Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Lösungen der Übungen

zur Vorlesung

HILBERTRAUM-METHODEN

UND ANWENDUNGEN

Prof. Dr. C. Portenier

Wintersemester 2004/2005

Fassung vom 25. Januar 2005

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Lösungsblatt 9

Aufgabe 1

(a) Wegen $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ ist nur noch $\exp \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ zu zeigen. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ positiv, mit Träger $\emptyset \neq \operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$ (vgl. Hinweis). Nimmt man $\exp \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ an, so existiert ein $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ derart, daß

$$\langle \varphi_l | \mu \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \langle \varphi(\diamond - l) | \exp \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int \overline{\varphi(x-l)} \cdot \exp(x)\, dx =$$

$$= \int \overline{\varphi(x)} \cdot \exp(x+l)\, dx = \exp(l) \cdot \left(\int \varphi \cdot \exp \right) \ ,$$

und ein $k \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\left| \langle \varphi_l | \mu \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \right| \leqslant c \cdot \max\nolimits_{j=0,\ldots,k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^j \varphi_l \right\|_\infty = c \cdot \max\nolimits_{j=0,\ldots,k} \left\| \langle \mathrm{id} + l \rangle^k \cdot \partial^j \varphi \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot 2 \langle l \rangle^k \cdot \max\nolimits_{j=0,\ldots,k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^j \varphi \right\|_\infty$$

für alle $l \in \mathbb{N}$. Dies ist nicht möglich, da dies

$$\exp(l) \cdot \left(\int \varphi \cdot \exp \right) = \left| \langle \varphi_l | \mu \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \right| \leqslant 2 \langle l \rangle^k \cdot \max\nolimits_{j=0,\ldots,k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^j \varphi \right\|_\infty$$

für alle $l \in \mathbb{N}$ zur Folge hätte.

(b) Die erste Behauptung ist wieder klar. Für die zweite Enthaltensaussage integriere man zuerst partiell, so daß

$$\langle \varphi | \exp \cdot \cos(\exp) \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int \overline{\varphi} \cdot \exp \cdot \cos(\exp) = - \int \overline{\partial \varphi} \cdot \sin(\exp) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ .$$

Aber $|\sin(\exp)\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ sowie $\partial\, |\sin(\exp)\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ und für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$\left\langle \varphi \middle| \partial\, |\sin(\exp)\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \right\rangle = - \left\langle \partial\varphi \middle| |\sin(\exp)\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \right\rangle = - \int \overline{\partial \varphi} \cdot \sin(\exp) \ .$$

Dies zeigt, daß die Einschränkung von $\partial\, |\sin(\exp)\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $|\exp \cdot \cos(\exp)\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$ übereinstimmt, oder $|\exp \cdot \cos(\exp)\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$ besitzt $|\exp \cdot \cos(\exp)\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} := \partial\, |\sin(\exp)\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ als Fortsetzung auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Diese Fortsetzung ist eindeutig, da $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht ist.

(c) Auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ rechnet man einfach das Integral aus, d.h.

$$\langle \varphi | \exp \cdot \cos(\exp) \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int \overline{\varphi} \cdot \exp \cdot \cos(\exp) \ .$$

Dagegen gilt für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nur

$$\left\langle \varphi \middle| \left| \exp \cdot \cos(\exp) \right\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \right\rangle := \left\langle \varphi \middle| \partial \left| \sin(\exp) \right\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \right\rangle = - \int \overline{\partial \varphi} \cdot \sin(\exp) \ .$$

Aufgabe 2 Durch Induktion genügt es zu zeigen, daß

$$\partial : \mathcal{D}(X)^* \longrightarrow \mathcal{D}(X)^*$$

stetig ist. Sei also $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(X)^*$ und $\mu \in \mathcal{D}(X)^*$, so daß $\mu = \lim_k \mu_k$, d.h.

$$\lim_k \langle \varphi | \mu_k \rangle = \langle \varphi | \mu \rangle \ .$$

Daraus folgt aber

$$\lim_k \langle \varphi | \partial \mu_k \rangle = - \lim_k \langle \partial \varphi | \mu_k \rangle = - \langle \partial \varphi | \mu \rangle = \langle \varphi | \partial \mu \rangle \ ,$$

da $\partial \varphi \in \mathcal{D}(X)$ ist.

Aufgabe 3

(a) Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} \langle \cdot \rangle^{-1} \, d\lambda < \infty \ .$$

Für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R})$ gilt

$$|\langle \varphi | f \cdot \lambda \rangle| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left| \varphi \cdot \langle \cdot \rangle \cdot f \cdot \langle \cdot \rangle^{-1} \right| \, d\lambda \leqslant \| \varphi \cdot \langle \cdot \rangle \|_\infty \cdot \| f \|_\infty \cdot \int_{\mathbb{R}} \langle \cdot \rangle^{-1} \, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\| f \|_\infty \cdot \int_{\mathbb{R}} \langle \cdot \rangle^{-1} \, d\lambda}_{<\infty} \cdot p_1(\varphi) \ .$$

Da p_1 eine auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ stetige Halbnorm ist, folgt die Behauptung.

(b) Sei $s \in \mathbb{R}$. Es existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $s - j < -1$. Da

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^{s-j} < \infty$$

und $\mathcal{C}^b(\mathbb{R})$ vollständig ist, konvergiert

$$\sum_{k \geqslant 1} k^{s-j} \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} \quad \text{in} \quad \mathcal{C}^b(\mathbb{R})$$

nach dem Weierstrass-Kriterium. Mit (a) gilt die Konvergenz dieser Reihe auch in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Da $\partial\!\!\!/^j \in \mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}))$, folgt die Existenz von

$$\lim_l \sum_{k=1}^{l} k^s \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} = \lim_l \sum_{k=1}^{l} \partial\!\!\!/^j \left[k^{s-j} \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} \right] =$$

$$= \not{\partial}^j \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{s-j} \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} \right] \ .$$

Aufgabe 4 sinc ist stetig und verschwindet im Unendlichen, insbesondere ist diese Funktion lokal integrierbar und wird von einem Polynom (eine Konstante) majorisiert. Damit ist

$$\mathrm{sinc} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{len}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \ .$$

Es gilt

$$\partial \mathcal{F}(\mathrm{sinc}) = -2\pi i \cdot \mathcal{F}(\mathrm{id} \cdot \mathrm{sinc}) = \mathcal{F}\left(e^{-i\pi\,\mathrm{id}} - e^{i\pi\,\mathrm{id}}\right) = \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}} =$$

$$= \partial\left(h_{-\frac{1}{2}} - h_{\frac{1}{2}}\right) = \partial\left(1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\right) \ .$$

Mit Blatt 3, Aufgabe 3, gilt

$$\mathcal{F}(\mathrm{sinc}) = 1_{[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}]} + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{K} \ .$$

Da $\mathrm{sinc} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, ist $\mathcal{F}(\mathrm{sinc}), 1_{[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}]} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, also $c \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, d.h. $c = 0$. Es folgt

$$\mathcal{F}(\mathrm{sinc}) = 1_{[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}]} \ .$$

Man kann auch direkt rechnen (dies ist die gute Idee !) :

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\left(1_{[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}]}\right)(x) = \int e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot x} \cdot 1_{[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}]}(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i \cdot x} \cdot \left[e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot x}\right]_{\lambda=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i \cdot x} \cdot \left(e^{2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot x} - e^{-2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot x}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \mathrm{sinc}(x) \ ,$$

und mit dem Inversionssatz

$$\mathcal{F}(\mathrm{sinc}) = \mathcal{F}\overset{-1}{\mathcal{F}}\left(1_{[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}]}\right) = 1_{[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}]} \ .$$

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Lösungsblatt 10

Aufgabe 1 La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}}$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ et est égale à la fonction 1-périodique donnée par

$$\pi^2 \cdot \left[\left(\mathrm{id} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \right] - 2\pi i \cdot \int_0^{\diamond} \ln \Big(2 \cdot \sin(\pi \cdot t) \Big) \, dt \quad \text{sur } [0,1] \ .$$

On a alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} = \not\partial \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} \right) = -\ln \Big(2 \cdot \sin(\pi \cdot \mathrm{id}) \Big) + \pi i \cdot \left(\frac{1}{2} - \mathrm{id} + \lfloor \mathrm{id} \rfloor \right)$$

dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, puis

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} = \not\partial \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k - \frac{1}{2\pi i} \cdot HW \left(\frac{1}{\sin(\pi \cdot \mathrm{id})} \right) \ ,$$

donc en particulier

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi \cdot k \cdot \mathrm{id}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k - 1 \right)$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(2\pi \cdot k \cdot \mathrm{id}) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot HW \left(\frac{1}{\sin(\pi \cdot \mathrm{id})} \right) \ ,$$

et par suite

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} = 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi \cdot k \cdot \mathrm{id}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \ .$$

Finalement pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il vient

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} \middle| \varphi \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \middle| \varphi \right\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \ .$$

Aufgabe 2

(a) Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ gilt

$$\left|\langle\varphi\,|f_k - f\,\rangle\right| = \int \left|\overline{\varphi}\cdot(f_k - f)\right|\,d\lambda_X \leqslant \left(\int |\varphi|^2\,d\lambda_X\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\operatorname{supp}\varphi} |f_k - f|^2\,d\lambda_X\right)^{\frac{1}{2}} \to 0\ .$$

(b) Mit (a) gilt

$$\lim\nolimits_k f_k = f \quad \text{und} \quad \lim\nolimits_k \partial^\alpha f_k = g \quad \text{in } \mathcal{D}(X)^*\ .$$

Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ folgt somit

$$\langle\varphi\,|\partial^\alpha f\,\rangle = (-1)^{|\alpha|_1}\cdot\langle\,\partial^\alpha\varphi|\,f\rangle = \lim\nolimits_k\,(-1)^{|\alpha|_1}\cdot\langle\,\partial^\alpha\varphi|\,f_k\rangle =$$

$$= \lim\nolimits_k\,\langle\varphi\,|\partial^\alpha f_k\,\rangle = \langle\varphi\,|g\,\rangle\ ,$$

d.h. $\partial^\alpha f = g$.

(c) Ist $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}^{(m)}(X)$, so sind alle $(\partial^\alpha\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auch Cauchy-Folgen in $\mathbf{L}^2(X)$. Da $\mathbf{L}^2(X)$ ein Hilbert-Raum ist, existieren $\eta_\alpha \in \mathbf{L}^2(\mu)$ mit $\eta_\alpha = \lim_k \partial^\alpha\xi_k$ in $\mathbf{L}^2(X)$, also auch $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$. Setzt man $\xi := \eta_0 = \lim_k \xi_k$, folgt mit (b) $\partial^\alpha\xi = \lim_k \partial^\alpha\xi_k = \eta_\alpha$, d.h. $\xi \in \mathcal{H}^{(m)}(X)$. Durch Limes-Übergang in der Cauchy-Eigenschaft folgt, daß $\xi = \lim_k \xi_k$ in $\mathcal{H}^{(m)}(X)$.