Chapitre 5

TRANSFORMATION DE FOURIER

ET

DISTRIBUTIONS TEMPÉRÉES

Version du 18 février 2005

5.1 Intégrales de Fourier

DEFINITION 1 Pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^n$, on pose

$$f^* := \overline{\overset{\vee}{f}} = \overset{\vee}{\overline{f}} \ ,$$

ainsi que

$$e_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \lambda \longmapsto e^{2\pi i \cdot (\lambda | x)}$$

et

$$e_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto e^{2\pi i \cdot (\lambda | x)} \ .$$

Bien que la situation soit symétrique, il est préférable dans les applications de faire une distinction entre l'espace-position $\mathbb{R}^n$ de variable x et l'espace-fréquence $\mathbb{R}^n$ de variable λ , groupe dual de $\mathbb{R}^n$. Le cadre naturel de la transformation de Fourier générale est celui des groupes localement compacts abéliens. Par exemple le groupe $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx [0,1[$ est associé à la théorie des séries de Fourier des fonctions 1-périodiques f ; le groupe dual de $\mathbb{T}$ est $\mathbb{Z}$, la transformation de Fourier s'écrivant dans ce cas

$$\mathcal{F}f(\lambda) := \int_0^1 e^{-2\pi i \cdot \lambda \cdot x} \cdot f(x)\, dx \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{Z} \ .$$

L'application $f \longmapsto f^*$ est une involution, i.e. $f^{**} = f$ et $(\alpha \cdot f)^* = \overline{\alpha} \cdot f^*$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

DEFINITION 2 Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on définit l' *intégrale de Fourier* de f en λ par

$$\mathcal{F}f(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \cdot (\lambda | x)} \cdot f(x)\, dx \ .$$

On dit que

$$\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \lambda \longmapsto \mathcal{F}f(\lambda)$$

est la *transformée de Fourier* de f et que l'application

$$\mathcal{F} : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$$

est la *transformation de Fourier* .

PROPOSITION *La transformation de Fourier est une application linéaire continue de norme* $\leqslant 1$ *de* $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$ *, i.e.*

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \ .$$

En outre

$$\mathcal{F}f^* = \overline{\mathcal{F}f} \quad , \quad \mathcal{F}\overset{\vee}{f} = (\mathcal{F}f)^{\vee}$$

et, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{R}^n$ *et* $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *on a*

$$\mathcal{F}T_y = M_{e_{-y}}\mathcal{F} \quad , \quad T_\nu \mathcal{F} = \mathcal{F}M_{e_\nu} \quad \textit{et} \quad \mathcal{F}D_h = D_{\frac{1}{h}}\mathcal{F} \ .$$

D'après le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (cf. cours d'Analyse [9].15.5), il est clair que $\mathcal{F}f$ est une fonction continue et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|\mathcal{F}f(\lambda)| \leqslant \int \left| e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot f(x) \right| \, dx \leqslant \int |f(x)| \, dx = \|f\|_1 \ .$$

D'autre part

$$\mathcal{F}f^*(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot \overline{\overset{\vee}{f}}(x) \, dx = \overline{\int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot f(x) \, dx} = \overline{\mathcal{F}f(\lambda)} \ ,$$

$$\mathcal{F}\overset{\vee}{f}(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot f(-x) \, dx = \int e^{-2\pi i\cdot(-\lambda|x)} \cdot f(x) \, dx = \mathcal{F}f(-\lambda) = (\mathcal{F}f)^{\vee}(\lambda) \ ,$$

$$\mathcal{F}T_y f(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot f(x-y) \, dx = \int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x+y)} \cdot f(x) \, dx = e^{-2\pi i\cdot(\lambda|y)} \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \ ,$$

$$T_\nu \mathcal{F}f(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot(\lambda-\nu|x)} \cdot f(x) \, d\mu(x) = \int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot e^{2\pi i\cdot(\nu|x)} \cdot f(x) \, dx = \mathcal{F}(e_\nu \cdot f)(\lambda)$$

et

$$\mathcal{F}D_h f(\lambda) = |h|^{-\frac{n}{2}} \cdot \int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot f\left(\frac{x}{h}\right) \, dx = |h|^{\frac{n}{2}} \cdot \int e^{-2\pi i\cdot h(\lambda|x)} \cdot f(x) \, dx =$$

$$= |h|^{\frac{n}{2}} \cdot \mathcal{F}f(h\lambda) = D_{\frac{1}{h}}\mathcal{F}f(\lambda) \ ,$$

ce qui prouve les formules. □

DEFINITION 3 Nous utiliserons les dérivées partielles modifiées

$$\eth_j := \frac{1}{2\pi i} \cdot \partial_j \quad \text{et} \quad \eth^\alpha := \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\alpha|_1} \cdot \partial^\alpha \ ,$$

ainsi que l'*opérateur de Laplace modifié* $\not\Delta$ défini par

$$\not\Delta := \sum_{j=1}^n \eth_j^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \Delta \ .$$

Nous poserons

$$\langle x \rangle := 1 + |x|^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Nous dirons qu'une fonction f sur $\mathbb{R}^n$ est à *décroissance rapide* , si

$$\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot f \right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^k \cdot |f(x)| < \infty \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$p_k(\varphi) := \sup_{|\alpha|\leqslant k, x\in\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^k \cdot |\eth^\alpha \varphi(x)| < \infty \ ,$$

i.e. si toutes les dérivées de cette fonction sont à décroissance rapide .

LEMME *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k est une norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et*

$$d : (\varphi, \psi) \longmapsto \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \min\left(p_k(\varphi - \psi), 1\right) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une métrique invariante par translation pour laquelle $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est complet. Pour qu'une suite $(\varphi_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il faut et il suffit que $\lim_l p_k(\varphi_l - \varphi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La démonstration est laissée en exercice. □

THEOREME *Soit $k \in \mathbb{N}$.*

(i) Si $f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^n)$ et si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 \leqslant k$, on a $\partial^\alpha f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\mathcal{F}(\not\partial^\alpha f) = \mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}f \ .$$

En particulier si $f \in \mathcal{C}^{(2k)}(\mathbb{R}^n)$ et si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 \leqslant 2k$, on a $\partial^\alpha f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\mathcal{F}\left(\left[[1 + \not\Delta]^k\right] f\right) = \langle \mathrm{id}\rangle^k \cdot \mathcal{F}f \ .$$

(ii) Pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\langle \mathrm{id}\rangle^{\frac{k}{2}} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\not\partial^\alpha \mathcal{F}f = \mathcal{F}\left([-\mathrm{id}]^\alpha \cdot f\right) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha|_1 \leqslant k \ .$$

En particulier si $\langle \mathrm{id}\rangle^k \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^{(2k)}(\mathbb{R}^n)$ et

$$[1 + \not\Delta]^k \mathcal{F}f = \mathcal{F}\left(\langle \mathrm{id}\rangle^k \cdot f\right) \ .$$

(iii) On a

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

*et **(lemme de Riemann-Lebesgue)***

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)\right) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \ .$$

Démonstration de (i) En utilisant le théorème de Fubini et en intégrant par partie, grâce au théorème 1.5.i les termes intégrés s'annulent et on obtient

$$\mathcal{F}(\not\partial^\alpha f)(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot \not\partial_x^\alpha f(x)\, dx = (-1)^\alpha \cdot \int \not\partial_x^\alpha e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot f(x)\, dx = \lambda^\alpha \cdot \mathcal{F}\varphi(\lambda) \ .$$

On en déduit successivement les formules

$$\mathcal{F}(\not\Delta\varphi) = \sum_{j=1}^n \mathcal{F}\left(\not\partial_j^2 \varphi\right) = \left(\sum_{j=1}^n \mathrm{pr}_j^2\right) \cdot \mathcal{F}\varphi = |\mathrm{id}|^2 \cdot \mathcal{F}\varphi$$

et

$$\mathcal{F}\left([1 + \not\Delta]^k \varphi\right) = \mathcal{F}\left(\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \cdot \not\Delta^l \varphi\right) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \cdot |\mathrm{id}|^{2l} \cdot \mathcal{F}\varphi = \langle \mathrm{id}\rangle^k \cdot \mathcal{F}\varphi \ .$$

Démonstration de (ii) Le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (cf. cours d'Analyse [9] 15.5) montre immédiatement que $\mathcal{F}f$ est k-fois dérivable et que l'on peut dériver sous le signe intégral : en effet

$$\left|\not\partial_\lambda^\alpha e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot f(x)\right| = \left|x^\alpha \cdot e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot f(x)\right| \leqslant \langle x\rangle^{\frac{k}{2}} \cdot |f(x)|$$

et

$$\partial\!\!\!/^{\alpha}\mathcal{F}f(\lambda)=\int\partial\!\!\!/_{\lambda}^{\alpha}e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)}\cdot f(x)\,dx=\int[-x]^{\alpha}\cdot e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)}\cdot f(x)\,dx=\mathcal{F}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot f\right)(\lambda)\ .$$

La formule est alors immédiate comme en (i).

Démonstration de (iii) Pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il vient alors

$$\langle\mathrm{id}\rangle^{k}\cdot\partial\!\!\!/^{\alpha}\mathcal{F}\varphi=\langle\mathrm{id}\rangle^{k}\cdot\mathcal{F}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)=\mathcal{F}\left([1+\Delta\!\!\!/]^{k}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)\right)\in\mathcal{C}^{b}(\mathbb{R}^n)\ ,$$

puisque $[1+\Delta\!\!\!/]^{k}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ce qui montre que $\mathcal{F}\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ainsi $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{C}^{0}(\mathbb{R}^n)$; mais comme $\mathcal{F}:\mathbf{L}^{1}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{C}^{b}(\mathbb{R}^n)$ est continue et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbf{L}^{1}(\mathbb{R}^n)$, il vient

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{L}^{1}(\mathbb{R}^n)\right)=\mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\mathbf{L}^{1}}\right)\subset\overline{\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))}^{\mathcal{C}^{b}(\mathbb{R}^n)}\subset\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\mathcal{C}^{b}(\mathbb{R}^n)}\subset\mathcal{C}^{0}(\mathbb{R}^n)\ ,$$

puisque $\mathcal{C}^{0}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}^{b}(\mathbb{R}^n)$.

EXERCICE Prouver que pour tout $a>0$, on a $\mathcal{F}e^{-\pi a\cdot\mathrm{id}^{2}}=\sqrt{\frac{1}{a}}\cdot e^{-\frac{\pi}{a}\cdot\mathrm{id}^{2}}$.

Grâce au théorème ci-dessus on peut montrer que $\mathcal{F}e^{-\pi a\cdot\mathrm{id}^{2}}$ satisfait à une équation différentielle que l'on peut résoudre.

5.2 Formule d'inversion

EXEMPLE Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\mathcal{F}e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{\mathrm{pr}_j}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} .$$

En outre $\prod_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \cdot \langle \mathrm{pr}_j \rangle^{-1} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et $\int \prod_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \cdot \langle \mathrm{pr}_j \rangle^{-1} \, d\lambda = 1$. Elle définit donc une suite de Dirac au sens de l'exercice 4.7.1.

Par le théorème de Fubini, on a

$$\mathcal{F}e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1}(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x|_1} \, dx = \prod_{j=1}^n \int e^{-2\pi i\cdot\lambda_j\cdot x_j} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x_j|} \, dx_j =$$

$$= \prod_{j=1}^n \int e^{-2\pi i\cdot\lambda_j\cdot x_j} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x_j|} \, dx_j = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{\lambda_j}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} ,$$

car en intégrant deux fois par parties on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\cdot\lambda\cdot x} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x|} \, dx = 2 \cdot \int_0^\infty \cos(2\pi\cdot\lambda x) \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi\varepsilon} - \frac{2\lambda^2}{\varepsilon^2} \cdot \int_0^\infty \cos(2\pi\cdot\lambda x) \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot x} \, dx ,$$

donc

$$\int e^{-2\pi i\cdot\lambda\cdot x} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x|} \, dx = \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \frac{1}{1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{\lambda}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} ,$$

d'où le résultat. □

THEOREME (Formule d'inversion)

(i) Si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathcal{F}f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *, alors*

$$f(x) = \int e^{2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \, d\lambda \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n .$$

(ii) L'application $\mathcal{F}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *, dont l'application réciproque est donnée par*

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma = \int e^{2\pi i\cdot(\gamma|\diamond)} \cdot \gamma(\lambda) \, d\lambda$$

Démonstration de (i) Remarquons que

$$\int e^{2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \, d\lambda = \int e^{2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot \left(\int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|y)} \cdot f(y) \, dy \right) d\lambda$$

est une intégration successive, mais que l'on ne peut pas utiliser directement le théorème de Fubini ! Pour pouvoir le faire nous allons introduire un facteur de convergence, en l'occurence la fonction $e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1}$ par rapport à la variable λ qui fait difficulté.

Comme $\mathcal{F}f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} = 1 \quad \text{ponctuellement,}$$

le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, puis le théorème de Fubini et l'exemple ci-dessus montrent que

$$\int e^{2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot \mathcal{F}f(\lambda)\, d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0} \int e^{2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\lambda|_1} \cdot \mathcal{F}f(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int e^{2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\lambda|_1} \cdot \left(\int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|y)} \cdot f(y)\, dy\right) d\lambda =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \left(\int e^{-2\pi i\cdot(\lambda|y-x)} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\lambda|_1}\, d\lambda\right) \cdot f(y)\, dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \mathcal{F}e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1}(y-x) \cdot f(y)\, dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{y_j - x_j}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} \cdot f(y)\, dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{y_j}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} \cdot f(y+x)\, dy = f(x)$$

en utilisant l'exercice 4.7.1 sur les suites de Dirac.

Démonstration de (ii) On peut évidemment appliquer (i) à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et en définissant

$$\overline{\mathcal{F}}\gamma := \int e^{2\pi i\cdot(\gamma|\diamond)} \cdot \gamma(\lambda)\, d\lambda = \overline{\int e^{-2\pi i\cdot(\gamma|\diamond)} \cdot \overline{\gamma(\lambda)}\, d\lambda} = \overline{\mathcal{F}\overline{\gamma}}$$

on a $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id}$, mais aussi $\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = \mathrm{Id}$. Ainsi $\mathcal{F}$ est bijective et $\overset{-1}{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}$. Il nous reste à montrer que $\mathcal{F}$ est continue, puisqu'alors $\overset{-1}{\mathcal{F}}$ l'est aussi. Remarquons que

$$\|\varphi\|_1 \leqslant \left(\int \langle\mathrm{id}\rangle^{-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}\, d\lambda\right) \cdot p_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}(\varphi) \ ,$$

donc

$$p_k(\mathcal{F}\varphi) = \max_{|\alpha|_1\leqslant k} \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \not\partial^\alpha \mathcal{F}\varphi\right\|_\infty = \max_{|\alpha|_1\leqslant k} \left\|\mathcal{F}\left([1+\not\Delta]^k([-\mathrm{id}]^\alpha \cdot \varphi)\right)\right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|\alpha|_1\leqslant k} \left\|[1+\not\Delta]^k([-\mathrm{id}]^\alpha \cdot \varphi)\right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int \langle\mathrm{id}\rangle^{-[\frac{n}{2}]-1}\, d\lambda\right) \cdot \max_{|\alpha|_1\leqslant k} p_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}\left([1+\not\Delta]^k([-\mathrm{id}]^\alpha \cdot \varphi)\right) \ ,$$

d'où notre assertion, puisque les dérivations partielles et la multiplication par un polynôme sont manifestement continues dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

COROLLAIRE *Soient $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$.*

(i) *Si* $\operatorname{supp} f \subset B_R$ *, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}^n$ *, en posant*

$$\langle \lambda, x\rangle := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot x_j \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \ ,$$

la fonction $e^{-2\pi i\cdot\langle\lambda,\mathrm{id}\rangle} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\mathcal{F}f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \lambda \longmapsto \mathcal{F}f(\lambda) := \int e^{-2\pi i\cdot\langle\lambda,x\rangle} \cdot f(x)\ dx$$

est une fonction holomorphe telle que

$$|\mathcal{F}f(\lambda)| \leqslant e^{2\pi\cdot R\cdot|\operatorname{Im}\lambda|} \cdot \|f\|_1 \ .$$

(ii) ***Théorème de Paley-Wiener*** *Pour que* $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\operatorname{supp} f \subset B_R$, *il faut et il suffit que, pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *, il existe* $C_{f,k} \in \mathbb{R}_+$ *tel que l'on ait*

$$|\mathcal{F}f(\lambda)| \leqslant \frac{C_{f,k} \cdot e^{2\pi\cdot R\cdot|\operatorname{Im}\lambda|}}{\langle\lambda\rangle^k} \quad \textit{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}^n \ . \tag{$*$}$$

Démonstration de (i) On a évidemment

$$\left|e^{-2\pi i\cdot\langle\lambda,\mathrm{id}\rangle} \cdot f\right| \leqslant e^{2\pi\cdot R\cdot|\operatorname{Im}\lambda|} \cdot |f| \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

et $\mathcal{F}f$ est une fonction holomorphe puisqu'il est possible de dériver sous le signe intégral grâce au théorème de Lebesgue : en effet on a

$$\left|\bar{\partial}_{\lambda,j} e^{-2\pi i\cdot\langle\lambda,\mathrm{id}\rangle} \cdot f\right| \leqslant \left|\mathrm{pr}_j \cdot f\right| \leqslant R \cdot |f| \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \ .$$

Finalement

$$|\mathcal{F}f(\lambda)| \leqslant \int \left|e^{-2\pi i\cdot\langle\lambda,\mathrm{id}\rangle} \cdot f\right| \leqslant e^{2\pi\cdot R\cdot|\operatorname{Im}\lambda|} \cdot \|f\|_1 \ .$$

Démonstration de (ii) La condition est nécessaire puisque

$$\left|\langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \mathcal{F}f\right| = \left|\mathcal{F}\left[\left[1+\bar{\Delta}\right]^k\right] f\right| \leqslant e^{2\pi\cdot R\cdot|\operatorname{Im}\lambda|} \cdot \left\|\left[\left[1+\bar{\Delta}\right]^k\right] f\right\|_1$$

par le théorème 5.1.i.

Réciproquement puisque $\mathcal{F}f$ est holomorphe la formule de Cauchy permet de montrer que les dérivées de $\mathcal{F}f$ satisfont aussi à une inégalité du même type que $(*)$. On a donc $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et par suite $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Par les théorèmes de Fubini et Cauchy, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}^n$, il vient alors

$$f(x) = \overset{-1}{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\cdot(\lambda|x)} \cdot \mathcal{F}f(\lambda)\ d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\cdot\langle\lambda+i\theta,x\rangle} \cdot \mathcal{F}f(\lambda+i\theta)\ d\lambda \ ,$$

donc

$$|f(x)| \leqslant C_{f,k} \cdot e^{2\pi\cdot[R\cdot|\theta|-(\theta|x)]} \cdot \int \frac{d\lambda}{\langle\lambda\rangle^k}$$

en choisissant $k \in \mathbb{N}$ tel que $\int \frac{d\lambda}{\langle\lambda\rangle^k} < \infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x| > R$, en posant $\theta := t \cdot \frac{x}{|x|}$, on obtient

$$R \cdot |\theta| - (\theta|\,x) = (R - |x|) \cdot t$$

et pour $t \to \infty$, on en déduit que $f(x) = 0$. □

5.3 Distributions tempérées

DEFINITION Nous dirons qu'une forme linéaire continue

$$\mu : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \mu(\varphi) \ ,$$

est une *distribution tempérée* . Nous désignerons par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ l'espace vectoriel des distributions tempérées.

Comme pour les distributions algébrique nous utiliserons la notation de Dirac $\langle \varphi | \mu \rangle := \mu(\overline{\varphi})$. Nous écrirons $\langle \varphi | \mu \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$, s'il faut préciser.

EXEMPLE 1 Soit $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ une *fonction à croissance modérée* , i.e. telle que

$$\int \frac{|f(x)|}{\langle x \rangle^k} \, dx < \infty$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Il est clair que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\varphi f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$|f\rangle : \varphi \longmapsto \int \varphi \cdot f$$

est une distribution tempérée. L'application

$$f \longmapsto |f\rangle : \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

est injective comme dans le cas des distributions.

Remarquons que $e^{2\pi i \cdot (\lambda | \diamond)} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, on a $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) \ , \ \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \ ,$$

où $p \in [1, \infty]$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLE 2 Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, soit

$$\delta_x : \varphi \longmapsto \varphi(x) \ .$$

C'est une distribution tempérée.

REMARQUE 1 Les opérations introduites pour les distributions peuvent être adaptées aux distributions tempérées, mais avec quelques modifications.

Par exemple si $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ et $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, on ne peut définir $g \cdot \mu$ que si l'on a $g \cdot \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On peut montrer qu'il est équivalent que g , ainsi que toutes ses dérivées, soient au plus à croissance polynomiale, i.e. pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}_+$, tels que

$$|\partial^\alpha g| \leqslant c \cdot \langle \mathrm{id} \rangle^k \ .$$

On dit que g est *tempérée* . On désigne par $\mathcal{C}^{(\infty)}_{\mathrm{temp}}(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel de ces fonctions.

THEOREME *Dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ comme dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$, on a*

(i)

$$\partial^\alpha T_y = T_y \partial^\alpha \quad et \quad \partial^\alpha D_h = \frac{1}{h^{|\alpha|_1}} \cdot D_h \partial^\alpha \ .$$

(ii)

$$M_g T_y = T_y M_{g_{-y}} \quad et \quad M_g D_h = |h|^{\frac{n}{2}} \cdot D_h M_{D_{\frac{1}{h}} g} \ .$$

(iii)

$$T_y D_h = D_h T_{\frac{y}{h}} \ .$$

Il suffit de démontrer ces formules dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$, ce qui les prouvent également dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ici il suffit que $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$, puis de les étendre à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ comme nous l'avons déjà fait pour la première formule dans 4.3. □

PROPOSITION

(i) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans l'espace métrique* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

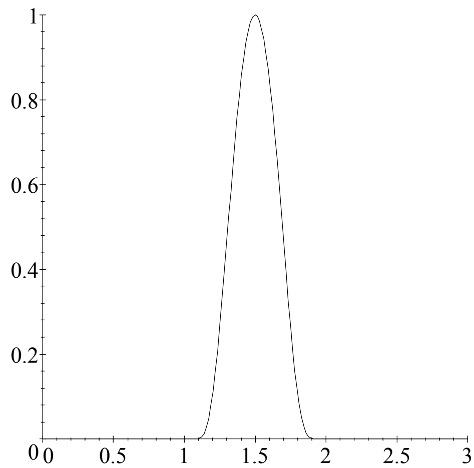
(ii) *L'application linéaire*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^* : \mu \longmapsto \mu_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

est injective.

Démonstration de (i) Considérons tout d'abord la fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ définie par

$$\chi(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ e^4 \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x-1)\cdot(2-x)}\right) & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & 2 \leqslant x \end{cases} \ .$$



χ

On a

$$\int_1^2 e^4 \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x-1)\cdot(2-x)}\right) dx \simeq .38382$$

Définissons alors la fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ par

$$\rho(x) := 1 - \frac{1}{\int_0^\infty \chi \, d\lambda} \cdot \int_0^x \chi \, d\lambda \ .$$

On a

$$\rho(x) \begin{cases} = 1 & & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \in \,]0,1[& \text{si} & 1 < x < 2 \\ = 0 & & 2 \leqslant x \end{cases} \ .$$

Cette fonction nous permet alors de définir les fonctions $\rho_l \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour $l \in \mathbb{N}^*$ par

$$\rho_l(x) := \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) \ .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on peut alors montrer que $\varphi = \lim_l \rho_l \cdot \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration de (ii) C'est immédiat par (i). □

REMARQUE 2 Nous identifierons évidemment $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ et nous dirons qu'une distribution $\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ s'il existe $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ (nécessairement unique) telle que $\mu_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \nu$.

Remarquons que sans topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nous n'aurions pas pu obtenir ce résultat, puisqu'il dépend de la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$! De manière générale on a une application

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^* : \mu \longmapsto \mu_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \ ,$$

mais elle n'est pas injective !

5.4 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$

LEMME *Pour tout $f, g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\int f(\lambda) \cdot \mathcal{F}g(\lambda)\, d\lambda = \int \mathcal{F}f(x) \cdot g(x)\, dx \ .$$

En particulier, on a

$$\langle \gamma | \mathcal{F}g \rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| g \right\rangle \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

En outre pour tout $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \varphi | f^* \rangle = \overline{\langle \varphi^* | f \rangle} \ .$$

Grâce au théorème de Fubini on obtient

$$\int f(\lambda) \cdot \mathcal{F}g(\lambda)\, d\lambda = \int f(\lambda) \cdot \left(\int e^{-2\pi i \cdot (\lambda | x)} \cdot g(x)\, dx \right) d\lambda =$$

$$= \int \left(\int e^{-2\pi i \cdot (\lambda | x)} \cdot f(\lambda)\, d\lambda \right) \cdot g(x)\, dx = \int \mathcal{F}f(x) \cdot g(x)\, dx \ .$$

On a alors

$$\langle \gamma | \mathcal{F}g \rangle = \int \overline{\gamma} \cdot \mathcal{F}g = \int \mathcal{F}\overline{\gamma} \cdot g\, d\mu = \left\langle \overline{\mathcal{F}\overline{\gamma}} \middle| g \right\rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| g \right\rangle \ .$$

Finalement

$$\langle \varphi | f^* \rangle = \int \overline{\varphi(y)} \cdot \overline{f(-y)}\, dy = \overline{\int \overline{\overline{\varphi(-y)}} \cdot f(y)\, dy} = \overline{\langle \varphi^* | f \rangle} \ .$$

□

Puisque $\mathcal{F}$ et $\diamond^*$ sont des applications continues (théorème 5.2.ii), ce lemme nous conduit à poser la

DEFINITION 1 Si $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est une distribution tempérée, on définit une distribution tempérée

$$|\mathcal{F}\mu\rangle := |\mu\rangle \circ \overset{-1}{\mathcal{F}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ ,$$

ce qui revient à poser

$$\langle \gamma | \mathcal{F}\mu \rangle := \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \mu \right\rangle \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

On dit que c'est la *transformée de Fourier* de μ .

De même définissons les distributions tempérées $\overline{\mu}$ et μ^* par

$$\langle \varphi | \overline{\mu} \rangle := \overline{\langle \overline{\varphi} | \mu \rangle}$$

et

$$\langle \varphi | \, \mu^* \rangle := \overline{\langle \varphi^* | \, \mu \rangle}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

L'application $\mu \longmapsto \mu^*$ est une involution sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. On a

$$\mu^* = \overset{\vee}{\overline{\mu}} = \overline{\overset{\vee}{\mu}} \ .$$

REMARQUE 1 Le calcul ci-dessus montre que la transformée de Fourier de f au sens des distributions est la même que celle calculée ponctuellement. En particulier

$$\mathcal{F}(f \cdot \lambda) = \mathcal{F}f \cdot \lambda \ .$$

THEOREME *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, dont l'application réciproque est donnée par*

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} \mu = \mathcal{F} \overset{\vee}{\mu} = (\mathcal{F}\mu)^{\vee} \quad \textit{pour tout } \mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

En outre, on a les formules

$$\mathcal{F} \not\partial^{\alpha} = M_{\mathrm{id}^{\alpha}} \mathcal{F} \quad \textit{et} \quad \not\partial^{\alpha} \mathcal{F} = \mathcal{F} M_{[-\,\mathrm{id}]^{\alpha}} \ ,$$

donc aussi

$$\mathcal{F}\left[1 + \not\Delta\right]^k = M_{\langle \mathrm{id} \rangle^k} \mathcal{F} \quad \textit{et} \quad \left[1 + \not\Delta\right]^k \mathcal{F} = \mathcal{F} M_{\langle \mathrm{id} \rangle^k} \ ,$$

ainsi que

$$\mathcal{F} T_y = M_{e_{-y}} \mathcal{F} \quad , \quad T_{\lambda} \mathcal{F} = \mathcal{F} M_{e_{\lambda}} \quad \textit{et} \quad \mathcal{F} D_h = D_{\frac{1}{h}} \mathcal{F} \ ,$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ et

$$\mathcal{F} \mu^* = \overline{\mathcal{F}\mu} \ .$$

C'est immédiat en utilisant les résultats de 5.1 à 5.3 qui précèdent. ———— □

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\mathcal{F}\left(\not\partial^{\alpha} \delta_x\right) = \mathrm{id}^{\alpha} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x)} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(\mathrm{id}^{\alpha} \cdot e^{2\pi i \cdot (\lambda|\,\mathrm{id})}\right) = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \not\partial^{\alpha} \delta_{\lambda} \ .$$

En particulier sur $\mathbb{R}$ on a

$$\mathcal{F}\delta_x = e^{-2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x)} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(e^{2\pi i \cdot (\lambda|\,\mathrm{id})}\right) = \delta_{\lambda}$$

et encore plus particulièrement

$$\mathcal{F}\delta = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}1 = \delta \ .$$

Utilisant le théorème 5.1.i, on a

$$\mathcal{F}\left(\not\partial^{\alpha} \delta_x\right) = \mathrm{id}^{\alpha} \cdot \mathcal{F}\delta_x = \mathrm{id}^{\alpha} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x)} \ ,$$

car

$$\langle \gamma | \, \mathcal{F}\delta_x \rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}} \gamma \middle| \, \delta_x \right\rangle = \left\langle \int e^{2\pi i \cdot (\lambda|\,\mathrm{id})} \cdot \gamma(\lambda) \, d\lambda \middle| \, \delta_x \right\rangle =$$

$$= \int e^{-2\pi i \cdot (\lambda|x)} \cdot \overline{\gamma(\lambda)} \, d\lambda = \left\langle \gamma \, \middle| e^{-2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x)} \right\rangle \ ,$$

puis

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{id}^{\alpha}\cdot e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet\mathrm{id}}\right)=\mathcal{F}\mathcal{F}\left(\not{\partial}^{\alpha}\delta_{-\lambda}\right)=\mathcal{F}\overset{-1}{\mathcal{F}}D_{-1}\left(\not{\partial}^{\alpha}\delta_{-\lambda}\right)=(-1)^{|\alpha|_1}\cdot\not{\partial}^{\alpha}D_{-1}\delta_{-\lambda}=(-1)^{|\alpha|_1}\cdot\not{\partial}^{\alpha}\delta_{\lambda}\ .$$

□

REMARQUE 2 Si $\mu\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ est à support compact et si μ est continue pour la topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, i.e. $\mu\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$, alors $\mu\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. C'est ce type de résultats qui montre l'importance d'une topologie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et plus généralement sur $\mathcal{D}(X)$.

En effet si $\chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $0\leqslant\chi\leqslant1$ et $\chi=1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp}\mu$ (cf. proposition 4.6), pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, puisque

$$\varphi-\chi\cdot\varphi=(1-\chi)\cdot\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n\smallsetminus\operatorname{supp}\mu)\ ,$$

on a $\langle\varphi-\chi\cdot\varphi|\,\mu\rangle=0$, donc

$$\langle\varphi|\,\mu\rangle=\langle\chi\cdot\varphi|\,\mu\rangle\ .$$

Mais si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tend vers 0 pour la topologie induite par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $(\overline{\chi}\cdot\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 pour la topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (cf. remarque 4.1). Ceci montre évidemment que $\mu\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

□

COROLLAIRE (Théorème de Paley-Wiener-Schwartz) *Soient $\mu\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et $R\in\mathbb{R}_+^*$. Pour que μ ait un support compact contenu dans B_R , il faut et il suffit que $\mathcal{F}\mu$ possède un prolongement analytique à $\mathbb{C}^n$ et que pour certaines constantes $C\in\mathbb{R}_+$ et $k\in\mathbb{N}$, on ait*

$$|\mathcal{F}\mu(\lambda)|\leqslant C\cdot\langle\lambda\rangle^{\frac{k}{2}}\cdot e^{2\pi\cdot R\cdot|\mathrm{Im}\,\lambda|}\quad\textit{pour tout } \lambda\in\mathbb{C}^n\ .$$

Si $\operatorname{supp}\mu\subset B_R$, soit $\chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $0\leqslant\chi\leqslant1$, $\chi=1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp}\mu$ et $\operatorname{supp}\chi\subset B_{R+1}$ (cf. proposition 4.6). On peut montrer que, pour tout $\gamma\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\chi\cdot\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma=\int\chi\cdot e^{2\pi i\cdot(\lambda|\,\mathrm{id})}\cdot\gamma(\lambda)\ d\lambda=\lim_{fin(\Delta)\to0}\sum_{j\in n}\chi\cdot e^{2\pi i\cdot(\lambda_j|\,\mathrm{id})}\cdot\gamma(\lambda_j)\cdot(\lambda_{j+1}-\lambda_j)^n$$

comme limite de sommes de Riemann dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, où $\Delta=(\lambda_j)_{j\in J}$ est une partition n-dimensionnelle d'une cube contenant $\operatorname{supp}\chi$. Comme dans la remarque ci-dessus on a alors

$$\langle\gamma|\,\mathcal{F}\mu\rangle=\left\langle\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma\middle|\,\mu\right\rangle=\left\langle\chi\cdot\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma\middle|\,\mu\right\rangle=$$

$$=\lim_{fin(\Delta)\to0}\sum_{j\in n}\left\langle\chi\cdot e^{2\pi i\cdot(\lambda_j|\,\mathrm{id})}\middle|\,\mu\right\rangle\cdot\overline{\gamma(\lambda_j)}\cdot(\lambda_{j+1}-\lambda_j)^n=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\gamma(\lambda)}\cdot\left\langle\chi\cdot e^{2\pi i\cdot(\lambda|\,\mathrm{id})}\middle|\,\mu\right\rangle\,d\lambda\ ,$$

ce qui montre que $\mathcal{F}\mu$ est égale à la restriction à $\mathbb{R}^n$ de la fonction

$$\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}:\lambda\longmapsto\left\langle\chi\cdot e^{2\pi i\cdot\langle\lambda,\mathrm{id}\rangle}\middle|\,\mu\right\rangle\ .$$

En montrant que, pour $\lambda\in\mathbb{C}^n$, on a

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\chi\cdot\left(e^{2\pi i\cdot\langle\lambda+h\cdot e_j,\mathrm{id}\rangle}-e^{2\pi i\cdot\langle\lambda,\mathrm{id}\rangle}\right)=\chi\cdot\mathrm{pr}_j\cdot e^{2\pi i\cdot\langle\lambda,\mathrm{id}\rangle}\quad\text{dans }\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\ ,$$

on voit que que $\mathcal{F}\mu$ est holomorphe.

Finalement puisque μ est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $Cst \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait $|\langle \varphi | \mu \rangle| \leqslant Cst \cdot p_k(\varphi)$. Il nous suffit de démontrer l'inégalité lorsque $|\lambda| \geqslant 1$; choisissons χ de telle manière que $\operatorname{supp} \chi \subset B_{R+\frac{1}{|\lambda|}}$. On obtient alors les estimations

$$\left|\left\langle \chi \cdot e^{2\pi i \cdot (\lambda | \mathrm{id})} \middle| \mu \right\rangle\right| \leqslant Cst \cdot p_k\left(\chi \cdot e^{2\pi i \cdot \langle \lambda, \mathrm{id} \rangle}\right) =$$

$$= Cst \cdot \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial\!\!\!/^{\alpha} \left(\chi \cdot e^{2\pi i \cdot \langle \lambda, \mathrm{id} \rangle}\right) \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant Cst \cdot \sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \partial\!\!\!/^{\alpha} e^{2\pi i \cdot \langle \lambda, \mathrm{id} \rangle} \right\|_{\infty, B_{R+\frac{1}{|\lambda|}}} = Cst \cdot \sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \lambda^\alpha \cdot e^{2\pi i \cdot \langle \lambda, \mathrm{id} \rangle} \right\|_{\infty, B_{R+\frac{1}{|\lambda|}}} \leqslant$$

$$\leqslant Cst \cdot \langle \lambda \rangle^{\frac{k}{2}} \cdot e^{2\pi \cdot \left(R + \frac{1}{|\lambda|}\right) \cdot |\operatorname{Im} \lambda|} \leqslant C \cdot \langle \lambda \rangle^{\frac{k}{2}} \cdot e^{2\pi \cdot R \cdot |\operatorname{Im} \lambda|} \ .$$

Pour plus de détails et une démonstration de la réciproque on peut consulter Reed and Simon [11], II, theorem IX.12, p. 17. $\square$

EXERCICE Montrer que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R})' \ .$$

En déduire la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

Cf. exercice 4.7.3.

5.5 Espaces de Sobolev

THEOREME (de Plancherel) *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ induit une application unitaire*

$$\mathcal{F} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, le lemme 5.4 montre que

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_2^2 = \int \overline{\mathcal{F}\varphi} \cdot \mathcal{F}\varphi = \int \overset{-1}{\mathcal{F}}\overline{\varphi} \cdot \mathcal{F}\varphi = \int \overline{\varphi} \cdot \varphi = \|\varphi\|_2^2 \ ,$$

donc que $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$ est une isométrie surjective. Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, elle se prolonge en une application unitaire $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Il nous suffit de montrer que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est la restriction à $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. Mais pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, il vient

$$\langle \gamma | \mathcal{F}\xi \rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \xi \right\rangle = \int \overline{\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma} \cdot \xi = \left(\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)^{-1} \gamma \middle| \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)^{-1} \widetilde{\mathcal{F}}\xi \right) = \left(\gamma \middle| \widetilde{\mathcal{F}}\xi \right) =$$

$$= \int \overline{\gamma} \cdot \widetilde{\mathcal{F}}\xi = \left\langle \gamma \middle| \widetilde{\mathcal{F}}\xi \right\rangle \ .$$

□

REMARQUE 1 Classiquement le calcul de $\mathcal{F}\xi$ se fait de la manière suivante : si $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ converge vers ξ dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\mathcal{F}\xi = \lim_k \mathcal{F}\xi_k$$

et $\mathcal{F}\xi_k$ se calcul ponctuellement à l'aide d'une intégrale de Fourier. Par exemple si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties intégrable de $\mathbb{R}^n$ telle que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ soit égale à $\mathbb{R}^n$ à un ensemble négligeable près, alors $1_{A_k} \cdot \xi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et $\xi = \lim_k \xi_k$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ par le théorème de Lebesgue. On peut prendre $[-k, k]^n$ ou $B(0, k)$.

DEFINITION 1 Nous désignerons par $\mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\int \frac{|f|^2}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} \, d\lambda < \infty$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'elles sont à *croissance quadratique modérée* .

Rappelons que les fonctions à croissance modérées ont été définies dans l'exemple 5.3.1.

LEMME *On a*

$$\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id} \rangle^{-k}\right)$$

et

$$f \cdot g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{pour tout } f, g \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \ .$$

En particulier

$$\mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \ .$$

La première partie est évidente. Quant à la dernière assertion, on a

$$\int \frac{|f \cdot g|}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} d\lambda \leqslant \left(\int \frac{|f|^2}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int \frac{|g|^2}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

si k est assez grand. $\square$

DEFINITION 2 Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on dit que l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) := \overset{-1}{\mathcal{F}} \left(\mathbf{L}^2 (\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id} \rangle^s) \right) \ ,$$

muni du produit scalaire transporté, est l'*espace de Sobolev d'ordre* s sur $\mathbb{R}^n$. La norme associée est donc

$$\|\mu\|_{2,(s)} := \|\mathcal{F}\mu\|_{s, \langle \mathrm{id} \rangle^s} \ .$$

On pose

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{(-\infty)}(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Puisque la famille $\left(\mathbf{L}^2 (\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id} \rangle^s)\right)_{s \in \mathbb{R}}$ est décroissante, il en est de même de la famille $\left(\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)\right)_{s \in \mathbb{R}}$ de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. On a

$$\mathcal{H}^{(0)}(\mathbb{R}^n) = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

par le théorème de Plancherel, et

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) = \overset{-1}{\mathcal{F}} \left(\bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathbf{L}^2 (\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id} \rangle^s) \right) \ ,$$

ainsi que

$$\mathcal{H}^{(-\infty)}(\mathbb{R}^n) = \overset{-1}{\mathcal{F}} \left(\mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \right)$$

par le lemme.

PROPOSITION *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

(i) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Pour tout $\mu \in \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$, *on a* $\partial^\alpha \mu \in \mathcal{H}^{\left(s - |\alpha|_1\right)}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Si $(1 + \not{\Delta})\,\mu \in \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$, *alors* $\mu \in \mathcal{H}^{(s+2)}(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$1 + \not{\Delta} : \mathcal{H}^{(s+2)}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$$

est unitaire.

(iv) Si $m \in \mathbb{N}$, *alors* $\mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des* $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ *tels que, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *satisfaisant à* $|\alpha|_1 \leqslant m$, *la dérivée* $\partial^\alpha \xi$ *au sens des distributions appartienne à* $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, *i.e.*

$$\mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ \middle| \ \partial^\alpha \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ \textit{si } |\alpha|_1 \leqslant m \right\} \ .$$

En outre

$$\|\xi\|_{2,(m)}^2 = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \|\partial\!\!\!/^{\alpha}\|_2^2$$

pour certaines constantes $c_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

(v) *Si* $f \in \mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n)$ *, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à dérivées bornées, et* $\xi \in \mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ *, alors* $f \cdot \xi \in \mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$.

(vi) ***Lemme de Sobolev*** *Pour tout* $\xi \in \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ *et* $l \in \mathbb{N}$ *tel que* $l < s - \frac{n}{2}$ *, on a* $\xi \in \mathcal{C}^{(l)}(\mathbb{R}^n)$.

En particulier

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) = \left\{\xi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \partial^\alpha \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n\right\}$$

Démonstration de (i) Comme $\langle \mathrm{id}\rangle^s \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\langle \mathrm{id}\rangle^s \cdot \lambda$ est une intégrale de Radon, donc $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id}\rangle^s)$ puisque c'est un espace-test (cf. exemple 1.4.2). Il en est de même de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (cf. exemple 1.4.3) et ainsi que de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ceci montre que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$, donc aussi $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par la proposition 5.3.i.

Démonstration de (ii) Par récurrence il nous suffit de montrer que pour tout $j = 1, \ldots, n$, on a $\partial_j \mu \in \mathcal{H}^{(s-1)}(\mathbb{R}^n)$, mais $\mathcal{F}\mu \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id}\rangle^s)$, donc

$$\mathcal{F}(\partial\!\!\!/_j \mu) = \mathrm{pr}_j \cdot \mathcal{F}\mu \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id}\rangle^{s-1}\right) ,$$

puisque $\left|\mathrm{pr}_j\right|^2 \leqslant \langle \mathrm{id}\rangle$ et

$$\int \left|\mathrm{pr}_j \cdot \mathcal{F}\mu\right|^2 \cdot \langle \mathrm{id}\rangle^{s-1} \leqslant \int |\mathcal{F}\mu|^2 \cdot \langle \mathrm{id}\rangle^s .$$

Démonstration de (iii) On a $\langle \mathrm{id}\rangle \cdot \mathcal{F}\mu = \mathcal{F}((1 + \Delta\!\!\!/)\mu) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id}\rangle^s)$, i.e

$$\int |\langle \mathrm{id}\rangle \cdot \mathcal{F}\mu|^2 \cdot \langle \mathrm{id}\rangle^s = \int |\mathcal{F}\mu|^2 \cdot \langle \mathrm{id}\rangle^{s+2} < \infty ,$$

c'est-à-dire $\mathcal{F}\mu \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id}\rangle^{s+2}\right)$, donc $\mu \in \mathcal{H}^{(s+2)}(\mathbb{R}^n)$. Cette formule montre également que

$$M_{\langle \mathrm{id}\rangle} : \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id}\rangle^{s+2}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id}\rangle^s)$$

est unitaire, d'où le résultat puisque $1 + \Delta\!\!\!/ = \overset{-1}{\mathcal{F}} M_{\langle \mathrm{id}\rangle} \mathcal{F}$.

Démonstration de (iv) Remarquons tout d'abord que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 \leqslant m$, on a $|\mathrm{id}^\alpha|^2 \leqslant |\mathrm{id}|^{2|\alpha|_1} \leqslant \langle \mathrm{id}\rangle^m$ et que

$$\langle \mathrm{id}\rangle^m = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \mathrm{pr}_j^2\right)^l = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \mathrm{id}^{2\alpha}$$

pour certaines constantes $c_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; ainsi

$$\int^* |\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\xi|^2 \, d\lambda \leqslant \int^* |\mathcal{F}\xi|^2 \cdot \langle \mathrm{id}\rangle^m \, d\lambda = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \int^* |\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\xi|^2 \, d\lambda .$$

Ceci montre que $\xi \in \mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$, i.e. $\mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id}\rangle^m)$, est équivalent à

$$\partial\!\!\!/^{\alpha} \xi = \overset{-1}{\mathcal{F}}(\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\xi) \in \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\right) = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

pour tous ces α . Dans ce cas on obtient

$$\|\xi\|_{2,(m)}^2 = \int |\mathcal{F}\xi|^2 \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^m \, d\lambda = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \int |\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\xi|^2 \, d\lambda = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \|\partial\!\!\!/^\alpha \xi\|_2^2 \ .$$

Démonstration de (v) C'est immédiat en utilisant la règle de Leibniz : on a

$$\partial^\alpha (f \cdot \xi) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha-\beta} \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 \leqslant m$.

Démonstration de (vi) Remarquons tout d'abord que $\langle\mathrm{id}\rangle^{-\frac{n}{4}-\varepsilon} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, car

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle\mathrm{id}\rangle^{-\frac{n}{2}-2\varepsilon} = cst \cdot \int_0^\infty \left(1+r^2\right)^{-\frac{n}{2}-2\varepsilon} \cdot r^{n-1} \, dr < \infty \ ,$$

puisque $-n - 2\varepsilon + n - 1 = -(2\varepsilon + 1) < -1$. Mais $\langle\mathrm{id}\rangle^{\frac{s}{2}} \cdot \mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, donc

$$\langle\mathrm{id}\rangle^{\frac{s}{2}-\frac{n}{4}-\varepsilon} \cdot \mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \ .$$

Nous pouvons choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit de telle manière que l'on ait encore $l < s - \frac{n}{2} - 2\varepsilon$; pour tout $|\alpha|_1 \leqslant l$, on en déduit que

$$|\mathrm{id}^\alpha| \leqslant \langle\mathrm{id}\rangle^{\frac{l}{2}} \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{-\frac{s}{2}+\frac{n}{4}+\varepsilon} \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{\frac{s}{2}-\frac{n}{4}-\varepsilon} \leqslant \langle\mathrm{id}\rangle^{\frac{s}{2}-\frac{n}{4}-\varepsilon}$$

et par suite $\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Grâce au lemme de Riemann-Lebesgue (théorème 5.1.iii), on voit que

$$\xi = \overset{-1}{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\xi) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \ .$$

Si $l > 0$, on a tout d'abord

$$f_j := \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(2\pi i \cdot \mathrm{pr}_j \cdot \mathcal{F}\xi\right) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \quad \text{pour tout } j = 1, \ldots, n \ .$$

Mais en considérant la fonction continue $f := (f_j)_{j=1,\ldots,n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, si $x \in \mathbb{R}^n$ et $j = 1, \ldots, n$ sont donnés, le quotient différentiel

$$\frac{\xi(x + h \cdot e_j) - \xi(x) - f_j(x) \cdot h}{h} =$$

$$= \int \frac{1}{h} \cdot \left(e^{2\pi i \cdot (\lambda|x+h)} - e^{2\pi i \cdot (\lambda|x)} - \left(2\pi i \cdot \lambda \cdot e^{2\pi i \cdot (\lambda|x)} \middle| h\right)\right) \cdot \mathcal{F}\xi(\lambda) \, d\lambda$$

tend vers 0 par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, puisque

$$\partial_j e^{2\pi i \cdot (\lambda|\,\mathrm{id})} = 2\pi i \cdot \lambda_j \cdot e^{2\pi i \cdot (\lambda|\,\mathrm{id})}$$

et

$$\left|\frac{1}{h} \cdot \left(e^{2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x+h)} - e^{2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x)} - 2\pi i \cdot \mathrm{pr}_j \cdot e^{2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x)} \cdot h\right) \cdot \mathcal{F}\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \cdot \sup_{|s| \leqslant h} \left|\mathrm{pr}_j \cdot \left(e^{2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x+s \cdot e_j)} - e^{2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x)}\right) \cdot \mathcal{F}\xi\right| \leqslant 4\pi \cdot \left|\mathrm{pr}_j \cdot \mathcal{F}\xi\right| \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \ ,$$

par la seconde inégalité de la moyenne (cf. cours d'Analyse [9], proposition 11.2.ii) Nous avons donc montré que $\xi \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^n)$, d'où notre assertion par récurrence. □

5.6 Espaces de Sobolev locaux

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

DEFINITION 1 Pour tout $\mu \in \mathcal{D}(X)^*$ et $\chi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp}\chi \subset X$, on définit $\chi \cdot \mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ par

$$\langle \varphi | \chi \cdot \mu \rangle := \langle \overline{\chi} \cdot \varphi | \mu \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ on définit l' *espace de Sobolev local d'ordre* s par

$$\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{(s)}(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{D}(X)^* \ \middle| \ \chi \cdot \mu \in \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } \chi \in \mathcal{D}(X) \right\} \ .$$

Remarquons que $\chi \in \mathcal{D}(X)$ peut être considérée comme un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en la prolongeant par 0 hors de X !

THEOREME

(i) La famille $\left(\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{(s)}(X)\right)_{s\in\mathbb{R}}$ *de sous-espaces vectoriels de* $\mathcal{D}(X)^*$ *est décroissante et*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{(0)}(X) = \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}^2(X) \ .$$

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $\mu \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{(s)}(X)$ *, on a* $\partial^\alpha \mu \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{\left(s-|\alpha|_1\right)}(X)$ *.*

(iii) Si μ *,* $\not\Delta \mu \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{(s)}(X)$ *, alors* $\mu \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{(s+2)}(X)$ *.*

(iv) Si $m \in \mathbb{N}$ *, alors* $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{(m)}(X)$ *est l'ensemble des* $\xi \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}^2(X)$ *tels que, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *satisfaisant à* $|\alpha|_1 \leqslant m$ *, la dérivée* $\partial^\alpha \xi$ *au sens des distributions appartienne à* $\mathbf{L}_{\mathrm{loc}}^2(X)$ *, i.e.*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{(m)}(X) = \left\{ \xi \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}^2(X) \ \middle| \ \partial^\alpha \xi \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}^2(X) \ \text{ si } |\alpha|_1 \leqslant m \right\} \ .$$

En outre

$$\|\xi\|_{2,(m)}^2 = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \|\not\partial^\alpha\|_2^2$$

pour certaines constantes $c_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *.*

(v) Si $\mu \in \mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ *, alors* $\mu_{|X} \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{(m)}(X)$ *.*

(vi) ***Lemme de Sobolev*** *Pour tout* $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{(m)}(X)$ *et* $l \in \mathbb{N}$ *tel que* $l < m - \frac{n}{2}$ *, on a* $\xi \in \mathcal{C}^{(l)}(X)$ *.*

Démonstration de (i) La première partie est évidente puisque $\left(\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)\right)_{s\in\mathbb{R}}$ est décroissante. Il en est de même de la seconde puisque pour tout $\chi \in \mathcal{D}(X)$, on a $\chi \cdot \mu \in \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\right) = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration de (ii) Par récurrence il nous suffit de montrer que pour tout $j = 1, \ldots, n$, on a $\partial_j \mu \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}^{(s-1)}(X)$. Mais pour tout $\chi \in \mathcal{D}(X)$, on a $\chi \cdot \mu, \partial_j \chi \cdot \mu \in \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$, donc $\partial_j(\chi\cdot\mu)\in\mathcal{H}^{(s-1)}(\mathbb{R}^n)$ par la proposition 5.5.ii, puis

$$\chi\cdot\partial_j\mu=\partial_j(\chi\cdot\mu)-\partial_j\chi\cdot\mu\in\mathcal{H}^{(s-1)}(\mathbb{R}^n)\ . \qquad (*)$$

Démonstration de (iii) Pour tout $\chi\in\mathcal{D}(X)$, on a $\chi\cdot\mu\,,\ \chi\cdot\not{\Delta}\mu\in\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$, donc

$$\not{\Delta}(\chi\cdot\mu)=\not{\Delta}\chi\cdot\mu+2\cdot\sum_{j=1}^n\partial_j\chi\cdot\partial_j\mu+\chi\cdot\not{\Delta}\mu\in\mathcal{H}^{(s-1)}(\mathbb{R}^n)\ , \qquad (**)$$

mais alors $\chi\cdot\mu\in\mathcal{H}^{(s+1)}(\mathbb{R}^n)$ par la proposition 5.5.iii, donc $\chi\cdot\partial_j\mu\in\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ par $(*)$, puis $\not{\Delta}(\chi\cdot\mu)\in\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ par $(**)$ et finalement $\chi\cdot\mu\in\mathcal{H}^{(s+2)}(\mathbb{R}^n)$ par la proposition 5.5.iii.

Démonstration de (iv) On a $\xi\in\mathcal{H}^{(m)}_{\mathrm{loc}}(X)$ si, et seulement si, pour tout $\chi\in\mathcal{D}(X)$ et $\alpha\in\mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1\leqslant m$, on a $\partial^\alpha(\chi\cdot\xi)\in\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$; mais comme dans (ii) on voit par récurrence, en utilisant la formule de Leibniz

$$\partial^\alpha(\chi\cdot\xi)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\cdot\partial^\beta\chi\cdot\partial^{\alpha-\beta}\xi\ ,$$

que ceci est équivalent à $\chi\cdot\partial^\alpha\xi\in\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\chi\in\mathcal{D}(X)$ et $\alpha\in\mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1\leqslant m$, donc à $\partial^\alpha\xi\in\mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1\leqslant m$.

Démonstration de (v) En effet pour tout $\chi\in\mathcal{D}(X)$, on a $\chi\cdot\mu_{|X}=\chi\cdot\mu\in\mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ par la proposition 5.4.v, donc $\mu_{|\mathcal{D}(X)}\in\mathcal{H}^{(m)}(X)$.

Démonstration de (vi) Etant donné $x\in X$, soit U un voisinage relativement compact de x tel que $\overline{U}\subset X$ et $\chi_1,\chi_2\in\mathcal{D}(X)$ telles que $\chi_1=\chi_2=1$ sur U . Comme $\chi_j\cdot\xi\in\mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$, le lemme de Sobolev sur $\mathbb{R}^n$ (proposition 5.5.vi) montre que $\chi_j\cdot\xi\in\mathcal{C}^{(l)(\mathbb{R}^n)}$. Mais pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(U)$, on a

$$\langle\varphi|\chi_1\cdot\xi\rangle=\langle\overline{\chi_1}\cdot\varphi|\,\xi\rangle=\langle\varphi|\,\xi\rangle=\langle\overline{\chi_2}\cdot\varphi|\,\xi\rangle=\langle\varphi|\chi_2\cdot\xi\rangle\ ,$$

ce qui montre que $\chi_1\cdot\xi_{|\mathcal{D}(U)}=\chi_2\cdot\xi_{|\mathcal{D}(U)}$, i.e. les fonction $\chi_1\cdot\xi$ et $\chi_2\cdot\xi$ coïncident sur U . Il est donc possible de définir une fonction $f\in\mathcal{C}^{(l)}(X)$ telle $f(x):=(\chi\cdot\xi)(x)$ quel que soit $\chi\in\mathcal{D}(X)$ égale à 1 sur un voisinage relativement compact de x . Pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(X)$, soit $\chi\in\mathcal{D}(X)$ est égale à 1 sur un voisinage relativement compact de $\operatorname{supp}\varphi$ (cf. proposition 4.6). Il vient alors

$$\langle\varphi|\,\xi\rangle=\langle\overline{\chi}\cdot\varphi|\,\xi\rangle=\langle\varphi|\,\chi\cdot\xi\rangle=\langle\varphi|\,f\rangle\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE Au contraire du cas $\mathbb{R}^n$ l'opérateur différentiel $1+\not{\Delta}$ n'est en général pas une bijection de $\mathcal{H}^{(s+2)}_{\mathrm{loc}}(X)$ sur $\mathcal{H}^{(s)}_{\mathrm{loc}}(X)$.

Dans le résultat qui suit nous aurons besoin des distributions "continues" !

COROLLAIRE (Lemme de Weyl) *Soit $\nu\in\mathcal{D}(X)'$. Si $\mu\in\mathcal{D}(X)'$ est une solution de l'équation différentielle $\not{\Delta}\mu=\nu$, si U est une partie ouverte de X telle que $\nu_{|U}\in\mathcal{C}^{(m)}(U)$ et si $l\in\mathbb{N}$ est tel que $l<m+2-\frac{n}{2}$, alors $\mu_{|U}\in\mathcal{C}^{(l)}(U)$.*

En particulier si $\nu_{|U}\in\mathcal{C}^{(\infty)}(U)$, alors $\mu_{|U}\in\mathcal{C}^{(\infty)}(U)$.

Puisque le problème est local, nous pouvons supposer que U est une partie relativement compacte de X et soient $\rho\in\mathcal{D}(X)$ telle que $\rho=1$ sur un voisinage de $\overline{U}$, ainsi que $R\in\mathbb{R}^*_+$

tel que $U \subset B_R$. La distribution continue $\rho \cdot \mu$ est à support compact $\subset B_R$; le théorème de Paley-Wiener-Schwartz (cf. Corollaire 5.4) montre alors que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|\mathcal{F}(\rho \cdot \mu)(\lambda)| \leqslant C \cdot \langle\lambda\rangle^{\frac{k}{2}} \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^n \ ,$$

donc

$$\int |\mathcal{F}(\rho \cdot \mu)|^2 \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{-k-\frac{n}{2}-\varepsilon} \leqslant C^2 \cdot \int \langle\mathrm{id}\rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon} < \infty \ .$$

Cela signifie que $\rho \cdot \mu \in \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $s \in \mathbb{R}$. Mais alors, pour tout $\chi \in \mathcal{D}(U)$, on a

$$\chi \cdot \mu_{|U} = \chi \cdot \mu = \chi \cdot \rho \cdot \mu \in \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$$

par la proposition 5.5.v, ce qui montre que

$$\mu_{|U} \in \mathcal{H}^{(s)}_{\mathrm{loc}}(U) \ .$$

Comme $\chi \cdot \nu_{|U} \in \mathcal{D}^{(m)}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$, on a aussi

$$\not\Delta \mu_{|U} = \nu_{|U} \in \mathcal{H}^{(m)}_{\mathrm{loc}}(U) \subset \mathcal{H}^{(s)}_{\mathrm{loc}}(U) \ ,$$

pour autant que l'on ait $s \leqslant m$, donc $\mu_{|U} \in \mathcal{H}^{(s+2)}_{\mathrm{loc}}(U)$ le théorème (iii) ci-dessus. Par récurrence on obtient $\mu_{|U} \in \mathcal{H}^{(m+2)}_{\mathrm{loc}}(U)$, donc $\mu_{|U} \in \mathcal{C}^{(l)}(U)$ par le lemme de Sobolev. $\square$

5.7 Espaces de Sobolev sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

D'après (iv) des théorèmes 5.5 et 5.6 il est naturel pour simplifier de poser la définition suivante :

DEFINITION 1 Soient $m \in \mathbb{N}$ et

$$\mathcal{H}^{(m)}(X) := \left\{ \xi \in \mathbf{L}^2(X) \;\middle|\; \partial^\alpha \xi \in \mathbf{L}^2(X) \text{ si } |\alpha|_1 \leqslant m \right\}$$

l' *espace de Sobolev* sur X , muni de la norme

$$\|\xi\|_{2,(m)} := \left(\sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|\partial^\alpha \xi\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Nous désignerons en outre par $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{H}^{(m)}(X)$, ainsi que

$$\mathcal{H}^{(-m)}(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{D}(X)' \;\middle|\; \mu = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \partial^\alpha \xi_\alpha \text{ où } (\xi_\alpha)_{|\alpha|_1 \leqslant m} \subset \mathbf{L}^2(X) \right\} ,$$

muni de la norme

$$\|\mu\|_{2,(-m)} := \inf \left\{ \left(\sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|\partial \xi_\alpha\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \;\middle|\; \mu = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \partial^\alpha \xi_\alpha \text{ où } (\xi_\alpha)_{|\alpha|_1 \leqslant m} \subset \mathbf{L}^2(X) \right\} .$$

Puisque dans la définition de la norme de $\mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ on a $c_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, cette norme est équivalente à celle que nous venons de définir.

On a évidemment $\mathcal{H}^{(m)}(X) \subset \mathcal{H}_{\text{loc}}^{(m)}(X)$.

DEFINITION 2 Si f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$, nous désignerons par f_0 son prolongement par 0 sur $\mathbb{R}^n$.

LEMME

(i) *Si* $f \in \mathcal{C}^{(\infty),b}(X)$ *et* $\xi \in \mathcal{H}^{(m)}(X)$, *alors* $f \cdot \xi \in \mathcal{H}^{(m)}(X)$.

(ii) *Si* $\chi \in \mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \chi \subset X$ *et* $\xi \in \mathcal{H}^{(m)}(X)$, *alors* $\chi \cdot \xi \in \mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration de (i) C'est immédiate par la règle de Leibniz.

Démonstration de (ii) La distribution $\chi \cdot \xi$ a été définie en 5.6.1. La démonstration est alors analogue à celle du théorème 5.6.iv. Le cas $m = 1$ est simple puisqu'on a $\chi \cdot \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $j = 1, \ldots, n$,

$$\langle \varphi | \partial_j (\chi \cdot \xi) \rangle = - \langle \overline{\chi} \cdot \partial_j \varphi | \xi \rangle = - \langle \partial_j (\overline{\chi} \cdot \varphi) - \partial_j \overline{\chi} \cdot \varphi | \xi \rangle =$$

$$= \langle \varphi | \chi \cdot \partial_j \xi + \partial_j \overline{\chi} \cdot \xi \rangle \ ,$$

donc $\partial_j (\chi \cdot \xi) = \chi \cdot \partial_j \xi + \partial_j \overline{\chi} \cdot \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. □

Dans le chapitre qui suit nous aurons besoin de la notion de sous-variété (cf. cours d'Analyse [9], chap. 13 et 17) pour pouvoir traiter certains questions liées au bord d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Il sera nécessaire de considérer des paramétrages ou bien des cartes d'un certain type.

DEFINITION 3 Si X et Y sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, nous dirons qu'un difféomorphisme $\Phi : Y \longrightarrow X$ est *à dérivées bornées* si

$$\|D\Phi\|_{\infty,Y} \ , \ \left\| D\overset{-1}{\Phi} \right\|_{\infty,X} < \infty \ .$$

REMARQUE 1 On a

$$\|\det D\Phi\|_{\infty,Y} \ , \ \left\| \det D\overset{-1}{\Phi} \right\|_{\infty,X} < \infty \ ,$$

grâce à l'inégalité d'Hadamard

$$\left| \det (a_{k,l})_{k,l\in n} \right| \leqslant \prod_{k\in n} \left(\sum_{l\in n} |a_{k,l}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \begin{cases} \left\| (a_{k,l})_{k,l\in n} \right\|^n \\ n^{\frac{n}{2}} \cdot (\max_{k,l\in n} |a_{k,l}|)^n \end{cases}$$

pour toute matrice $(a_{k,l}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

REMARQUE 2 Si

$$\|D\Phi\|_{\infty,Y} < \infty$$

et

$$\left\| (\det D\Phi)^{-1} \right\|_{\infty,Y} \quad \text{, i.e.} \quad \det D\Phi \geqslant \varepsilon \text{ sur } Y \text{ pour un certain } \varepsilon > 0 \ ,$$

alors Φ est à dérivées bornées.

En effet la formule de Cramer montre que

$$\left\| D\overset{-1}{\Phi} \right\|_{\infty,X} = \left\| (D\Phi)^{-1} \right\|_{\infty,Y} = \left\| (\det D\Phi)^{-1} \cdot \widetilde{D\Phi} \right\|_{\infty,Y} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| (\det D\Phi)^{-1} \right\|_{\infty,Y} \cdot \left\| \widetilde{D\Phi} \right\|_{\infty,Y} \leqslant Cst \cdot \left\| (\det D\Phi)^{-1} \right\|_{\infty,Y} \cdot \|D\Phi\|_{\infty,Y} \ .$$

□

Rappelons que $A_{k,l}$ est la matrice déduite de A en supprimant la k-ième ligne et la l-ième colonne et que $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{k,l})_{k,l\in n}$ désigne la matrice complémentaire, i.e. la transposée de celle des cofacteurs de A :

$$\widetilde{a}_{k,l} := (-1)^{k+l} \cdot \det A_{l,k} \ .$$

On a

$$\widetilde{A} A = \det A \cdot \mathrm{Id} \ ;$$

en particulier le développement du déterminant de A suivant la colonne d'indice l est

$$\det A = \sum_{k\in n} \widetilde{a}_{l,k} \cdot a_{k,l} \ .$$

THEOREME

(i) $\mathcal{H}^{(m)}(X)$ *est un espace de Hilbert, donc aussi* $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$.

(ii) *On a*

$$\mathcal{H}^{(m),0}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n) \ .$$

(iii) *L'application de restriction*

$$|\mu\rangle_{\mathcal{H}^{(m),0}(X)} \longmapsto |\mu\rangle_{\mathcal{D}(X)} : \mathcal{H}^{(m),0}(X)^{\dagger} \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$$

est injective et son image est $\mathcal{H}^{(-m)}(X)$.

(iv) ***Inégalité de Poincaré*** *On suppose qu'il existe une partie ouverte* $Y \subset J \times \mathbb{R}^{n-1}$ *, où* J *est un intervalle borné de* $\mathbb{R}$ *, et un difféomorphisme* $\Phi : Y \longrightarrow X$ *à dérivées bornées. Posons*

$$M := \max\left(\|D\Phi\|_{\infty,Y} , \|\det D\Phi\|_{\infty,Y} , \left\|(\det D\Phi)^{-1}\right\|_{\infty,Y}\right) < \infty \ .$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{H}^{(1),0}(X)$ *, on a alors*

$$\|\xi\|_2 \leqslant \frac{M^2 \cdot \lambda(J)}{2} \cdot \|\operatorname{grad} \xi\|_{\mathbf{L}^2(X,\mathbb{C}^n)} \ .$$

Démonstration de (i) L'application

$$\Phi : \xi \longmapsto (\partial\!\!\!/^{\alpha}\xi)_{|\alpha|_1 \leqslant m} : \mathcal{H}^{(m)}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(X)^{\{|\diamond|_1 \leqslant m\}}$$

est une isométrie et nous allons montré que son image $\operatorname{Im}\Phi$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{L}^2(X)^{\{|\diamond|_1 \leqslant m\}}$; puisque ce dernier est un espace de Hilbert comme produit fini d'espaces de Hilbert, on en déduit que $\mathcal{H}^{(m)}(X)$ est un espace de Hilbert et il en est de même de $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$.

Soit donc $(\partial\!\!\!/^{\alpha}\xi_k)_{|\alpha|_1 \leqslant m}$ une suite de Cauchy dans $\operatorname{Im}\Phi$. Puisque $\mathbf{L}^2(X)$ est complet, il existe $\eta_\alpha \in \mathbf{L}^2(X)$ tels que $\eta_\alpha = \lim_k \partial\!\!\!/^{\alpha}\xi_k$ et posons $\xi := \eta_0$. Puisque l'injection canonique $\mathbf{L}^2(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)^*$ est continue, on a $\lim_k \xi_k = \xi$ et $\lim_k \partial\!\!\!/^{\alpha}\xi_k = \eta_\alpha$ dans $\mathcal{D}(X)^*$; pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on en déduit

$$\langle \varphi | \partial\!\!\!/^{\alpha}\xi \rangle = \langle \partial\!\!\!/^{\alpha}\xi\varphi | \xi \rangle = \langle \partial\!\!\!/^{\alpha}\xi\varphi | \lim_k \xi_k \rangle = \lim_k \langle \partial\!\!\!/^{\alpha}\xi\varphi | \xi_k \rangle =$$

$$= \lim_k \langle \varphi | \partial\!\!\!/^{\alpha}\xi_k \rangle = \langle \varphi | \lim_k \partial\!\!\!/^{\alpha}\xi_k \rangle = \langle \varphi | \eta_\alpha \rangle \ ,$$

ce qui finit de prouver que $(\partial\!\!\!/^{\alpha}\xi)_{|\alpha|_1 \leqslant m} \in \operatorname{Im}\Phi$.

Démonstration de (ii) C'est immédiat par la proposition 5.5.ii.

Démonstration de (iii) Par définition $\mathcal{D}(X)$ est dense dans $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$, d'où l'injectivité. Montrons que l''image est contenue dans $\mathcal{H}^{(-m)}(X)$. Si $\mu \in \mathcal{H}^{(m),0}(X)^{\dagger}$, le théorème de Hahn-Banach 2.2 montre que μ possède un prolongement continu

$$\nu : \mathcal{H}^{(m)}(X) = \mathcal{H}^{(m),0}(X) \boxplus \mathcal{H}^{(m),0}(X)^{\perp} \longrightarrow \mathbb{K}$$

égal à μ sur $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$ et à 0 sur $\mathcal{H}^{(m),0}(X)^{\perp}$. Par le théorème de Riesz, il existe $\xi \in \mathcal{H}^{(m)}(X)$ tel que

$$\langle \eta | \nu \rangle_{\mathcal{H}^{(m)}(X)} = (\eta | \xi)_{(m)} = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} (\partial^\alpha \eta | \partial^\alpha \xi)$$

et posons $\xi_\alpha := \partial^\alpha \xi \in \mathbf{L}^2(X)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a alors

$$\langle \varphi | \mu \rangle_{\mathcal{D}(X)} = \langle \varphi | \nu \rangle_{\mathcal{H}^{(m)}(X)} = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} (\partial^\alpha \varphi | \xi_\alpha) =$$

$$= \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \langle \partial^\alpha \varphi | \xi_\alpha \rangle_{\mathcal{D}(X)} = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \langle \varphi | \partial^\alpha \xi_\alpha \rangle_{\mathcal{D}(X)} = \left\langle \varphi \left| \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \partial^\alpha \xi_\alpha \right. \right\rangle ,$$

ce qui finit de prouver que $\mu = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \partial^\alpha \xi_\alpha = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \partial^{2\alpha} \xi$. Il nous reste à montrer que l'image contient $\mathcal{H}^{(-m)}(X)$. Si $(\xi_\alpha)_{|\alpha|_1 \leqslant m} \subset \mathbf{L}^2(X)$, la forme semi-linéaire

$$\varphi \longmapsto \left\langle \varphi \left| \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \partial^\alpha \xi_\alpha \right. \right\rangle = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} (\partial^\alpha \varphi | \xi_\alpha) : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue pour la topologie induite par $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$, puisque

$$\left| \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} (\partial^\alpha \varphi | \xi_\alpha) \right| \leqslant \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} |(\partial^\alpha \varphi | \xi_\alpha)| \leqslant \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|\partial^\alpha \varphi\|_2 \cdot \|\xi_\alpha\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|\partial^\alpha \varphi\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|\xi_\alpha\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| (\xi_\alpha)_{|\alpha|_1 \leqslant m} \right\|_2 \cdot \|\varphi\|_{2,(m)} .$$

Elle se pronlonge donc de manière unique en forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$, donc définit un élément de $\mathcal{H}^{(m),0}(X)^{\dagger}$.

Démonstration de (iv) Pour tout $\gamma \in \mathcal{D}(J)$, l'inégalité de Poincaré à une dimension (corollaire 1.6) montre que

$$\|\gamma\|_2 \leqslant \frac{\lambda(J)}{2} \cdot \|\partial \gamma\|_2 .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, en écrivant $y = (u,t) \in Y \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, la formule de changement de variable montre tout d'abord que

$$\|\varphi\|_2^2 = \int_X |\varphi|^2 = \int_Y |\varphi \circ \Phi|^2 \cdot |\det D\Phi| \leqslant$$

$$= M \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_J |\varphi \circ \Phi(t,u)|^2 \, dt \right) du \leqslant \frac{M \cdot \lambda(J)^2}{4} \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|\partial_1 (\varphi \circ \Phi)(\diamond, u)\|_2^2 \, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M \cdot \lambda(J)^2}{4} \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|\operatorname{grad}(\varphi \circ \Phi)(\diamond, u)\|_2^2 \, du = \frac{M \cdot \lambda(J)^2}{4} \cdot \|\operatorname{grad}(\varphi \circ \Phi)\|_2^2 .$$

Puisque

$$|\operatorname{grad}(\varphi \circ \Phi)| = |D(\varphi \circ \Phi)| = |(D\varphi \circ \Phi) D\Phi| = |D\Phi^{\intercal} (\operatorname{grad} \varphi \circ \Phi)| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|D\Phi^{\intercal}\right\| \cdot |\mathrm{grad}\,\varphi \circ \Phi| = \|D\Phi\| \cdot |\mathrm{grad}\,\varphi \circ \Phi| \leqslant M \cdot |\mathrm{grad}\,\varphi \circ \Phi| \ ,$$

on obtient d'autre part

$$\|\mathrm{grad}\,\varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(X,\mathbb{C}^n)} = \int_X |\mathrm{grad}\,\varphi|^2 = \int_Y |\mathrm{grad}\,\varphi \circ \Phi|^2 \cdot |\det D\Phi| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{M^3} \cdot \int_Y |\mathrm{grad}\,(\varphi \circ \Phi)|^2 \geqslant \frac{1}{M^3} \cdot \|\mathrm{grad}\,(\varphi \circ \Phi)\|_2^2 \ .$$

Finalement

$$\|\varphi\|_2^2 \leqslant \frac{M \cdot \lambda(J)^2}{4} \cdot \|\mathrm{grad}\,(\varphi \circ \Phi)\|_2^2 \leqslant \frac{M^4 \cdot \lambda(J)^2}{4} \cdot \|\mathrm{grad}\,\varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(X,\mathbb{C}^n)} \ ,$$

donc $\|\varphi\|_2 = \frac{M^2 \cdot \lambda(J)}{2} \cdot \|\mathrm{grad}\,\varphi\|_{\mathbf{L}^2(X,\mathbb{C}^n)}$. Cette inégalité se prolonge par densité et continuité à $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$. $\square$