Chapitre 2

LE THÉORÈME DE LA PROJECTION

Version du 25 janvier 2005

2.1 Théorème de la projection

Dans ce paragraphe F désigne un espace préhilbertien,

muni de la norme déduite du produit scalaire.

Rappelons tout d'abord que si G, H sont des espaces normés et $T : G \longrightarrow H$ est une application (semi-)linéaire, alors la plus petite constante M satisfaisant à

$$\|T\gamma\|_H \leqslant M \cdot \|\gamma\|_G \quad \text{pour tout } \gamma \in G \tag{$*$}$$

est

$$\|T\| := \sup_{\gamma \in G, \|\gamma\|_G \leqslant 1} \|T\gamma\|_H \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Si $L(G, H)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires $T : G \longrightarrow H$, alors

$$T \longmapsto \|T\| : L(G, H) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est une fonctionnelle absolument homogène et sous-additive. On dit que $\|T\|$ est la norme de T .

Pour quer T soit continue, il faut et il suffit qu'il existe une constante $M < \infty$ satisfaisant à $(*)$, i.e. que $\|T\| < \infty$. On dit aussi que T est *bornée* .

Ceci fut démontré dans le cours d'Analyse [9], § 11.8.

Si $\mathcal{L}(G, H)$ désigne l'ensemble des applications linéaires $T : G \longrightarrow H$ qui sont continues, on a

$$\mathcal{L}(G, H) = \{T \in L(G, H) \mid \|T\| < \infty\} \ ,$$

et les propriétés de la norme montrent que c'est un sous-espace vectoriel de $L(G, H)$ et que

$$T \longmapsto \|T\| : \mathcal{L}(G, H) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une norme.

DEFINITION 1 Pour tout $\xi, \eta \in F$, on dit que ξ et η sont *orthogonaux* et on écrit $\xi \perp \eta$, si $(\xi| \eta) = 0$. Si A est une partie de F , on désigne par $A^\perp$ l' *ensemble orthogonal* formé des $\eta \in F$ tels que $(A| \eta) = 0$, i.e. $(\xi| \eta) = 0$ pour tout $\xi \in A$.

LEMME (Egalité de Pythagore) *Si $\xi, \eta \in F$ sont orthogonaux, alors*

$$\|\xi + \eta\|^2 = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 \ .$$

La réciproque est vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

C'est immédiat, puisque

$$\|\xi+\eta\|^2 = \|\xi\|^2 + (\xi|\,\eta) + (\eta|\,\xi) + \|\eta\|^2 \ .$$

□

EXEMPLE 1 Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la réciproque est fausse ; on a par exemple

$$|1+i|^2 = |1|^2 + |i|^2 \quad \text{et} \quad (1|\,i) = i \ .$$

Nous allons maintenant généraliser le théorème 15.16 de meilleure approximation que nous avons démontré dans le cours d'Analyse [9].

THEOREME *Soient F un espace préhilbertien et $\mathcal{G}$ une partie convexe complète $\neq \emptyset$ de F .*

(i) Pour tout $\xi \in F$, il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\inf_{\gamma\in\mathcal{G}} \|\xi-\gamma\| = d(\xi,\mathcal{G}) = \|\xi-\theta\| \ . \qquad (*)$$

On le note $P_{\mathcal{G}}\xi$ et on dit c'est la meilleure approximation de ξ par un élément de $\mathcal{G}$.

(ii) Pour tout $\xi \in F$, l'élément $P_{\mathcal{G}}\xi$ est l'unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\operatorname{Re}(\gamma-\theta|\,\theta-\xi) \geqslant 0 \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ . \qquad (**)$$

On a

$$\|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\| \leqslant \|\xi-\eta\| \quad \textit{pour tout } \xi,\eta \in F \ .$$

Si $\mathcal{G}$ est sous-espace vectoriel, alors

(iii) Pour tout $\xi \in F$, l'élément $P_{\mathcal{G}}\xi$ est l'unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que $(\xi-\theta)\perp\mathcal{G}$, i.e. tel que

$$(\gamma|\,\xi) = (\gamma|\,\theta) \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ .$$

(iv) L'application $P_{\mathcal{G}} : F \longrightarrow F$ est linéaire. C'est une projection, i.e. $P_{\mathcal{G}}^2 = P_{\mathcal{G}}$, et elle est de norme 1 si $\mathcal{G} \neq \{0\}$. Son noyau est le sous-espace vectoriel $\mathcal{G}^{\perp}$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{G}$; il est fermé et on a

$$F = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^{\perp} \ .$$

(v) On a

$$\mathcal{G}^{\perp\perp} = \mathcal{G} \ .$$

Démonstration de (i) Etant donné $\xi \in F$, il existe une suite $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ telle que $d(\xi,\mathcal{G}) = \lim_k \|\xi-\gamma_k\|$. Nous allons montrer que $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Par l'égalité du parallélogramme (corollaire 3.3), on a

$$\|\gamma_k-\gamma_l\|^2 = 2\cdot\left(\|\xi-\gamma_k\|^2 + \|\xi-\gamma_l\|^2\right) - 4\cdot\left\|\xi - \frac{\gamma_k+\gamma_l}{2}\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot\left(\|\xi-\gamma_k\|^2 + \|\xi-\gamma_l\|^2\right) - 4\cdot d(\xi,\mathcal{G})^2 \ ,$$

puisque $\mathcal{G}$ est convexe :

$$\frac{\gamma_k+\gamma_l}{2} \in \mathcal{G} \ .$$

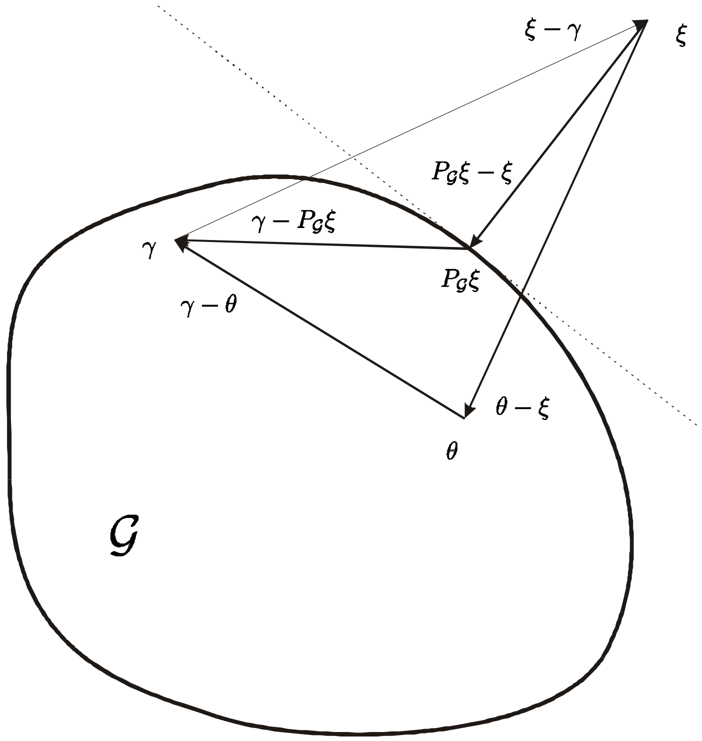
Comme le membre de droite tend vers 0 lorsque k,l tendent vers l'infini, notre assertion est prouvée et $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\|\xi-\theta\| = \lim_k \|\xi-\gamma_k\| = d(\xi,\mathcal{G}) \ .$$

Si $\widetilde{\theta} \in \mathcal{G}$ est tel que $d(\xi, \mathcal{G}) = \left\|\xi - \widetilde{\theta}\right\|$, alors

$$\left\|\theta - \widetilde{\theta}\right\|^2 = 2 \cdot \left(\|\xi - \theta\|^2 + \left\|\xi - \widetilde{\theta}\right\|^2\right) - 4 \cdot \left\|\xi - \frac{\theta + \widetilde{\theta}}{2}\right\|^2 \leqslant 0 \ ,$$

d'où l'on obtient $\theta = \widetilde{\theta}$.



Démonstration de (ii) Pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ et $\alpha \in \left]0, 1\right]$, on a $\alpha \cdot \gamma + (1 - \alpha) \cdot P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}$, donc

$$\|P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2 \leqslant \|\alpha \cdot \gamma + (1 - \alpha) \cdot P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2 = \|\alpha \cdot (\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi) + P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2 =$$

$$= \alpha^2 \cdot \|\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 + 2\alpha \cdot \operatorname{Re}(\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi | P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) + \|P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2$$

et par suite

$$\operatorname{Re}(\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi | P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) \geqslant -\frac{\alpha}{2} \cdot \|\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 \ ,$$

d'où $(**)$ en faisant tendre α vers 0 .

Réciproquement soit θ vérifiant $(**)$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, il vient

$$\|\gamma - \xi\|^2 = \|\gamma - \theta + \theta - \xi\|^2 = \|\gamma - \theta\|^2 + 2\operatorname{Re}(\gamma - \theta | \theta - \xi) + \|\theta - \xi\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \|\theta - \xi\|^2 \ ,$$

ce qui montre que θ vérifie $(*)$. On a bien $\theta = P_{\mathcal{G}}\xi$.

Finalement pour prouver l'inégalité, puisque $P_{\mathcal{G}}\eta, P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}$, constatons que

$$\operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\eta - P_{\mathcal{G}}\xi | P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) \ , \ \operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta | P_{\mathcal{G}}\eta - \eta) \geqslant 0 \ .$$

En additionnant on obtient

$$0 \leqslant \operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi + P_{\mathcal{G}}\eta - \eta) =$$

$$= \operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta | \xi - \eta) - \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\|^2 \leqslant |(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta | \xi - \eta)| - \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\xi - \eta\| \cdot \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\| - \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\|^2 \ ,$$

d'où le résultat.

Démonstration de (iii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\gamma \in \mathcal{G}$, on a $\overline{\alpha} \cdot \gamma \in \mathcal{G}$, donc

$$0 \leqslant \operatorname{Re}\left(\overline{\alpha} \cdot \gamma - P_{\mathcal{G}}\xi \middle| P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\right) = \operatorname{Re}\alpha \cdot (\gamma | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) - \operatorname{Re}\left(P_{\mathcal{G}}\xi \middle| P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\right) \ .$$

En faisant après division tendre $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ vers $\pm\infty$, on obtient $\operatorname{Re}(\gamma | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en remplaçant α par $i \cdot \alpha$, on obtient $\operatorname{Im}(\gamma | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0$, donc $(\gamma | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0$. Nous avons donc prouvé que $(\xi - P_{\mathcal{G}}\xi) \perp \mathcal{G}$.

Réciproquement étant donné $\theta \in \mathcal{G}$ tel que $(\xi - \theta) \perp \mathcal{G}$, pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, on a

$$\|\xi - (\theta + \gamma)\|^2 = \|\xi - \theta\|^2 + \|\gamma\|^2$$

par le lemme de Pythagore, donc

$$d(\xi, \mathcal{G})^2 = \inf_{\gamma \in \mathcal{G}} \|\xi - (\theta + \gamma)\|^2 = \|\xi - \theta\|^2 \ .$$

Grâce à (i), on obtient $\theta = P_{\mathcal{G}}\xi$.

Démonstration de (iv) La linéarité découle immédiatement de (iii). Par exemple pour tout $\xi \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a évidemment

$$\alpha \cdot \xi - \alpha \cdot P_{\mathcal{G}}\xi = \alpha \cdot (\xi - P_{\mathcal{G}}\xi) \perp \mathcal{G} \ ,$$

donc $P_{\mathcal{G}}(\alpha \cdot \xi) = \alpha \cdot P_{\mathcal{G}}\xi$. C'est une projection, car $(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\xi) \perp \mathcal{G}$! D'autre part

$$\|\xi\|^2 = \|P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 + \|\xi - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 \ ,$$

d'où l'on tire $\|P_{\mathcal{G}}\xi\| \leqslant \|\xi\|$, et par suite $\|P_{\mathcal{G}}\| \leqslant 1$. Si $\mathcal{G} \neq \{0\}$, soit $\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $\|\gamma\| = 1$. On a alors $\|P_{\mathcal{G}}\gamma\| = \|\gamma\| = 1$, donc $\|P_{\mathcal{G}}\| = 1$. Finalement, on a $\operatorname{Ker} P_{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^{\perp}$ par (iii) ; c'est donc un sous-espace vectoriel fermé puisque $P_{\mathcal{G}}$ est continue, et la décomposition $\xi = P_{\mathcal{G}}\xi + (\xi - P_{\mathcal{G}}\xi)$ montre que $F = \mathcal{G} + \mathcal{G}^{\perp}$. Comme manifestement $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}^{\perp} = \{0\}$, nous avons finit de prouver (iv).

Démonstration de (v) On a $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^{\perp\perp}$ et si $\xi \in \mathcal{G}^{\perp\perp}$, alors comme $\xi - P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}^{\perp}$ par (iii), il vient

$$(\xi | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0 \quad \text{et} \quad (P_{\mathcal{G}}\xi | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0 \ ,$$

donc

$$\|\xi - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 = (\xi - P_{\mathcal{G}}\xi | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = (\xi | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) + (P_{\mathcal{G}}\xi | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0 \ ,$$

i.e. $\xi = P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}$. □

DEFINITION 2 Si $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel complet, on dit que $P_{\mathcal{G}}$ est la *projection orthogonale* ou l' *orthoprojecteur* de F sur $\mathcal{G}$. Nous écrirons

$$F = \mathcal{G} \boxplus \mathcal{G}^{\perp}$$

pour montrer que cette décomposition est orthogonale et que l'on a l'égalité de Pythagore.

REMARQUE 1 On peut également étendre ce résultat à certains espaces normés, dits *uniformément convexes* , par exemple les espaces $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour $p \in \,]1, \infty[$.

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $|\cdot|_{\infty}$, l'assertion (i) est fausse. Par exemple si $\varphi = (1, 0)$, alors tous les points de $\{0\} \times [-1, 1]$ sont meilleure approximation de φ dans $\{0\} \times \mathbb{R}$.

EXEMPLE 2 Etant donné $\epsilon \in F \setminus \{0\}$, alors $\mathbb{K} \cdot \epsilon$ est complet et

$$P_{\mathbb{K}\cdot\epsilon}\xi = \frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon|\, \xi) \cdot \epsilon \ .$$

En effet $\mathbb{K} \cdot \epsilon$ est complet, car $\alpha \longmapsto \alpha \cdot \frac{\epsilon}{\|\epsilon\|} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \cdot \epsilon$ est un isomorphisme. Il n'est évidemment pas nécessaire de le savoir pour constater que $\frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon|\, \xi) \cdot \epsilon$ est la projection de ξ sur $\mathbb{K} \cdot \epsilon$. En effet

$$\left(\xi - \frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon|\, \xi) \cdot \epsilon \middle| \frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon|\, \xi) \cdot \epsilon\right) = \frac{(\epsilon|\, \xi) \cdot (\xi|\, \epsilon)}{\|\epsilon\|^2} - \frac{\overline{(\epsilon|\, \xi)} \cdot (\epsilon|\, \xi) \cdot \|\epsilon\|^2}{\|\epsilon\|^4} = 0 \ .$$

$\square$

COROLLAIRE *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.*

Pour qu'une partie A de $\mathcal{H}$ soit totale, il faut et il suffit que, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\xi \perp A$, i.e. tel que $(A|\, \xi) = \{0\}$, on ait $\xi = 0$.

Soit $\mathcal{G} := \overline{\mathrm{lin}}A$. Puisque $\mathcal{H}$ est complet, il en est de même de $\mathcal{G}$, donc $\mathcal{H} = \mathcal{G} \boxplus \mathcal{G}^\perp$. Par définition A est totale si, et seulement si, $\mathcal{G} = \mathcal{H}$, i.e. $\mathcal{G}^\perp = \{0\}$, d'où l'assertion puisque $A^\perp = \mathcal{G}^\perp$ par linéarité et continuité (cf. remarque 1.1.2). $\square$

EXERCICE 1 Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des sous-espaces vectoriels de F .

(a) Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont complets, alors $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ si, et seulement si, on a $P_\mathcal{G} = P_\mathcal{G} P_\mathcal{H}$.

(b) Si $\mathcal{H} \perp \mathcal{G}$, alors $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est complet si, et seulement si, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ le sont. Dans ce cas, on a

$$P_{\mathcal{H}+\mathcal{G}} = P_\mathcal{H} + P_\mathcal{G} \ .$$

EXERCICE 2 Dans l'espace de Banach $c^0(\mathbb{N})$ des zéro-suites, sous-espace vectoriel fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, il existe des hyperplans fermés H , i.e. $H = \mathrm{Ker}\, \mu$ pour une forme linéaire continue $\mu \in c^0(\mathbb{N})' = \ell^1(\mathbb{N})$ (cf. exercice 3.8.1), tels que tout $\varphi \in F \setminus H$ n'ait pas de meilleure approximation dans H (cf. exercice 3.8.2).

2.2 Théorème de représentation de Riesz

Si F est un espace vectoriel nous désignerons par $F^{\circledast}$ l'espace vectoriel des formes semi-linéaires μ sur F . La forme sesquilinéaire (à gauche) qui lui est associée sera notée

$$F \times F^{\circledast} \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle := \mu(\varphi)$$

comme généralisation d'un produit scalaire. Nous écrirons la forme semi-linéaire μ sous la forme d'un *vecteur ket*

$$|\mu\rangle : F \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle = \mu(\varphi) \ .$$

Ce formalisme fait partie de celui de Dirac.

DEFINITION Si F est un espace normé, on muni l'espace vectoriel $F^{\dagger}$ des formes semi-linéaires continues sur F de la norme

$$\|\mu\| := \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} |\langle \varphi | \, \mu \rangle| \ .$$

On dit que c'est le *semi-dual fort* de F et on le note $F_{\beta}^{\dagger}$.

Si G et H sont des espaces normés, on dit qu'une application sesquilinéaire $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow H$ est *bornée* s'il existe une constante $M < \infty$ telle que

$$\|\mathfrak{s}(\varphi, \gamma)\|_H \leqslant M \cdot \|\varphi\|_F \cdot \|\gamma\|_G \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \gamma \in G \ ,$$

i.e. si

$$\|\mathfrak{s}\| := \sup_{\substack{\varphi \in F, \gamma \in G \\ \|\varphi\|_F, \|\gamma\|_G \leqslant 1}} \|\mathfrak{s}(\varphi, \gamma)\|_H < \infty \ ,$$

qui est la plus petite de ces constantes.

On a

$$\|\mathfrak{s}(\varphi, \gamma)\|_H \leqslant \|\mathfrak{s}\| \cdot \|\varphi\|_F \cdot \|\gamma\|_G \ .$$

EXEMPLE La forme sesquilinéaire canonique

$$F \times F^{\dagger} \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle$$

est bornée.

En effet on a

$$|\langle \varphi | \, \mu \rangle| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\mu\| \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \mu \in F^{\dagger} \ .$$

On peut considérer cette inégalité comme une *inégalité de Hölder abstraite* .

LEMME *Une application sesquilinéaire est (gobalement) continue si, et seulement si, elle est bornée.*

Il suffit d'adapter la démonstration de la continuité de la multiplication dans $\mathbb{K}$ (cours d'Analyse [9], théorème 5.5.iii). $\square$

PROPOSITION *Soit F un espace préhilbertien. Pour tout $\xi \in F$, la forme semi-linéaire*

$$|\xi) : \varphi \longmapsto (\varphi|\,\xi) : F \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue sur F , et l'application linéaire, dite de Riesz,

$$R : F \longrightarrow F_\beta^\dagger : \xi \longmapsto |\xi)$$

est une isométrie.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|(\varphi|\,\xi)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\xi\| \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Ceci montre que $\||\xi)\| \leqslant \|\xi\|$. Si $\xi \neq 0$, on a

$$\left\|\frac{\xi}{\|\xi\|}\right\| = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\middle|\,\xi\right) = \|\xi\| \ ,$$

ce qui prouve que $\||\xi)\| = \|\xi\|$. □

REMARQUE 1 L'application de Riesz est en général non-surjective, mais on a le

THEOREME (de représentation de Riesz) *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. L'application de Riesz $R : \xi \longmapsto |\xi)$ est une isométrie de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_\beta^\dagger$. En outre si $\mu \in \mathcal{H}^\dagger$, alors la fonction réelle sur $\mathcal{H}$*

$$\varphi \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \|\varphi\|^2 - \operatorname{Re}\langle \varphi|\,\mu\rangle : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

atteint son minimum en $\eta \in \mathcal{H}$ tel que $\mu = |\eta)$.

Il nous reste à montrer que l'application de Riesz est surjective. Etant donné $\mu \in \mathcal{H}^\dagger \smallsetminus \{0\}$, on a $(\operatorname{Ker}\mu)^\perp \neq \{0\}$ et le théorème de la projection 1.4 montre que $\mathcal{H} = \operatorname{Ker}\mu \oplus (\operatorname{Ker}\mu)^\perp$. Il existe donc $\widetilde{\eta} \in (\operatorname{Ker}\mu)^\perp$ tel que $(\widetilde{\eta}|\,\mu) = 1$. Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a alors $\xi - \overline{\langle \xi|\,\mu\rangle} \cdot \widetilde{\eta} \in \operatorname{Ker}\mu$ et en posant

$$\eta := \frac{\widetilde{\eta}}{\|\widetilde{\eta}\|^2} \in (\operatorname{Ker}\mu)^\perp \ ,$$

il vient

$$(\varphi|\,\eta) = \left(\varphi - \overline{\langle \varphi|\,\mu\rangle} \cdot \widetilde{\eta}\,\middle|\,\eta\right) + \left(\overline{\langle \varphi|\,\mu\rangle} \cdot \widetilde{\eta}\,\middle|\,\eta\right) = \left(\overline{\langle \varphi|\,\mu\rangle} \cdot \widetilde{\eta}\,\middle|\,\frac{\widetilde{\eta}}{\|\widetilde{\eta}\|^2}\right) = \langle \varphi|\,\mu\rangle \ ,$$

i.e. $\mu = |\eta)$.

Finalement, on a

$$\|\varphi - \eta\|^2 = \|\varphi\|^2 - 2\operatorname{Re}(\varphi|\,\eta) + \|\eta\|^2 = \|\varphi\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle \varphi|\,\mu\rangle + \|\eta\|^2 \ ,$$

d'où la seconde assertion. □

REMARQUE 2 On peut donc munir le semi-dual fort $\mathcal{H}_\beta^\dagger$ de $\mathcal{H}$ d'un produit scalaire compatible avec sa norme en posant

$$(\mu|\,\nu)_{\mathcal{H}_\beta^\dagger} := \left(R^{-1}\mu\middle|\,R^{-1}\nu\right)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \mu, \nu \in \mathcal{H}_\beta^\dagger \ ,$$

qui en fait un espace de Hilbert isomorphe à $\mathcal{H}$.

Attention, ce théorème pourrait nous inciter à identifier le semi-dual fort $\mathcal{H}_\beta^\dagger$ à $\mathcal{H}$, mais dans les applications on rencontre souvent d'autres représentations, plus intéressantes, de $\mathcal{H}_\beta^\dagger$.

COROLLAIRE *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Il y a correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues*

$$S : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

et les formes sesquilinéaires bornées

$$\mathfrak{s} : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{K}$$

donnée par

$$\mathfrak{s}(\xi, \gamma) = (\xi | S\gamma)_{\mathcal{H}} \ .$$

Dans ce cas

$$\|S\| = \|\mathfrak{s}\| \ .$$

Si S est linéaire continue, il est clair que $\mathfrak{s}$ est sesquilinéaire (cf. exemple 1.1). Elle est bornée car

$$|\mathfrak{s}(\xi, \gamma)| = |(\xi | S\gamma)| \leqslant \|\xi\| \cdot \|S\gamma\| \leqslant \|S\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\mu\| \ ,$$

donc $\|\mathfrak{s}\| \leqslant \|S\|$. Réciproquement si $\mathfrak{s}$ est une forme sesquilinéaire bornée, pour tout $\gamma \in G$

$$\xi \longmapsto \mathfrak{s}(\xi, \gamma) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme semi-linéaire continue, représentée par $S\gamma \in \mathcal{H}$, puisque

$$|\mathfrak{s}(\xi, \gamma)| \leqslant \|\mathfrak{s}\| \cdot \|\gamma\| \cdot \|\xi\| \ .$$

Par construction $\mathfrak{s}(\xi, \gamma) = (\xi | S\gamma)$ et $\|S\gamma\| \leqslant \|\mathfrak{s}\| \cdot \|\gamma\|$. D'autre part

$$S : \gamma \longmapsto S\gamma : G \longrightarrow \mathcal{H}$$

est linéaire et

$$\|S\| = \sup_{\gamma \in G, \|\gamma\| \leqslant 1} \|S\gamma\| \leqslant \|\mathfrak{s}\| \ ,$$

ce qui prouve la continuité. □

PROPOSITION (Théorème de Hahn-Banach) *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert , $\mathcal{G}$ un sous-espace vectoriel fermé et $\nu \in \mathcal{G}^\dagger$. Alors la forme semi-linéaire sur $\mathcal{H}^\dagger$ égale à ν sur $\mathcal{G}$ et à 0 sur $\mathcal{G}^\perp$ est la seule qui soit continue et prolonge ν sans augmenter sa norme.*

Par le théorème de Riesz soit $\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $\nu = |\gamma)_{\mathcal{G}}$. Comme $\gamma \in \mathcal{H}$, $|\gamma)_{\mathcal{H}}$ est une forme semi-linéaire sur $\mathcal{H}$ qui prolonge évidemment ν ; elle s'annule sur $\mathcal{G}^\perp$ et

$$\left\| |\gamma)_{\mathcal{H}} \right\| = \|\gamma\|_{\mathcal{H}} = \|\gamma\|_{\mathcal{G}} = \left\| |\gamma)_{\mathcal{G}} \right\| = \|\nu\| \ .$$

Soit alors $\mu \in \mathcal{H}^\dagger$ une forme semi-linéaire sur $\mathcal{H}^\dagger$ qui prolonge ν sans augmenter sa norme. Comme $\mu = |\xi)_{\mathcal{H}}$ pour un certain $\xi \in \mathcal{H}$, pour tout $\theta \in \mathcal{G}$, il vient

$$(\theta | \xi - \gamma)_{\mathcal{H}} = (\theta | \xi)_{\mathcal{H}} - (\theta | \gamma)_{\mathcal{G}} = \langle \theta | \mu \rangle - \langle \theta | \nu \rangle = 0 \ ,$$

i.e. $\xi - \gamma \in \mathcal{G}^\perp$. Ainsi

$$\|\nu\|^2 = \|\mu\|^2 = \|\xi\|^2 = \|\gamma\|^2 + \|\xi - \gamma\|^2 = \|\nu\|^2 + \|\xi - \gamma\|^2 \ ,$$

donc $\xi - \gamma = 0$ et par suite $\mu = |\gamma)_{\mathcal{H}}$. □

2.3 Densité et appartenance à un espace $\mathbf{L}^2$

THEOREME *Soit F un espace-test par rapport à μ .*

(i) Si $F \subset \mathbf{L}^2(\mu)$, alors F est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$.
Dans ce cas

(ii) Si f est une fonction telle que, pour tout $\varphi \in F$, on ait $\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ et

$$\sup_{\varphi \in F, \|\varphi\|_2 \leqslant 1} \left| \int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu \right| < \infty ,$$

alors $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$.

Démonstration de (i) Pour montrer que F est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, soit $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ tel que $\xi \perp F$. Pour tout $\varphi \in F$, on a $\overline{\varphi} \cdot \xi \in \mathbf{L}^1(\mu)$ et

$$\int^* \overline{\varphi} \cdot \xi \, d\mu = (\varphi | \xi) = 0 ,$$

donc $\xi = 0$ par ce qui précède, puisque ξ est μ-modérée. La densité de F découle donc du corollaire 2.1.

Démonstration de (ii) La condition signifie que la forme semi-linéaire

$$\nu : \varphi \longmapsto \int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue pour $\|\cdot\|_2$. Elle est évidemment uniformément continue et puisque F est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, elle se prolonge de manière unique en une forme semi-linéaire continue $\widetilde{\nu}$ (cf. cours d'Analyse [9], théorème 10.21). Par le théorème de représentation de Riesz, il existe donc $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ tel que

$$\widetilde{\nu}(\psi) = (\psi | \xi) \quad \text{pour tout } \psi \in \mathbf{L}^2(\mu) .$$

Pour tout $\varphi \in F$, on a alors

$$\int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu = \nu(\varphi) = \widetilde{\nu}(\varphi) = (\varphi | \xi) = \int \overline{\varphi} \cdot \xi \, d\mu ,$$

donc $\int \varphi \cdot \overline{(f - \xi)} \, d\mu = 0$. Puisque F est un espace-test on obtient $f = \xi$ μ-p.p. , donc

$$f = \xi \in \mathbf{L}^2(\mu) .$$

□

EXERCICE 1 Montrer que si F est un espace-test de fonctions contenu dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour un certain $p \in [1, \infty[$, alors F est dense dans $\mathbf{L}^p(\mu)$.

EXERCICE 2 Montrer que si F est un espace-test de fonctions par rapport à μ et que $\rho \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc},+}(\mu)$, alors F est un espace-test de fonctions par rapport à $\rho \cdot \mu$.

EXERCICE 3 Soient μ une intégrale de Radon et F un sous-espace vectoriel dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Si f est une fonction μ-mesurable et μ-modérée telle que

$$\sup_{\varphi\in F,\|\varphi\|_2\leqslant 1}\int^* |\varphi\cdot f|\ d\mu<\infty\ ,$$

alors $f\in\mathbf{L}^2(\mu)$.

EXERCICE 4 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$. Montrer que pour toute forme semi-linéaire continue μ sur F , il existe une unique forme semi-linéaire continue ν sur $\mathcal{H}$ telle que $\nu_{|F}=\mu$ und $\nu_{|F^\perp}=0$.

2.4 Les théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram

Dans ce paragraphe $\mathcal{H}$ désigne un espace hilbertien

DEFINITION Une forme sesquilinéaire bornée $\mathfrak{s} : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite *strictement positive* ou *coercitive* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathfrak{s}(\xi,\xi) \geqslant \varepsilon \cdot \|\xi\|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

L'application linéaire continue $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui lui est associée est aussi dite strictement positive.

THEOREME (de Stampacchia) *Soient $\mathfrak{s}$ une forme sesquilinéaire bornée coercitive sur $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ une partie convexe fermée $\neq \emptyset$ de $\mathcal{H}$ et $\mu \in \mathcal{H}^\dagger$. Alors*

(i) Il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\operatorname{Re}\langle \gamma - \theta | \mu\rangle \leqslant \operatorname{Re}\mathfrak{s}(\gamma - \theta, \theta) \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ . \tag{$*$}$$

(ii) Si de plus $\mathfrak{s}$ est hermitienne, alors θ est caractérisé par la propriété

$$\theta \in \mathcal{G} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2}\mathfrak{s}(\theta,\theta) - \operatorname{Re}\langle \theta | \mu\rangle = \min_{\gamma\in\mathcal{G}}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\gamma,\gamma) - \operatorname{Re}\langle \gamma | \mu\rangle\right) \ .$$

Démonstration de (i) Utilisons l'application linéaire continue S associé à la forme sesquilinéaire $\mathfrak{s}$ (corollaire 2.2), donc telle que $\mathfrak{s}(\xi,\eta) = (\xi| S\eta)$. On a

$$\varepsilon \cdot \|\xi\|^2 \leqslant \mathfrak{s}(\xi,\xi) = (\xi| S\xi) \leqslant \|S\| \cdot \|\xi\|^2 \ , \tag{$**$}$$

ce qui montre que $\varepsilon \leqslant \|S\|$. Soit d'autre part $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $|\mu\rangle = |\xi)$ (théorème de Riesz 2.2).

La condition $(*)$ sur θ s'écrit alors

$$\operatorname{Re}(\gamma - \theta| S\theta - \xi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ ,$$

ou encore

$$\operatorname{Re}(\gamma - \theta| \theta - [\alpha\cdot\xi - \alpha\cdot S\theta + \theta]) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ ,$$

pour une constante $\alpha > 0$ que nous allons choisir. Grâce au théorème de la projection 2.1.ii, il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ satisfaisant à $(*)$ si, et seulement si, il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\theta = P_{\mathcal{G}}(\alpha\cdot\xi - \alpha\cdot S\theta + \theta) \ .$$

Nous sommes donc ramené à un problème de point fixe dans $\mathcal{G}$, qui est un espace métrique complet, puisque fermé dans $\mathcal{H}$. Montrons que l'application

$$\Phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} : \theta \longmapsto P_{\mathcal{G}}(\alpha\cdot\xi - \alpha\cdot S\theta + \theta)$$

est q-lipschitzienne pour un $q \in [0,1[$. Pour tout $\theta,\gamma \in \mathcal{G}$, l'inégalité du théorème de la projection 2.1.ii montre que

$$\|\Phi\theta - \Phi\gamma\|^2 \leqslant \|\alpha\cdot\xi - \alpha\cdot S\theta + \theta - (\alpha\cdot\xi - \alpha\cdot S\gamma + \gamma)\|^2 =$$

$$= \|\theta - \gamma - \alpha\cdot S(\theta-\gamma)\|^2 = \|\theta-\gamma\|^2 - 2\alpha\cdot\operatorname{Re}(\theta-\gamma| S(\theta-\gamma)) + \alpha^2\cdot\|S(\theta-\gamma)\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - 2\varepsilon \cdot \alpha + \|S\|^2 \cdot \alpha^2\right) \cdot \|\theta - \gamma\|^2 \ .$$

Le minimum de $\alpha \longmapsto 1 - 2\varepsilon \cdot \alpha + \|S\|^2 \cdot \alpha^2$ est atteint en

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\|S\|^2}$$

et vaut

$$q^2 := 1 - 2\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{\|S\|^2} + \|S\|^2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\|S\|^2}\right)^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{\|S\|^2} \in [0, 1[\ ,$$

puisque $\varepsilon \leqslant \|S\|$. Le théorème du point fixe de Banach (cours d'Analyse [9], exemple 12.5.1) nous permet de conclure.

Démonstration de (ii) Si $\mathfrak{s}$ est en outre hermitienne, elle définit un nouveau produit scalaire sur $\mathcal{H}$. Mais puisque la nouvelle norme est équivalente à l'ancienne par $(**)$, on obtient un nouvel espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$. Utilisant le théorème de représentation de Riesz dans cet espace, il existe $\widetilde{\xi} \in \mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$ tel que

$$(\eta | \, \xi) = \mathfrak{s}\left(\eta, \widetilde{\xi}\right) \quad \text{pour tout } \eta \in \mathcal{H}_{\mathfrak{s}} \ .$$

La condition $(*)$ s'écrit alors

$$\operatorname{Re} \mathfrak{s}\left(\gamma - \theta, \theta - \widetilde{\xi}\right) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G}$$

et le théorème de la projection 2.1.i dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$ montre que θ est la meilleure approximation de $\widetilde{\xi}$ par un élément de $\mathcal{G}$, donc que θ réalise

$$\min\nolimits_{\gamma \in \mathcal{G}} \mathfrak{s}\left(\gamma - \widetilde{\xi}, \gamma - \widetilde{\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

ce qui revient, puisque $\sqrt{\cdot}$ est croissante, à minimiser

$$\mathfrak{s}\left(\gamma - \widetilde{\xi}, \gamma - \widetilde{\xi}\right) = \mathfrak{s}(\gamma, \gamma) - 2 \cdot \operatorname{Re} \mathfrak{s}\left(\gamma, \widetilde{\xi}\right) + \mathfrak{s}\left(\widetilde{\xi}, \widetilde{\xi}\right)$$

ou bien

$$\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\gamma, \gamma) - \operatorname{Re}(\gamma | \, \xi) \ .$$

Ceci finit de prouver le théorème. □

COROLLAIRE (Lax-Milgram) *Soit $\mathfrak{s}$ une forme sesquilinéaire bornée coercitive sur $\mathcal{H}$ et $\mu \in \mathcal{H}^\dagger$. Alors*

(i) Il existe un unique $\theta \in \mathcal{H}$ tel que

$$\mathfrak{s}(\gamma, \theta) = \langle \gamma | \, \mu \rangle \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{H} \ .$$

(ii) Si de plus $\mathfrak{s}$ est hermitienne, alors θ est caractérisé par la propriété

$$\theta \in \mathcal{H} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2}\mathfrak{s}(\theta, \theta) - \operatorname{Re} \langle \theta | \, \mu \rangle = \min\nolimits_{\gamma \in \mathcal{G}} \left(\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\gamma, \gamma) - \operatorname{Re} \langle \gamma | \, \mu \rangle\right) \ .$$

Il suffit d'appliquer le théorème de Stampacchia en prenant $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ en remarquant que l'unique solution $\theta \in \mathcal{H}$ est caractérisée par

$$\operatorname{Re} \langle \alpha \cdot \gamma - \theta | \, \mu \rangle \leqslant \operatorname{Re} \mathfrak{s}(\alpha \cdot \gamma - \theta, \theta) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \gamma \in \mathcal{H} \ ,$$

puisque $\mathcal{H}$ est homogène, c'est-à-dire

$$0 \leqslant \operatorname{Re}\Big(\alpha \cdot [\mathfrak{s}(\gamma, \theta) - \langle \gamma | \mu \rangle]\Big) - \operatorname{Re} \mathfrak{s}(\theta, \theta) + \operatorname{Re} \langle \theta | \mu \rangle \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \gamma \in \mathcal{H}\,;$$

mais ceci n'est possible que si

$$\mathfrak{s}(\gamma, \theta) - \langle \gamma | \mu \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}\ ,$$

par un raisonnement identique à celui de la démonstration du théorème de la projection (iii). □

L'existence peut se démontrer directement et de manière plus générale dans le cadre des espaces normés.

REMARQUE 1 L'équation

$$\mathfrak{s}(\gamma, \theta) = \langle \gamma | \mu \rangle \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}\ ,$$

est celle d'Euler associée à l'extrémalisation sur $\mathcal{H}$ de la fonction réelle

$$\gamma \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{s}(\gamma, \gamma) - \operatorname{Re} \langle \gamma | \mu \rangle\ \ ,$$

mieux et plus précisément que θ en soit un point critique, c'est-à-dire que, pour tout $\gamma \in \mathcal{H}$, 0 soit un point critique de la fonction

$$f_\gamma : t \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{s}(\theta + t \cdot \gamma, \theta + t \cdot \gamma) - \operatorname{Re} \langle \theta + t \cdot \gamma | \mu \rangle\ \ ,$$

i.e. $f_\gamma'(0) = 0$. Mais

$$f_\gamma'(t) = \partial_t \left(\frac{1}{2} \cdot \mathfrak{s}(\theta + t \cdot \gamma, \theta + t \cdot \gamma) - \operatorname{Re} \langle \theta + t \cdot \gamma | \mu \rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{\mathfrak{s}(\partial_t [\theta + t \cdot \gamma], \theta + t \cdot \gamma) + \mathfrak{s}(\theta + t \cdot \gamma, \partial_t [\theta + t \cdot \gamma])\} - \operatorname{Re} \langle \partial_t [\theta + t \cdot \gamma] | \mu \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \{\mathfrak{s}(\gamma, \theta + t \cdot \gamma) + \mathfrak{s}(\theta + t \cdot \gamma, \gamma)\} - \operatorname{Re} \langle \gamma | \mu \rangle = \operatorname{Re}\Big[\mathfrak{s}(\gamma, \theta + t \cdot \gamma) - \langle \gamma | \mu \rangle\Big]\ \ ,$$

ce qui nous conduit à l'équation

$$\operatorname{Re}\Big[\mathfrak{s}(\gamma, \theta) - \langle \gamma | \mu \rangle\Big] = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}\ ,$$

et par suite le résultat. □

REMARQUE 2 Ces théorèmes conduisent aux méthodes dites variationnelles de résolution des équations aux dérivées partielles. Rappelons que l'équation d'Euler dans le cadre du principe de moindre action conduit aux équations de Lagrange de la mécanique.

2.5 Problèmes aux limites sur un intervalle

DEFINITION 1 On désigne par $\mathcal{K}^{(1)}(J)$ l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables à support compact dans J et $\partial : \mathcal{K}^{(1)}(J) \longrightarrow \mathcal{K}(J) : f \longmapsto \partial f$ l'application de dérivation.

PROPOSITION

(i) *Il existe* $\chi \in \mathcal{K}(J)$ *tel que*

$$\mathcal{K}(J) = \partial\mathcal{K}^{(1)}(J) \oplus \mathbb{K} \cdot \chi \ .$$

(ii) *Si* $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ *et* $\int \partial\varphi \cdot f \, d\lambda_J = 0$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(J)$ *, il existe* $c \in \mathbb{K}$ *tel que* $f = c$ *.*

(iii) *Si* $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ *et* $\int \varphi \cdot f \, d\lambda_J = 0$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(J)$ *, alors* $f = 0$ *.*

La démonstration est laissée en exercice. □

DEFINITION 2 Etant donné des fonctions ρ, p, q sur $[0,1]$ telles que $\rho \cdot p \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$, $\rho \cdot p > 0$ sur $[0,1]$ et $\rho \cdot q \in \mathcal{C}([0,1])$, considérons le *problème inhomogène aux limites homogènes* suivant :

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial f) + q \cdot f = g \quad \text{sur } J \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0 \ . \qquad (*)$$

On dit que c'est le *problème de Dirichlet homogène* .

Si $f \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ est solution de $(*)$, on dit que c'est une *solution classique* .

Remarquons que l'existence d'une solution classique entraîne nécessairement $\rho \cdot g \in \mathcal{C}([0,1])$, hypothèse que nous ferrons.

DEFINITION 3 Etant donné des fonctions ρ, p, q telles que $\rho \cdot p \in \mathcal{AC}([0,1])$, $\rho \cdot p > 0$ sur $[0,1]$, $\partial(\rho \cdot p) \in \mathbf{L}^\infty(]0,1[)$ et $\rho \cdot q \in \mathbf{L}^\infty_+(]0,1[)$, nous dirons qu'une solution $f \in \mathcal{H}^{(2)}(]0,1[)$ de $(*)$ (égalité des classes ou $\lambda_{[0,1]}$-p.p.) est une *solution semi-classique* .

Remarquons que l'existence d'une solution semi-classique entraîne nécessairement, puisque $\partial(\rho \cdot p) \cdot \partial f + \rho \cdot p \cdot \partial^2 f + \rho \cdot q \cdot f \in \mathbf{L}^2(]0,1[)$, que $\rho \cdot g \in \mathbf{L}^2(]0,1[)$, hypothèse que nous ferrons.

Une solution classique est évidemment une solution semi-classique.

DEFINITION 4 Avec les mêmes hypothèses que dans la définition 3, on dit qu'une fonction $\theta \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$ satisfaisant à

$$\int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot q \cdot \theta + \int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot \rho \cdot p \cdot \partial\theta = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot g \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[) \qquad (**)$$

est une *solution faible* .

Remarquons tout d'abord qu'une solution semi-classique est solution faible : on a évidemment $f \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$ et en en intégrant par parties il vient

$$\int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot q \cdot f + \int_0^1 \overline{\partial \gamma} \cdot \rho \cdot p \cdot \partial f = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot q \cdot f + \Big[\overline{\gamma} \cdot \rho \cdot p \cdot \partial f\Big]_0^1 - \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial f\right) =$$

$$= \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \left(q \cdot f - \frac{1}{\rho} \cdot \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial f\right)\right) \cdot \rho = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot g \cdot \rho \ .$$

Réciproquement si $\theta \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$ est une solution faible, en posant

$$H := \int_0^{\diamond} \rho \cdot (g - q \cdot \theta) \in \mathcal{AC}([0,1]) \ ,$$

puisque $\rho \cdot (g - q \cdot \theta) \in \mathbf{L}^2(]0,1[) \subset \mathbf{L}^1(]0,1[)$, on obtient

$$\int_0^1 \overline{\partial \gamma} \cdot \rho \cdot p \cdot \partial \theta = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot (g - q \cdot \theta) = \Big[\overline{\gamma} \cdot H\Big]_0^1 - \int_0^1 \overline{\partial \gamma} \cdot H = - \int_0^1 \overline{\partial \gamma} \cdot H \ ,$$

donc $\rho \cdot p \cdot \partial \theta + H = c$ pour une constante $c \in \mathbb{K}$ par la proposition (ii) et par suite

$$\partial \theta = \frac{c - H}{\rho \cdot p} \in \mathcal{AC}(]0,1[)$$

grâce à l'exemple 1.5.3. Ceci montre que $\theta \in \mathcal{H}^{(2)}(]0,1[)$ et intégrant le membre de gauche par parties il vient

$$\int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \Big[\rho \cdot (g - q \cdot \theta) + \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial \theta\right)\Big] = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[) \supset \mathcal{K}^{(1)}(]0,1[) \ .$$

On en déduit

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial \theta\right) + q \cdot \theta = g$$

grâce à la proposition (iii). Ceci montre que θ est une solution semi-classique.

Si en plus $\rho \cdot p \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$, et $\rho \cdot q, \rho \cdot g \in \mathcal{C}([0,1])$, on a $H \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$, donc $\partial \theta \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$, i.e. $\theta \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$, et par suite $-\partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial \theta\right) + \rho \cdot q \cdot \theta = \rho \cdot g$ partout, puisque cette fonction est continue. Ceci montre que la solution faible θ est une solution classique.

Montrons maintenant qu'il existe une unique solution faible. Il suffit de constater que $(**)$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{s}(\gamma, \theta) = \langle \gamma | \, g \cdot \rho \rangle \ ,$$

en définissant

$$\mathfrak{s} : (\gamma, \xi) \longmapsto \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot q \cdot \xi + \int_0^1 \overline{\partial \gamma} \cdot \rho \cdot p \cdot \partial \xi : \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[) \times \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[) \longrightarrow \mathbb{K}$$

et

$$|\rho \cdot g\rangle : \gamma \longmapsto \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot g : \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[) \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

La forme sesquilinéaire $\mathfrak{s}$ est bornée, puisque

$$|\mathfrak{s}(\gamma, \xi)| \leqslant \|\rho \cdot q\|_\infty \cdot \|\gamma\|_2 \cdot \|\xi\|_2 + \|\rho \cdot p\|_\infty \cdot \|\partial \gamma\|_2 \cdot \|\partial \xi\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant cst \cdot \Big(\|\gamma\|_2 \cdot \|\xi\|_2 + \|\partial \gamma\|_2 \cdot \|\partial \xi\|_2\Big) \leqslant cst \cdot \|\gamma\|_{2,(1)} \cdot \|\xi\|_{2,(1)} \ ,$$

tandis que la forme semi-linéaire $|g\rangle$ est continue, puisque

$$|\langle\gamma|\,\rho\cdot g\rangle| \leqslant \|\gamma\|_2\cdot\|\rho\cdot g\|_2 \leqslant \|\rho\cdot g\|_2\cdot\|\gamma\|_{2,(1)} \ .$$

D'autre part $\mathfrak{s}$ est évidemment hermitienne et elle est coercitive, car pour un $\varepsilon > 0$, on a $\rho\cdot p \geqslant \varepsilon$ sur $[0,1]$ et $\rho\cdot q \geqslant 0$, donc

$$\mathfrak{s}(\xi,\xi) = \int_0^1 |\xi|^2\cdot\rho\cdot q + \int_0^1 |\partial\xi|^2\cdot\rho\cdot p \geqslant \varepsilon\cdot\|\partial\xi\|_2^2 =$$

$$= \frac{\varepsilon}{5}\cdot\|\partial\xi\|_2^2 + \frac{4\varepsilon}{5}\cdot\|\partial\xi\|_2^2 \geqslant \frac{4\varepsilon}{5}\cdot\|\xi\|_2^2 + \frac{4\varepsilon}{5}\cdot\|\partial\xi\|_2^2 = \frac{4\varepsilon}{5}\cdot\|\xi\|_{2,(1)}^2$$

par l'inégalité de Poincaré.

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lax-Milgram 2.4 à la forme hermitienne $\mathfrak{s}$. Nous avons donc prouver :

THEOREME (Conditions aux limites homogènes)

Etant donné des fonctions ρ,p,q,g telles que $\rho\cdot p \in \mathcal{AC}([0,1])$, $\rho\cdot p > 0$ sur $[0,1]$, $\partial(\rho\cdot p) \in \mathbf{L}^\infty(]0,1[)$ et $\rho\cdot q,\rho\cdot g \in \mathbf{L}_+^\infty(]0,1[)$, il existe une unique solution $\theta \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$ de

$$\int_0^1 q\cdot\overline{\gamma}\cdot\theta\cdot\rho + \int_0^1 p\cdot\overline{\partial\gamma}\cdot\partial\theta\cdot\rho = \int_0^1 \overline{\gamma}\cdot g\cdot\rho \quad \textit{pour tout } \gamma\in\mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$$

et elle s'obtient en minimisant

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(|\gamma|^2\cdot\rho\cdot q + |\partial\gamma|^2\cdot\rho\cdot p\right) - \operatorname{Re}\int_0^1 \overline{\gamma}\cdot\rho\cdot g$$

sur $\mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$. On $\theta\in\mathcal{H}^{(2)}(]0,1[)$ et c'est une solution semi-classique de $(*)$.

Si en plus $\rho\cdot p\in\mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ et $\rho\cdot q,\rho\cdot g\in\mathcal{C}([0,1])$, alors $\theta\in\mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ et c'est une solution classique de $(*)$.

DEFINITION 5 Considérons maintenant le *problème aux limites inhomogènes* suivant :

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\partial(\rho\cdot p\cdot\partial f) + q\cdot f = g \quad \text{sur }]0,1[\quad \text{et} \quad f(0)=\alpha \quad , \quad f(1)=\beta \qquad (\circledast)$$

pour $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$.

On dit que c'est le *problème de Dirichlet inhomogène* .

Dans $\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)$ on considère le sous-espace affine

$$\mathcal{G} := \left\{\gamma\in\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)\ \middle|\ \gamma(0)=\alpha\ ,\ \gamma(1)=\beta\right\} \ ,$$

qui est évidemment un ensemble convexe fermé.

Avec les hypothèses correspondantes, si $f\in\mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ est une solution classique de $(\circledast)$, donc $\rho\cdot g\in\mathcal{C}([0,1])$, ou plus généralement si $\theta\in\mathcal{H}^2(]0,1[)$ est solution semi-classique de $(\circledast)$ dans $\mathbf{L}^2(]0,1[)$, donc $\rho\cdot g\in\mathbf{L}^2(]0,1[)$, en intégrant par parties il vient

$$\int_0^1 \overline{(\theta-\gamma)}\cdot\rho\cdot q\cdot\theta + \int_0^1 \overline{\partial(\theta-\gamma)}\cdot\partial\theta\cdot\rho\cdot p =$$

$$= \int_0^1 \overline{(\theta-\gamma)}\cdot\theta\cdot\rho\cdot q + \left[\overline{(\theta-\gamma)}\cdot\partial\theta\cdot\rho\cdot p\right]_0^1 - \int_0^1 \overline{(\theta-\gamma)}\cdot\partial(\rho\cdot p\cdot\partial\theta) =$$

$$= \int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot (\rho \cdot q \cdot \theta - \partial (\rho \cdot p \cdot \partial\theta)) = \int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \rho \cdot g \ ,$$

donc en particulier

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \theta \cdot \rho \cdot q + \int_0^1 \overline{\partial (\theta - \gamma)} \cdot \partial\theta \cdot \rho \cdot p\right) \geqslant \operatorname{Re} \int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \rho \cdot g \ .$$

Ceci nous conduit à utiliser le théorème de Stampacchia :

THEOREME (Conditions aux limites inhomogènes)

Etant donné des fonctions ρ, p, q telles que $\rho \cdot p \in \mathcal{AC}([0,1])$, $\rho \cdot p > 0$ sur $[0,1]$, $\partial (\rho \cdot p) \in \mathbf{L}^\infty(]0,1[)$, $\rho \cdot q \in \mathbf{L}^\infty_+(]0,1[)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution $\theta \in \mathcal{G}$ de

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \theta \cdot \rho \cdot q + \int_0^1 \overline{\partial (\theta - \gamma)} \cdot \partial\theta \cdot \rho \cdot p\right) \geqslant \operatorname{Re} \int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \rho \cdot g \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \qquad (\circledast\circledast)$$

et elle s'obtient en minimisant

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(|\gamma|^2 \cdot \rho \cdot q + |\partial\gamma|^2 \cdot \rho \cdot p\right) - \operatorname{Re} \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot g$$

sur $\mathcal{G}$. On a $\theta \in \mathcal{H}^{(2)}(]0,1[)$ et c'est une solution semi-classique de $(\circledast)$

Si en plus $\rho \cdot p \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ et $\rho \cdot q, \rho \cdot g \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $\theta \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ et c'est une solution classique de $(\circledast)$.

Comme dans l'exemple précédent il suffit d'utiliser la forme hermitienne coercitive

$$\mathfrak{s} : (\gamma, \xi) \longmapsto \int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \xi \cdot \rho \cdot q + \int_0^1 \overline{\partial (\theta - \gamma)} \cdot \partial\xi \cdot \rho \cdot p : \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[) \times \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[) \longrightarrow \mathbb{K} \ ,$$

d'où la première partie. En posant $\gamma := \theta \pm \eta$ où $\eta \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$ dans $(\circledast\circledast)$, il vient

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^1 \overline{\eta} \cdot \xi \cdot \rho \cdot q + \int_0^1 \overline{\partial\eta} \cdot \partial\xi \cdot \rho \cdot p\right) = \operatorname{Re} \int_0^1 \overline{\eta} \cdot \rho \cdot g \ .$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en remplaçant η par $i \cdot \eta$ on obtient l'égalité des parties imaginaires. Les dernières assertions se montrent alors comme ci-dessus. □

REMARQUE Il est possible de ramener le problème aux limites inhomogènes ci-dessus à un problème aux limites homogènes, ce qui permet de le résoudre seulement à l'aide du théorème de Lax-Milgram. En effet il existe une fonction $\chi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ telles que $\chi(0) = \alpha$ et $\chi(1) = \beta$ et en faisant le changement de fonctions inconnue $\eta = \theta - \chi$, on voit que θ est solution de $(\circledast)$ si, et seulement si, η est solution de $(*)$. Ceci n'est malheureusement plus possible en dimension supérieure sans hypothèses restrictives sur la régularité du bord ou sur la fonction définie sur ce bord.