Chapitre 1

ESPACES DE HILBERT

Dans tout ce qui suit F est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ des nombres réels ou complexes.

Version du 14 janvier 2005

1.1 Formes sesquilinéaires et produits scalaires

DEFINITION 1 Soient F, G, H des espaces vectoriels. Une application $T : F \longrightarrow G$ est dite *linéaire* , respectivement *semi-linéaire* , si pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\varphi, \psi \in F$, on a

$$T(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot T\varphi \quad \text{, respectivement} \quad T(\alpha \cdot \varphi) = \overline{\alpha} \cdot T\varphi$$

et

$$T(\varphi + \psi) = T\varphi + T\psi \ .$$

On dit qu'une une application $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow H$ est *bilinéaire* si elle est séparément linéaire, et *sesquilinéaire* (*à gauche* , respectivement *à droite* s'il faut préciser) si elle est semi-linéaire en la première variable, respectivement en la seconde, et linéaire en l'autre.

Une application bilinéaire ou sesquilinéaire (à gauche) à valeur dans $\mathbb{K}$ est dite une *forme* bilinéaire ou sesquilinéaire.

Soit $\mathfrak{s} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire. On dit qu'elle est

(a) *hermitienne* si

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \overline{\mathfrak{s}(\psi, \varphi)} \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ ,$$

(b) *positive* si

$$\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F$$

et

(c) *non-dégénérée* si

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = 0 \quad \text{pour tout } \psi \in F \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0$$

et

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F \quad \Longrightarrow \quad \psi = 0 \ .$$

Une forme hermitienne positive non-dégénérée s'appelle un *produit scalaire* .

On a tout d'abord la

PROPOSITION (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Si $\mathfrak{s}$ est une forme hermitienne positive sur F , alors*

$$|\mathfrak{s}(\varphi, \psi)|^2 \leqslant \mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \cdot \mathfrak{s}(\psi, \psi) \quad \textit{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

Pour tout $\varphi, \psi \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$0 \leqslant \mathfrak{s}(\varphi + \alpha \cdot \psi, \varphi + \alpha \cdot \psi) = \mathfrak{s}(\varphi, \varphi) + \alpha \cdot \mathfrak{s}(\varphi, \psi) + \overline{\alpha} \cdot \mathfrak{s}(\psi, \varphi) + |\alpha|^2 \cdot \mathfrak{s}(\psi, \psi) \ .$$

Si $\mathfrak{s}(\varphi,\varphi) = \mathfrak{s}(\psi,\psi) = 0$, alors en prenant $\alpha := -\overline{\mathfrak{s}(\varphi,\psi)}$, on obtient $-2 \cdot |\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2 \geqslant 0$, donc $\mathfrak{s}(\varphi,\psi) = 0$. En échangeant au besoin φ et ψ , nous pouvons supposer que $\mathfrak{s}(\psi,\psi) \neq 0$. On prend alors

$$\alpha := -\frac{\overline{\mathfrak{s}(\varphi,\psi)}}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)}$$

et il vient

$$0 \leqslant \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) - \frac{|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} - \frac{\mathfrak{s}(\varphi,\psi) \cdot \mathfrak{s}(\psi,\varphi)}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} + \frac{|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} = \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) - \frac{|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} ,$$

d'où l'inégalité. □

DEFINITION 2 Une fonctionnelle $p : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ est dite

(a) *positivement homogène* si

$$p(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \varphi \in F ,$$

(b) *absolument homogène* si

$$p(\alpha \cdot \varphi) = |\alpha| \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \varphi \in F ,$$

et

(c) *sous-additive* si

$$p(\varphi + \psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi) \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F .$$

On dit que p est une *semi-norme* si p est à valeur dans $\mathbb{R}_+$, absolument homogène et sous-additive ; on dit que c'est une *norme* si en plus elle est

(d) *séparante*

$$p(\varphi) = 0 \iff \varphi = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F .$$

Dans ce cas on dit que F est un espace *semi-normé* , respectivement *normé* .

Pour les propriétés élémentaires des espaces normés le lecteur est prié de consulter le cours d'Analyse [9], § 10.1 à 10.7. La continuité d'une application linéaire entre espaces normés est caractérisée dans le paragraphe 11.8 du même cours. Nous généraliserons ces notions plus tard (cf. 2.1 - 2.2 et 3.1 - 3.2).

PROPOSITION (Inégalité de Minkowsky) *Si $\mathfrak{s}$ est une forme hermitienne positive sur F , alors*

$$\varphi \longmapsto \mathfrak{s}(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}} : F \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une semi-norme sur F .

Il nous suffit de prouver la sous-additivité. Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$\mathfrak{s}(\varphi+\psi,\varphi+\psi) = \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + \mathfrak{s}(\varphi,\psi) + \mathfrak{s}(\psi,\varphi) + \mathfrak{s}(\psi,\psi) =$$

$$= \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + 2 \cdot \operatorname{Re} \mathfrak{s}(\varphi,\psi) + \mathfrak{s}(\psi,\psi) \leqslant \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + 2 \cdot |\mathfrak{s}(\varphi,\psi)| + \mathfrak{s}(\psi,\psi) \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + 2 \cdot [\mathfrak{s}(\varphi,\varphi) \cdot \mathfrak{s}(\psi,\psi)]^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{s}(\psi,\psi) = \left[\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{s}(\psi,\psi)^{\frac{1}{2}}\right]^2 ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE 1 L'égalité

$$\mathfrak{s}(\varphi+\psi,\varphi+\psi)=\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)+2\cdot\operatorname{Re}\mathfrak{s}(\varphi,\psi)+\mathfrak{s}(\psi,\psi)$$

nous sera souvent utile par la suite.

THEOREME *Soit $\mathfrak{s}$ une forme hermitienne positive sur F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{s}$ *est non-dégénérée, i.e. un produit scalaire.*

(ii) $\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)>0$ *pour tout* $\varphi\in F\smallsetminus\{0\}$.

(iii) $\varphi\longmapsto\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}}:F\longrightarrow\mathbb{R}$ *est une norme sur* F .

Les conditions (ii) et (iii) sont évidemment équivalentes et (ii) entraîne (i). Réciproquement si $\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)=0$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2\leqslant\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)\cdot\mathfrak{s}(\psi,\psi)=0\ ,$$

donc $\varphi=0$, puisque $\mathfrak{s}$ est non-dégénérée. $\square$

REMARQUE 2 Un produit scalaire est en général noté $(\cdot|\cdot)$. Si $\|\cdot\|$ désigne la norme associée, i.e.

$$\|\varphi\|^2:=(\varphi|\,\varphi)\ ,$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$|(\varphi|\,\psi)|\leqslant\|\varphi\|\cdot\|\psi\|\quad\text{pour tout }\varphi,\psi\in F\ .$$

En adaptant la démonstration de la continuité de la multiplication dans $\mathbb{K}$ (cours d'Analyse [9], théorème 5.5.iii), on montre facilement que le produit scalaire

$$(\cdot|\cdot):F\times F\longrightarrow\mathbb{K}:(\varphi,\psi)\longmapsto(\varphi|\,\psi)$$

est (globalement) continu (cf. exemple 2.4). La proposition 2.4 généralise ce résultat.

REMARQUE 3 Pour qu'on ait égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il faut et il suffit que φ et ψ soient linéairement dépendants.

Nous redémontrons en même temps l'inégalité. Nous pouvons supposer que $\|\varphi\|=1$ en remplaçant au besoin φ par $\frac{\varphi}{\|\varphi\|}$. On a alors

$$0\leqslant\|\psi-(\varphi|\,\psi)\cdot\varphi\|^2=(\psi-(\varphi|\,\psi)\cdot\varphi|\,\psi-(\varphi|\,\psi)\cdot\varphi)=\|\psi\|^2-|(\varphi|\,\psi)|^2\ ,$$

donc l'inégalité. On a l'égalité si, et seulement si, $\psi=(\varphi|\,\psi)\cdot\varphi$. $\square$

EXEMPLE 1 Si E,F,G,H sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $\mathfrak{s}:F\times G\longrightarrow H$ une application sesquilinéaire et $S:E\longrightarrow G$ une application linéaire, alors

$$(\varphi,\epsilon)\longmapsto\mathfrak{s}(\varphi,S\epsilon):F\times E\longrightarrow H$$

est une application sesquilinéaire.

La vérification est immédiate. $\square$

EXEMPLE 2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = (a_{k,l}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$(x,y) \longmapsto (x|\,Ay) := \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l} \cdot \overline{x_k} \cdot y_l : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme sesquilinéaire. Elle est hermitienne si, et seulement si, la matrice A est hermitienne, i.e. $A = A^*$. Elle est positive si, et seulement si, A est *positive* , i.e. $(x|\,Ax) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$. C'est un produit scalaire si, et seulement si, la matrice A est hermitienne et *strictement positive* , i.e. $(x|\,Ax) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\}$.

Attention dans la litérature, on utilise souvent pour une matrice les expressions semi-définie positive pour positive et définie positive pour strictement positive.

Si A est hermitienne et strictement positive, la norme associée au produit scalaire qu'elle définit est

$$x \longmapsto \left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l} \cdot \overline{x_k} \cdot x_l\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Nous montrerons (théorème 2.7) que cette norme est équivalente à la norme euclidienne $|\cdot|_2$.

EXEMPLE 3 Soient X un espace topologique et μ une intégrale de Radon sur X . Alors

$$(\xi,\eta) \longmapsto (\xi|\,\eta)_\mu := \int \overline{\xi} \cdot \eta \, d\mu : \mathbf{L}^2(\mu) \times \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est évidemment une forme sesquilinéaire hermitienne positive. C'est un produit scalaire. La norme associée sera désignée par $\|\cdot\|_{2,\mu} := (\cdot|\,\cdot)^{\frac{1}{2}}$. Nous écrirons souvent $\|\cdot\|_2$ pour simplifier.

En effet $(\xi|\,\xi)_\mu = \int |\xi|^2 \, d\mu = 0$ entraîne $\xi = 0$ μ-p.p. , i.e. $\xi = 0$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. ——— □

DEFINITION 3 Une *section commençante* de $\mathbb{N}$ est une partie I telle que, pour tout $n \in J$ et $m \in \mathbb{N}$, on ait $m \in I$ si $m \leqslant n$. Ce sont les ensembles de la forme

$$n = \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{N} .$$

Une *énumération* d'un ensemble dénombrable (fini ou infini dénombrable) A est une bijection $\sigma : I \longrightarrow A$, où I est une section commençante de $\mathbb{N}$.

LEMME *Soient X un ensemble et $(\alpha_x)_{x\in X} \subset \mathbb{R}$ une famille de nombres réels telle que*

$$\sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(X)} \sum_{x\in K} |\alpha_x| < \infty .$$

Alors $\{x \in X \mid \alpha_x \neq 0\}$ est dénombrable.

Si D est une partie dénombrable contenant $\{x \in X \mid \alpha_x \neq 0\}$ et si $\sigma : I \longrightarrow D$ une énumération de D , alors la série $\sum_{l=0}^{\sup I} \alpha_{\sigma(l)}$ est convergente et sa somme est indépendante de D et σ . On écrit

$$\sum_{x\in X} \alpha_x := \sum_{l=0}^{\sup I} \alpha_{\sigma(l)}$$

et on dit que c'est la somme de la famille $(\alpha_x)_{x\in X}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$\left\{ x \in X \;\middle|\; |\alpha_x| \geqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est fini, donc

$$\{x \in X \mid |\alpha_x| > 0\} = \bigcup_{k \geqslant 1} \left\{ x \in X \;\middle|\; |\alpha_x| \geqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est dénombrable. La série $\sum_{l=0}^{\sup I} \alpha_{\sigma(l)}$ est alors absolument convergente et le lemme découle du théorème de réarrangement 6.14 du cours d'Analyse [9]. $\square$

On dit que $(\alpha_x)_{x \in X}$ est sommable, notion que nous introduirons dans le cadre des espaces localement convexes en 2.6. Les interrelations seront explicitées dans le corollaire 2.11.

EXEMPLE 4 Soit X un ensemble et $\#$ l'intégrale de comptage. Alors

$$(\xi, \eta) \longmapsto (\xi | \eta)_{\#} := \sum_{x \in X} \overline{\xi(x)} \cdot \eta(x) : \ell^2(X) \times \ell^2(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est un produit scalaire.

Remarquons que, pour tout $\xi, \eta \in \ell^2(X)$, il existe une partie dénombrable $D \subset X$ telle que $\xi(x) = \eta(x) = 0$ pour tout $x \notin D$. Si $\sigma : I \longrightarrow D$ est une énumération de D , alors la série $\sum_{l=0}^{\sup I} \overline{\xi(\sigma(l))} \cdot \eta(\sigma(l))$ est absolument convergente, puisque en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{K}^n$ on a

$$\sum_{l=0}^{\sup I} \left| \overline{\xi(\sigma(l))} \cdot \eta(\sigma(l)) \right| = \sup_{k \in I} \sum_{l=0}^{k} |\xi(\sigma(l))| \cdot |\eta(\sigma(l))| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{k \in I} \left(\sum_{l=0}^{k} |\xi(\sigma(l))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{l=0}^{k} |\eta(\sigma(l))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\xi\|_2 \cdot \|\eta\|_2 < \infty \ .$$

On pose alors

$$\sum_{x \in X} \overline{\xi(x)} \cdot \eta(x) := \sum_{l=0}^{\sup I} \overline{\xi(\sigma(l))} \cdot \eta(\sigma(l)) \ ,$$

le membre de droite ne dépendant évidemment pas de D et σ . Les vérifications sont alors immédiates. $\square$

EXERCICE Montrer qu'une forme hermitienne positive $\mathfrak{s}$ induit naturellement un produit scalaire sur le quotient de F par le sous-espace vectoriel des $\varphi \in F$ tels que $\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) = 0$.

1.2 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert

DEFINITION 1 Un espace vectoriel F muni d'un produit scalaire s'appelle un *espace préhilbertien* . On le considère comme un espace normé en le munissant de la norme associée. Si F est complet pour cette norme, on dit que c'est un *espace de Hilbert* .

EXEMPLE 1 Les exemples 2 à 4 du numéro précédent sont des espaces de Hilbert.

EXEMPLE 2 Soient X un espace localement compact et μ un intégrale de Radon sur X . La forme hermitienne positive sur $\mathcal{K}(X)$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (\varphi|\, \psi) := \int \overline{\varphi} \cdot \psi \, d\mu : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est non-dégénérée si, et seulement si, pour tout ouvert $O \neq \emptyset$ de X , on a $\mu(O) > 0$. Dans ce cas $\mathcal{K}(X)$ est un espace préhilbertien, en général non-complet.

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X) \setminus \{0\}$, il existe $x \in X$ tel que $|\varphi(x)|^2 > 0$, donc un voisinage ouvert O de x tel que l'on ait

$$|\varphi(y)|^2 \geqslant \frac{|\varphi(x)|^2}{2} \quad \text{pour tout } y \in O \ .$$

Le théorème 1.1 montre alors que la condition est suffisante, puisque

$$(\varphi|\, \varphi) = \int |\varphi|^2 \, d\mu \geqslant \int_O \frac{|\varphi(x)|^2}{2} \, d\mu \geqslant \frac{|\varphi(x)|^2}{2} \cdot \mu(O) > 0 \ .$$

Réciproquement X étant complètement régulier, il existe $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ tel que $0 < \varphi \leqslant 1$ et $\varphi = 0$ hors de O , donc

$$\mu(O) \geqslant \int |\varphi|^2 \, d\mu = (\varphi|\, \varphi) > 0 \ .$$

□

REMARQUE 1 La condition ci-dessus signifie que l'application canonique

$$\varphi \longmapsto [\varphi] : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$$

est injective. On dit que le *support* de μ est X .

REMARQUE 2 Dans le cas général on considère l'image $[\mathcal{K}(X)]$ de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ formée des classes modulo les fonctions μ-négligeables contenant au moins une fonctions continues à support compact.

Rappelons que

$$\mathbf{L}^2(\mu) = \mathcal{L}^2(\mu) / \mathcal{N}(\mu) \ ,$$

où $\mathcal{N}(\mu) = \{f \in \mathbf{L}^2(\mu) \mid f = 0 \ \mu\text{-p.p.}\} = \{f \in \mathbf{L}^2(\mu) \mid \|f\|_2 = 0\}$ (cf. exercice 1.1).

DEFINITION 2 On dit que l'ensemble fermé complément du plus grand ouvert qui est μ-négligeable est le *support* de μ . On le désigne par $\operatorname{supp}\mu$.

Cette définition est consistante. Soit O la réunion de tous les ouverts U de X tels que $\mu(U) = \mu(1_U) = 0$. La famille de tous ces ouverts est filtrante croissante, puisque pour deux tels ouverts U, V , on a

$$\mu(U \cup V) \leqslant \mu(U) + \mu(V) = 0 .$$

Mais comme

$$1_O = \sup_{U \text{ ouvert, } \mu(U)=0} 1_U ,$$

la propriété de Bourbaki (cours d'Analyse [9], théorème 14.5) montre que

$$\mu(O) = \mu\left(\sup_{U \text{ ouvert, } \mu(U)=0} 1_U\right) = \sup_{U \text{ ouvert, } \mu(U)=0} \mu(1_U) = 0 ,$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

REMARQUE 3 Dans beaucoup de situation, si l'espace de base X ne joue pas un très grand rôle, on peut supposer que le support de μ est X en remplaçant X par $\operatorname{supp}\mu$ et μ par l'intégrale de Radon induite $\mu_{\operatorname{supp}\mu}$. Si $j : \operatorname{supp}\mu \hookrightarrow X$ est l'injection canonique, on a

$$j\left(\mu_{\operatorname{supp}\mu}\right) = 1_{\operatorname{supp}\mu} \cdot \mu$$

(cf. cours d'Analyse [9], proposition 16.10).

EXEMPLE 3 Soient X un espace topologique et μ une intégrale de Radon sur X . Rappelons que $\mathbf{M}(\mu)$ désigne l'espace vectoriel des classes, modulo les fonctions μ-négligeables, de fonctions μ-mesurables sur X (cf. cours d'Analyse [9], remarque 15.14.2) . Si

$$\rho : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est une fonction μ-mesurable, il est clair que la fonctionnelle

$$f \longmapsto \|f\|_{2,\mu,\rho} := \left(\int^* |f|^2 \cdot \rho \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} : \mathbb{K}^X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est sous-linéaire. L'ensemble $\mathcal{L}^2(\mu, \rho)$ des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ qui sont μ-mesurables et telles que $\|f\|_{2,\mu,\rho} < \infty$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^X$; on a

$$\|f\|_{2,\mu,\rho} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \quad \mu\text{-p.p. sur } \{\rho > 0\}$$

et

$$f = 0 \quad \mu\text{-p.p. sur } \{\rho = \infty\} .$$

Nous désignerons par

$$\mathbf{L}^2(\mu, \rho) = \mathcal{L}^2(\mu, \rho) \Big/ \left\{\|\cdot\|_{2,\mu,\rho} = 0\right\}$$

l'espace quotient muni de la norme définie par

$$\|[f]\|_{2,\mu,\rho} := \|f\|_{2,\mu,\rho} .$$

Nous ne ferons en général pas de distintinction entre une classe de fonctions et l'un de ses représentants. L'application

$$f \longmapsto 1_{\{\rho \neq 0\}} \cdot f : \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \longrightarrow \mathbf{M}(\mu)$$

est évidemment injective. Il est immédiat de vérifier que

$$f \longmapsto f \cdot \sqrt{\rho} : \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$$

est une isométrie sur le sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{L}^2(\mu)$ formé des f tels que $f = 0$ μ-p.p. sur $\{\rho = 0\} \cup \{\rho = \infty\}$. Ceci montre en particulier que $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ est un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est

$$(f|\, g)_{\mu,\rho} := \int \overline{f} \cdot g \cdot \rho \, d\mu \ .$$

Si $\mathfrak{A}$ est une tribu d'ensembles μ-mesurables, on peut également considérer le sous-espace vectoriel $\mathbf{L}^2(\mu, \rho, \mathfrak{A})$ de $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ formé des classes de fonctions contenant un représentant $\mathfrak{A}$-mesurable. On vérifie facilement qu'il est fermé.

REMARQUE 4 On a $\mathbf{L}^2(\mu, \rho) = \mathbf{L}^2(\rho \cdot \mu)$ si $\rho \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Sans cette hypothèse on ne peut pas définir une intégrale de Radon $\rho \cdot \mu$.

EXEMPLE 4 Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont des espaces de Hilbert, alors $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$, muni du produit scalaire

$$((\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)) \longmapsto (\xi_1|\, \xi_2)_{\mathcal{H}} + (\eta_1|\, \eta_2)_{\mathcal{G}} \ ,$$

est un espace de Hilbert.

EXEMPLE 5 Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $\mathcal{G}$ un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, on écrit $\mathcal{G} \sqsubset \mathcal{H}$, alors $\mathcal{G}$ est un espace de Hilbert.

1.3 Formules de polarisation

PROPOSITION *Soit $\mathfrak{s}$ une forme sesquilinéaire sur F . Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a*

(i)

$$2 \cdot [\mathfrak{s}(\varphi, \psi) + \mathfrak{s}(\psi, \varphi)] = \sum_{\varepsilon^2 = 1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \varepsilon \cdot \psi, \varphi + \varepsilon \cdot \psi) \ .$$

(ii) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\mathfrak{s}$ est hermitienne, alors*

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^2 = 1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \varepsilon \cdot \psi, \varphi + \varepsilon \cdot \psi) \ .$$

(iii) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors*

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi, \varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi) \ .$$

En particulier si $\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}$ pour tout $\varphi \in F$, alors $\mathfrak{s}$ est hermitienne.

En effet

$$\sum_{\varepsilon} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi, \varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi) =$$

$$= \sum_{\varepsilon} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi, \varphi) + \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\varphi, \psi) + \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\psi, \varphi) + \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\psi, \psi) \ ,$$

d'où les formules de polarisation en remarquant que $\bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$,

$$\sum_{\varepsilon^2 = 1} \varepsilon = 0 \quad , \quad \sum_{\varepsilon^2 = 1} 1 = \sum_{\varepsilon^2 = 1} \varepsilon^2 = 2 \quad , \quad \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon = \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\varepsilon^4 = 1} 1 = 4 \ .$$

Finalement si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}$ pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\overline{\mathfrak{s}(\varphi, \psi)} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4 = 1} \bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi, \bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4 = 1} \bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\varepsilon \cdot \varphi + \psi, \varepsilon \cdot \varphi + \psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\psi + \bar{\varepsilon} \cdot \varphi, \psi + \bar{\varepsilon} \cdot \varphi) = \mathfrak{s}(\psi, \varphi) \ ,$$

donc $\mathfrak{s}$ est hermitienne. □

COROLLAIRE (Egalité du parallélogramme ou identité de la médiane)

Soit (F, p) un espace semi-normé. Il existe une unique forme hermitienne positive $\mathfrak{s}$ sur F induisant la semi-norme p si, et seulement si, pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$p(\varphi + \psi)^2 + p(\varphi - \psi)^2 = 2 \cdot \left[p(\varphi)^2 + p(\psi)^2\right] \ .$$

La nécessité se démontre immédiatement en développant le membre de gauche. L'unicité découle des formules ci-dessus, que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathfrak{s}(\varphi,\psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^{2\cdot\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}}=1} \varepsilon \cdot \|\varphi + \overline{\varepsilon} \cdot \psi\|^2 \ . \tag{$*$}$$

Réciproquement, cette formule permettent de définir une application continue

$$\mathfrak{s} : (\varphi,\psi) \longmapsto \mathfrak{s}(\varphi,\psi) : F \times F \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

On vérifie immédiatement que $\mathfrak{s}(\varphi,\psi) = \mathfrak{s}(\psi,\varphi)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathfrak{s}(\varphi,\psi) = \overline{\mathfrak{s}(\psi,\varphi)}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donc que $\mathfrak{s}$ est hermitienne. L'égalité du parallélogramme montre alors que cette application est additive en les deux variables, i.e. $\mathbb{Z}$-bilinéaire. On en déduit qu'elle est $\mathbb{Q}$-bilinéaire, puis par continuité qu'elle est $\mathbb{R}$-bilinéaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on montre facilement que

$$(\varphi|\, i \cdot \psi) = i \cdot (\varphi|\, \psi) \ ,$$

ce qui finit de prouver la sesquilinéarité. Finalement les formules de polarisation montrent que $\mathfrak{s}$ induit bien la semi-norme p , et en particulier que $\mathfrak{s}$ est positive. $\square$

REMARQUE Une isométrie d'un espace préhilbertien dans un autre conserve le produit scalaire, puisque celui-ci s'exprime à l'aide de la norme grâce à la formule de polarisation $(*)$.

EXERCICE Si $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n}$ est une suite finie dans un espace préhilbertien F , alors

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\varepsilon\in\{\pm1\}^n} \left(\left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon(j) \cdot \varphi_j \right\|^2 \right) = \sum_{j=1}^n \|\varphi_j\|^2 \ .$$

1.4 La notion d'espace-test

Soit μ une intégrale de Radon sur un espace topologique séparé X telle que

$$\mu^*(A) = \sup_{K\in\mathfrak{K}(X), K\subset A} \mu(K)$$

pour toute partie μ-mesurable de X .

DEFINITION 1 Soit F est un espace vectoriel de (classes par rapport à μ de) fonctions sur X . Si toute fonction f sur X telle que $\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ quel que soit $\varphi \in F_+$, est μ-mesurable et si en plus

$$\int \varphi \cdot f \, d\mu \geqslant 0 \text{ pour tout } \varphi \in F_+ \quad \Longrightarrow \quad f \geqslant 0 \ \mu\text{-p.p. ,}$$

nous dirons que F est un *espace-test* (de fonctions) par rapport à μ et que μ est l'intégrale de Radon *pivot* .

LEMME *Si F est un espace-test par rapport à μ , alors*

$$\int \varphi \cdot f \, d\mu = 0 \textit{ pour tout } \varphi \in F_+ \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \ \mu\textit{-p.p. .}$$

En effet il vient tout d'abord $\int \varphi \cdot \operatorname{Re} f \, d\mu = 0$ et $\int \varphi \cdot \operatorname{Im} f \, d\mu = 0$ pour tout $\varphi \in F_+$ et nous pouvons supposer que f est réelle. On a alors $\int \varphi \cdot (\pm f) \, d\mu \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in F_+$, donc $\pm f \geqslant 0$ μ-p.p. et par suite $f = 0$ μ-p.p. . ——— □

PROPOSITION *Si F est un ensemble de (classes par rapport à μ de) fonctions sur X satisfaisant à la propriété suivante : pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de F_+ telle que*

$$\varphi_k \leqslant \varphi_0 \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

et

$$1_K = \lim_k \varphi_k \quad \textit{ponctuellement } \mu\textit{-p.p.}$$

Alors F est un espace-test.

En effet, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, on a

$$|\varphi_k \cdot f| \leqslant |\varphi_0 \cdot f| \in \mathbf{L}^1(\mu)$$

et

$$1_K \cdot f = \lim_k \varphi_k \cdot f \quad \text{ponctuellement } \mu\text{-p.p. ,}$$

donc $1_K \cdot f$ est μ-intégrable par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Par suite f est μ-mesurable (cours d'Analyse [9], théorème 15.9.iii) et si

$$\int 1_K \cdot (\operatorname{Re} f + i \cdot \operatorname{Im} f) \, d\mu = \int 1_K \cdot f \, d\mu = \lim_k \int \varphi_k \cdot f \, d\mu \geqslant 0 \ ,$$

on a

$$\int 1_K \cdot \operatorname{Re} f \, d\mu \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int 1_K \cdot \operatorname{Im} f \, d\mu = 0 \ .$$

Pour tout compact $K \subset \{\operatorname{Re} f < 0\}$, on a $1_K \cdot \operatorname{Re} f \leqslant 0$, donc $\int 1_K \cdot \operatorname{Re} f \, d\mu = 0$, puis $1_K \cdot \operatorname{Re} f = 0$ μ-p.p. et par suite $1_K = 0$ μ-p.p. , i.e. $\mu(K) = 0$. Ceci montre que $\{\operatorname{Re} f < 0\}$ est un ensemble μ-négligeable. On prouve de même que $\{\operatorname{Im} f < 0\}$ et $\{\operatorname{Im} f > 0\}$ sont μ-négligeables. Ceci finit de prouver que $f \geqslant 0$ μ-p.p. □

COROLLAIRE *Si F est un espace vectoriel réticulé involutif de fonctions sur X tel que*

(i) F soit dense dans $\mathbf{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ pour un certain $p \in [1, \infty[$.

(ii) Pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, il existe $\varphi \in F$ tel que $\varphi \geqslant 1_K$.

Alors F est un espace-test.

En effet, on a $1_K = \lim_k \psi_k$ dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour une suite $(\psi_k)_{k \geqslant 1} \subset F$ par l'hypothèse de densité (i). En extrayant au besoin une sous-suite, grâce au théorème de Riesz-Fischer (cf. cours d'Analyse [9], 15.14), nous pouvons supposer que l'on a

$$1_K = \lim_k \psi_k \quad \text{ponctuellement } \mu\text{-p.p.} \ .$$

Nous pouvons supposer, puisque F est involutif, que ψ_k est réelle en séparant les parties réelle et imaginaire. Utilisant (ii), il suffit alors de définir

$$\varphi_k := \max\left[\min(\psi_k, \varphi), 0\right] \quad \text{et} \quad \varphi_0 := \varphi \ .$$

□

EXEMPLE 1 Si $1_K \in F$ pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, alors F est un espace-test.

C'est évident par la proposition. □

EXEMPLE 2 L'espace $\mathcal{K}(X)$, lorsque X est un espace localement compact, ainsi que $\mathcal{E}(J)$, lorsque J est un intervalle de $\mathbb{R}$, sont des espaces test.

Cela découle du corollaire et du cours d'Analyse [9], corollaires 15.15. □

EXEMPLE 3 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ou plus généralement une sous-variété avec bord de $\mathbb{R}^n$. Rappelons que $\mathcal{D}(X)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions complexes indéfiniment dérivables à support compact dans X . C'est un espace-test.

En effet, soit $(\psi_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de $\mathcal{K}(X)$ telle que $0 \leqslant \psi_k \leqslant \psi_0$ et $1_K = \lim_k \psi_k$ ponctuellement μ-p.p. , construite comme la suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans le corollaire ci-dessus. Or $\mathcal{D}([\operatorname{supp} \psi_0]^\circ)$ est une sous-algèbre involutive séparant fortement les points de X , donc est dense dans $\mathcal{C}^0([\operatorname{supp} \psi_0]^\circ)$ par le théorème de Stone-Weierstraß, et $\psi_k \in \mathcal{C}^0_+([\operatorname{supp} \psi_0]^\circ)$; il existe donc, pour tout $k \geqslant 1$, un $\varphi_k \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}([\operatorname{supp} \psi_0]^\circ)$ tel que $\|\varphi_k - \psi_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$. Choisissons encore $\varphi_0 \in \mathcal{D}_+(X)$ tel que $\varphi_0 \geqslant \psi_0 + 1$ sur $\operatorname{supp} \psi_0$; ceci possible par compacité car la fonction

$$\rho(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{(|x|^2 - 1)}} & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient $\mathcal{D}_+(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{supp}\rho \subset B(0,1)$ (cf. cours d'Analyse [9], § 17.4). On a alors

$$-\varphi_0 \leqslant -\psi_k - \frac{1}{k} \leqslant \varphi_k \leqslant \psi_k + \frac{1}{k} \leqslant \psi_0 + 1 \leqslant \varphi_0 \quad \text{sur } \operatorname{supp}\psi_0 \ ,$$

donc $|\varphi_k| \leqslant \varphi_0$, et

$$\lim_k \varphi_k = \lim_k (\varphi_k - \psi_k) + \lim_k \psi_k = 1_K \quad \text{ponctuellement } \mu\text{-p.p.} \ .$$

Il suffit finalement de remplaçer φ_k par φ_k^2 pour pouvoir appliquer la proposition. —— □

1.5 Les fonctions localement absolument continues

Dans ce paragraphe J désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Rappelons la notion de fonction (localement) absolument continue et les résultats importants qui ont été démontrés dans le cours d'Analyse [9] : 15.19, 16.4 et 16.10.

DEFINITION 1 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, soit

$$1_{a,b} := \begin{cases} 1_{[a,b[} & \text{si} \quad a \leqslant b \\ -1_{[b,a[} & \phantom{\text{si}} \quad b < a \end{cases}$$

la *fonction caractéristique signée* .

LEMME *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.*

(i) Pour tout $a, b, c \in J$, on a

$$1_{a,b} + 1_{b,c} = 1_{a,c} \ .$$

(ii) Une fonction f sur J est localement λ_J-intégrable si, et seulement si, pour tout intervalle compact $[a,b] \subset J$, la fonction $1_{[a,b]} \cdot f$ est λ_J-intégrable.

(iii) Si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ et $\int \varphi \cdot f \, d\lambda_J \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{E}_+(J)$, respectivement $\varphi \in \mathcal{K}_+(J)$ ou $\varphi \in \mathcal{D}_+(J^\circ)$, alors $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. .

Etant donné $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$, $\tau \in J$ et $c \in \mathbb{C}$, on considère la fonction

$$F : J \longrightarrow \mathbb{K} : t \longmapsto c + \int_\tau^t f(s) \, ds := c + \int 1_{\tau,t} \cdot f \, d\lambda_J \ .$$

Alors

(iv) F est continue.

(v) F est croissante, si, et seulement si, $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. . En particulier pour que F soit constante, il faut et il suffit que que $f = 0$ λ_J-p.p. .

(vi) La classe de f est univoquement déterminée par F .

(vii) Si f est continue en t , alors F est dérivable en t et $F'(t) = f(t)$.

Bien que la démonstration ait été faite en 15.19 du cours d'Analyse [9], donnons quelques indications.

Démonstration de (i) C'est immédiat.

Démonstration de (ii) La nécessité découle de la compacité d'un intervalle fermé, la suffisance du fait que J est localement compact.

Démonstration de (iii) Cela découle du fait que $\mathcal{E}(J)$, $\mathcal{K}(J)$ et $\mathcal{D}(J^\circ)$ sont des espaces-test (cf. exemple 1.4.2 et 1.4.3).

Démonstration de (iv) Il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue : si $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers t dans J , on a

$$\lim_k 1_{\tau,t_k} \cdot f = 1_{\tau,t} \cdot f \quad \text{ponctuellement et} \quad |1_{\tau,t_k} \cdot f| \leqslant 1_{[a,b]} \cdot |f| \in \mathbf{L}^1(\lambda_J) \ ,$$

où $[a,b]$ est un intervalle de J contenant $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Il vient alors

$$\lim_k F(t_k) = c + \lim_k \int 1_{\tau,t_k} \cdot f \, d\lambda_J = c + \int \lim_k (1_{\tau,t_k} \cdot f) \, d\lambda_J =$$

$$= c + \int 1_{\tau,t} \cdot f \, d\lambda_J = F(t) \ .$$

Démonstration de (v) Si F est croissante, pour tout $s,t \in J$ tels que $s < t$, on a

$$0 \leqslant F(t) - F(s) = \int 1_{s,t} \cdot f \, d\lambda = \int 1_{[s,t]} \cdot f \, d\lambda_J \ .$$

Par linéarité on obtient $\int \varphi \cdot f \, d\lambda_J \geqslant 0$ pour toute fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}_+(J)$, donc $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. par (iii). La réciproque et le reste sont immédiats.

Démonstration de (vi) Si, pour tout $t \in J$, on a

$$F(t) = d + \int_{\widetilde{\tau}}^{t} g \quad \text{où } g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \ ,$$

alors

$$\int_s^t f = F(t) - F(s) = \int_s^t g$$

donc $\int 1_{s,t} \cdot f = \int_s^t (f-g) = 0$ pour tout $s,t \in J$, donc $f = g$ par (iii).

Démonstration de (vii) Il suffit d'estimer en utilisant la continuité en t :

$$\left| \frac{F(s) - F(t)}{s-t} - f(t) \right| = \frac{1}{|s-t|} \cdot \left| \int_s^t \left[f - f(t) \right] \right| \leqslant \frac{1}{|s-t|} \cdot \int_s^t |f - f(t)| \leqslant \varepsilon \ ,$$

puisque $|f(u) - f(t)| \leqslant \varepsilon$ si u est suffisamment proche de t . □

DEFINITION 2 Nous dirons qu'une fonction F du type

$$F = F(\tau) + \int_\tau^\diamond f \quad \text{pour un } f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$$

est *(localement) absolument continue* . L'ensemble de ces fonctions est désigné par $\mathcal{AC}(J)$.

Nous dirons que f est la dérivée (en un sens généralisé) de F ; on la note ∂F .

Cette définition est bien posée puisque la fonction f est univoquement déterminée par F à égalité λ_J-presque partout. C'est une généralisation, puisque toute fonction g continûment dérivable est localement absolument continue :

$$g(t) = g(\tau) + \int_\tau^t g'(s) \, ds \ ,$$

par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (cf. cours d'Analyse [9], théorème 9.9). On a donc $\partial g = g'$. Ainsi $\mathcal{C}^{(1)}(J) \subset \mathcal{AC}(J) \subset \mathcal{C}(J)$.

EXEMPLE 1 On a $|\mathrm{id}|$, $\mathrm{id}^+ = \max(0, \mathrm{id}) \in \mathcal{AC}(\mathbb{R})$ et $\partial |\mathrm{id}| = \mathrm{signum}$, $\partial \, \mathrm{id}^+ = 1_{\mathbb{R}_+}$.

PROPOSITION *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $F,G \in \mathcal{AC}(J)$ et $a,b \in J$. Alors*

(i) ***Intégration par parties***

$$\int_a^b \partial F \cdot G = \Big[F \cdot G\Big]_a^b - \int_a^b F \cdot \partial G \ .$$

En particulier $F \cdot G \in \mathcal{A}(J)$ et

$$\partial (F \cdot G) = \partial F \cdot G + F \cdot \partial G \ .$$

(ii) ***Règle de substitution*** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\Phi : I \longrightarrow J$ une fonction localement absolument continue, $I(a,b)$ l'intervalle compact d'extrémités $a,b \in I$ et*

$$\zeta : \Phi(I(a,b)) \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

Si Φ est réelle croissante, alors l'image de $\partial\Phi \cdot \lambda_{I(a,b)}$ par Φ est $\lambda_{\Phi(I(a,b))}$ et ζ est $\lambda_{\Phi(I(a,b))}$-intégrable si, et seulement si, $\zeta \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est $\lambda_{I(a,b)}$-intégrable. Dans ce cas on a

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} \zeta = \int_a^b \zeta \circ \Phi \cdot \partial\Phi \ .$$

Plus généralement si $\zeta \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est $\lambda_{I(a,b)}$-intégrable, alors ζ est $1_{\Phi(a),\Phi(b)} \cdot \lambda_{\Phi([a,b])}$-intégrable (ou bien $\lambda_{I(\Phi(a),\Phi(b))}$-intégrable) et on a la même formule.

(iii) Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $\Phi : I \longrightarrow J$, $G : J \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions localement absolument continues. Si Φ est monotone, plus généralement si $\partial G \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est localement λ_I-intégrable, alors $G \circ \Phi$ est localement absolument continue et on a

$$\partial (G \circ \Phi) = \partial G \circ \Phi \cdot \partial\Phi \ .$$

Démonstration de (i) En exprimant F et G à l'aide de ∂F et respectivement ∂G on obtient des intégrales doubles. L'égalité découle alors du théorème de Fubini comme nous l'avons fait dans le cours d'Analyse [9], théorème 16.4.

Démonstration de (ii) Cf. cours d'Analyse [9], théorème 16.10.

Démonstration de (iii) C'est immédiat par (ii) (cours d'Analyse [9], corollaire 16.10!). □

EXEMPLE 2 Si $F \in \mathcal{AC}(J)$, alors $\overline{F} \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial\left(\overline{F}\right) = \overline{\partial F}$. En particulier $|F|^2 \in \mathcal{AC}(J)$ et

$$\partial\left(|F|^2\right) = \partial\overline{F} \cdot F + \overline{F} \cdot \partial F = 2\,\mathrm{Re}\left(\partial\overline{F} \cdot F\right) \ .$$

C'est immédiat puisque

$$\overline{F} = \overline{F(\tau) + \int_\tau^\diamond f} = \overline{F}(\tau) + \int_\tau^\diamond \overline{f} \ .$$

□

EXEMPLE 3 Si $F,G \in \mathcal{AC}(J)$ et $G > 0$ sur J , alors $\frac{F}{G} \in \mathcal{AC}(J)$ et

$$\partial\frac{F}{G} = \frac{\partial F \cdot G - F \cdot \partial G}{G^2} \ .$$

En effet il suffit de montrer que $\frac{1}{G} \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial \frac{1}{G} = -\frac{\partial G}{G^2}$, donc, pour tout $t \in J$, que

$$\frac{1}{G(t)} = \frac{1}{G(\tau)} - \int_\tau^t \frac{\partial G}{G^2} \ .$$

Mais $\frac{\partial G}{G^2} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ et grâce à la règle de substitution on obtient

$$\int_\tau^t \frac{\partial G}{G^2} = \int_{G(\tau)}^{G(t)} \frac{1}{\mathrm{id}^2} = \left[-\frac{1}{\mathrm{id}}\right]_{G(\tau)}^{G(t)} = \frac{1}{G(\tau)} - \frac{1}{G(t)} \ .$$

□

DEFINITION 3 Soient $\mathcal{AC}^{(0)}(J) := \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$, $\partial^0 f := f$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{AC}^{(m+1)}(J) := \left\{ f \in \mathcal{AC}^{(m)}(J) \;\middle|\; \partial^m f \in \mathcal{AC}(J) \right\}$$

et

$$\partial^{m+1} f := \partial(\partial^m f)$$

On a

$$\mathcal{AC}^{(m+1)}(J) \subset \mathcal{C}^{(m)}(J) \subset \mathcal{AC}^{(m)}(J) \ .$$

THEOREME *On a :*

(i) Si $F \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial F \in \mathbf{L}^1(J)$, alors

$$\lim\nolimits_{a \longrightarrow \inf J} F(a) \quad \text{et} \quad \lim\nolimits_{b \longrightarrow \sup J} F(b)$$

existent, i.e. F possède un prolongement continu à $J \cup \{\inf J, \sup J\}$, que nous noterons encore par F .

Pour tout $\tau, t \in J \cup \{\inf J, \sup J\}$, on a

$$F(t) = F(\tau) + \int_\tau^t \partial F \ .$$

Si en plus $F \in \mathbf{L}^1(J)$ et $\tau \in \{\inf J, \sup J\} \cap \{\pm\infty\}$, alors $F(\tau) = 0$, i.e. $F \in \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right)$,

(ii) ***Généralisation de l'intégration par parties*** *Si $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial F \cdot G$, $F \cdot \partial G \in \mathbf{L}^1(J)$, alors*

$$\lim\nolimits_{a \longrightarrow \inf J} (F \cdot G)(a) \quad \text{et} \quad \lim\nolimits_{b \longrightarrow \sup J} (F \cdot G)(b)$$

existent et on a

$$\int_J \partial F \cdot G \, d\lambda + \int_J F \cdot \partial G \, d\lambda = \lim\nolimits_{b \longrightarrow \sup J} (F \cdot G)(b) - \lim\nolimits_{a \longrightarrow \inf J} (F \cdot G)(a) =$$

$$=: \left[F \cdot G\right]_{\inf J}^{\sup J} \ .$$

Démonstration de (i) C'est immédiat en utilisant le théorème de Lebesgue : étant donné $t \in J$ et $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers $\tau \in \{\inf J, \sup J\}$, on a

$$\lim\nolimits_k F(t_k) = F(t) + \lim\nolimits_k \int_t^{t_k} \partial F = F(t) + \lim\nolimits_k \int_J 1_{t,t_k} \cdot \partial F =$$

$$= F(t) + \int_J \lim\nolimits_k 1_{t,t_k} \cdot \partial F = F(t) + \int_J 1_{t,\tau} \cdot \partial F = F(t) + \int_t^\tau \partial F \ ,$$

puisque $\lim_k 1_{t,t_k} = 1_{t,\tau}$ λ_J-p.p. et $|1_{t,t_k} \cdot \partial F| \leqslant |\partial F| \in \mathbf{L}^1(J)$. Ainsi

$$F(t) = F(\tau) + \int_\tau^t \partial F \,;$$

en passant à la limite cette formule est encore vraie pour $t \in \{\inf J, \sup J\}$.

Puisque F possède une limite $F(\tau)$ en $\tau \in \{\pm\infty\}$, celle-ci ne peut être que 0 , puisque $F \in \mathbf{L}^1(J)$.

Démonstration de (ii) On a

$$\partial(F \cdot G) = \partial F \cdot G + F \cdot \partial G \in \mathbf{L}^1(J) \ ,$$

d'où l'existence des limites par (i), donc

$$\int_J \partial F \cdot G \, d\lambda + \int_J F \cdot \partial G \, d\lambda = \lim_{a \to \inf J} \lim_{b \to \sup J} \int_a^b \partial(F \cdot G) =$$

$$= \lim_{a \to \inf J} \lim_{b \to \sup J} ((F \cdot G)(b) - (F \cdot G)(a)) =$$

$$= \lim_{b \longrightarrow \sup J} (F \cdot G)(b) - \lim_{a \longrightarrow \inf J} (F \cdot G)(a) \ .$$

□

1.6 Les espaces de Sobolev sur un intervalle

DEFINITION 1 Soient $m \in \mathbb{N}$ et

$$\mathcal{H}^{(m)}(J) := \left\{\xi \in \mathcal{AC}^{(m)}(J) \;\middle|\; \partial^j \xi \in \mathbf{L}^2(J) \text{ pour tout } j = 0, \ldots, m\right\}$$

l'espace de Sobolev d'ordre m . Nous munirons cet espace vectoriel du produit scalaire

$$(\cdot|\cdot)_{(m)} := \sum_{j=0}^{m} \left(\partial^j \xi \middle| \partial^j \xi\right) \ ,$$

dont la norme est

$$\|\xi\|_{2,(m)}^2 := \sum_{j=0}^{m} \left\|\partial^j \xi\right\|_2^2 \ .$$

On a $\mathcal{H}^{(0)}(J) = \mathbf{L}^2(J)$ et $\mathcal{H}^{(1)}(J) := \{\xi \in \mathcal{AC}(J) \mid \xi, \partial\xi \in \mathbf{L}^2(J)\}$.

REMARQUE 1 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a

$$(a+b)^2 \leqslant 2\left(a^2 + b^2\right) \ ,$$

en particulier

$$\|\xi\|_2 + \|\partial\xi\|_2 \leqslant \sqrt{2} \cdot \|\xi\|_{2,(1)} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J) \ .$$

En effet l'inégalité est équivalente à $(a-b)^2 \geqslant 0$! ——— □

THEOREME

(i) $\mathcal{H}^{(m)}(J)$ *est un espace de Hilbert.*

(ii) *Si* $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$ *, alors* ξ *possède un prolongement continu à* $J \cup \{\inf J, \sup J\}$ *. Si* $\tau \in \{\inf J, \sup J\} \cap \{\pm\infty\}$ *, on a* $\xi(\tau) = 0$ *, i.e.*

$$\mathcal{H}^{(1)}(J) \subset \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right) \ .$$

(iii) ***Inégalité de Sobolev*** *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$ *, on a*

$$\|\xi\|_\infty \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial\xi\|_2 \ ,$$

en particulier

$$\|\xi\|_\infty \leqslant \sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}\right) \cdot \|\xi\|_{2,(1)} \ .$$

En outre l'injection canonique

$$\mathcal{H}^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right)$$

et, pour tout $t \in J \cup \{\inf J, \sup J\}$ *, la forme semi-linéaire*

$$|\varepsilon_t\rangle : \xi \longmapsto \langle \xi | \varepsilon_t\rangle := \overline{\xi(t)} : \mathcal{H}^{(1)}(J) \longrightarrow \mathbb{K}$$

sont continues.

(iv) L'injection canonique

$$\mathcal{H}^{(m+1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{C}^{(m),0}\left(\overline{J}\right) : \xi \longmapsto \xi \ ,$$

où

$$\mathcal{C}^{(m),0}\left(\overline{J}\right) := \left\{ f \in \mathcal{C}^{(m)}(J) \ \middle|\ \partial^j f \in \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right) \right\}$$

est muni de la norme $f \longmapsto \|f\|_{\infty,(m)} = \max_{j=0,\ldots,m} \|\partial^j f\|_\infty$ *, ainsi que la dérivation*

$$\partial : \mathcal{H}^{(m+1)}(J) \longrightarrow \mathcal{H}^{(m)}(J) : \xi \longmapsto \partial\xi \ ,$$

sont continues.

Démonstration de (i) Montrons que $\mathcal{H}^{(m)}(J)$ est complet par récurrence. Le cas $m = 0$ est clair, puisque $\mathcal{H}^{(0)}(J) = \mathbf{L}^2(J)$ est complet (cours d'Analyse [9], théorème de Riesz-Fischer 15.14). Supposons donc que $\mathcal{H}^{(m)}(J)$ est complet et soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy par rapport à $\|\cdot\|_{2,(m+1)}$; cela signifie que

$$\|\xi_k - \xi_l\|_{2,(m+1)}^2 = \sum_{j=0}^{m+1} \left\|\partial^j \xi_k - \partial^j \xi_l\right\|_2^2 \to 0 \quad \text{lorsque } k, l \to \infty \ .$$

$(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^{(m)}(J)$ qui converge vers $\xi \in \mathcal{H}^{(m)}(J)$ et il en est de même de $(\partial^{m+1}\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{L}^2(J)$ qui converge vers $\eta \in \mathbf{L}^2(J)$. Comme $\partial^m \xi_k \in \mathcal{AC}(J)$, pour tout $t, \tau \in J$, on a

$$\partial^m \xi_k(t) - \partial^m \xi_k(\tau) = \int_\tau^t \partial^{m+1}\xi_k = \left(1_{\tau,t} \middle| \partial^{m+1}\xi_k\right) \to \left(1_{\tau,t} \middle| \eta\right) = \int_\tau^t \eta \ ,$$

la suite $(\partial^m \xi_k - \partial^m \xi_k(\tau))_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers la fonction localement absolument continue $\int_\tau^\diamond \eta$. Mais puisque $(\partial^m \xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\partial^m \xi$ dans $\mathbf{L}^2(J)$ par l'hypothèse de récurrence, le théorème de Riesz-Fischer montre qu'il existe une sous-suite α telle que $\left(\partial^m \xi_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ qui converge ponctuellement λ_J-p.p. vers $\partial^m \xi$. Si τ est un tel point, pour λ_J-presque tous les $t \in J$, on a

$$\int_\tau^t \eta = \lim_k \left[\partial^m \xi_k(t) - \partial^m \xi_k(\tau)\right] = \lim_l \left[\partial^m \xi_{\alpha(l)}(t) - \partial^m \xi_{\alpha(l)}(\tau)\right] =$$

$$= \lim_l \partial^m \xi_{\alpha(l)}(t) - \lim_l \partial^m \xi_{\alpha(l)}(\tau) = \partial^m \xi(t) - \partial^m \xi(\tau) \ ;$$

par modification de $\partial^m \xi$ sur un ensemble λ_J-négligeable, la formule ci-dessus est valable pour tout $t \in J$ (donc aussi pour tout $\tau \in J$!) et on obtient $\partial^m \xi \in \mathcal{AC}(J)$, $\partial^{m+1}\xi = \eta \in \mathbf{L}^2(J)$. Ceci montre que $\xi \in \mathcal{H}^{(m+1)}(J)$ et

$$\|\xi_k - \xi\|_{2,(m+1)}^2 = \sum_{j=0}^{m+1} \left\|\partial^j \xi_k - \partial^j \xi\right\|_2^2 = \sum_{j=0}^{m} \left\|\partial^j \xi_k - \partial^j \xi\right\|_2^2 + \left\|\partial^{m+1}\xi_k - \eta\right\|_2^2 \to 0 \ ,$$

donc $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ dans $\mathcal{H}^{(m+1)}(J)$.

Démonstration de (ii) Si J est borné, on a $\mathbf{L}^2(J) \subset \mathbf{L}^1(J)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque pour $\eta \in \mathbf{L}^2(J)$, on a

$$\int_J |\eta| = \int_J 1 \cdot |\eta| \leqslant \left(\int_J 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_J |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \ ,$$

d'où le résultat par le théorème 1.5.i.

Etant donné $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$, on a $\xi, \partial\xi \in \mathbf{L}^2(J)$, donc

$$\partial\left(|\xi|^2\right) = \partial\left(\overline{\xi} \cdot \xi\right) = \overline{\partial\xi} \cdot \xi + \overline{\xi} \cdot \partial\xi \in \mathbf{L}^1(J) \ ,$$

et si $\tau \in \{\inf J, \sup J\} \cap \{\pm\infty\}$, alors $|\xi|^2$ possède une limite $|\xi|^2(\tau)$ en τ qui ne peut être que 0 , puisque $|\xi|^2 \in \mathbf{L}^1(J)$. Mais ceci montre que $\xi(\tau) = 0$.

Démonstration de (iii) Soit $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$. Pour tout $a, b \in J$, nous pouvons supposer que $a < b$, il existe $\tau \in \left]a, b\right[$ tel que

$$|\xi(\tau)|^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |\xi|^2 \ ,$$

donc

$$|\xi(\tau)|^2 \leqslant \frac{1}{|b-a|} \cdot \|\xi\|_2^2 \ .$$

Puisque $|\xi|^2 = \overline{\xi} \cdot \xi \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial\left(\overline{\xi} \cdot \xi\right) = \partial\overline{\xi} \cdot \xi + \overline{\xi} \cdot \partial\xi \in \mathbf{L}^1(J)$, le théorème 1.5.i montre que pour tout $t \in J \cup \{\inf J, \sup J\}$, on peut écrire

$$|\xi(t)|^2 = |\xi(\tau)|^2 + \int_\tau^t \partial\left(\overline{\xi} \cdot \xi\right) \leqslant |\xi(\tau)|^2 + \left|\int_\tau^t \left(\partial\overline{\xi} \cdot \xi + \overline{\xi} \cdot \partial\xi\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\xi(\tau)|^2 + 2 \cdot \int |\xi| \cdot |\partial\xi| \leqslant \frac{1}{|b-a|} \cdot \|\xi\|_2^2 + 2 \cdot \|\xi\|_2 \cdot \|\partial\xi\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left[\frac{1}{\sqrt{b-a}} + \frac{1}{\varepsilon}\right] \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial\xi\|_2\right)^2 \ ,$$

donc que

$$\|\xi\|_{\infty, J\cup\{\inf J, \sup J\}} \leqslant \left[\frac{1}{\sqrt{b-a}} + \frac{1}{\varepsilon}\right] \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial\xi\|_2 \ .$$

En passant à la limite on obtient

$$\|\xi\|_{\infty, J\cup\{\inf J, \sup J\}} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial\xi\|_2 \ .$$

En particulier, pour $\varepsilon = 1$,

$$\|\xi\|_{\infty, J\cup\{\inf J, \sup J\}} \leqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}\right) \cdot \left(\|\xi\|_2 + \|\partial\xi\|_2\right) \leqslant \sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}\right) \cdot \|\xi\|_{2,(1)}$$

par la remarque 1 ci-dessus. Ceci montre que l'injection canonique $\mathcal{H}^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right)$ et $|\varepsilon_t\rangle$ sont continues, puisque

$$|\langle\xi|\,\varepsilon_t\rangle| \leqslant \|\xi\|_{\infty, J\cup\{\inf J, \sup J\}} \ .$$

Démonstration de (iv) Pour tout $\xi \in \mathcal{H}^{(m+1)}(J)$ et $j = 0, \ldots, m$, (iii) montre que

$$\left\|\partial^j\xi\right\|_\infty^2 \leqslant c_J^2 \cdot \left\|\partial^j\xi\right\|_{2,(1)}^2 = c_J^2 \cdot \left(\left\|\partial^j\xi\right\|_2^2 + \left\|\partial^{j+1}\xi\right\|_2^2\right) \leqslant c_J^2 \cdot \|\xi\|_{2,(m+1)}^2 \ ,$$

donc $\|\xi\|_{\infty,(m)} \leqslant c_J^2 \cdot \|\xi\|_{2,(m+1)}^2$. Finalement on a évidemment

$$\|\partial\xi\|_{2,(m)}^2 = \sum_{j=0}^{m} \left\|\partial^{j+1}\xi\right\|_2^2 \leqslant \sum_{j=0}^{m+1} \left\|\partial^{j}\xi\right\|_2^2 = \|\xi\|_{2,(m+1)}^2 \ .$$

□

REMARQUE 2 Est-ce que la constante $\frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}} + \frac{1}{\varepsilon}$ dans l'inégalité de Sobolev est la plus petite constante C_ε possible, donc telle que

$$\|\xi\|_\infty \leqslant C_\varepsilon \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial\xi\|_2 \ ?$$

Considérons sur l'intervalle J la fonction constante 1 . On a $\|1\|_\infty = 1$, $\|1\|_2 = \sqrt{\lambda(J)}$ et $\|\partial 1\|_2 = 0$. Ceci montre que $C_\varepsilon \geqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}$.

DEFINITION 2 On pose

$$\mathcal{H}^{(1),0}(J) = \left\{ \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J) \ \middle| \ \xi(\inf J) = \xi(\sup J) = 0 \right\} \ .$$

COROLLAIRE *$\mathcal{H}^{(1),0}(J)$ est un sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}^{(1)}(J)$.*

*Si J est borné, on a l'**inégalité de Poincaré***

$$\|\xi\|_2 \leqslant \frac{\lambda(J)}{2} \cdot \|\partial\xi\|_2 \quad \textit{pour tout } \xi \in \mathcal{H}^{(1),0}(J) \ .$$

En effet

$$\mathcal{H}^{(1),0}(J) = \operatorname{Ker} |\varepsilon_{\inf J}\rangle \cap \operatorname{Ker} |\varepsilon_{\sup J}\rangle$$

est un sous-espace vectoriel fermé, donc complet.

Pour tout $t \in J$, on a

$$|\xi(t)| = \frac{1}{2} \cdot (|\xi(t) - \xi(\inf J)| + |\xi(\sup J) - \xi(t)|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{\inf J}^{t} |\partial\xi| + \int_{t}^{\sup J} |\partial\xi| \right) = \frac{1}{2} \cdot \int_J |\partial\xi| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\lambda(J)} \cdot \|\partial\xi\|_2 \ ,$$

donc

$$\|\xi\|_2^2 \leqslant \frac{1}{4} \cdot \lambda(J) \cdot \|\partial\xi\|_2^2 \cdot \int_J 1 = \frac{1}{4} \cdot \lambda(J)^2 \cdot \|\partial\xi\|_2^2 \ .$$

□