Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Lösungen der Übungen

zur Vorlesung

HILBERTRAUM-METHODEN

UND ANWENDUNGEN

Prof. Dr. C. Portenier

Wintersemester 2004/2005

Fassung vom 3. Dezember 2004

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Claude Portenier
Wintersemester 2004/2005

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Lösungsblatt 1

Aufgabe 1

(a) Es gilt

$$\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\| = \left\| \frac{\|\psi\|\,\varphi - \|\varphi\|\,\psi}{\|\varphi\|\,\|\psi\|} \right\| = \left\| \frac{\|\psi\|\,(\varphi-\psi) + (\|\psi\| - \|\varphi\|)\,\psi}{\|\varphi\|\,\|\psi\|} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\|\varphi\|\,\|\psi\|} \left[\|\psi\|\,\|\varphi-\psi\| + \Big| \|\psi\| - \|\varphi\| \Big|\,\|\psi\| \right] \leqslant \frac{2}{\|\varphi\|}\,\|\varphi-\psi\| \ .$$

Wegen der Symmetrie folgt

$$\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\| \leqslant \min\left(\frac{2}{\|\varphi\|}\,\|\varphi-\psi\| \,, \frac{2}{\|\psi\|}\,\|\varphi-\psi\| \right) = \frac{2}{\max\left(\|\varphi\|\,,\|\psi\|\right)} \cdot \|\varphi-\psi\| \ .$$

(b) Sei $\eta \in \left]0,2\right[$. Nehme $\alpha > 0$ derart, daß $\frac{2}{1+\alpha} > \eta$. Mit $x = (1,1)^{\mathsf{T}}$ und $y = (1-\alpha, 1+\alpha)^{\mathsf{T}}$ gilt

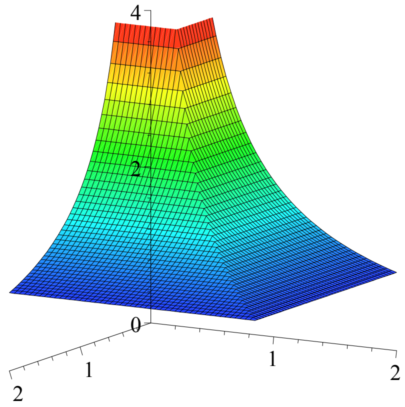
$$\left| x - \frac{y}{|y|_\infty} \right|_\infty = \max\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}, 0 \right) = \frac{2\alpha}{1+\alpha} > \eta\alpha = \eta \cdot |x-y|_\infty \ .$$

(c) Man rechnet sofort

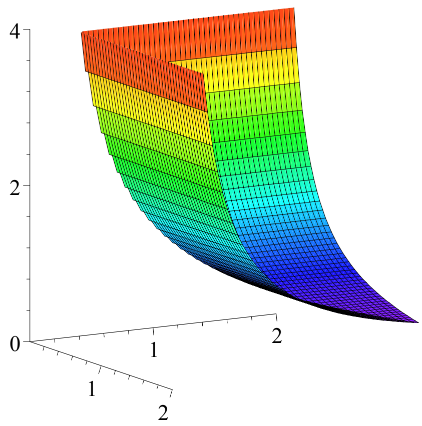
$$\left\| \frac{\xi}{\|\xi\|} - \frac{\eta}{\|\eta\|} \right\|^2 = \left(\frac{\xi}{\|\xi\|} - \frac{\eta}{\|\eta\|} \middle| \frac{\xi}{\|\xi\|} - \frac{\eta}{\|\eta\|} \right) = 1 + \frac{2\,\mathrm{Re}\,(\xi| -\eta)}{\|\xi\| \cdot \|\eta\|} + 1 =$$

$$= 2 + \frac{\|\xi-\eta\|^2 - \|\xi\|^2 - \|\eta\|^2}{\|\xi\| \cdot \|\eta\|} = \frac{\|\xi-\eta\|^2}{\|\xi\| \cdot \|\eta\|} - \frac{(\|\xi\| - \|\eta\|)^2}{\|\xi\| \cdot \|\eta\|} \leqslant$$

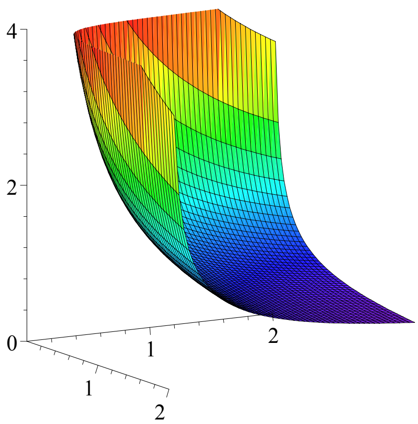
$$\leqslant \frac{\|\xi-\eta\|^2}{\|\xi\| \cdot \|\eta\|} \leqslant \frac{\|\xi-\eta\|^2}{\min\left(\|\xi\|\,,\|\eta\|\right)^2} \ .$$



$(x,y) \longmapsto \frac{2}{\max(x,y)}$



$(x,y) \longmapsto \frac{1}{\min(x,y)}$



$(x,z) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x \cdot z}}$

Aufgabe 2 Sei $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. Setze

$$\mathfrak{s}(\varphi,\psi) = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \left\|\varphi + \overline{\varepsilon}\psi\right\|^2 \qquad \text{für alle} \quad \varphi,\psi \in E \; .$$

Da die Addition $+ : F \times F \longrightarrow F$, die Multiplikation mit festen Skalaren $\alpha\cdot : F \longrightarrow F$ und die Norm $\|\cdot\| : F \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind, ist $\mathfrak{s} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig. Da

$$\overline{\mathfrak{s}(\psi,\varphi)} = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \overline{\varepsilon} \left\|\psi + \overline{\varepsilon}\varphi\right\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \overline{\varepsilon} \left\|\overline{\varepsilon}\varphi + \overline{\varepsilon}\varepsilon\psi\right\|^2 =$$

$$\underset{\overline{\varepsilon} \rightsquigarrow \delta}{=} \frac{1}{4} \sum_{\delta^{2k}=1} \delta \left\|\varphi + \overline{\delta}\psi\right\|^2 = \mathfrak{s}(\varphi,\psi)$$

ist $\mathfrak{s}$ also hermitesch. Es gilt $\sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon = 0$, also mit Parallelogrammgleichung

$$\mathfrak{s}(\varphi,\chi) + \mathfrak{s}(\psi,\chi) = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \left(\|\varphi + \overline{\varepsilon}\chi\|^2 + \|\psi + \overline{\varepsilon}\chi\|^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \left(\|\varphi + \psi + 2\overline{\varepsilon}\chi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 \right) = \frac{1}{8} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \, \|\varphi + \psi + 2\overline{\varepsilon}\chi\|^2 =$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \left[2 \left(\|\varphi + \psi + \overline{\varepsilon}\chi\|^2 + \|\overline{\varepsilon}\chi\|^2 \right) - \|\varphi + \psi\|^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \, \|\varphi + \psi + \overline{\varepsilon}\chi\|^2 = \mathfrak{s}(\varphi + \psi, \chi)$$

für alle $\varphi, \psi, \chi \in F$. Es folgt, daß $\mathfrak{s}$ $\mathbb{Z}$-bilinear ist. Falls $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, folgt

$$\frac{p}{q} \cdot \mathfrak{s}(\varphi,\psi) = \frac{1}{q} \cdot \mathfrak{s}\left(q \cdot \frac{p}{q} \cdot \varphi, \psi \right) = \mathfrak{s}\left(\frac{p}{q} \cdot \varphi, \psi \right) \quad \text{für alle} \quad \varphi, \psi \in F \; .$$

Also ist $\mathfrak{s}$ $\mathbb{Q}$-bilinear. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha_k \in \mathbb{Q}$ mit $\lim_k \alpha_k = \alpha$. Wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{s}$ und der Multiplikation mit Skalaren $\mathbb{K} \times F \longrightarrow F$ gilt

$$\alpha \cdot \mathfrak{s}(\varphi,\psi) = \lim_k (\alpha_k \cdot \mathfrak{s}(\varphi,\psi)) = \lim_k \mathfrak{s}(\alpha_k \cdot \varphi, \psi) = \mathfrak{s}(\lim_k (\alpha_k \cdot \varphi), \psi) = \mathfrak{s}(\alpha \cdot \varphi, \psi) \;,$$

also ist $\mathfrak{s}$ $\mathbb{R}$-bilinear. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, gilt

$$\mathfrak{s}(i\varphi,\psi) = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^4=1} \varepsilon \, \|i\varphi + \overline{\varepsilon}\psi\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^4=1} \varepsilon \, \left\|\varphi + \overline{i\varepsilon}\psi\right\|^2 \underset{\varepsilon \rightsquigarrow -i\delta}{=} \frac{1}{4} \sum_{\delta^4=1} -i\delta \, \left\|\varphi + \overline{\delta}\psi\right\|^2 = -i \cdot \mathfrak{s}(\varphi,\psi) \; .$$

Also ist $\mathfrak{s}$ tatsächlich eine Sesquilinearform. Schließlich gilt

$$\mathfrak{s}(\varphi,\varphi) = \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \, |1 + \varepsilon|^2 \, \|\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2$$

und da $\|\cdot\|$ eine Norm ist, ist $\mathfrak{s}$ nicht-ausgeartet. Durch die Polarisationsidentität ist $\mathfrak{s}$ eindeutig bestimmt, also gilt die Behauptung.

Aufgabe 3

(a) Da p eine Halbnorm ist, gilt für alle $\varphi, \psi \in N$, $\alpha \in \mathbb{K}$ offenbar

$$p(\alpha\varphi + \psi) \leqslant |\alpha| \cdot p(\varphi) + p(\psi) = 0 \;,$$

also $\alpha\varphi + \psi \in N$, so daß N ein Untervektorraum ist.

(b) Definiere

$$\|\varphi + N\| = p(\varphi) \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in F \; .$$

Dies ist wohldefiniert, da für $\varphi - \psi \in N$ gilt (umgekehrte Minkowski-Ungleichung)

$$|p(\varphi) - p(\psi)| \leqslant p(\varphi - \psi) = 0 \; .$$

$\|\cdot\|$ ist offenbar eine Norm auf F/N . Es gilt mit $[\varphi] = \varphi + N$

$$\|[\varphi] + [\psi]\|^2 + \|[\varphi] - [\psi]\|^2 = p(\varphi + \psi)^2 + p(\varphi + \psi)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(p(\varphi)^2 + p(\psi)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|[\varphi]\|^2 + \|[\psi]\|^2\right) ,$$

da p die Parallelogramgleichung erfüllt. Also gibt es laut Übung 2 genau eine nicht-ausgeartete (positiv hermitesche) Sesquilinearform $\mathfrak{t}$ mit $\|[\varphi]\|^2 = \mathfrak{t}([\varphi], [\varphi])$. Es gilt

$$\mathfrak{t}([\varphi], [\psi]) = \frac{1}{4}\sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \|[\varphi] + \overline{\varepsilon}[\psi]\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon p(\varphi + \overline{\varepsilon}\psi)^2 = \mathfrak{s}(\varphi, \psi) ,$$

also die Behauptung.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Lösungsblatt 2

Aufgabe 1

(a) Œ kann man annehmen, daß $a \leqslant b$. Dann gilt

$$\int_a^b \partial F \cdot G = \int_a^b \partial F(s) \cdot \left[G(a) + \int_a^s \partial G(t)\ dt \right] ds =$$

$$= [F(b) - Fa] \cdot G(a) + \int \left[\int 1_{]a,s[}(t) \cdot \partial F(s) \cdot \partial G(t)\ d\lambda_{]a,b[}(t) \right] d\lambda_{]a,b[}(s) \ .$$

Setzt man

$$A := \left\{ (s,t) \in \left]a,b\right[^2 \ \middle|\ t < s \right\} \ ,$$

so ist

$$1_{]a,s[}(t) = 1_A(s,t) = 1_{]t,b[}(s) \ .$$

Mit Tonelli und Fubini folgt dann

$$\int \left[\int 1_{]a,s[}(t) \cdot \partial F(s) \cdot \partial G(t)\ d\lambda_{]a,b[}(t) \right] d\lambda_{]a,b[}(s) =$$

$$= \int \left[\int 1_{]t,b[}(s) \cdot \partial F(s) \cdot \partial G(t)\ d\lambda_{]a,b[}(s) \right] d\lambda_{]a,b[}(t) =$$

$$= \int_a^b \left[\int_t^b \partial F(s)\ ds \right] \cdot \partial G(t)\ dt = \int_a^b [F(b) - F(t)] \cdot \partial G(t)\ dt =$$

$$= F(b) \cdot [G(b) - G(a)] - \int_a^b F \cdot \partial G \ .$$

Schließlich bekommt man

$$\int_a^b \partial F \cdot G = [F(b) - Fa] \cdot G(a) + F(b) \cdot [G(b) - G(a)] - \int_a^b F \cdot \partial G =$$

$$= F(b) \cdot G(b) - F(a) \cdot G(a) - \int_a^b F \cdot \partial G \ .$$

(b) Es ist eine direkte Konsequenz aus (a), da für alle $t, \tau \in J$ gilt

$$(F \cdot G)(t) = (F \cdot G)(\tau) - \int_\tau^t (\partial F \cdot G + F \cdot \partial G) \ .$$

Aufgabe 2

(a) Es folgt sofort aus dem Satz von Lebesgue : Seien $t \in J$ und $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen $c \in \{\inf J, \sup J\}$ konvergente Folge. Es gilt

$$\lim_k F(t_k) = F(t) + \lim_k \int_t^{t_k} \partial F = F(t) + \lim_k \int_J 1_{t,t_k} \cdot \partial F =$$

$$= F(t) + \int_J \lim_k 1_{t,t_k} \cdot \partial F = F(t) + \int_J 1_{t,c} \cdot \partial F = F(t) + \int_t^c \partial F \ ,$$

da $\lim_k 1_{t,t_k} = 1_{t,c}$ λ_J-f.ü. und $|1_{t,t_k} \cdot \partial F| \leqslant |\partial F| \in \mathbf{L}^1(J)$. Somit ist

$$F(t) = F(c) + \int_c^t \partial F \ ;$$

durch Limesübergang ist dies noch für $t \in \{\inf J, \sup J\}$ gültig.

(b) Es ist

$$\partial(F \cdot G) = \partial F \cdot G + F \cdot \partial G \in \mathbf{L}^1(J) \ ,$$

woraus die Existenz der Limes nach (a) folgt und somit

$$\int_J \partial F \cdot G \, d\lambda + \int_J F \cdot \partial G \, d\lambda = \lim_{a\to\inf J} \lim_{b\to\sup J} \int_a^b \partial(F \cdot G) =$$

$$= \lim_{a\to\inf J} \lim_{b\to\sup J} ((F \cdot G)(b) - (F \cdot G)(a)) =$$

$$= \lim_{b\longrightarrow\sup J} (F \cdot G)(b) - \lim_{a\longrightarrow\inf J} (F \cdot G)(a) \ .$$

Aufgabe 3

(a) Es ist leicht nachzuprüfen, daß $\mathcal{H}^{(1)}(J)$ ein Prähilbertraum ist. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{H}^{(1)}(J)$ vollstäding ist. Ist $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_{2,(1)}$, dann sind die Folgen $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\partial\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbf{L}^2(J)$, also in $\mathbf{L}^2(J)$ gegen ξ und η konvergent. Da für alle $t \in J$ gilt

$$\xi_k(t) - \xi_k(\tau) = \int_\tau^t \partial\xi_k = (1_{\tau,t} | \, \partial\xi_k) \to (1_{\tau,t} | \, \eta) = \int_\tau^t \eta$$

konvergiert die Folge $(\xi_k - \xi_k(\tau))_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die absolutstetige Funktion $\int_\tau^\diamond \eta$. Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert aber eine Teilfolge α , so daß $(\xi_{\alpha(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ λ_J-f.ü. gegen ξ konvergiert. Ist τ ein solcher Punkt, so gilt für λ_J-f.a. $t \in J$

$$\int_\tau^t \eta = \lim_k \left[\xi_k(t) - \xi_k(\tau)\right] = \lim_l \left[\xi_{\alpha(l)}(t) - \xi_{\alpha(l)}(\tau)\right] = \xi(t) - \xi(\tau) \ ,$$

d.h. durch Umänderung auf eine λ_J-Nullmenge ist $\xi \in \mathcal{AC}(J)$ und $\partial \xi = \eta \in \mathbf{L}^2(J)$ oder $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$. Schließlich gilt

$$\|\xi_k - \xi\|_{2,(k)}^2 = \sum_{j=0}^{1} \left\|\partial^j \xi_k - \partial^j \xi\right\|_2^2 = \|\xi_k - \xi\|_2^2 + \|\partial \xi_k - \eta\|_2^2 \to 0 \ ,$$

d.h. $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ξ in $\mathcal{H}^{(1)}(J)$.

(b) Ist J beschränkt so gilt $\mathbf{L}^2(J) \subset \mathbf{L}^1(J)$ nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung : für $\eta \in \mathbf{L}^2(J)$ ist

$$\int_J |\eta| = \int_J 1 \cdot |\eta| \leqslant \left(\int_J 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_J |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \ ,$$

also die Behauptung nach Aufgabe 2.a.

Für $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$ gilt $\xi, \partial\xi \in \mathbf{L}^2(J)$, also

$$\partial\left(|\xi|^2\right) = \partial\left(\overline{\xi} \cdot \xi\right) = \overline{\partial\xi} \cdot \xi + \overline{\xi} \cdot \partial\xi \in \mathbf{L}^1(J) \ ,$$

und ist $c \in \{\inf J, \sup J\} \cap \{\pm\infty\}$, so besitzt $|\xi|^2$ ein Limes $|\xi|^2(c)$ in c . Da $|\xi|^2 \in \mathbf{L}^1(J)$ muß $|\xi|^2(c) = 0$ sein, also gilt $\xi(c) = 0$.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Lösungsblatt 3

Aufgabe 1

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\lim\nolimits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e_\lambda =$$

$$= \lim\nolimits_{T\to\infty} \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \lambda = 0 \\ & \text{falls} \\ \frac{1}{4\pi i\lambda T}\left[e^{2\pi i\cdot\lambda\cdot T} - e^{-2\pi i\cdot\lambda\cdot T}\right] & \lambda \neq 0 \end{array} \right. = \delta_{\lambda,0} \ ,$$

da $\left|\frac{1}{4\pi i\lambda T}\left[e^{2\pi i\cdot\lambda\cdot T} - e^{-2\pi i\cdot\lambda\cdot T}\right]\right| \leqslant \frac{1}{2\pi T}$. Damit gilt

$$\lim\nolimits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{e_\lambda} \cdot e_\mu = \lim\nolimits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e_{\mu-\lambda} = \delta_{\mu-\lambda,0} = \delta_{\lambda,\mu} \ .$$

Insbesondere sind die e_λ linear unabhängig, also eine Basis von $\mathcal{TP}$.

(b) Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{TP}$. Es gibt Konstanten $\varphi_\lambda, \psi_\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\varphi_\lambda = \psi_\lambda = 0$ bis auf endliche viele λ , so daß

$$\varphi = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \varphi_\lambda \cdot e_\lambda \quad \text{und} \quad \psi = \sum_{\mu\in\mathbb{R}} \psi_\mu \cdot e_\mu \ .$$

Mit den Grenzwertsätzen folgt die Existenz des Limes

$$(\varphi|\,\psi)_{\mathcal{TP}} := \lim\nolimits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{\varphi} \cdot \psi = \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} \overline{\varphi_\lambda} \cdot \psi_\mu \cdot \lim\nolimits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{e_\lambda} \cdot e_\mu = \sum_{\delta\in\mathbb{R}} \overline{\varphi_\delta} \cdot \psi_\delta \ .$$

Diese letzte Formel zeigt auch Sesquilinearität, Hermitizität und Positivität. (Beweise wie in $\mathbb{K}^n$.) Die e_λ bilden also sogar eine (algebraische) Orthonormalbasis von $\mathcal{TP}$. Die zugehörige Norm auf $\mathcal{TP}$ wird mit $\|\cdot\|_{\mathcal{TP}}$ bezeichnet. Dies zeigt auch, daß die Konstanten ψ_λ eindeutig sind :

$$(e_\lambda|\,\psi)_{\mathcal{TP}} = \psi_\lambda$$

da $e_\lambda = \sum_{\mu\in\mathbb{R}} \delta_{\lambda,\mu} \cdot e_\mu$.

(c) Es gilt

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2 \, dt \leqslant \|\varphi\|_\infty^2 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R}) \ , T > 0 \ , \qquad (*)$$

also ist

$$\|\cdot\|_{\mathcal{TP}} : \varphi \longmapsto \sqrt{(\varphi|\,\varphi)_{\mathcal{TP}}} = \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi\,(t)|^2 \; dt\right)^{\frac{1}{2}} : (\mathcal{TP}, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig stetige Funktion. Damit hat Sie eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $\|\cdot\|_{\mathcal{FP}}$ auf $\mathcal{FP}$.

Aufgrund der Grenzwertsätze erfüllt die Fortsetzung $\|\cdot\|_{\mathcal{FP}}$ von $\|\cdot\|_{\mathcal{TP}}$ weiterhin die Paralellogrammgleichung und ist daher eine Halbnorm, die durch eine eindeutig bestimmte Sesquilinearform $(\cdot|\,\cdot)_{\mathcal{FP}}$ definiert ist. Ebenfalls wegen der Paralellogrammgleichung ist $(\cdot|\,\cdot)_{\mathcal{FP}}$ eine Fortsetzung von $(\cdot|\,\cdot)_{\mathcal{TP}}$. Wegen Cauchy-Schwarz und der $\|\cdot\|_\infty$-Stetigkeit von $\|\cdot\|_{\mathcal{FP}}$ ist $(\cdot|\,\cdot)_{\mathcal{FP}}$ in $\|\cdot\|_\infty$ stetig.

Man kann sogar zeigen, daß $(\cdot|\,\cdot)_{\mathcal{FP}}$ durch die gleiche Formel gegeben ist, wie $(\cdot|\,\cdot)_{\mathcal{TP}}$. Seien nämlich $f, g \in \mathcal{FP}$ mit $f = \lim_k \varphi_k$ und $g = \lim_k \psi_k$ gleichmäßig in $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\,f|\,g)_{\mathcal{FP}} = \lim_k\,(\varphi_k|\,\psi_k)_{\mathcal{TP}} = \lim_k \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \overline{\varphi_k(t)} \cdot \psi_k\,(t)\;dt\;.$$

Weiterhin gilt $\overline{f}g = \lim_k \overline{\varphi_k}\psi_k$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\|\overline{f}g - \overline{\varphi_k}\psi_k\right\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad |(\,f|\,g)_{\mathcal{FP}} - (\varphi_k|\,\psi_k)_{\mathcal{TP}}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\;.$$

Nach Definition von $(\cdot|\,\cdot)_{\mathcal{TP}}$ gibt es $T_0 > 0$, so daß

$$\left|(\varphi_k|\psi_k)_{\mathcal{TP}} - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \overline{\varphi_k\,(t)}\psi_k\,(t)\;dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle} \quad T \geqslant T_0\;.$$

Dann ist für $T \geqslant T_0$

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \overline{f}g - (f|g)_{\mathcal{FP}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\overline{f}g - \overline{\varphi_k}\psi_k| + \left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \overline{\varphi_k}\psi_k - (\varphi_k|\psi_k)_{\mathcal{TP}}\right| + |(\varphi_k|\psi_k)_{\mathcal{TP}} - (f|g)| \leqslant \varepsilon\;,$$

wobei $(*)$ verwendet wurde. Damit gilt

$$(\,f|\,g)_{\mathcal{FP}} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \overline{f}g\;.$$

Es bleibt noch die Trennungseigenschaft nachzuweisen, die keineswegs aus der für $\|\cdot\|_{\mathcal{TP}}$ folgt. Für $f \in \mathcal{K}\,(\mathbb{R})$ gilt $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f|^2 \leqslant \frac{b-a}{2T} \cdot \|f\|_\infty^2$ falls $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$ und T groß genug, also $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f|^2 = 0$. Allgemeiner sei $f \in \mathcal{C}^0\,(\mathbb{R})$. Für $\varepsilon > 0$ gegeben sei M , so daß gilt $|f| \leqslant \varepsilon$ außerhalb von $[-M, M]$; dann folgt für $T \geqslant M$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f|^2 = \frac{1}{2T}\left(\int_{-M}^{M} |f|^2 + 2\varepsilon^2 \cdot (T - M)\right) \leqslant \frac{1}{2T}\int_{-M}^{M} |f|^2 + \varepsilon^2 \leqslant 2\varepsilon^2$$

für T groß genug. Dies zeigt auch, daß $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f|^2 = 0$.

Wäre so ein f in $\mathcal{FP}$, so wäre $\|\cdot\|_{\mathcal{FP}}$ keine Norm. Die Funktionen aus $\mathcal{FP}$ sind also zu wenig bekannt; man müßte sie besser charakterisieren.

Dies ist zum jetzigen Zeitpunkt nicht unmittelbar möglich. Es bieten sich zwei Vorgehensweisen an. Die erste benutzt die Charakterisierung der fastperiodischen Funktionen nach Bohr (über Fastperioden) und die von ihm angegebenen Resultate. Die zweite benutzt die Charakterisierung der fastperiodischen Funktionen als stetige Funktionen auf der Bohr-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$. In diesem Fall muss man über abstrakte Sätzen aus der Theorie der C*-Algebren argumentieren. (Vgl. J. Dixmier, Les C*-algèbres et leurs répresentations, Gauthiers-Villars 1969. Abschnitte 16.2, 16.3.)

Aufgabe 2 Die Unterräume M und N sind abgeschlossen. Denn ist etwa $\varphi \in \mathcal{C}([-1,1])$ mit $\varphi_k \in M$, so daß

$$\varphi = \lim_k \varphi_k \qquad \text{in} \quad \left(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_2\right) ,$$

so gilt nach Riesz-Fischer $\varphi(x) = \varphi_{\alpha(k)}(x)$ für eine Teilfolge α und fast alle $x \geqslant 0$. Somit $\varphi = 0$ fast überall auf $[0,1]$. Aus der Stetigkeit von φ folgt $\varphi = 0$ überall auf $[0,1]$. Damit ist $\varphi \in M$ und M ist abgeschlossen. Ebenso für N .

Offenbar gilt $1 \notin M + N$. Denn wäre $1 = \varphi + \psi$ mit $\varphi = 0$ auf $[-1,0]$ und $\psi = 0$ auf $[0,1]$, so würde $1 = \varphi(0) + \psi(0) = 0$ folgen. Definiert man aber

$$f_k(t) = \begin{cases} 1 & \\ & \text{falls} \\ (k+1)|t| & \end{cases} \quad \begin{array}{c} |t| > \frac{1}{k+1} \\ \\ -\frac{1}{k+1} \leqslant t \leqslant \frac{1}{k+1} \end{array}$$

so ist $f_k \in M + N$. Zudem gilt $1 - f_k \to 0$ pktw. f.ü. und

$$|1 - f_k|^2 \leqslant 1 \in \mathbf{L}^1([-1,1]) .$$

Nach Lebesgue folgt

$$1 = \lim_k f_k \qquad \text{in} \quad \left(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_2\right) .$$

Damit ist $M + N$ nicht abgeschlossen.

Es gilt $N \subset M^\perp$ trivialerweise. Umgekehrt sei $\psi \in M^\perp$, so ist $\mathrm{id}^- \cdot \psi \in M$ und $\left(\mathrm{id}^- \cdot |\psi|^2\right) \geqslant 0$, also

$$\int \mathrm{id}^- \cdot |\psi|^2 = \left(\psi \middle| \mathrm{id}^- \cdot \psi\right) = 0 .$$

Daraus folgt $\mathrm{id}^- \cdot |\psi|^2 = 0$ wegen Stetigkeit, also $\psi = 0$ auf $[-1,0[$ und somit $\psi \in N$ wiederum durch Stetigkeit. Wir haben also gezeigt, daß $M^\perp = N$; analog folgt $N^\perp = M$, also $M^{\perp\perp} = M$.

Die entsprechenden Unterräume

$$M' := \left\{\varphi \in \mathbf{L}^2([-1,1]) \mid \varphi(x) = 0 \text{ für fast alle } x \geqslant 0\right\}$$

und

$$N' := \left\{\varphi \in \mathbf{L}^2([-1,1]) \mid \varphi(x) = 0 \text{ für fast alle } x \leqslant 0\right\}$$

von $\mathbf{L}^2([-1,1])$ sind abgeschlossen als Kerne der stetigen Abbildungen

$$f \longmapsto 1_A \cdot f : \mathbf{L}^2([-1,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2([-1,1])$$

mit jeweils $A = [0,1]$ und $A = [-1,0]$. Die Summe $M' + N' = \mathbf{L}^2([-1,1])$, da

$$f = 1_{[0,1]} \cdot f + 1_{[-1,0]} \cdot f \qquad \text{für alle} \quad f \in \mathbf{L}^2([-1,1]) \ .$$

Insbesondere ist die Summe abgeschlossen.

Aufgabe 3 Falls P eine Projektion ist, d.h. $P \in L(\mathcal{H})$ und $P^2 = P$, gilt $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} P \oplus P(\mathcal{H})$ mit eindeutiger Zerlegung

$$\xi = (\xi - P\xi) + P\xi \ .$$

Ist P stetig, so gilt $\|P\| = \|P^2\| \leqslant \|P\| \, \|P\|$, also entweder $P = 0$ oder $\|P\| \geqslant 1$. Zusammen mit (c) liefert dies die Schlussbemerkung.

(a) ⇒ (b) Nach Voraussetzung existiert ein abgeschlossener Untervektorraum $\mathcal{G}$ von $\mathcal{H}$ mit $P = P_{\mathcal{G}}$. Für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ folgt nach dem Projektionssatz $\xi - P_{\mathcal{G}}\xi \perp P_{\mathcal{G}}\eta$, $\eta - P_{\mathcal{G}}\eta \perp P_{\mathcal{G}}\xi$ und somit

$$(\xi | P_{\mathcal{G}}\eta) = (\xi - P_{\mathcal{G}}\xi + P_{\mathcal{G}}\xi | P_{\mathcal{G}}\eta) = (P_{\mathcal{G}}\xi | P_{\mathcal{G}}\eta) = (P_{\mathcal{G}}\xi | \eta - P_{\mathcal{G}}\eta + P_{\mathcal{G}}\eta) = (P\xi | \eta) \ .$$

(b) ⇒ (c) Nach Voraussetzung und Cauchy-Schwarz gilt für alle $\eta \in \mathcal{H}$

$$\|P\eta\|^2 = (P\eta | P\eta) = \left|\left(\eta | P^2\eta\right)\right| = |(\eta | P\eta)| \leqslant \|\eta\| \cdot \|P\eta\| \ ,$$

und somit die Behauptung.

(c) ⇒ (d) Sei $\xi \in P(\mathcal{H})$ und somit $\xi = P\xi$. Ferner sei $\eta \in \operatorname{Ker} P$. Die Voraussetzung liefert damit für alle $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\|\xi\|^2 = \|P(\xi - \alpha \cdot \eta)\|^2 \leqslant \|\xi - \alpha \cdot \eta\|^2 = \|\xi\|^2 - 2\operatorname{Re}(\xi | \alpha \cdot \eta) + |\alpha|^2 \cdot \|\eta\|^2 \ ,$$

also

$$2\operatorname{Re}(\xi | \alpha \cdot \eta) \leqslant |\alpha|^2 \cdot \|\eta\|^2 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{K} \ .$$

Wie im Beweis des Projektionssatzes (betrachte $\alpha \in \mathbb{R}^*$ und evtl. $\alpha \in i \cdot \mathbb{R}^*$) folgt $(\xi | \eta) = 0$, d.h. $P(\mathcal{H}) \subset (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$. Nach Projektionssatz (angewandt auf $P_{\operatorname{Ker} P}$) und der eingangs erwähnten Zerlegung gilt

$$\operatorname{Ker} P \oplus P(\mathcal{H}) = \mathcal{H} = \operatorname{Ker} P \boxplus (\operatorname{Ker} P)^{\perp} \ .$$

Es folgt Gleichheit $P(\mathcal{H}) = (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$.

(d) ⇒ (a) Nach Voraussetzung ist für jedes $\xi \in \mathcal{H}$

$$P\xi \in (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$$

und da $\xi - P\xi \in \operatorname{Ker} P$ gilt

$$(\xi - P\xi | \eta) = 0 \quad \text{für alle } \eta \in (\operatorname{Ker} P)^{\perp} \ .$$

Dies zeigt nach Projektionssatz (iii), daß P die orthogonale Projektion auf $(\operatorname{Ker} P)^{\perp}$ ist.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Lösungsblatt 4

Aufgabe 1

(a) Nehme $\chi \in \mathcal{K}(J)$ mit $\int_J \chi \, d\lambda = 1$. Falls $\varphi \in \mathcal{K}(J)$ beliebig ist, definiere

$$\psi = \varphi - \int_J \varphi \, d\lambda \cdot \chi \in \mathcal{K}(J) \ .$$

Es gilt $\int_J \psi \, d\lambda = 0$. Nehme $\operatorname{supp} \varphi \subset [a,b] \subset J$. Dann gilt

$$\int_{\inf J}^t \psi \, d\lambda = \left\{ \begin{array}{ccc} \int_J \psi \, d\lambda & & t \geqslant b \\ & \text{falls} & \\ 0 & & t \leqslant a \end{array} \right\} = 0 \ ,$$

so daß die stetig differenzierbar Funktion $\int_{\inf J}^{\diamond} \psi \, d\lambda : J \longrightarrow \mathbb{K}$ kompakten Träger hat, d.h. in $\mathcal{K}^{(1)}(J)$ liegt. Es gilt

$$\partial \int_{\inf J}^{\diamond} \psi \, d\lambda = \psi = \varphi - \int_J \varphi \, d\lambda \cdot \chi \ ,$$

d.h. $\varphi \in \partial \mathcal{K}^{(1)}(J) \oplus \mathbb{K} \cdot \chi$.

Sei nun $\varphi \in \partial \mathcal{K}^{(1)}(J) \cap \mathbb{K} \cdot \chi$, d.h. $\varphi = \alpha \cdot \chi$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$ und es gibt eine Stammfunktion $\psi \in \mathcal{K}^{(1)}(J)$ von φ . Sei $\operatorname{supp} \psi \subset [a,b] \subset J$. Es gilt

$$\alpha = \alpha \cdot \int \chi \, d\lambda = \int \varphi \, d\lambda = \psi(\sup J) - \psi(\inf J) = 0 \ ,$$

so daß die Summe direkt ist.

(b) Sei $\varphi \in \mathcal{K}(J)$ beliebig. Schreibe mit (i) $\varphi = \partial\psi + \left(\int_J \varphi \, d\lambda\right) \cdot \chi$. Dann gilt

$$\int_J \varphi \cdot f \, d\lambda = \int_J \partial\psi \cdot f \, d\lambda + \left(\int_J \varphi \, d\lambda\right) \cdot \left(\int_J \chi \cdot f \, d\lambda\right) = \left(\int_J \left(\int_J \chi \cdot f \, d\lambda\right) \cdot \varphi \, d\lambda\right) \ ,$$

also

$$\int_J \varphi \cdot \left(f - \int_J \chi \cdot f \, d\lambda\right) d\lambda = 0 \ .$$

Da $\mathcal{K}(J)$ ein Test-Raum ist , folgt $f - \int_J \chi \cdot f \, d\lambda = 0$ λ-f.ü. oder $f = \int_J \chi \cdot f \, d\lambda$ λ-f.ü. .

(c) Sei $\tau \in J$. Definiere

$$F(t) = \int_\tau^t f(t) \ dt \qquad \text{für alle} \quad t \in J \ .$$

Es ist $F \in \mathcal{AC}(J)$ und $f = \partial F$. Durch partielle Integration folgt dann

$$0 = \int_J \varphi \cdot f \, d\lambda = \Big[\varphi \cdot F\Big]_{\inf J}^{\sup J} - \int_J \partial\varphi \cdot F \, d\lambda = - \int_J \partial\varphi \cdot F \, d\lambda$$

für alle $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(J)$. Nach (ii) ist F konstant und somit

$$f = \partial F = 0 \ .$$

Aufgabe 2

(a) Seien M, N abgeschlossen, also vollständig, da $\mathcal{H}$ vollständig ist. Es gibt zugeordnete Orthogonalprojektionen P_M und P_N . Nun gilt

$$(P_M + P_N)^2 = P_M^2 + P_M P_N + P_N P_M + P_N^2 = P_M + P_N \ ,$$

da $M \perp N$. Die Projektion $P_M + P_N$ ist orthogonal, da

$$((P_M + P_N)\,\xi|\,\eta) = (P_M\xi|\,\eta) + (P_N\xi|\,\eta) = (\xi\,|P_M\eta) + (\xi\,|P_N\eta) = (\xi\,|(P_M + P_N)\,\eta)$$

für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, und nach Aufgabe 3 auf Blatt 3. Damit ist das Bild

$$(P_M + P_N)(\mathcal{H}) = M + N$$

vollständig, also abgeschlossen.

Sei nun $M \oplus N$ abgeschlossen. Offenbar gilt

$$M = N^{\perp} \cap (M \oplus N) \quad \text{und} \quad N = M^{\perp} \cap (M \oplus N) \ .$$

Damit sind M bzw. N als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen.

Ein 'elementarer' Beweis der Implikation M, N abgeschlossen $\Longrightarrow M + N$ abgeschlossen könnte etwa so lauten: Da $M \perp N$, ist die Summe $M + N$ direkt. Falls M und N abgeschlossen sind, sind sie vollständig. Sei $\xi_k \in M \oplus N$ eine Folge, die gegen $\xi \in \mathcal{H}$ konvergiert. Nach Projektionssatz ist P_M stetig und die Folge $\eta_k = P_M\xi_k \in M$ konvergiert gegen $\eta = P_M\xi \in M$. Es folgt

$$\xi - \eta = \lim_k (\xi_k - \eta_k) = \lim_k P_N\xi_k \in N \ ,$$

da N abgeschlossen ist. Also ist $\xi \in M \oplus N$ und $M \oplus N$ ist abgeschlossen.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Linearform

$$\left(1_{\{k\}}\right| : \xi \longmapsto \xi(k) : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig und es gilt

$$M = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker}\left(\left(1_{\{2k\}}\right| - \frac{1}{2k+1}\left(1_{\{2k+1\}}\right|\right) \quad \text{sowie} \quad N = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker}\left(\left(1_{\{2k\}}\right|\right) \ .$$

Daher sind M und N abgeschlossene Untervektorräume von $\ell^2(\mathbb{N})$.

Ist $\xi \in M \cap N$, so gilt $\xi(0) = 0$ und

$$\frac{1}{2k+1}\xi(2k+1) = \xi(2k) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ .$$

Also ist $\xi = 0$ und somit $M \cap N = 0$.

Man beachte, daß $\left(\frac{1}{\sqrt{1+(2k+1)^2}} \cdot \left[1_{\{2k\}} + (2k+1) \cdot 1_{\{2k+1\}}\right]\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\left(1_{\{2k+1\}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ hilbertsche Basen von M und bzw. N sind, d.h.

$$M = \boxplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(2k+1)^2}} \cdot \left[1_{\{2k\}} + (2k+1) \cdot 1_{\{2k+1\}}\right] \quad \text{und} \quad N = \boxplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{K} \cdot 1_{\{2k+1\}} \ .$$

Für $k \in \mathbb{N}$ ist $1_{\{2k+1\}} \in N \subset M \oplus N$, sowie

$$1_{\{2k\}} = \left(1_{\{2k\}} + (2k+1) \cdot 1_{\{2k+1\}}\right) - (k+1) \cdot 1_{\{2k+1\}} \in M \oplus N \ .$$

Somit gilt $\mathcal{K}(\mathbb{N}) \subset M \oplus N \subset \ell^2(\mathbb{N}) = \overline{\mathcal{K}(\mathbb{N})}$, d.h. $\overline{M \oplus N} = \ell^2(\mathbb{N})$. $M \oplus N$ ist aber von $\ell^2(\mathbb{N})$ verschieden, denn

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)_{l\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \smallsetminus (M \oplus N) \ .$$

In der Tat: Die M-Komponente $m = (m_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M \subset \ell^2(\mathbb{N})$ dieser Folge wäre durch

$$m_{2k} = \frac{1}{2k+1} \quad \text{und} \quad m_{2k+1} = (2k+1) \cdot m_{2k} = \frac{2k+1}{2k+1} = 1$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann wäre aber

$$\infty > \sum_{k=0}^{\infty} |m_k|^2 \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} |m_{2k+1}|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty \ ,$$

Widerspruch!

Aufgabe 3

(a) Nach Transformationsformel ist $\overset{\vee}{\diamond} : \xi \longmapsto \overset{\vee}{\xi}$ eine lineare Isometrie von $\mathbf{L}^2([-1,1])$ auf $\mathbf{L}^2([-1,1])$, die zu sich selbst invers ist. Damit sind

$$\mathbf{L}^2_g([-1,1]) = \operatorname{Ker}\left(\operatorname{Id} - \overset{\vee}{\diamond}\right) \quad \text{und} \quad \mathbf{L}^2_u([-1,1]) = \operatorname{Ker}\left(\operatorname{Id} + \overset{\vee}{\diamond}\right)$$

abgeschlossene Unterräume von $\mathbf{L}^2([-1,1])$. Für $\xi \in \mathbf{L}^2_g([-1,1])$ und $\eta \in \mathbf{L}^2_u([-1,1])$ gilt ferner

$$(\xi|\eta) = \left(\overset{\vee}{\xi}\middle|\overset{\vee}{\eta}\right) = -(\xi|\eta) = 0$$

also ist die Summe orthogonal. Schließlich folgt aus

$$2\operatorname{Id} = \left(\operatorname{Id} + \overset{\vee}{\diamond}\right) + \left(\operatorname{Id} - \overset{\vee}{\diamond}\right) \quad \text{und} \quad \left(\operatorname{Id} + \overset{\vee}{\diamond}\right)\left(\operatorname{Id} - \overset{\vee}{\diamond}\right) = \left(\operatorname{Id} - \overset{\vee}{\diamond}\right)\left(\operatorname{Id} + \overset{\vee}{\diamond}\right) = \operatorname{Id} - \overset{\vee}{\diamond} \circ \overset{\vee}{\diamond} = 0$$

die Behauptung.

(b) Die Abbildung

$$\gamma \longmapsto \sqrt{2} \cdot \gamma_{|[0,1]} : \mathbf{L}^2_g([-1,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2([0,1])$$

ist wohldefiniert und linear. Sie erfüllt

$$\int_0^1 \left|\sqrt{2} \cdot \gamma_{|[0,1]}\right|^2 d\lambda = \int_{-1}^0 |\gamma(-x)|^2 \, dx + \int_0^1 |\gamma(x)|^2 \, dx = \int_{-1}^1 |\gamma|^2 \, d\lambda \ ,$$

ist also eine Isometrie und ist surjektiv, da jede Funktion aus $\mathbf{L}^2([0,1])$ sich zu eine gerade Funktion auf $[-1,1]$ fortsetzen läßt. Die Umkehrabbildung ist durch

$$\xi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \xi \circ |\cdot| : \mathbf{L}^2([0,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2_g([-1,1])$$

gegeben.

Analog zeigt man, daß

$$\gamma \longmapsto \sqrt{2} \cdot \gamma_{|[0,1]} : \mathbf{L}^2_u([-1,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2([0,1])$$

eine surjektive Isometrie ist, dessen Umkehrabbildung

$$\xi \longmapsto \frac{\text{signum}}{\sqrt{2}} \cdot \xi \circ |\cdot| : \mathbf{L}^2([0,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2_u([-1,1])$$

ist.

Schließlich beweist man mittels der Transformationsformel für

$$\frac{\mathrm{id}+1}{2} : x \longmapsto \frac{x+1}{2} : [-1,1] \longrightarrow [0,1] \ ,$$

daß

$$\xi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \xi \circ \left(\frac{\mathrm{id}+1}{2}\right) : \mathbf{L}^2([0,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2([-1,1])$$

eine surjektive Isometrie ist.