

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg



METHODES
HILBERTIENNES
ET
APPLICATIONS

Claude Portenier

Semestre d'hiver 2004/2005

Version du 18 février 2005

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iii
INDEX	vii
BIBLIOGRAPHIE	xv
1 ESPACES DE HILBERT	1
1.1 Formes sesquilinéaires et produits scalaires	2
1.2 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert	7
1.3 Formules de polarisation	10
1.4 La notion d'espace-test	12
1.5 Les fonctions localement absolument continues	15
1.6 Les espaces de Sobolev sur un intervalle	20
2 LE THÉORÈME DE LA PROJECTION	25
2.1 Théorème de la projection	26
2.2 Théorème de représentation de Riesz	31
2.3 Densité et appartenance à un espace L^2	34
2.4 Les théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram	36

TABLE DES MATIÈRES

2.5	Problèmes aux limites sur un intervalle	39
3	BASES HILBERTIENNES	43
3.1	Sommes hilbertiennes	44
3.2	Bases hilbertiennes	48
3.3	Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt	51
3.4	Polynômes orthogonaux	53
3.5	Caractérisation des polynômes classiques orthogonaux	57
	Polynômes de Jacobi	64
	Polynômes de Laguerre	66
	Polynômes d'Hermite	68
	Polynômes de Jacobi spéciaux	69
3.6	Les équations différentielles associées aux polynômes classiques	73
	L'équation différentielle de Jacobi	75
	L'équation différentielle de Laguerre	76
	L'équation différentielle d'Hermite	79
3.7	Les bases hilbertiennes de polynômes classiques	81
	Les fonctions génératrices	82
4	THÉORIE DES DISTRIBUTIONS	85
4.1	La notion de distribution	86
4.2	Dérivation	89
4.3	Multiplication, translation et dilatation	92
4.4	Primitives	94
4.5	Quelques exemples multi-dimensionnels	96
4.6	Le support d'une distribution	99
4.7	Convergence d'une suite de distributions	101

5	TRANSFORMATION DE FOURIER	103
5.1	Intégrales de Fourier	104
5.2	Formule d'inversion	108
5.3	Distributions tempérées	111
5.4	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$	114
5.5	Espaces de Sobolev	118
5.6	Espaces de Sobolev locaux	122
5.7	Espaces de Sobolev sur un ouvert de \mathbb{R}^n	125
6	LE PROBLÈME DE DIRICHLET	131
6.1	Le théorème de prolongement	132
6.2	Le théorème de trace	137
6.3	Formulation variationnelle du problème de Dirichlet	140
6.4	L'équation des ondes	142

INDEX

Version du 18 février 2005

- $1_{a,b}$: fonction caractéristique signée, 15
- A^\perp : ensemble orthogonal, 26
- $\mathcal{AC}(J)$: fonctions absolument continues, 16
- $\mathcal{AC}^{(m)}(J)$: fonctions absolument continues d'ordre m , 18
- $\binom{z}{k}$: coefficient binomial, 58
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$: "bracket" de semi-dualité, 31
- Δ : opérateur de Laplace modifié, 105
- ∂_j : dérivées partielles modifiées, 105
- \mathcal{F} : transformation de Fourier, 114
- ${}_1F_1(a; b; z)$: fonction hypergéométrique confluyente de Kummer, 76
- f_0 : prolongement par 0 d'une fonction, 125
- $F(a, b; c; z)$, ${}_2F_1(a, b, c; z)$: fonction hypergéométrique ou de Gauß, 75
- $G_k^{(\gamma)}$: polynômes de Gegenbauer, 71
- $G_k^{(p,q)}$: polynômes hypergeométriques, 76
- H_k : polynômes d'Hermite, 57
- $\mathcal{H}^{(1),0}(J)$: espace de Sobolev, 23
- $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$: espace de Sobolev sur un ouvert de \mathbb{R}^n , 125
- $\mathcal{H}^{(m)}(J)$: espace de Sobolev d'ordre m sur un intervalle, 20
- $\mathcal{H}^{(m)}(X)$: espace de Sobolev sur un ouvert de \mathbb{R}^n , 125
- $\mathcal{H}^{(s)}(X)$: espace de Sobolev d'ordre $s \in \mathbb{R}$ sur \mathbb{R}^n , 119
- $\mathcal{H}_{\text{loc}}^{(s)}(X)$: espace de Sobolev local d'ordre $s \in \mathbb{R}$ sur un ouvert de \mathbb{R}^n , 122
- h_k : fonctions d'Hermite, 80
- \square : sous-espace vectoriel fermé, 9
- $J_\nu(s)$: fonctions de Bessel ou cylindriques, 79
- $J_k^{(\alpha,\beta)}$: polynômes de Jacobi, 57
- $\mathcal{K}^{(1)}(J)$: espace des fonctions continûment dérivables à support compact, 39
- $|\cdot\rangle$: vecteur ket, forme semi-linéaire sur un espace préhilbertien, 32
- $|\cdot\rangle$: vecteur ket, forme semi-linéaire, 31
- $L(F, G)$, $\mathcal{L}(F, G)$: espaces d'applications linéaires, 26
- $L_k^{(\alpha)}$: polynômes de Laguerre, 57
- $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$: espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la densité ρ , 8
- $\mathbf{L}_{\text{mod}}^2(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions à croissance quadratique modérée, 118
- $M(a, b; z)$: fonction hypergéométrique confluyente de Kummer, 76
- $M_{\kappa,\mu}$: fonction de Whittaker, 77
- $\mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$: ensemble des intégrales de Radon dont tous les moments sont finis, 53
- $\|\cdot\|$: norme d'un opérateur, 26
- $\|\cdot\|$: norme d'une forme (semi-) linéaire, 31
- $\|\cdot\|$: norme d'une forme sesquilinéaire, 31
- $\|\cdot\|_{2,\mu,\rho}$: norme de $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$, 8
- $\|\cdot\|_{2,\mu}$: norme de $\mathbf{L}^2(\mu)$, 5
- \perp : relation d'orthogonalité, 26
- $(\cdot|\cdot)_\mu$: produit scalaire de $\mathbf{L}^2(\mu)$, 5
- $P_{\mathcal{G}}\xi$: projection de ξ sur \mathcal{G} , 27
- P_k : polynômes de Legendre , 69
- $(z)_k$: symbole de Pochhammer, 58
- \mathcal{P} : espace des polynômes, 53
- \boxplus : somme directe orthogonale ou hilbertienne, 29, 46
- $\text{supp } \mu$: support d'une intégrale, 8
- T_k , U_k : polynômes de Tchebycheff, 69
- $W_{\kappa,\mu}$: fonction de Whittaker, 77
- $\mathcal{W}^{(m),p}(X)$: espace de Sobolev sur un ouvert de \mathbb{R}^n , 135
- $\mathcal{W}^{(s),p}(X)$: espace de Sobolev fractionnaire sur un ouvert de \mathbb{R}^n , 136
- absolu
 - fonction localement —ment continue, 16
 - fonctionnelle —ment homogène, 3
- algébrique
 - distribution —, 86

- annihilation
 - opérateur d'—, 80
- application
 - linéaire bornée, 26
 - linéaire, bilinéaire, sesquilinéaire, 2
 - sesquilinéaire bornée, 31
- base
 - hilbertienne, 48
- Bernstein
 - polynômes de —, 55
- Bessel
 - équation différentielle de —, 79
 - inégalité de —, 44, 48
- bilinéaire, 2
- binomial
 - coefficient — généralisé, 58
- borné
 - application linéaire —e, 26
 - application sesquilinéaire —e, 31
- caractéristique
 - fonction — signée, 15
- Cauchy
 - partie principale de —, 97
- central
 - symétrie —e, 93
- classique
 - solution —, 39, 140
 - solution semi- —, 39
- coefficient
 - binomial généralisé, 58
- coercitif
 - forme sesquilinéaire —ve, 36
- commençante
 - section —, 5
- confluente
 - équation différentielle, série hypergéométrique —, 76
- continu
 - fonction localement absolument —e, 16
- convexe
 - uniformément —, 29
- corde
 - vibrante, 146
- création
 - opérateur de —, 80
- croissance
 - fonction à — modérée, 111
 - fonction à — quadratique modérée, 118
- cylindrique
 - fonction —, 79
 - ouvert —, 132
- décomposition
 - hilbertienne, 46
- décroissance
 - fonction à — rapide, 105
- dénombrable
 - espace localement convexe de type —, 51
- dérivée
 - partielle d'une distribution, 89
 - partielle modifiée, 105
- dilaté
 - fonction, distribution —e, 93
- Dirac
 - suite de —, 102
- distribution
 - algébrique, 86
 - de Dirac, 87
 - dérivée partielle d'une —, 89
 - dilatée, 93
 - produit par une fonction, 92
 - support d'une —, 99
 - tempérée, 111
 - translatée, 93
- divergence
 - théorème de la —, 138
- dual
 - fort, 31
- égalité
 - de Parseval, 44, 48
 - du parallélogramme, 10
- ensemble
 - orthogonal, 26
- énumération
 - d'un ensemble, 5
- équation différentielle
 - d'Hermite, 79
 - de Bessel, 79
 - de Jacobi, 75
 - de Laguerre, 76
 - de type hypergéométrique, 59
 - de Whittaker, 77
 - hypergéométrique confluente, 76

INDEX

- espace
 - préhilbertien, de Hilbert, 7
- faible
 - limite —, 101
 - solution —, 39, 140
- fonction
 - s d’Hermite, 80
 - s de Whittaker, 77
 - à croissance modérée, 111
 - caractéristique signée, 15
 - de Bessel, 79
 - de Heaviside, 87
 - dilatée, 93
 - localement absolument continue, 16
 - témpérée, 111
 - translatée, 92
- forme
 - bilinéaire, sesquilinéaire, 2
- formule
 - s de polarisation, 10
 - d’inversion, 108
 - de Rodrigues, 58
- fort
 - semi-dual —, 31
- Fourier
 - intégrale, transformation de —, 104
 - transformée de — d’une distribution tempérée, 114
- Gauß
 - série (hypergéométrique) de —, 75
- Gegenbauer
 - polynômes de —, 71
- Gram-Schmidt
 - procédé d’orthogonalisation de —, 51
- harmonique
 - oscillateur —, 80
- Heaviside
 - fonction de —, 87
- Hermite
 - équation différentielle, fonctions d’—, 79
 - polynômes de —, 57, 68
- hermitien
 - forme sesquilinéaire —ne, 2
- Hilbert
 - espace de —, 7
- hilbertien
 - base —ne, 48
 - décomposition, somme —ne, 46
- Hölder
 - inégalité de — abstraite, 31
- homogène
 - fonctionnelle positivement, absolument —, 3
 - problème aux limites —s, 39
- hypergéométrique
 - équation différentielle de type —, 59
 - série —, 75
 - équation différentielle, série — confluyente, 76
 - polynômes —s, 76
- impair
 - prolongement —, 132
- inégalité
 - de Bessel, 44, 48
 - de Hölder abstraite, 31
 - de Poincaré, 23, 127
 - de Sobolev, 20
 - de trace, 137
- inhomogène
 - problème aux limites —s, 41
- intégrale
 - de Fourier, 104
- intégration
 - par parties, 17, 18, 138
- inversion
 - formule d’—, 108
- Jacobi
 - équation différentielle de —, 75
 - polynômes de —, 57, 64
- ket
 - vecteur —, 31
- Kummer
 - série (hypergéométrique confluyente) de —, 76
- Laguerre
 - équation différentielle de —, 76
 - polynômes de —, 57, 66
- Laplace
 - opérateur de — modifié, 105
- Lax-Milgram
 - théorème de —, 37
- Lebesgue

- lemme de Riemann- —, 106
- Legendre
 - polynômes de —, 69
- lemme
 - de Riemann-Lebesgue, 106
 - de Sobolev, 120
 - de Sobolev local, 122
 - de Weyl, 123
- limite
 - faible, 101
- linéaire
 - application (semi-)—, 2
- local
 - fonction —ment absolument continue, 16
- modéré
 - fonction à croissance —e, 111
 - fonction à croissance quadratique —e, 118
- moment, 53
- non-dégénéré
 - forme sesquilinéaire —e, 2
- norme, 3
 - semi- —, 3
- opérateur
 - de création et d'annihilation, 80
 - de Laplace modifié, 105
- orthogonal
 - éléments —aux, 26
 - ensemble —, 26
 - procédé d'—isation de Gram-Schmidt, 51
 - projection —e, 29
 - système de polynômes —aux, 54
- orthonormé
 - système —, 48
 - système de polynômes —s, 54
- orthoprojecteur, 29
- oscillateur
 - harmonique, 80
- ouvert
 - cylindrique, 132
- pair
 - prolongement —, 132
- Paley
 - théorème de — -Wiener, 110
- théorème de — -Wiener-Schwartz, 116
- parallélogramme
 - égalité, 10
- Parseval
 - égalité de —, 44, 48
- partie
 - intégration par —s, 138
 - principale de Cauchy, 97
- partiel
 - dérivée —le d'une distribution, 89
 - dérivée —le modifiée, 105
- pivot
 - intégrale —, 12
- Plancherel
 - théorème de —, 118
- Pochhammer
 - symbole de —, 58
- Poincaré
 - inégalité de —, 23, 127
- polarisation
 - formules de —, 10
- polynômes
 - d'Hermite, 68
 - de Bernstein, 55
 - de Gegenbauer, 71
 - de Jacobi, 64
 - de Jacobi, Laguerre, Hermite, 57
 - de Laguerre, 66
 - de Legendre, 69
 - de Tchebycheff, 69
 - hypergéométriques, 76
 - système de —, 54
- positif
 - forme sesquilinéaire —ve, 2
 - forme sesquilinéaire strictement —ve, 36
 - matrice —ve, 5
- positivement
 - fonctionnelle — homogène, 3
- préhilbertien
 - espace —, 7
- principale
 - partie — de Cauchy, 97
- problème
 - aux limites homogènes, 39
 - aux limites inhomogènes, 41
 - des moments, 53
- produit
 - d'une distribution par une fonction, 92

INDEX

- règle du —, 92, 137
- scalaire, 2
- projection
 - orthogonale, 29
 - théorème de la —, 27
- prolongement
 - pair, impair, 132
- Pythagore
 - théorème de —, 26
- rapide
 - fonction à décroissance —, 105
- règle
 - de substitution, 17
 - du produit, 92, 137
- régularité
 - théorème de —, 135
- Riemann
 - lemme de — -Lebesgue, 106
- Riesz
 - théorème de représentation de —, 32
- Rodrigues
 - formule de —, 58
- Schwartz
 - théorème de Paley-Wiener- —, 116
- section
 - commençante, 5
- semi
 - norme, 3
 - solution — -classique, 39
- semi-
 - dual
 - fort, 31
 - linéaire, 2
- séparable
 - espace localement convexe —, 51
- séparant
 - fonctionnelle —e, 3
- série
 - hypergéométrique confluyente ou de Kummer, 76
 - hypergéométrique ou de Gauß, 75
- sesquilinéaire
 - application — à gauche, à droite, 2
 - forme — strictement positive, coercitive, 36
- signé
 - fonction caractéristique —, 15
- Sobolev
 - espace de —, 20, 119
 - espace de — fractionnaire sur un ouvert de \mathbb{R}^n , 136
 - espace de — local, 122
 - espace de — sur un ouvert de \mathbb{R}^n , 125, 135
 - inégalité de —, 20
 - lemme de —, 120
 - lemme de — local, 122
- solution
 - classique, faible, 39, 140
- somme
 - hilbertienne, 46
- sous-additive
 - fonctionnelle —, 3
- Stampacchia
 - théorème de —, 36
- Stone
 - théorème de — -Weierstraß, 50
- strict
 - forme sesquilinéaire —ement positive, 36
 - matrice —ement positive, 5
- substitution
 - règle de —, 17
- suite
 - de Dirac, 102
- support
 - d'une distribution, 99
 - d'une intégrale de Radon, 8
- symbole
 - de Pochhammer, 58
- symétrie
 - centrale, 93
- système
 - de polynômes, 54
 - orthonormé, 48
- Tchebycheff
 - polynômes de —, 69
- tempéré
 - distribution —e, 111
 - fonction —e, 111
- test
 - espace —, 12
- théorème
 - de la divergence, 138
 - de la projection, 27
 - de Lax-Milgram, 37

- de Paley-Wiener, 110
- de Paley-Wiener-Schwartz, 116
- de Plancherel, 118
- de Pythagore, 26
- de régularité, 135
- de représentation de Riesz, 32
- de Stampacchia, 36
- de Stone-Weierstraß, 50
- de trace, 138
- de Weierstraß, 56
- intégration par parties, 17, 18
- règle de substitution, 17
- trace
 - inégalité de —, 137
 - théorème de —, 138
- transformation
 - de Fourier, 104
- translaté
 - fonction, distribution —e, 92
- type
 - espace localement convexe de — dénombrable, 51
- ultrasphérique
 - polynômes —s, 71
- uniforme
 - ément convexe, 29
- vecteur
 - ket, 31
- vibrante
 - corde —, 146
- Weierstraß
 - théorème de —, 56
 - théorème de Stone- —, 50
- Weyl
 - Lemme de —, 123
- Whittaker
 - équation différentielle, fonctions de —, 77
- Wiener
 - théorème de Paley- —, 110
 - théorème de Paley- — -Schwartz, 116

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, 1992.
- [2] Jean Pierre Aubin, *Analyse fonctionnelle appliquée*, Tomes 1 et 2, Presses Universitaires de France, 1987
- [3] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [4] Jean Dieudonné, *Eléments d'Analyse, vol. 1*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [5] Jean Dieudonné, *Eléments d'Analyse, vol. 2*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [6] Jürgen Heine, *Topologie und Funktionalanalysis*, Oldenbourg, 2002.
- [7] Harro Heuser, *Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [8] Friedrich Hirzebruch und Winfried Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis*, BI-Hochschultaschenbücher, Band 296, Mannheim, 1971.
- [9] Claude Portenier, *Cours d'Analyse*, Marburg, 2004.
- [10] Claude Portenier, *Cours d'Analyse fonctionnelle*, Marburg, 2004.
- [11] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics, I : Functional analysis, II : Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New-York, 1972/1975.
- [12] Elias M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970
- [13] Michel Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*, Cassini, Paris, 2003.