\varphi \middle| |F\rangle \right\rangle = -\int \overline{\partial\varphi(t)} \cdot F(\tau)\, dt - \int \overline{\partial\varphi(t)} \cdot \left(\int_\tau^t f(s)\, ds \right) dt =$$

$$= -\int \overline{\partial\varphi(t)} \cdot \left(\int 1_{\tau,t}(s) \cdot f(s)\, ds \right) dt =$$

$$= -\int_\tau^{\sup J} \left(\int_s^{\sup J} \overline{\partial\varphi(t)}\, dt \right) \cdot f(s)\, ds + \int_{\inf J}^\tau \left(\int_{\inf J}^s \overline{\partial\varphi(t)}\, dt \right) \cdot f(s)\, ds =$$

$$= \int_\tau^{\sup J} \overline{\varphi(s)} \cdot f(s)\, ds + \int_{\inf J}^\tau \overline{\varphi(s)} \cdot f(s)\, ds = \int \overline{\varphi(s)} \cdot f(s)\, ds = \left\langle \varphi \middle| |f\rangle \right\rangle \ .$$

$\square$

4.3 Multiplication, translation et dilatation

Soit $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ et $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a alors

$$\left\langle \varphi \middle| \, |g \cdot f\rangle \right\rangle = \int \overline{\varphi} \cdot g \cdot f = \left\langle \overline{g} \cdot \varphi \middle| \, |f\rangle \right\rangle$$

puisque $\overline{g} \cdot \varphi \in \mathcal{D}(X)$. Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION 1 Pour tout $\mu \in \mathcal{D}(X)^*$ et $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$, on définit la distribution *produit* $g \cdot \mu$ de μ par g en posant

$$\langle \varphi | \, g \cdot \mu \rangle := \langle \overline{g} \cdot \varphi | \, \mu \rangle \ .$$

Le calcul du début montre que, pour tout $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$, on a

$$g \cdot |f\rangle = |g \cdot f\rangle \ .$$

EXEMPLE Pour tout $x \in X$, on a $g \cdot \delta_x = g(x) \cdot \delta_x$.

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, il vient

$$\langle \varphi | \, g \cdot \delta_x \rangle = \langle \overline{g} \cdot \varphi | \, \delta_x \rangle = \overline{\overline{g} \cdot \varphi}(x) = g(x) \cdot \overline{\varphi(x)} = g(x) \cdot \langle \varphi | \, \delta_x \rangle = \langle \varphi | \, g(x) \cdot \delta_x \rangle \ .$$

□

PROPOSITION (Règle du produit) *Pour tout $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ et $\mu \in \mathcal{D}(X)^*$, on a*

$$\partial_j (g \cdot \mu) = \partial_j g \cdot \mu + g \cdot \partial_j \mu \ .$$

En effet

$$\langle \varphi | \, \partial_j g \cdot \mu + g \cdot \partial_j \mu \rangle = \left\langle \overline{\partial_j g} \cdot \varphi \middle| \, \mu \right\rangle + \langle \overline{g} \cdot \varphi | \, \partial_j \mu \rangle = \left\langle \overline{\partial_j g} \cdot \varphi \middle| \, \mu \right\rangle - \langle \partial_j (\overline{g} \cdot \varphi) | \, \mu \rangle =$$

$$= - \langle \overline{g} \cdot \partial_j \varphi | \, \mu \rangle = - \langle \partial_j \varphi | \, g \cdot \mu \rangle \langle , \rangle = \langle \varphi | \, \partial_j (g \cdot \mu) \rangle \ .$$

□

REMARQUE Par récurrence on démontre la formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha (g \cdot \mu) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \partial^\beta g \cdot \partial^{\alpha - \beta} \mu \ .$$

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on définit la *fonction translatée* $T_y f = f_y$ par

$$f_y(x) := f(x - y) \ .$$

Si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| \, |f_y\rangle \right\rangle = \int \overline{\varphi(x)} \cdot f(x - y) \, dx = \int \overline{\varphi(x + y)} \cdot f(x) \, dx = \left\langle \varphi_{-y} \middle| \, |f\rangle \right\rangle \ .$$

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION 2 Si $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$, la *distribution translatée* $T_y\mu = \mu_y$ est définie par

$$\langle \varphi | \mu_y \rangle := \langle \varphi_{-y} | \mu \rangle \ .$$

Le calcul ci-dessus montre que

$$|f\rangle_y = |f_y\rangle \ .$$

Il est évident que h_t et δ_t sont les translatées de h et δ .

PROPOSITION (Invariance par translation de la dérivation) *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ *et* $y \in \mathbb{R}^n$ *, on a*

$$\partial^\alpha (\mu_y) = (\partial^\alpha \mu)_y \ .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| \partial^\alpha (\mu_y) \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \cdot \langle \partial^\alpha \varphi | \mu_y \rangle = (-1)^{|\alpha|} \cdot \left\langle (\partial^\alpha \varphi)_{-y} \middle| \mu \right\rangle =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \cdot \langle \partial^\alpha (\varphi_{-y}) | \mu \rangle = \langle \varphi_{-y} | \partial^\alpha \mu \rangle = \left\langle \varphi \middle| (\partial^\alpha \mu)_y \right\rangle \ . \quad \square$$

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $h \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on définit la *fonction dilatée* $S_h f$ par

$$S_h f(x) := \frac{1}{h^{\frac{n}{2}}} \cdot f\left(\frac{x}{h}\right) \ .$$

Si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| |S_h f\rangle \right\rangle = \int \overline{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{h^{\frac{n}{2}}} \cdot f\left(\frac{x}{h}\right) dx = \int h^{\frac{n}{2}} \cdot \varphi(hx) \cdot f(x)\, dx = \left\langle S_{\frac{1}{h}} \varphi \middle| |f\rangle \right\rangle \ .$$

Ceci nous conduit à poser la définition

DEFINITION 3 Si $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$, la *distribution dilatée* $S_h\mu$ est définie par

$$\langle \varphi | S_h \mu \rangle := \left\langle S_{\frac{1}{h}} \varphi \middle| \mu \right\rangle \ .$$

Le calcul ci-dessus montre que $S_h |f\rangle = |S_h f\rangle$.

REMARQUE Le cas particulier $h = -1$ de la *symétrie centrale* se note

$$\overset{\vee}{f} := S_{-1} f \quad \text{et} \quad \overset{\vee}{\mu} := S_{-1}\mu \ .$$

4.4 Primitives

PROPOSITION *Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mu \in \mathcal{D}(J)^*$. Si $\partial\mu = 0$, alors μ est une fonction constante.*

Si $\mu \neq 0$ et $\chi \in \mathcal{D}(J)$ tel que $\langle \chi | \mu \rangle = 1$, alors

$$\mathcal{D}(J) = \operatorname{Ker} \mu \oplus \mathbb{C} \cdot \chi \ .$$

Remarquons que l'unique décomposition de $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ par rapport à cette somme s'écrit sous la forme

$$\varphi = \left[\varphi - \overline{\langle \varphi | \mu \rangle} \cdot \chi\right] + \overline{\langle \varphi | \mu \rangle} \cdot \chi \ .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(J)$, on a

$$\langle \partial\varphi | \mu \rangle = - \langle \varphi | \partial\mu \rangle = 0 \ ,$$

donc

$$\partial(\mathcal{D}(J)) \subset \operatorname{Ker} \mu \ .$$

En particulier, puisque $\partial\lambda_J = \partial|1\rangle = 0$, il vient

$$\partial(\mathcal{D}(J)) \subset \operatorname{Ker} \lambda_J = \left\{ \psi \in \mathcal{D}(J) \ \middle| \ \int \psi = 0 \right\} \ .$$

En fait on a égalité, car si $\psi \in \operatorname{Ker} \lambda_J$, en posant

$$\varphi := \int_{\inf J}^{\diamond} \psi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(J) \ \ ,$$

on a φ à support compact et $\partial\varphi = \psi$. Ainsi $\operatorname{Ker} \lambda_J \subset \operatorname{Ker} \mu$, mais puisque ces sous-espaces vectoriels sont de codimension 1 , il sont égaux. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(J)$, on a alors

$$\varphi - \overline{\langle \varphi | \mu \rangle} \cdot \chi \in \operatorname{Ker} \mu = \operatorname{Ker} \lambda_J \ ,$$

donc

$$\langle \varphi | \mu \rangle = \langle \varphi | \mu \rangle \langle \chi | \lambda_J \rangle \ \ .$$

Comme $\chi \notin \operatorname{Ker} \mu = \operatorname{Ker} \lambda_J$, on a $\langle \chi | \lambda_J \rangle \neq 0$ et par suite

$$\langle \varphi | \mu \rangle = \left\langle \varphi \middle| \frac{1}{\langle \chi | \lambda_J \rangle} \cdot \lambda_J \right\rangle \langle , \rangle = \left\langle \varphi \middle| \frac{|1\rangle}{\langle \chi, \lambda \rangle} \right\rangle \ ,$$

i.e.

$$\mu = \left| \frac{1}{\langle \chi, \lambda \rangle} \right\rangle \ .$$

□

THEOREME *Toute distribution possède une primitive unique à une fonction constante additive près ou en d'autres termes :*

Pour tout $\nu \in \mathcal{D}(J)^*$, l'équation différentielle $\partial\mu = \nu$ possède, à une fonction constante additive près, une unique solution $\mu \in \mathcal{D}(J)^*$.

La démonstration est laissée en exercice. □

COROLLAIRE *Si* $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ *, alors toute solution* $\mu \in \mathcal{D}(J)^*$ *de* $\partial\mu = |f\rangle$ *est de la forme* $\mu = |F\rangle$ *où* $F \in \mathcal{AC}(J)$ *est telle que*

$$F = F(\tau) + \int_\tau^\diamond f \quad \text{quel que soit } \tau \in J \ .$$

REMARQUE On peut adapter les constructions que nous avons faites dans le cadre des distributions à d'autres situations faisant intervenir un espace vectoriel (de fonctions) test F et l'espace vectoriel F^* des distributions correspondantes, pour autant que les opérations effectuées aient un sens. Il est en général utile d'introduire une topologie d'espace localement convexe sur F .

4.5 Quelques exemples multi-dimensionnels

EXEMPLE 1 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$. Nous allons montrer que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ la fonction $(-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t$ est localement intégrable sur $\mathbb{D}^n$ si $t > -n$ et que sa dérivée au sens des distributions est

$$\partial_j \left[(-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t\right] = (t \cdot \ln|\mathrm{id}| - s) \cdot (-\ln|\mathrm{id}|)^{s-1} \cdot |\mathrm{id}|^{t-2} \cdot \mathrm{pr}_j$$

si $t > -n+1$.

La fonction $(-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{D}^n \smallsetminus \{0\}$, donc y est en particulier localement intégrable. Si $t > -n$, on a

$$\int_{\mathbb{B}^n\left(\frac{1}{2}\right)} (-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t \, d\lambda_{\mathbb{R}^n} = \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} r^{t+n-1} \cdot (-\ln r)^s \, dr =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \cdot \int_{\frac{\ln 2}{t+n}}^{\infty} \left(\frac{u}{t+n}\right)^s \cdot e^{-u} \, du < \infty$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \cdot \int_{\ln 2}^{\infty} u^s \cdot e^{-(t+n)u} \, du < \infty$$

en ayant fait le changement de variable $u = -\ln r$, $du = -\frac{dr}{r}$. Le critère d'intégrabilité montre donc que $(-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D}^n)$.

Calculons les dérivées partielles de $(-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t$. Utilisant 11.3, exemples 1 et 2 du cours d'Analyse [9], sur $\mathbb{D}^n \smallsetminus \{0\}$ il vient classiquement

$$\partial_j \left[(-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t\right] = -s \cdot (-\ln|\mathrm{id}|)^{s-1} \cdot \frac{\mathrm{pr}_j}{|\mathrm{id}|^2} \cdot |\mathrm{id}|^t + t \cdot (-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^{t-1} \cdot \frac{\mathrm{pr}_j}{|\mathrm{id}|} =$$

$$= -(s + t \cdot \ln|\mathrm{id}|) \cdot (-\ln|\mathrm{id}|)^{s-1} \cdot |\mathrm{id}|^{t-2} \cdot \mathrm{pr}_j \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D}^n)$$

si $t > -n+1$, puisque $\left|\mathrm{pr}_j\right| \leqslant |\mathrm{id}|$.

Montrons maintenant que ce sont les dérivées partielles au sens des distributions sur $\mathbb{D}^n$. Grâce au théorème de Lebesgue et à la formule d'intégration par parties (cf. cours d'Analyse [9], théorème 17.7), pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{D}^n)$, on obtient

$$\left\langle \varphi \middle| \partial_j \left|(-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t\right\rangle \right\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{D}^n)} = -\int_{\mathbb{D}^n} \overline{\partial_j \varphi} \cdot (-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t =$$

$$= -\lim\nolimits_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{D}^n \smallsetminus \mathbb{B}^n(\varepsilon)} \left(\mathrm{grad}\, \overline{\varphi} \,\middle|\, (-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t \cdot e_j\right) =$$

$$= \lim\nolimits_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \int_{\mathbb{D}^n \smallsetminus \mathbb{B}^n(\varepsilon)} \overline{\varphi} \cdot \operatorname{div}\left[(-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t \cdot e_j\right] \right.$$

$$\left. - \int_{\partial \mathbb{B}^n(\varepsilon)} \overline{\varphi} \cdot \left((-\ln|\mathrm{id}|)^s \cdot |\mathrm{id}|^t \cdot e_j \middle| -\frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|} \right) \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\int_{\mathbb{D}^n\smallsetminus\mathbb{B}^n(\varepsilon)}\overline{\varphi}\cdot\partial_j\left[(-\ln|\mathrm{id}|)^s\cdot|\mathrm{id}|^t\right]+(-\ln\varepsilon)^s\cdot\varepsilon^t\cdot\int_{\partial\mathbb{B}^n(\varepsilon)}\overline{\varphi}\cdot\left(e_j\left|\frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|}\right.\right)\right\} =$$

$$= \int_{\mathbb{D}}\overline{\varphi}\cdot\partial_j\left[(-\ln|\mathrm{id}|)^s\cdot|\mathrm{id}|^t\right] = \left\langle\varphi\left|\partial_j\left[(-\ln|\mathrm{id}|)^s\cdot|\mathrm{id}|^t\right]\right.\right\rangle ,$$

car

$$\left|(-\ln\varepsilon)^s\cdot\varepsilon^t\cdot\int_{\partial\mathbb{B}^n(\varepsilon)}\overline{\varphi}\cdot\left(e_j\left|\frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|}\right.\right)\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty\cdot\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\cdot\varepsilon^{t+n-1}\cdot(-\ln\varepsilon)^s\to 0$$

lorsque $\varepsilon\to 0$.

Ainsi la fonction $(-\ln|\mathrm{id}|)^s\cdot|\mathrm{id}|^t$ est partiellement dérivable au sens des distributions sur $\mathbb{D}^n$ et

$$\partial_j(-\ln|\mathrm{id}|)^s = (t\cdot\ln|\mathrm{id}|-s)\cdot(-\ln|\mathrm{id}|)^{s-1}\cdot|\mathrm{id}|^{t-2}\cdot\mathrm{pr}_j\in\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D}) ,$$

pour autant que $t>-n+1$. Elle possède une singularité en 0 si $t\leqslant 0$.

En particulier si $n\geqslant 2$, la fonction $(-\ln|\mathrm{id}|)^s$ est singulière en 0 et les dérivées partielles au sens des distributions sont des fonctions :

$$\partial_j(-\ln|\mathrm{id}|)^s = -s\cdot(-\ln|\mathrm{id}|)^{s-1}\cdot\frac{\mathrm{pr}_j}{|\mathrm{id}|^2} .$$

EXEMPLE 2 On a $\ln|\mathrm{id}|\in\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de $\partial\ln|\mathrm{id}|$? Sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ on a évidemment $\partial\ln|\mathrm{id}| = \frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|^2} = \frac{1}{\mathrm{id}}$, mais $\frac{1}{\mathrm{id}}\notin\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$?

EXERCICE Montrer que, pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle\varphi\,|\partial(\ln|\mathrm{id}|)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}\smallsetminus]-\varepsilon,\varepsilon[}\overline{\varphi(x)}\cdot\frac{1}{x}\,dx =: \left\langle\varphi\left|PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)\right.\right\rangle .$$

On dit $PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)\in\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ est la *partie principale (de Cauchy)* de $\frac{1}{\mathrm{id}}$.

EXEMPLE 3 La fonction $\frac{1}{|\mathrm{id}|^s}\in\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $s<n$ et, pour tout $s\leqslant n-2$ on a

$$\Delta\frac{1}{|\mathrm{id}|^s} = s(s-n+2)\cdot\frac{1}{|\mathrm{id}|^{s+2}}-s\cdot\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\cdot\delta_{s,n-2}\cdot\delta_0 .$$

Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}$, il y est localement intégrable. Comme

$$\int_{\mathbb{B}^n}\frac{1}{|\mathrm{id}|^s} = \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\cdot\int_0^1 r^{n-1-s}\,dr<\infty$$

si, et seulement si, $n-1-s>-1$, le résultat en découle. D'après l'exemple 11.7.1 du cours d'Analyse [9], sur $\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}$, on a

$$\Delta\frac{1}{|\mathrm{id}|^s} = s(s+1)\cdot\frac{1}{|\mathrm{id}|^{s+2}}-\frac{n-1}{|\mathrm{id}|}s\cdot\frac{1}{|\mathrm{id}|^{s+1}} = s(s-n+2)\cdot\frac{1}{|\mathrm{id}|^{s+2}}\in\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

si, et seulement si, $s\leqslant n-2$. Remarquons que $\Delta\frac{1}{|\mathrm{id}|^{n-2}}=0$, donc que $\frac{1}{|\mathrm{id}|^{n-2}}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}$.

Si $s \leqslant n-2$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, grâce à la formule de Green (ibidem, théorème 17.7), on obtient

$$\left\langle \varphi \middle| \Delta \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} \right\rangle = \left\langle \Delta\varphi \middle| \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{B}^n \smallsetminus \mathbb{B}^n(\varepsilon)} \overline{\Delta\varphi} \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \int_{\mathbb{B}^n \smallsetminus \mathbb{B}^n(\varepsilon)} \overline{\varphi} \cdot \Delta \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} + \int_{\partial\mathbb{B}^n(\varepsilon)} \left(\partial_{\mathfrak{n}} \overline{\varphi} \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} - \overline{\varphi} \cdot \partial_{\mathfrak{n}} \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} \right) \right\} ;$$

mais

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{B}^n \smallsetminus \mathbb{B}^n(\varepsilon)} \overline{\varphi} \cdot \Delta \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} = \left\langle \varphi \middle| s(s-n+2) \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^{s+2}} \right\rangle ,$$

$$\left| \int_{\partial\mathbb{B}^n(\varepsilon)} \partial_{\mathfrak{n}} \overline{\varphi} \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} \right| \leqslant \int_{\partial\mathbb{B}^n(\varepsilon)} \left| \left(\operatorname{grad} \overline{\varphi} \middle| -\frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|} \right) \right| \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\mathbb{S}^{n-1} \right) \cdot \|\operatorname{grad} \varphi\|_\infty \cdot \varepsilon^{n-1-s} \to 0$$

car $n-1-s \geqslant 1$ et

$$- \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\partial\mathbb{B}^n(\varepsilon)} \overline{\varphi} \cdot \partial_{\mathfrak{n}} \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} = - \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\partial\mathbb{B}^n(\varepsilon)} \overline{\varphi} \cdot \left(\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} \middle| -\frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|} \right) =$$

$$= -s \cdot \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\partial\mathbb{B}^n(\varepsilon)} \overline{\varphi} \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^{s+1}} =$$

$$= -s \cdot \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{n-2-s} \cdot \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{\varphi}(\varepsilon \cdot \mathrm{id}) \to -s \cdot \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\mathbb{S}^{n-1} \right) \cdot \delta_{s,n-2} \cdot \overline{\varphi(0)} ,$$

puisque

$$\left(\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} \middle| -\frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|} \right) = \left(-s \cdot \frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|^{s+2}} \middle| -\frac{\mathrm{id}}{|\mathrm{id}|} \right) = -s \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^{s+1}} .$$

Finalement nous avons obtenu

$$\left\langle \varphi \middle| \Delta \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} \right\rangle = \left\langle \varphi \middle| s(s-n+2) \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^{s+2}} \right\rangle + \left\langle \varphi \middle| -s \cdot \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\mathbb{S}^{n-1} \right) \cdot \delta_{s,n-2} \cdot \delta_0 \right\rangle ,$$

i.e.

$$\Delta \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} = s(s-n+2) \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^{s+2}} - s \cdot \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\mathbb{S}^{n-1} \right) \cdot \delta_{s,n-2} \cdot \delta_0$$

ou plus simplement

$$\Delta \frac{1}{|\mathrm{id}|^{n-2}} = -(n-2) \cdot \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\mathbb{S}^{n-1} \right) \cdot \delta_0$$

et

$$\Delta \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} = s(s-n+2) \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^{s+2}} \quad \text{si } s < n-2 .$$

En dimension 3 on a donc

$$\Delta \frac{1}{|\mathrm{id}|} = -\frac{4\pi}{3} \cdot \delta_0 .$$

4.6 Le support d'une distribution

Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et U une partie ouverte de X . Toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ peut être considérée comme un élément de $\mathcal{D}(X)$ en la prolongeant sur X par 0 hors de U ! En d'autres termes on considère $\mathcal{D}(U)$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(X)$.

DEFINITION 1 Soit $\mu \in \mathcal{D}(X)^*$. On dit que

$$\mu_{|U} : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longrightarrow \langle \varphi | \mu \rangle$$

est la restriction de μ à U .

REMARQUE La restriction d'une distribution est compatible avec les opérations que nous avons définies. Par exemple

$$(\partial^\alpha \mu)_{|U} = \partial^\alpha \left(\mu_{|U}\right) \ .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, on a trivialement

$$\left\langle \varphi \middle| (\partial^\alpha \mu)_{|U} \right\rangle = \langle \varphi | \partial^\alpha \mu \rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle \partial^\alpha \varphi | \mu \rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \left\langle \partial^\alpha \varphi \middle| \mu_{|U} \right\rangle = \left\langle \varphi \middle| \partial^\alpha \left(\mu_{|U}\right) \right\rangle \ .$$

□

THEOREME *Soit $\mu \in \mathcal{D}(X)^*$. Il existe une plus grande partie ouvert U de X telle que $\mu_{|U} = 0$.*

En effet si $(U_j)_{j \in J}$ désigne la famille de toute les partie ouvertes de X telles que $\mu_{|U_j} = 0$ et $U := \bigcup_{j \in J} U_j$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, puisque $\operatorname{supp} \varphi$ est compact, on peut considérer le nombre de Lebesgue $\varepsilon > 0$ (cf. cours d'Analyse [9], lemme 17.4). Si $\left(\rho_{\varepsilon,z}\right)_{z \in \mathbb{Z}^n}$ désigne la partition de l'unité associée, l'ensemble des $z \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\operatorname{supp} \rho_{\varepsilon,z} \cap \operatorname{supp} \varphi \neq \emptyset$ est fini et pour chacun de ces z , il existe $j \in J$ tel que et $\operatorname{supp} \rho_{\varepsilon,z} \subset U_j$. On a alors

$$\langle \varphi | \mu \rangle = \left\langle \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \rho_{\varepsilon,z} \cdot \varphi \middle| \mu \right\rangle = \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^n \\ \operatorname{supp} \rho_{\varepsilon,z} \cap \operatorname{supp} \varphi \neq \emptyset}} \left\langle \rho_{\varepsilon,z} \cdot \varphi \middle| \mu \right\rangle = 0 \ ,$$

ce qui finit de prouver que $\mu_{|U} = 0$. □

DEFINITION 2 Soit $\mu \in \mathcal{D}(X)^*$. On dit que le complémentaire de la plus grande partie ouverte de X où μ s'annule est le *support* de μ . On le note $\operatorname{supp} \mu$.

La même technique de partition de l'unité nous permet de démontrer le résultat suivant qui nous sera utile par la suite.

PROPOSITION *Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K une partie compacte de X . Alors il existe un voisinage U de K relativement compact dans X et $\chi \in \mathcal{D}(X)$ telle que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ et $\chi = 1$ sur U .*

Soit $\delta > 0$ tel que $3\delta < d\left(K, \complement X\right)$. L'ensemble $U := \{d(\cdot, K) < \delta\}$ est ouvert et $\overline{U} \subset K_\delta := \{d(\cdot, K) \leqslant \delta\}$ est compact par le théorème de Heine-Borel (cf. cours d'Analyse [9], théorème 10.18) et contenu dans X . Si $\varepsilon > 0$ est tel que $\varepsilon \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, puisque $\operatorname{supp} \rho_{\varepsilon,0} \subset B_{\sqrt{n}\cdot\varepsilon}$, si $\operatorname{supp} \rho_{\varepsilon,z} \cap K_\delta \neq \emptyset$, alors $d(z, K_\delta) \leqslant \sqrt{n} \cdot \varepsilon \leqslant \delta$, donc

$$\operatorname{supp} \rho_{\varepsilon,z} \subset \{d(\cdot, K_\delta) \leqslant 2\delta\} \subset \{d(\cdot, K) \leqslant 3\delta\} \subset X .$$

L'ensemble des ces z est fini, donc

$$\chi := \sum_{z \in \mathbb{Z}^n, \operatorname{supp} \rho_{\varepsilon,z} \cap K_\delta \neq \emptyset} \rho_{\varepsilon,z} \in \mathcal{D}(X) .$$

Si $\operatorname{supp} \rho_{\varepsilon,z} \cap K_\delta = \emptyset$, on a $\rho_{\varepsilon,z} = 0$ sur $K_\delta \supset \overline{U}$, donc $\chi = 1$ sur $\overline{U}$. On a évidemment $0 \leqslant \chi \leqslant 1$. □

4.7 Convergence d'une suite de distributions

DEFINITION 1 Si $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(X)^*$ et $\mu \in \mathcal{D}(X)^*$ sont tels que

$$\langle \varphi | \mu \rangle = \lim_k \langle \varphi | \mu_k \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X) \ ,$$

nous dirons que μ est la *limite faible* de $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et nous écrirons

$$\mu = \lim_k \mu_k \quad \text{dans } \mathcal{D}(X)^* \ .$$

THEOREME $\mathcal{D}(X)^*$ *est séquentiellement faiblement complet et l'injection canonique*

$$\mathbf{L}^2(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)^* : \xi \longmapsto \xi \cdot \lambda_X$$

est continue. En outre toutes les dérivations

$$\partial^\alpha : \mathcal{D}(X)^* \longrightarrow \mathcal{D}(X)^*$$

sont continues.

En effet si $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(X)^*$ est une suite de distributions telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, $(\langle \varphi | \mu_k \rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ soit une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$, alors

$$|\mu\rangle : \varphi \longmapsto \lim_k \langle \varphi | \mu_k \rangle : \mathcal{D}(X)^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

est évidemment une forme semi-linéaire, donc une distribution, et on a évidemment $\mu = \lim_k \mu_k$.

D'autre part si $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\xi \in \mathbf{L}^2(X)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, il vient

$$\lim_k \langle \varphi | \xi_k \cdot \lambda_X \rangle = \lim_k \int \overline{\varphi} \cdot \xi_k = \lim_k (\varphi | \xi_k) = (\varphi | \xi) = \langle \varphi | \xi \cdot \lambda_X \rangle \ ,$$

ce qui prouve la continuité.

Finalement par récurrence il nous suffit de montrer que

$$\partial : \mathcal{D}(X)^* \longrightarrow \mathcal{D}(X)^*$$

est continue. Soit alors $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(X)^*$ et $\mu \in \mathcal{D}(X)^*$ tels que $\mu = \lim_k \mu_k$, i.e.

$$\lim_k \langle \varphi | \mu_k \rangle = \langle \varphi | \mu \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X) \ .$$

On en déduit

$$\lim_k \langle \varphi | \partial\mu_k \rangle = -\lim_k \langle \partial\varphi | \mu_k \rangle = -\langle \partial\varphi | \mu \rangle = \langle \varphi | \partial\mu \rangle \ ,$$

puisque $\partial\varphi \in \mathcal{D}(X)$. $\square$

EXERCICE 1 (Suite de Dirac) Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\int f\, d\lambda = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, on définit la fonction $f_{x,\varepsilon}$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f_{x,\varepsilon}(y) := \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot f\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) \ .$$

Montrer que, pour toute fonction $g \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ continue en x , on a

$$g(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int g \cdot f_{x,\varepsilon}\, d\lambda \ .$$

En particulier

$$\delta_x = \lim_{\varepsilon \to 0} f_{x,\varepsilon} \quad \text{dans } \mathcal{D}(X)^* \ .$$

On dit que $(f_{x,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est une *suite de Dirac* .

EXERCICE 2 Soit X une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

(a) On dit qu'une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ converge vers $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ si, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, on a

$$\lim_k \int_K |f_k - f| \, d\lambda_X = 0 \ .$$

Montrer que

$$f = \lim_k f_k \quad \text{dans } \mathcal{D}(X)^* \ .$$

(b) Soient $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $f, g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ telle que $(\partial^\alpha f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$.

Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f et $(\partial^\alpha f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers g dans $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$, alors $g = \partial^\alpha f$.

EXERCICE 3 (Peigne de Dirac) Montrer

(a) L'injection canonique $\mathcal{C}^b(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})^* : f \longmapsto f \cdot \lambda$ est continue.

(b) Pour tout $s \in \mathbb{R}$ la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}}$$

est convergente dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$.

(c) Calculer la série trigonométrique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} \quad \text{dans } \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$$

et montrer que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \ .$$