Kapitel 1

REELLE UND KOMPLEXE ZAHLEN

Fassung vom 27. Mai 2005

1.1 Die ersten Zahlenmengen

Die natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}^* := \{1, 2, \ldots\}$$

Mit Hilfe der axiomatischen Mengelehre kann man die natürlichen Zahlen folgendermaßen definieren : $\mathbb{N}$ ist die kleinste Menge X mit folgender Eigenschaft :

$$\emptyset \in X \quad \text{und} \quad \text{für alle } x \in X \text{ ist } x \cup \{x\} \in X \ .$$

Das Axiom einer unendlichen Menge sichert die Existenz einer solchen Menge. Man definiert

$$0 := \emptyset$$

$$1 := 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = \{0\} = \{\emptyset\}$$

$$2 := 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 := 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

und ist $n \in \mathbb{N}$, so definiert man

$$n + 1 := n \cup \{n\} \ .$$

Dies ist eine rekursive Definition und wie das Induktionsprinzip (siehe 1.3) Bestandteil der Konstruktion von $\mathbb{N}$.

Man kann also schreiben

$$n = \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

Die Addition und die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ werden auch rekursiv definiert : für alle $n \in \mathbb{N}$ seien

$$n + 0 := n \quad \text{und} \quad n + (k+1) := (n+k) + 1$$

und

$$n \cdot 0 := 0 \quad \text{und} \quad n \cdot (k+1) := n \cdot k + n \ .$$

Man kann dann zeigen :

SATZ *Die Operationen*

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : (k,l) \longmapsto k+l$$

und

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : (k,l) \longmapsto k \cdot l$$

sind assoziativ und kommutativ. Diese beiden Operationen sind durch das Distributivgesetz *verknüpft :*

$$\textit{für alle } k,l,m \in \mathbb{N} \textit{ gilt} \quad k \cdot (l+m) = k \cdot l + k \cdot m \ .$$

Die ganzen Zahlen

Für $a,b \in \mathbb{N}$ besitzt die Gleichung

$$a = x + b$$

nicht immer eine Lösung in $\mathbb{N}$. Sie besitzt eine Lösung x , falls man a durch b kürzen kann, d.h. wenn a größer oder gleich b ist. Man beachte, daß, falls x auch Lösung von

$$c = x + d \ ,$$

so folgt

$$c + b = (x+d) + b = (x+b) + d = a + d \ .$$

Umgekehrt gilt $a + d = c + b$, und ist x Lösung von $c = x + d$, so ergibt sich

$$a + d = (x+d) + b = (x+b) + d$$

und dann

$$a = x + b$$

durch kürzen mit d .

Im allgemeinen könnte man das Paar (a,b) als Ersatz für die fehlende Lösung betrachten, aber (a,b) und (c,d) sollten identifiziert werden, d.h. als äquivalent gelten und somit in die gleiche Äquivalenzklasse gehören, falls

$$a + d = c + b$$

gilt. Bezeichnet man mit Z diese Äquivalenzrelation, so definiert man

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} / Z := \{[(a,b)] \mid a,b \in \mathbb{N}\}$$

als die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. Z . Die Operationen $+$ und $\cdot$ kann man auf $\mathbb{Z}$ übertragen und für alle $a,b \in \mathbb{N}$ gilt

$$[(a,b)] = [(a,0)] + [(0,b)] \ .$$

Man kann dann beweisen :

SATZ *Die Operationen* $+$ *und* $\cdot$ *sind assoziativ und kommutativ,* $(\mathbb{N},+,\cdot)$ *ist mit*

$$(\{[(n,0)] \mid n \in \mathbb{N}\}, +, \cdot)$$

isomorph. Zusätzlich ist $(\mathbb{Z},+)$ *eine Gruppe mit neutralem Element* 0 *, und das Inverse von* $m = [(m,0)]$ *ist* $-m := [(0,m)]$ *, d.h. jedes Element* $z \in \mathbb{Z}$ *ist der Gestalt* $z = n + (-m) =: n - m$ *; insbesondere ist*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}^* = \{\pm n \mid n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Beide Operationen sind immer noch durch das Distributivgesetz verknüpft.

Die rationalen Zahlen

Für $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ besitzt die Gleichung

$$a = b \cdot x$$

nicht immer eine Lösung in $\mathbb{Z}$. Sie besitzt eine Lösung x , falls man a durch b teilen kann. Wie bei den ganzen Zahlen führt man eine Äquivalenzrelation Q ein : die Paare (a,b) und (c,d) heißen äquivalent falls $a \cdot d = c \cdot b$. Dann definiert man

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / Q$$

wiederum als die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. Q . Die Operationen $+$ und $\cdot$ kann man auf $\mathbb{Q}$ übertragen und für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$[(a,b)] = [(a,0)] \cdot [(0,b)] \ .$$

Man kann dann beweisen :

SATZ *Die Operationen* $+$ *und* $\cdot$ *sind assoziativ und kommutativ,* $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ *ist mit*

$$(\{[(m,0)] \mid m \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$$

isomorph. Zusätzlich ist $(\mathbb{Q},+)$ *eine Gruppe mit neutralem Element* 0 *, das Inverse von* $[(a,b)]$ *ist* $[(-a,-b)]$ *,* $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ *ist eine Gruppe mit neutralem Element* 1 *und das Inverse von* $m = [(m,1)]$ *ist* $\frac{1}{m} := [(1,m)]$ *, d.h.*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N}^* \right\} \ .$$

Beide Operationen sind immer noch durch das Distributivgesetz verknüpft.

1.2 Die reellen Zahlen

Die Gleichung

$$x^2 = 2$$

besitzt keine Lösung in $\mathbb{Q}$. Um eine Menge zu konstruieren, in der man diese Gleichung lösen kann, hat Dedekind folgender Begriff eingeführt :

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{Q}$ heißt *Dedekindscher Schnitt* , falls $\emptyset \neq D \neq \mathbb{Q}$ und

$$\text{für alle } x \in D \text{ und } y \in \mathbb{Q} \text{ mit } y \leqslant x \text{ gilt } y \in D \ ,$$

sowie

$$\text{für alle } x \in D \text{ existiert } y \in D \text{ mit } y > x \ .$$

Man setzt dann

$$\mathbb{R} := \{D \in \mathfrak{P}(\mathbb{Q}) \mid D \text{ ist ein Dedekindscher Schnitt}\} \ ,$$

und nennt diese Menge Zahlengerade oder die Menge der reellen Zahlen. Manchmal wird auch das Paar $\left(D, \complement D\right)$ Dedekindscher Schnitt genannt. Man beachte, daß $D < \complement D$ gilt, d.h. für alle $x \in D$ und $y \in \complement D$ ist $x < y$.

Z.B. wird der Dedekindscher Schnitt

$$\left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^2 < 2\right\}$$

die reelle Zahl $\sqrt{2}$ definieren.

Für jedes $q \in \mathbb{Q}$ ist

$$D_q := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$$

ein Dedekindscher Schnitt, und es ist möglich, assoziative und kommutative Operationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$ zu definieren, so daß

SATZ *Die Operationen $+$ und $\cdot$ sind assoziative und kommutative,* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *ist mit*

$$(\{\, D_q \mid q \in \mathbb{Q}\}\, , +, \cdot)$$

isomorph, und $(\mathbb{R}, +)$ *sowie* $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ *sind Gruppen mit neutralen Elementen* 0 *bzw.* 1 . *Die entsprechenden Inversen von* $x \in \mathbb{R}$ *bzw.* $x \in \mathbb{R}^*$ *werden mit* $-x$ *bzw.* $x^{-1} = \frac{1}{x}$ *bezeichnet. Beide Operationen sind immer noch durch das Distributivgesetz verknüpft.*

Zusammengefaßt ist $\mathbb{R}$ ein Körper :

	Addition
Assoziativität	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x+y)+z = x+(y+z)$
Kommutativität	$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x+y = y+x$
Neutrales Element	$\exists 0 \in \mathbb{R}$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $x+0 = x$
Inverses Element	$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists -x \in \mathbb{R}$ mit $x+(-x) = 0$
	Multiplikation
Assoziativität	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Kommutativität	$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$
Neutrales Element	$\exists 1 \in \mathbb{R}$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R}^*$ gilt $x \cdot 1 = x$
Inverses Element	$\forall x \in \mathbb{R}^*\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$
	und
Distributivität	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

BEMERKUNG 1 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $0 \cdot x = 0$.

In der Tat :

$$0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

und

$$0 = 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = \Big(0 \cdot x + 0 \cdot x\Big) + (-0 \cdot x) =$$

$$= 0 \cdot x + \Big(0 \cdot x + (-0 \cdot x)\Big) = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x \ .$$

$\square$

BEMERKUNG 2 Die neutralen Elemente und die Inversen sind eindeutig bestimmt.

Z.B. ist $0'$ auch neutral bzgl. der Addition, so gilt

$$0' \underset{0 \text{ neutral}}{=} 0' + 0 \underset{0' \text{ neutral}}{=} 0 \ .$$

Ist y ein anderes Inverselement von x bzgl. $+$, so folgt

$$y = y + 0 = y + \Big(x + (-x)\Big) = \Big(y + x\Big) + (-x) = 0 + (-x) = -x \ .$$

$\square$

BEMERKUNG 3 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$-x = (-1) \cdot x \quad , \quad -(-x) = x \quad \text{und} \quad (-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y) \ .$$

Denn

$$x + (-1) \cdot x = x \cdot (1 + (-1)) = x \cdot 0 = 0 \ ,$$

also $(-1) \cdot x = -x$ wegen der Eindeutigkeit des Inverselements. Daraus folgt

$$-(-x) = (-1) \cdot \Big((-1) \cdot x \Big) = \Big((-1) \cdot (-1) \Big) \cdot x = 1 \cdot x = x \ ,$$

$$(-x) \cdot y = \Big((-1) \cdot x \Big) \cdot y = (-1) \cdot (x \cdot y) = -(x \cdot y)$$

und ähnlich für die letzte Formel. □

BEMERKUNG 4 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{" } x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ "} \quad \Longleftrightarrow \quad x \cdot y = 0 \ .$$

Man sagt, daß $\mathbb{R}$ *nullteilerfrei* ist.

Die Implikation $\Longrightarrow$ ist in der Bemerkung 1 bewiesen. Umgekehrt ist $x \neq 0$, so folgt

$$y = 1 \cdot y = \left(x^{-1} \cdot x\right) \cdot y = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 = 0 \ .$$

□

Die komplexen Zahlen

Die Gleichung

$$x^2 = -1$$

hat keine Lösung in $\mathbb{R}$. Betrachtet man auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die komponentenweise Addition und die Multiplikation definiert durch

$$(x, y) \cdot (u, v) := (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u) \ ,$$

so ist $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist isomorph zu

$$(\{(x, 0) \ | \ x \in \mathbb{R}\}, +, \cdot) \ .$$

Das Element $i := (0, 1)$ erfüllt $i^2 = -1$, und identifiziert man x mit $(x, 0)$, so ist

$$(x, y) = x + i \cdot y \ .$$

Dieser neuen Körper wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet, d.h.

$$\mathbb{C} := \{x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{R}\} \ ,$$

wobei man mit den üblichen Rechenregeln rechnet unter Beachtung von

$$i^2 = -1 \ .$$

Z.B. ist $-x - i \cdot y$ das Inverse von $x + i \cdot y$ bzgl. $+$. Dasjenige bzgl. $\cdot$ ist

$$\frac{1}{x + i \cdot y} = \frac{x - i \cdot y}{(x + i \cdot y)(x - i \cdot y)} = \frac{x - i \cdot y}{x^2 - (i \cdot y)^2} = \frac{x - i \cdot y}{x^2 + y^2} \ .$$

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ schreibt man

$$z - w := z + (-w) \quad \text{und} \quad \frac{z}{w} := z \cdot w^{-1} \text{ falls } w \neq 0 \ .$$

Rekursiv definiert man für alle $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ die reelle Zahl z^k durch

$$z^0 := 1 \quad \text{und} \quad z^{k+1} := z \cdot z^k \ .$$

Falls $z \in \mathbb{C}^*$ definiert man für $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \mathbb{N}$

$$z^k := \left(z^{-k}\right)^{-1} \ .$$

Folgende Rechenregeln sind gültig : Für alle $z, w \in \mathbb{C}^*$ und $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt

$$z^k \cdot z^l = z^{k+l} \quad , \quad \left(z^k\right)^l = z^{k \cdot l}$$

und

$$z^k \cdot w^k = (z \cdot w)^k \ .$$

1.3 Das Induktionsprinzip

Ist $P(k)$ eine Eigenschaft, die von $k \in \mathbb{N}$ abhängt, so gilt $P(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, falls man folgendes beweisen kann :

Induktionsanfang (IA) Es gilt $P(0)$.
Induktionsschritt (IS) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$P(k) \text{ wahr} \quad \Longrightarrow \quad P(k+1) \text{ wahr,}$$

d.h. falls $P(k)$ wahr ist (dies nennt man die *Induktionsvoraussetzung (IV)*), so kann man beweisen, daß $P(k+1)$ wahr ist.

Ist $(z_j)_{j\in n} \subset \mathbb{C}$ eine endliche Folge, so definiert man rekursiv

$$\sum_{j\in 0} z_j := \sum_{j\in\emptyset} z_j := 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j\in n+1} z_j := \left(\sum_{j\in n} z_j\right) + z_n \ .$$

Beachten Sie, daß $(z_j)_{j\in 0}$ die leere Folge ist ! Will man diesen Kunstgriff nicht anwenden, kann man für endliche Folgen $(z_j)_{j=0,\ldots,n}$ definieren

$$\sum_{j=0}^{0} z_j := z_0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{n+1} z_j := \left(\sum_{j=0}^{n} z_j\right) + z_{n+1} \ .$$

Zur Veranschaulichung kann man schreiben

$$\sum_{j=0}^{n} z_j = z_0 + \ldots + z_n \ .$$

BEISPIEL 1 (Geometrische Summe) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus 1$ gilt

$$\sum_{j\in n} z^j = \sum_{j=0}^{n-1} z^j = \frac{1-z^n}{1-z} \ .$$

IA :

$$\sum_{j\in 0} z^j = 0 = \frac{1-z^0}{1-z} \ .$$

IS : Da $n+1 = \{0,\ldots,n\}$ folgt

$$\sum_{j\in n+1} z^j = \sum_{j\in n} z^j + z^n \underset{\mathrm{IV}}{=} \frac{1-z^n}{1-z} + z^n = \frac{1-z^n+z^n-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \ .$$

$\square$

BEISPIEL 2 Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \ .$$

IA :

$$\sum_{j=0}^{0} j = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} \ .$$

IS :

$$\sum_{j=0}^{n+1} j = \sum_{j=0}^{n} j + (n+1) \underset{\mathrm{IV}}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \ .$$

$\square$

Ist $(z_j)_{j \in n} \subset \mathbb{C}$ eine endliche Folge, so definiert man rekursiv

$$\prod_{j \in 0} z_j := \prod_{j \in \emptyset} z_j := 1 \quad \text{und} \quad \prod_{j \in n+1} z_j := \left(\prod_{j \in n} z_j \right) \cdot z_n$$

oder

$$\prod_{j=0}^{0} z_j := z_0 \quad \text{und} \quad \prod_{j=0}^{n+1} z_j := \left(\prod_{j=0}^{n} z_j \right) + z_{n+1} \ .$$

Zur Veranschaulichung kann man schreiben

$$\prod_{j=0}^{n} z_j = z_0 \cdot \ldots \cdot z_n \ .$$

Z.B. für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt

$$n! := \prod_{j=1}^{n} j = \prod_{j \in n} (j+1)$$

n-Fakultät. Es ist

$$0! = 1 \ .$$

DEFINITION Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ definiert man durch Induktion über n den *Binomial-Koeffizienten* $\binom{n}{k}$:

$$\binom{0}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{0}{k} := 0 \text{ für alle } k \geqslant 1 \ ,$$

und

$$\binom{n+1}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{n+1}{k} := \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \text{ für alle } k \geqslant 1 \ .$$

Diese Definition kann man im *Pascalschen Dreieck* darstellen :

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
6	1	6	15	20	15	6	1

LEMMA *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \textit{und} \quad \binom{n}{k} = 0 \textit{ für alle } k \in \mathbb{N} \textit{ mit } k > n \ ,$$

und für alle $k \leqslant n$ ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \ .$$

Dies ist leicht durch Induktion zu beweisen. □

SATZ *Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.*

IA : Die einzige Teilmenge von $\emptyset$ ist die leere Menge.

IS : Sei A eine $(n+1)$-elementige Menge. Da die einzige Teilmenge mit 0 Elementen $\emptyset$ ist, können wir annehmen, daß $k \geqslant 1$. Wähle $a \in A$. Ist X eine k-elementige Teilmenge von A , so ist entweder

$$X \subset A \smallsetminus \{a\}$$

oder

$$X = Y \cup \{a\} \ , \quad \text{wobei } Y \text{ eine } (k-1)\text{-elementige Teilmenge von } A \smallsetminus \{a\} \text{ ist.}$$

Nach IV gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten im ersten Fall und $\binom{n}{k-1}$ im zweiten. Daraus gibt es

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

k-elementige Teilmengen in A . □

BEISPIEL 3 (Binomische Formel) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot z^k \cdot w^{n-k} \ .$$

Insbesondere folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0 \ .$$

Ein Term der Gestalt $z^k \cdot w^{n-k}$ erscheint bei Anwendung des Distributivgesetzes genau $\binom{n}{k}$-mal. Die zwei Formeln sind dann einfach zu beweisen :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

und

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \ .$$

□

1.4 Die Ordnungsstruktur auf $\mathbb{R}$

Sei X eine Menge. Eine (binäre) *Relation* auf X ist gegeben durch eine Teilmenge R von $X \times X$. Man sagt, daß $x \in X$ mit $y \in X$ in Relation ist und schreibt xRy , falls

$$(x, y) \in R \ .$$

DEFINITION 1 Eine Relation R auf X heißt *Ordnungsrelation* , falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(a) *Transitivität*

$$x \ R \ y \text{ und } y \ R \ z \quad \Longrightarrow \quad x \ R \ z \ .$$

(b) *Antisymmetrie*

$$x \ R \ y \text{ und } y \ R \ x \quad \Longrightarrow \quad x = y \ .$$

(c) *Reflexivität*

$$x \ R \ x \ .$$

Eine Ordnungsrelation wird oft mit $\leqslant$ bezeichnet und für $x \leqslant y$ sagt man, daß x *kleiner oder gleich* y sei. Man schreibt auch $y \geqslant x$ und sagt, daß y *größer oder gleich* x sei. Man definiert $x < y$ durch $x \leqslant y$ und $x \neq y$ und sagt, daß x *(strikt) kleiner als* y ist. Schreibt man $y > x$, so sagt man, daß y *(strikt) größer als* x ist.

Eine Ordnungsrelation auf X heißt *total* , falls für alle $x, y \in X$ gilt

$$x \leqslant y \quad \text{oder} \quad y \leqslant x \ .$$

BEMERKUNG 1 Es wäre sprachlich einfacher für $x \leqslant y$ zu sagen, daß x kleiner als y sei, da die strikte Ungleichung $<$ selten benutzt wird !

Definiert man $k \leqslant l$ für $k, l \in \mathbb{Z}$, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $k + n = l$ gilt, so ist $\mathbb{Z}$ total geordnet. Diese totale Ordnung kann man auf $\mathbb{Q}$ fortsetzen durch

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{p}{q} \quad \text{für } m, p \in \mathbb{Z} \text{ und } n, q \in \mathbb{N}^*$$

falls

$$m \cdot q \leqslant n \cdot p$$

gilt. Sie ist weiter auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar durch

$$x \leqslant y \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}$$

falls $x = D$ und $y = E$ Dedekindsche Schnitte sind, so daß

$$D \subset E$$

gilt.

Man kann dann beweisen :

SATZ $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ *ist ein total geordneter Körper, d.h.* $(\mathbb{R},+,\cdot)$ *ist ein Körper,* $(\mathbb{R},\leqslant)$ *ist total geordnet und die Operationen* $+$ *und* $\cdot$ *sind verträglich mit der Ordnung* $\leqslant$ *, d.h. für alle* $x,y,z\in\mathbb{R}$ *gilt*

$$x\leqslant y \quad\Longrightarrow\quad x+z\leqslant y+z$$

und

$$\text{„}\, x\leqslant y \quad \textit{und} \quad z\geqslant 0 \,\text{''} \quad\Longrightarrow\quad z\cdot x\leqslant z\cdot y \ .$$

BEMERKUNG 2 Es gilt genau dann $x\leqslant y$, falls $y-x\geqslant 0$.

Aus $x\leqslant y$ folgt

$$0=x+(-x)\leqslant y+(-x)=y-x$$

und umgekehrt folgt aus $y-x\geqslant 0$

$$y=(y-x)+x\geqslant 0+x=x \ .$$

□

BEMERKUNG 3 Es gilt

$$\text{„}\, x<y \quad \text{und} \quad z>0 \,\text{''} \quad\Longrightarrow\quad z\cdot x<z\cdot y \ .$$

Es ist $z\cdot x\leqslant z\cdot y$, aber $z\cdot x\neq z\cdot y$, sonst hätte man $x=y$. Also gilt $z\cdot x<z\cdot y$. □

BEMERKUNG 4 Es gilt

$$\text{„}\, x\leqslant y \quad \text{und} \quad z\leqslant 0 \,\text{''} \quad\Longrightarrow\quad z\cdot x\geqslant z\cdot y \ .$$

Es ist $-z=0-z\geqslant 0$, also

$$-z\cdot x=(-z)\cdot x\leqslant(-z)\cdot y=-z\cdot y$$

und somit

$$z\cdot y=(z\cdot y+z\cdot x)-z\cdot x\leqslant(z\cdot y+z\cdot x)-z\cdot y=z\cdot x \ .$$

□

BEMERKUNG 5 Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt $x^2\geqslant 0$.

In der Tat gilt $x\geqslant 0$ oder $x\leqslant 0$. Man folgert dann in beiden Fällen

$$x^2=x\cdot x\geqslant x\cdot 0=0 \ .$$

□

BEMERKUNG 6 Es gibt keine total geordnete Körperstruktur auf $\mathbb{C}$, die die Ordnung von $\mathbb{R}$ fortsetzt.

Gäbe es eine solche Struktur, so könnte man die gleichen Beweise wie oben durchführen und man hätte

$$-1 = i^2 \geqslant 0 \ ,$$

also ein Widerspruch. □

BEMERKUNG 7 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{„} \ x, y \geqslant 0 \quad \text{und} \quad x^2 \leqslant y^2 \ \text{"} \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant y \ .$$

Wäre $x > y$, so würde folgen

$$x^2 = x \cdot x \geqslant x \cdot y \geqslant y^2 \ ;$$

aber aus $x \cdot x = x \cdot y$ ergibt sich $x = y$, da $x \neq 0$, also $x^2 > y^2$, und dies ist ein Widerspruch. □

Die Bernoulli-Ungleichung

SATZ *Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geqslant -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + n \cdot x \ .$$

IA :

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x \ .$$

IS :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n \underset{IV \text{ und } 1+x \geqslant 0}{\geqslant} (1+x) \cdot (1 + n \cdot x) =$$

$$= 1 + n \cdot x + x + n \cdot x^2 \geqslant 1 + (n+1) \cdot x \ .$$

□

Die Intervallen in $\mathbb{R}$

DEFINITION 2 $J \subset \mathbb{R}$ heißt ein *Intervall* , wenn für alle $x, y \in J$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $x \leqslant z \leqslant y$ folgt $z \in J$.

BEISPIEL 1 Beschränkte Intervalle : für alle $a, b \in \mathbb{R}$ sei

abgeschlossenes Intervall

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

halboffenes Intervall

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\} \quad \text{oder} \quad]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$$

offenes Intervall

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \ .$$

Diese Intervalle sind immer leer , falls $b < a$. Falls $a = b$, so ist $[a, b] = \{a\} = \{b\}$ und

$$[a, b[\, = \,]a, b] = \,]a, b[\, = \emptyset \ .$$

BEISPIEL 2 Unbeschränkte Intervalle : für alle $a, b \in \mathbb{R}$ sei

halboffenes (sogar abgeschlossenes) Intervall

$$[a, \infty[\, := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\} \quad \text{oder} \quad]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$$

offenes Intervall

$$]a, \infty[\, := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \quad , \quad]-\infty, b[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \quad \text{oder} \quad]-\infty, \infty[\, = \mathbb{R} \ .$$

BEMERKUNG Es gibt kein anderen Intervall : Ist J ein Intervall, so ist J eines der obigen abgeschlossenen, halboffenen oder offenen Intervall mit $a := \inf J \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b := \sup J \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, je nach dem ob $\inf J, \sup J \in J$ gilt.

DEFINITION 3 Man bezeichnet :

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} = [0, \infty[$$

$$\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \,]0, \infty[$$

Allgemein ist $X \subset \mathbb{R}$, so schreibt man

$$X_+ := \{x \in X \mid x \geqslant 0\} \ .$$

Der Absolut-Betrag

DEFINITION 4 Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$|x| := \begin{cases} x & \quad x \geqslant 0 \\ & \text{falls} \\ -x & \quad x < 0 \end{cases}$$

der *(Absolut-)Betrag* von x .

Es gilt also immer

$$\pm x \leqslant |x| \quad \text{und} \quad |x| = \sqrt{x^2} \ .$$

DEFINITION 5 Für $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ sei

$$\overline{z} := x - i \cdot y$$

die *Komplexkonjugierte* von z und

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

der *(Absolut-)Betrag* von z .

Man schreibt auch $x := \operatorname{Re} z$ und $y := \operatorname{Im} z$.

$|z|$ ist der euklidischen Abstand von z zu 0 . Diese Definition stimmt für $z \in \mathbb{R}$ mit der vorigen überein.

SATZ *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} \cdot (z + \overline{z}) \quad , \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} \cdot (z - \overline{z}) \ ,$$

$$|\operatorname{Re} z| , |\operatorname{Im} z| \leqslant |z| \ ,$$

$$\overline{\overline{z}} = z \quad , \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad , \quad |\overline{z}| = |z| \ ,$$

$$|z|^2 = \overline{z} \cdot z \quad , \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

und

(Dreiecksungleichung)

$$|z + w| \leqslant |z| + |w|$$

(Vierecksungleichung)

$$\Big| |z| - |w| \Big| \leqslant |z - w| \ .$$

Die ersten Gleichungen sind trivial. Es ist

$$\overline{z} \cdot z = (x - i \cdot y) \cdot (x + i \cdot y) = x^2 - (i \cdot y)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

und

$$|z \cdot w|^2 = \overline{z \cdot w} \cdot z \cdot w = \overline{z} \cdot z \cdot \overline{w} \cdot w = |z|^2 \cdot |w|^2 \ ,$$

also $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ aus der Bermerkung 6.

Für die Dreiecksungleichung rechnet man

$$|z + w|^2 = \overline{(z + w)} \cdot (z + w) = (\overline{z} + \overline{w}) \cdot (z + w) =$$

$$= \overline{z} \cdot z + \overline{z} \cdot w + \overline{w} \cdot z + \overline{w} \cdot w = \overline{z} \cdot z + \overline{z} \cdot w + \overline{\overline{z} \cdot w} + \overline{w} \cdot w =$$

$$= |z|^2 + 2 \operatorname{Re} (\overline{z} \cdot w) + |w|^2 \leqslant |z|^2 + 2 |\overline{z} \cdot w| + |w|^2 =$$

$$= |z|^2 + 2 |z| \cdot |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \ ,$$

also $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ mit Hilfe der Bemerkung 6.

Für die Vierecksungleichung folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|z| = |z - w + w| \leqslant |z - w| + |w| \ ,$$

also

$$|z| - |w| \leqslant |z - w| \ .$$

Durch Symmetrie gilt auch

$$- (|z| - |w|) = |w| - |z| \leqslant |w - z| = |z - w|$$

und somit

$$\pm\left(|z|-|w|\right)\leqslant|z-w| \quad \text{, d.h.} \quad \Big||z|-|w|\Big|\leqslant|z-w| \ .$$

$\square$

DEFINITION 6 Das *Signum* einer komplexen Zahl $z\in\mathbb{C}$ ist

$$\operatorname{signum} z := \begin{cases} \frac{z}{|z|} & \\ & \text{falls} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} z\neq 0 \\ \\ z=0 \end{matrix} \ .$$

Es gilt immer

$$z=|z|\cdot\operatorname{signum} z \ .$$

1.5 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

DEFINITION 1 Seien $A \subset \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$. Man sagt, daß m eine *obere Schranke* von A ist, falls

$$\text{für alle } a \in \mathbb{R} \text{ gilt " } a \in A \Longrightarrow m \geqslant a \text{ "}$$

A heißt *nach oben beschränkt* , falls A eine obere Schranke besitzt. Man sagt, daß m das *kleinste Element* oder *Minimum* von A ist, wenn $m \in A$ und $m \leqslant a$ für alle $a \in A$ gilt.

Ein $s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* von A , falls s die kleinste obere Schranke von A ist, d.h. falls gilt:

(a) s ist eine obere Schranke.

(b) Ist m eine obere Schranke von A , so gilt $m \geqslant s$.

Man definiert die Begriffe *untere Schranke* , *nach unten beschränkt* , *größtes Element* , *Maximum* und *Infimum* , indem man die Ungleichungen umdreht.

Das Maximum, das Minimum, das Supremum und das Infimum von A werden mit

$$\max A \quad \text{bzw.} \quad \min A \quad , \quad \sup A \quad , \quad \inf A \ ,$$

falls sie existieren, bezeichnet.

Man sagt, daß A *beschränkt* ist, wenn A sowohl nach oben wie nach unten beschränkt ist.

Ist $\sup A \in A$ bzw. $\inf A \in A$, so ist

$$\sup A = \max A \quad \text{und} \quad \inf A = \min A \ .$$

Ist $(a_j)_{j\in J}$ eine Familie in $\mathbb{R}$, so setzt man

$$\sup\nolimits_{j\in J} a_j := \sup \{a_j \mid j \in J\} \quad \text{bzw.} \quad \inf\nolimits_{j\in J} a_j := \inf \{a_j \mid j \in J\} \ ,$$

wenn es existiert.

Schreibt man einer der Symbole $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ oder $\min A$, so nehmen wir an, ohne es zu sagen, daß diese Elemente existieren.

DEFINITION 2 Zur Vereinfachung schreibt man $\max(x, y)$ und $\min(x, y)$ anstelle von $\max\{x, y\}$ und $\min\{x, y\}$.

BEISPIEL 1 Es gilt

$$\sup [0, 1[= 1 \ ,$$

aber $[0, 1[$ hat kein Maximum.

Alle Zahlen $m \in [1, \infty[$ sind offensichtlich obere Schranken von $[0, 1[$. Ist m ein obere Schranke von $[0, 1[$, so gilt $m \geqslant 1$. In der Tat falls $m < 1$, so hätte man

$$m < \frac{m+1}{2} < 1 \ ,$$

also $\frac{m+1}{2} \in [0,1[$ und m wäre keine obere Schranke von $[0,1[$. Damit ist 1 die kleinste obere Schranke, d.h. $\sup [0,1[= 1$, aber $1 \notin [0,1[$, d.h. 1 ist kein Maximum. □

HAUPTSATZ

(i) ***Approximationseigenschaft*** *Seien $A \subset \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$. Genau dann ist s das Supremum von A , wenn s eine obere Schranke von A ist und wenn*

(a) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < s$ ein $a \in A$ mit $a > x$ existiert
oder
(b) für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $a > s - \varepsilon$ existiert.

(ii) ***Satz von Dedekind*** *Sei A eine nicht-leere und nach oben beschränkte Teilmenge in $\mathbb{R}$. Dann existiert das Supremum* $\sup A$ *von A .*

Beweis von (i). Die Aussagen (a) und (b) sind trivialerweise äquivalent, da für Zahl $x < s$ der Gestalt

$$x = s - (s - x) = s - \varepsilon \ ,$$

wobei $\varepsilon := s - x$, und umgekehrt.

($\Rightarrow$) Ist s das Supremum von A , so ist s eine obere Schranke und $x < s$ ist keine obere Schranke, da s die kleinste ist. Dann existiert aber ein $a \in A$ mit $a > x$ durch Kontraposition.

($\Leftarrow$) Erfüllt x die Bedingung (a), so ist x wiederum keine obere Schranke, also ist s die kleinste.

Beweis von (ii). Ist $A = (D_j)_{j \in J}$, wobei jedes D_j ein Dedekindscher Schnitt ist, und M ein Dedekindscher Schnitt mit $D_j \leqslant M$, d.h. $D_j \subset M$ für alle $j \in J$, so ist

$$D := \bigcup_{j \in J} D_j$$

trivialerweise $\neq \emptyset$ und $D \subset M \neq \mathbb{Q}$. Somit ist D ein Dedekindscher Schnitt und man verifiziert leicht, daß $D = \sup A$ gilt. □

KOROLLAR (Archimedes-Prinzip) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$n \cdot y > x \ .$$

Wäre diese Aussage falsch, so hätte man $n \leqslant \frac{x}{y}$, d.h. $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Sei $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Nach dem Hauptsatz existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so daß gilt

$$s - 1 < m \leqslant s \ .$$

Es folgt aber $s < m + 1 \in \mathbb{N}$. Dies widerspricht die Supremumseigenschaft von s . □

BEISPIEL 2 Ist $A \subset \mathbb{Z}$ nichtleer und nach oben beschränkt, so existiert $\max A$.

Nach dem Satz von Dedekind existiert $\sup A \in \mathbb{R}$ und nach der Approximationseigenschaft existiert $n \in A$ mit $\sup A - 1 < n$. Für alle $a \in A$ gilt damit $n + 1 > a$, also $n \geqslant a$, d.h. $n = \max A$. □

Claude Portenier
Wolfgang Gromes

BEISPIEL 3 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, existiert $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $x < \frac{m}{n} < y$.

Nach Archimedes existiert $n \in \mathbb{N}$, so daß $n \cdot (y - x) > 1$ und sei

$$m := \max \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n \cdot x + 1\} \ .$$

Es folgt $n \cdot x + 1 < n \cdot y$ und $m \leqslant n \cdot x + 1$, also $m < n \cdot y$ oder $\frac{m}{n} < y$. Weiter gilt $m > n \cdot x$, d.h. $x < \frac{m}{n}$, da sonst aus $m \leqslant n \cdot x$ würde folgen $m + 1 \leqslant n \cdot x + 1$, ein Widerspruch zur Definition von m . □

Man sagt für die letzte Aussage, daß $\mathbb{Q}$ *dicht* in $\mathbb{R}$ ist.

DEFINITION 3 Sei

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ ,$$

versehen mit der totalen Ordnung definiert durch die von $\mathbb{R}$ und

$$-\infty < x < \infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \ .$$

Betrachtet man $\mathbb{R}$ als die Menge der Dedekindschen Schnitte, so ist $-\infty := \emptyset$ und $\infty := \mathbb{Q}$ (vgl. 1.2).

Ist A nach oben unbeschränkt bzw. nach unten unbeschränkt, so gilt

$$\sup A = \infty \quad \text{bzw.} \quad \inf A = -\infty \ .$$

Ferner ist

$$\sup \emptyset = -\infty \ ,$$

da alle Zahlen oberen Schranke von $\emptyset$ sind ubnd die kleinste $-\infty$ ist, sowie

$$\inf \emptyset = \infty \ .$$

1.6 Darstellung reeller Zahlen

Die natürlichen Zahlen werden üblicherweise in der Dezimaldarstellung geschrieben, z.B.

$$4711 = (4711)_{10} = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 \ .$$

Allgemein gilt

SATZ *Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geqslant 2$ eine Basiszahl. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $d_j \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ für $j = 0, \ldots, m$, so daß*

$$n = \sum_{j=0}^{m} d_j \cdot b^j = d_m \cdot b^m + d_{m-1} \cdot b^{m-1} + \ldots + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0 =: (d_m d_{m-1} \ldots d_1 d_0)_b$$

und $d_m \neq 0$, falls $n \neq 0$.

DEFINITION 1 Man nennt $n = (d_m d_{m-1} \ldots d_1 d_0)_b$ die *b-adische Darstellung* von n .

Die Konstruktion wird folgendermaßen durchgeführt :

(a) Die Intervalle $\left[b^k, b^{k+1}\right[$ in $\mathbb{N}$ bilden für $k \in \mathbb{N}$ eine disjunkte Zerlegung von $[1, \infty[$. Daß für jedes $n \in n$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n < b^N$ existiert, folgt aus dem Archimedes-Prinzip und der Bernoulli-Ungleichung. Daraus folgt für $n \neq 0$ die Exitenz eines $m \in \mathbb{N}$, so daß

$$n \in \left[b^m, b^{m+1}\right[\quad \text{oder} \quad b^m \leqslant n < b^{m+1} \ .$$

(b) Division von n durch b^m mit Rest :

$$n = d_m \cdot b^m + r_{m-1} \ ,$$

wobei d_m maximal mit $r_{m-1} \geqslant 0$. Dann ist $d_m \geqslant 1$, da $n \geqslant b^m$ ist, und $r_{m-1} < b$, da d_m maximal ist. Also gilt

$$d_m \in \{1, \ldots, b-1\} \quad \text{und} \quad 0 \leqslant r_{m-1} < b^m \ .$$

Analog fährt man weiter fort

(c) Division von r_{m-1} durch b^{m-1} mit Rest :

$$r_{m-1} = d_{m-1} \cdot b^{m-1} + r_{m-2}$$

mit

$$d_{m-1} \in \{0, 1, \ldots, b-1\} \quad \text{und} \quad 0 \leqslant r_{m-2} < b^{m-1} \ .$$

und rekursiv weiter bis

(d)

$$r_0 = r_{m-m} < b^{m-(m-1)} = b^1 = b \ .$$

□

BEISPIEL 1 Seien $b = 7$ und $n = (79)_{10}$. Es gilt

$$(77)_{10} = (142)_7 \ .$$

In der Tat

$$7^2 = 49 < 77 < 343 = 7^3 \ ,$$

also $m = 2$ und

$$77 = 1 \cdot 7^2 + 30 \ .$$

Aber

$$30 = 4 \cdot 7^1 + 2 \quad \text{und} \quad 2 < 7 \ ,$$

d.h.

$$77 = 1 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 2 = (142)_7 \ .$$

Für $x \in \mathbb{R}_+$ benützt man das gleiche Prinzip. Zuerst existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n \leqslant x < n + 1$$

und man stellt $n = (d_m d_{m-1} \ldots d_1 d_0)_b$ wie oben dar. Danach geht man analog vor : sei also

$$x = n + r_{-1} \quad \text{und} \quad 0 \leqslant r_{-1} < 1 = b^0 \ ,$$

$$r_{-1} = d_{-1} \cdot b^{-1} + r_{-2} \quad , \quad d_{-1} \in \{0, \ldots, b-1\} \quad \text{und} \quad 0 \leqslant r_{-2} < b^{-1} \ ,$$

usw..., d.h.

HAUPTSATZ *Für $x \in \mathbb{R}_+$ existieren $m \in \mathbb{N}$ und für jedes $j = m, m-1, \ldots$ Zahlen $d_j \in \{0, \ldots, b-1\}$, so daß für alle $N \in -\mathbb{N}$ gilt*

$$x = \sum_{j=N}^{m} d_j \cdot b^j + r_{N-1} \quad \textit{und} \quad 0 \leqslant r_{N-1} < b^N \ .$$

DEFINITION 2 Man nennt

$$x := (d_m d_{m-1} \ldots d_1 d_0, d_{-1} \ldots d_N)_b + r_{N-1} = (d_m d_{m-1} \ldots d_1 d_0, d_{-1} \ldots d_N \ldots)_b$$

die *b-adische Darstellung* von x .

Man schreibt noch

$$-x = -\left(d_m d_{m-1} \ldots d_1 d_0, d_{-1} \ldots d_N \ldots\right)_b$$

um die negativen reellen Zahlen darzustellen.

BEISPIEL 2 Es gilt :

$$\sqrt{2} = 1.\,414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209\,698\,078\,569\,671\,875\,376\,9$$

und

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\,169\,399\,375\,1 \; .$$

Die b-adische Darstellung von Brüchen

Sei $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$. Durch Substraktion einer natürlichen Zahl können wir annehmen, daß $0 \leqslant \frac{m}{n} < 1$, d.h. $m < n$. Es ist

$$\frac{m}{n} = d_{-1} \cdot b^{-1} + r_{-2} \quad , \quad d_{-1} \in \{0, \ldots, b-1\} \quad \text{und} \quad 0 \leqslant r_{-2} < b^{-1} \; ,$$

also

$$b \cdot m = n \cdot d_{-1} + n \cdot b \cdot r_{-2} \; .$$

Sei $m_0 := m$. Da $b \cdot m, n \cdot d_{-1} \in \mathbb{N}$ folgt

$$m_1 := n \cdot b \cdot r_{-2} \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad m_1 < n \; ,$$

d.h.

$$b \cdot m_0 = n \cdot d_{-1} + m_1 \quad \text{und} \quad m_1 \in \{0, \ldots, n-1\} \; .$$

Analog gilt

$$r_{-2} = d_{-2} \cdot b^{-2} + r_{-3} \quad , \quad d_{-2} \in \{0, \ldots, b-1\} \quad \text{und} \quad 0 \leqslant r_{-3} < b^{-2} \; ,$$

also

$$b \cdot m_1 = n \cdot b^2 \cdot r_{-2} = n \cdot d_{-2} + n \cdot b^2 \cdot r_{-3} = n \cdot d_{-2} + m_2 \; ,$$

wobei

$$m_2 := n \cdot b^2 \cdot r_{-3} \in \{0, \ldots, n-1\} \; ,$$

usw..., d.h. es gibt für alle $k \in \mathbb{N}$ eindeutige Zerlegungen

$$b \cdot m_k = n \cdot d_{-k-1} + m_{k+1} \quad \text{mit } d_{-k-1} \in \{0, \ldots, b-1\} \text{ und } m_{k+1} \in \{0, \ldots, n-1\} \; .$$

Die $n+1$ Zahlen $m_k \in \{0, \ldots, n-1\}$ für $k = 1, \ldots, n+1$ können nicht alle verschieden sein, also existiert $k_0, p \in \mathbb{N}^*$ mit $k_0, k_0 + p \leqslant n+1$, so daß $m_{k_0} = m_{k_0+p}$, d.h.

$$n \cdot d_{-k_0-1} + m_{k_0+1} = b \cdot m_{k_0} = b \cdot m_{k_0+p} = n \cdot d_{-k_0-p-1} + m_{k_0+p+1} \; .$$

Wegen der Eindeutigkeit dieser Zerlegungen folgt zuerst

$$d_{-k_0-1} = d_{-k_0-p-1} \quad \text{und} \quad m_{k_0+1} = m_{k_0+p+1} \; ,$$

dann

$$n \cdot d_{-k_0-2} + m_{k_0+2} = b \cdot m_{k_0+1} = b \cdot m_{k_0+p+1} = n \cdot d_{-k_0-p-2} + m_{k_0+p+2} \; ,$$

also wiederum durch Eindeutigkeit

$$d_{-k_0-2} = d_{-k_0-p-2} \quad \text{und} \quad m_{k_0+2} = m_{k_0+p+2} \; ,$$

usw... Dies beweist :

SATZ *Die b-adische Darstellung von $\frac{m}{n}$ hat ab $-k_0 - 1$ Periode p .*

BEISPIEL 3 Wir bestimmen die 7-adische Darstellung von $\frac{1}{4}$. Es ist $n = 4$ und $m_0 = 1$. Es muß gelten

$$7 \cdot 1 = 7 \cdot m_0 = 4 \cdot d_{-1} + m_1 = 4 \cdot 1 + 3 \ ,$$

$$7 \cdot 3 = 7 \cdot m_1 = 4 \cdot d_{-2} + m_2 = 4 \cdot 5 + 1 \ ,$$

$$7 \cdot 1 = 4 \cdot 1 + 3 \ ,$$

usw..., d.h.

$$\frac{1}{4} = (0,\ 15\,15\ \ldots)_7 =: \left(0,\ \overline{15}\right)_7 \ .$$

BEISPIEL 4 Wir bestimmen die 2-adische Darstellung von $\frac{1}{6}$. Es ist $n = 6$ und $m_0 = 1$. Es muß gelten

$$2 \cdot 1 = 2 \cdot m_0 = 6 \cdot d_{-1} + m_1 = 6 \cdot 0 + 2 \ ,$$

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot m_1 = 6 \cdot d_{-2} + m_2 = 6 \cdot 0 + 4 \ ,$$

$$2 \cdot 4 = 2 \cdot m_2 = 6 \cdot d_{-3} + m_3 = 6 \cdot 1 + 2 \ ,$$

$$2 \cdot 2 = 6 \cdot 0 + 4 \ ,$$

usw..., d.h.

$$\frac{1}{6} = \left(0, 0\,\overline{01}\right)_2 \ .$$

Die wichtigen Basen im Computer sind

(a) $b = 2$ dyadischer System, Dualsystem, Binärsystem.

(b) $b = 16$ hexadezimal System.

Es gibt 10 Arten von Leuten :
diejenigen die das Dualsystem verstehen
und
diejenigen die es nicht verstehen.

Darstellung von Zahlen im Computer

Elektronische Speicherelemente können i.a. zwei Zustände speichern und zurückgeben : Bit (binary digit). Diese werden in adressierbaren "Speicherwörter" zusammengefasst, etwa von der Länge 8 , 16 , 32 oder 64 Bits. Zahlen werden dann im Binärsystem dargestellt. Es gibt zwei verschiedene Darstellungsmöglichkeiten :

Festpunktdarstellung (n_1, n_2) Bits

Z.B.

- Ganze Zahlen $n_2 = 0$.

• Kaufmännische Zahlen n_2 so zu wählen, daß 2 Dezimalstellen oder für Kurstransaktionen 4 Dezimalstellen darstellbar sind.

Der Wertebereich für ganze Zahlen bei einer Wortlänge n ist

$$0, 1, \ldots, 2^n - 1 = \underbrace{(1 \ldots 1)_2}_{\text{Länge } n}$$

oder

$$-2^{n-1}, \ldots, 0, \ldots, 2^{n-1} - 1 = \underbrace{(1 \ldots 1)_2}_{\text{Länge } n-1} \quad \text{und} \quad 1 \text{ Bit für das Vorzeichen.}$$

Bei Addition großer Zahlen gibt möglicherweise Überschreitungen dieser Grenzen : Überlauf, Fehlermeldungen.

Für die Lesbarkeit (Maschinensprach, Adressierung) ist oft die Angabe im Hexadezimalsystem gegeben. Man fasst je 4 Bits ($2^4 = 16$) zu einer Hex-Ziffer : 0 , 1 , $\ldots$, A , B , $\ldots$, F . So ist ein *Byte* , d.h. 8-Bit-Wort durch zwei Hex-Ziffer darstellbar, etwa

$$(01101110)_2 = 64 + 32 + 8 + 4 + 2 = (110)_{10} = 6 \cdot 16 + 14 = (6E)_{16} \ .$$

Gleitpunktdarstellung oder wissenschaftliche Darstellung

Bei gegebener Wortlänge sind nur endlich viele Zahlen darstellbar (Maschinenzahlen). Praktisch benötigt man auch nur eine bestimmte Genauigkeit. Die Zahlen danach sind unwichtig :

$$5,1 \text{ bzw. } 5,08 \text{ Mio. Arbeitslosen}$$

statt

$$5\,079\,239 \text{ Arbeitslosen.}$$

Man schreibt

$$x = M \cdot b^p \quad \text{mit } b^{-1} \leqslant |M| < 1 \text{ und } p \in \mathbb{Z} \ ;$$

M heißt die Mantisse, für $x \neq 0$ ist die erste Nachkommastelle $\neq 0$, und p der Exponent. Die Mantisse wird auf eine bestimmte Anzahl g von Dezimalstellen beschränkt.

BEISPIEL 5 Sei $b = 10$ und $g = 6$:

$$-5537 = -0,5537 \cdot 10^4$$

$$1 \text{ Lichjahr } = 9,4607 \cdot 10^{15} \,\text{m} = 0,94607 \cdot 10^{16} \,\text{m}$$

$$3,526759 \simeq 0,352676 \cdot 10^1$$

$$0,00013 = 0,13 \cdot 10^{-3}$$

Damit sind große Zahlen darstellbar, aber nicht mehr exakt : im zweiten Beispiel war eine Rundung nötig.

BEISPIEL 6 Bei einer Wortelänge $n = 32$, seien 20 Bits für die Mantisse M , 11 Bits für den Exponent p und 1 Bit für das Vorzeichen. Dann kann man den Bereich

$$-2048 = -2^{11}, \ldots, 2^{11} - 1 = 2047$$

mit einer Genauigkeit von 6 Dezimalstellen darstellen. Man beachte, daß

$$2^{10} = 1024 \simeq 10^3 \ ,$$

also $2^{20} \simeq 10^6$.

BEISPIEL 7 Umrechnung in $x = M \cdot 2^p$:

Man teile x fortlaufend oder multipliziere mit 2 bis das Ergebnis M

$$\frac{1}{2} \leqslant M < 1$$

erfüllt; ist P die Anzahl der nötigen Schritte, so ist $p = P$, falls man teilen muß, bzw. $p = -P$, falls man multiplizieren muß. Nun können M und p getrennt ins Binärsystem umgerechnet werden.

Rundungsfehler

Bei Rechenoperationen gibt es Rundungsfehler, insbesondere Verlust von Nachkommastellen bei z.B. Substraktion etwa gleich großer Zahlen :

$$0,32183 \cdot 10^{-4} - 0,32151 \cdot 10^{-4} = 0,32 \cdot 10^{-7} \ ;$$

die Rundungsfehler an 5-ter Stelle ist nun an 2-ter Stelle !

Die Lösung besteht in dem man intern mit doppelter Genauigkeit rechnet.

Dies ist aber nur sinnvoll wenn man wenig Rechnungen durchführt. Sonst sind Fehlerabschätzungen nötig und möglich (Numerik).

1.7 Abbildungen und Funktionen

DEFINITION 1 Seien X und Y Mengen. Eine *Abbildung* f von X nach Y ist durch eine Teilmenge $\mathrm{Gr}\, f \subset X \times Y$ charakterisiert, die folgende Eigenschaft besitzt :

$$\text{Für alle } x \in X \text{ gibt es genau ein } y \in Y \text{ mit } (x, y) \in \mathrm{Gr}\, f \ ,$$

gegeben.

Die Mengen X bzw. Y heißen der *Definitionsbereich* bzw. die *Zielmenge* von f .

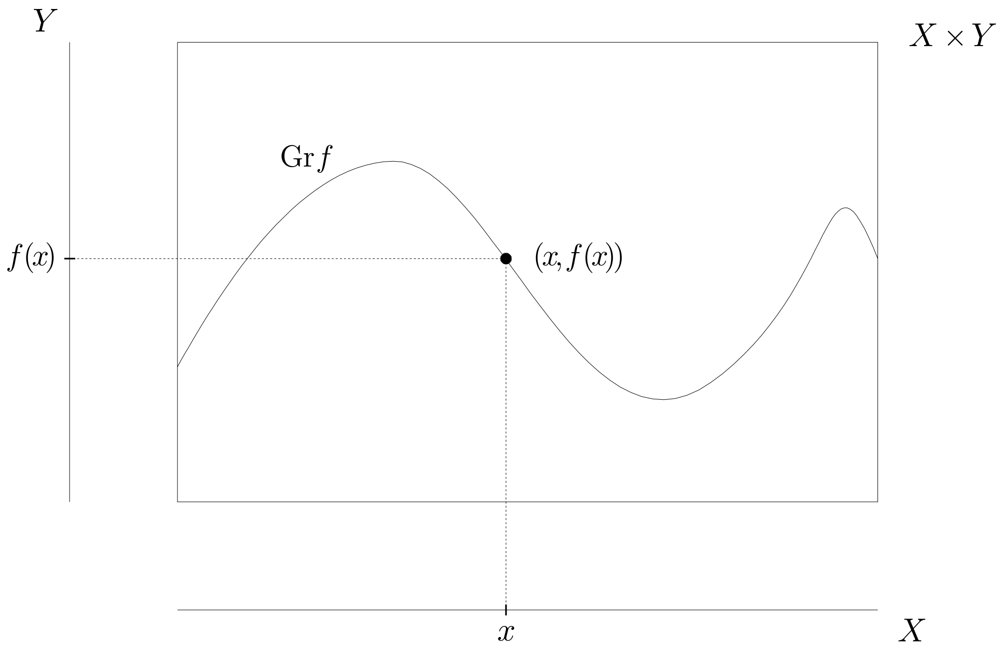
Für jedes $x \in X$ wird das einzige $y \in Y$ mit $(x, y) \in \mathrm{Gr}\, f$ durch $f(x)$ bezeichnet. Man schreibt auch

$$f : X \longrightarrow Y : x \longmapsto f(x) \ .$$

Eine Abbildung von einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) heißt *Funktion* .

Für alle $x \in X$ gilt

$$\{x\} \times Y \cap \mathrm{Gr}\, f = \{(x, f(x))\} \ .$$



Es ist

$$\mathrm{Gr}\, f = \{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \in \mathrm{Gr}\, f\} = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \ .$$

DEFINITION 2 Man sagt, daß

$$y = f(x)$$

die *Gleichung des Graphen* von f ist. Ist f eine Funktion, so spricht man von *Funktionsgleichung* .

Sei A eine Teilmenge von X , d.h. $A \subset X$. Man definiert

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ mit } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} \ ,$$

und nennt diese Menge das *Bild* von A unter f . Die Menge $f(X)$ nennt man auch das *Bild* von f .

Die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *surjektiv* , falls für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so daß $f(x) = y$. Sie heißt *injektiv* , falls für alle $u, v \in X$ mit $u \neq v$ gilt $f(u) \neq f(v)$. Sie heißt *bijektiv* , falls sie surjektiv und injektiv ist.

Für alle $x \in X$ gilt

$$f(\{x\}) = \{f(x)\}$$

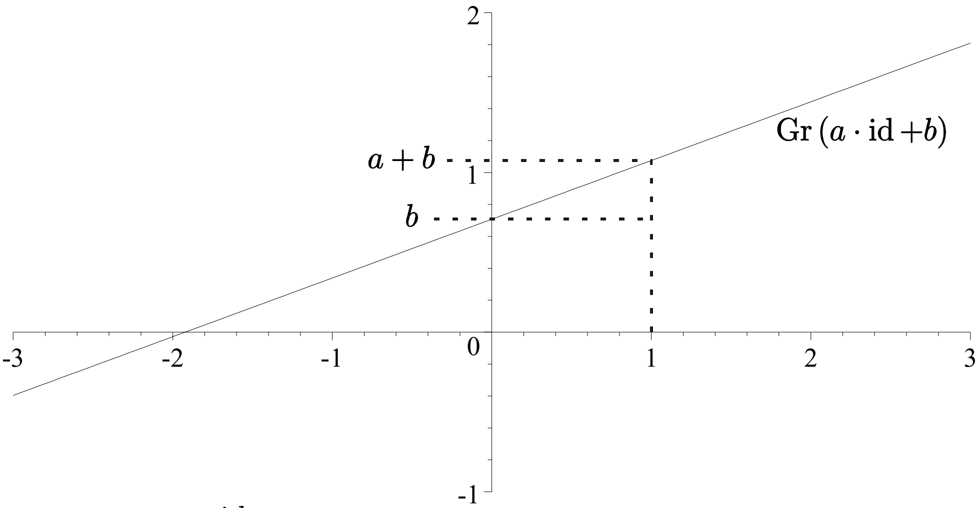
und f ist genau dann surjektiv, wenn $f(X) = Y$, d.h. wenn die Gleichung

$$f(x) = y \quad \text{für jedes } y \in Y$$

mindestens eine Lösung besitzt. Sie ist genau dann injektiv, wenn diese Gleichung höchstens eine Lösung besitzt, und sie ist genau dann bijektiv, wenn diese Gleichung genau eine Lösung besitzt.

BEISPIEL 1 Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die *affine Funktion*

$$a \cdot \mathrm{id} + b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto a \cdot x + b$$



$$\frac{\mathrm{id}}{e} + \sqrt{2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x}{e} + \sqrt{2}$$

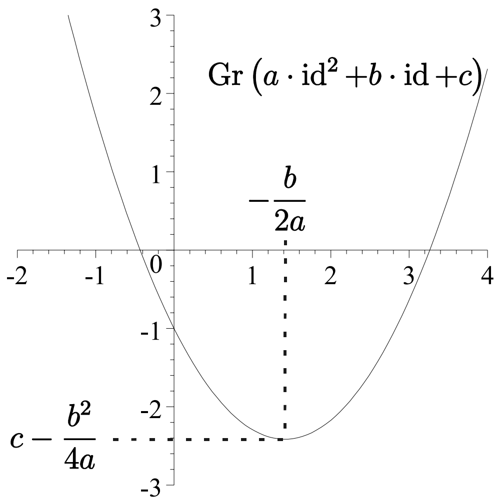
ist genau dann bijektiv, wenn $a \neq 0$: In der Tat ist die Gleichung

$$a \cdot x + b = y \quad \text{für jedes } y \in \mathbb{R}$$

genau dann lösbar, wenn $a \neq 0$. Die Lösung ist dann $x = \frac{y-b}{a}$.

BEISPIEL 2 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Die *quadratische Funktion*

$$a \cdot \mathrm{id}^2 + b \cdot \mathrm{id} + c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{id}^2-2\cdot\mathrm{id}-1:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^2-2\cdot x-1$$

ist nicht surjektiv und auch nicht injektiv. Die Gleichung

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=y\quad\text{für } y\in\mathbb{R}$$

hat im Falle $a>0$ für $y\in\mathbb{R}$

$$\text{zwei Lösungen, falls } y>c-\frac{b^2}{4a}\ ,$$

$$\text{eine Lösung, falls } y=c-\frac{b^2}{4a}$$

und

$$\text{keine Lösung, falls } y<c-\frac{b^2}{4a}\ .$$

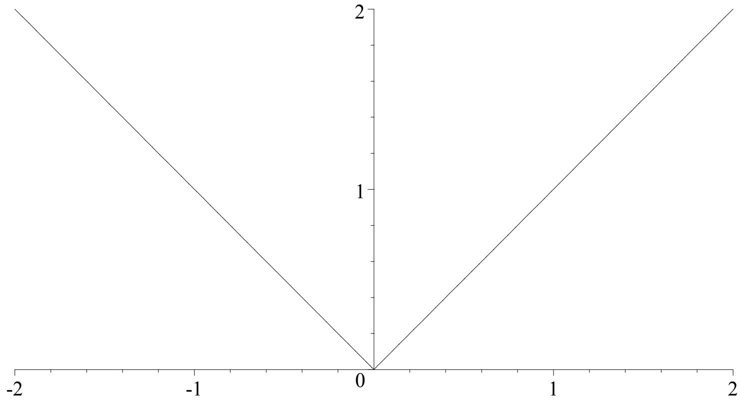
Die Lösungen sind durch

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}+\frac{y}{a}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a\cdot(c-y)}}{2a}$$

gegeben.

BEISPIEL 3 Die *Betragsfunktion*

$$|\mathrm{id}|:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\longmapsto|x|\ .$$



Sie ist nicht injektiv :

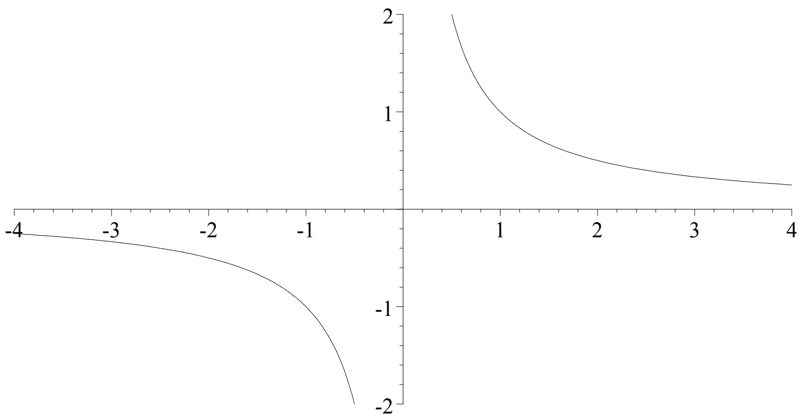
$$|x| = |-x| = x \quad \text{und} \quad x \neq -x \text{ falls } x \neq 0 \ .$$

Sie ist nicht surjektiv :

$$|\mathbb{R}| = \mathbb{R}_+ = [0, \infty[\neq \mathbb{R} \ .$$

BEISPIEL 4 Die *Hyperbelfunktion*

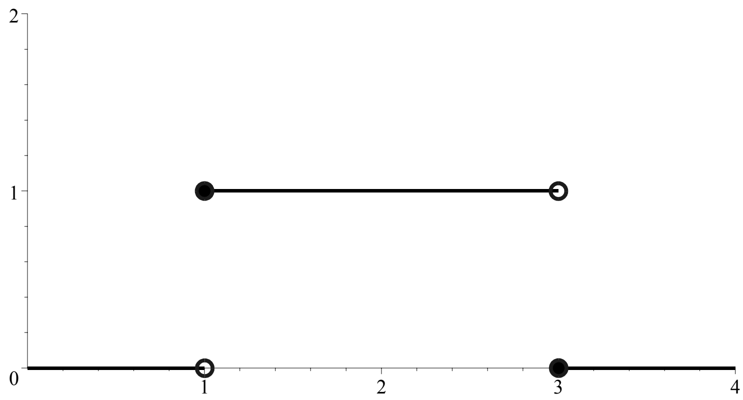
$$\frac{1}{\mathrm{id}} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x} \ .$$



BEISPIEL 5 Die *charakteristische Funktion* 1_A von $A \subset D \subset \mathbb{R}$:

$$1_A : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \\ & \text{falls} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} x \in A \\ \\ x \notin A \end{matrix} \ .$$

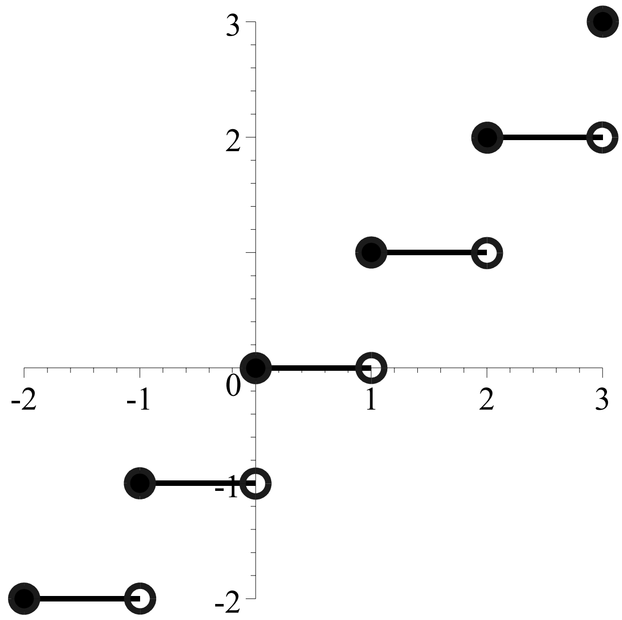
Es gilt $1_\emptyset = 0$, $1_D = 1$ und $1_A(D) = \{0, 1\}$, falls $\emptyset \neq A \neq D$.



$$1_{[1,3[} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \\ & \text{falls} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} 1 \leqslant x < 3 \\ \\ x < 1 \text{ oder } x \geqslant 3 \end{matrix}$$

BEISPIEL 6 Die *(untere) Gauß-Klammer*

$$\lfloor \mathrm{id} \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \lfloor x \rfloor := \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$$



SATZ *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ Funktionen und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann sind*

(i)

$$\alpha \cdot f : D \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto \alpha \cdot f(x)$$

(ii)

$$f + g : D \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto f(x) + g(x)$$

(iii)

$$f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto f(x) \cdot g(x)$$

(iv)

$$\frac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{, falls } g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D$$

(v)

$$|f| : D \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto |f(x)|$$

(vi) Für $C \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß $h(C) \subset D$,

$$f \circ h : C \longrightarrow \mathbb{K} : u \longmapsto f(h(u))$$

und, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

(vii)

$$\max(f, g) : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \max(f(x), g(x))$$

(viii)

$$\min(f, g) : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \min(f(x), g(x))$$

wieder Funktionen.

BEMERKUNG 1 Durch (i) und (ii) wird die Menge

$$\{f : D \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist Funktion}\}$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

BEMERKUNG 2 Es gilt

$$\max(f, g) = \frac{1}{2} \cdot (f + g + |f - g|)$$

und

$$\min(f, g) = \frac{1}{2} \cdot (f + g - |f - g|) \ ,$$

z.B. durch Fallunterscheidung in jedem Punkt $x \in D$.

DEFINITION 3 Seine $D \subset \mathbb{R}$ und $C \subset D$. Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$, so heißt

$$f_{|C} : C \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto f(x)$$

die *Einschränkung* von f auf C .

1.8 Umkehrfunktionen

Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine injektive Funktion, so ist $f : D \longrightarrow f(D)$ bijektiv, d.h. für jedes $y \in W$ existiert genau ein $x \in D$ mit $f(x) = y$. Dieses einzige x , der von y abhängt, wird mit $\overset{-1}{f}(y)$ bezeichnet.

DEFINITION 1 Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine injektive Funktion, so nennt man die Funktion

$$\overset{-1}{f} : f(D) \longrightarrow D \subset \mathbb{R} : y \longmapsto \overset{-1}{f}(y)$$

die *Umkehrfunktion* von f . Sie ist, für alle $x \in D$ und $y \in f(D)$ durch

$$x = \overset{-1}{f}(y) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y$$

charakterisiert.

Es gilt genau dann $(x, y) \in \operatorname{Gr} f$, d.h. $y = f(x)$, wenn $x = \overset{-1}{f}(y)$, d.h. $(y, x) \in \operatorname{Gr} \overset{-1}{f}$. Somit ist $\operatorname{Gr} \overset{-1}{f}$ die Spiegelung von $\operatorname{Gr} f$ an der winkelhalbierenden Gerade mit Gleichung $y = x$.

Es gilt auch $f\left(\overset{-1}{f}(y)\right) = f(x) = y$ und $\overset{-1}{f}(f(x)) = \overset{-1}{f}(y) = x$, d.h.

$$f \circ \overset{-1}{f} = \mathrm{id}_D \quad \text{und} \quad \overset{-1}{f} \circ f = \mathrm{id}_{f(D)} \ .$$

BEISPIEL 1 Die Umkehrfunktion von $a \cdot \mathrm{id} + b$, wobei $a \neq 0$, ist

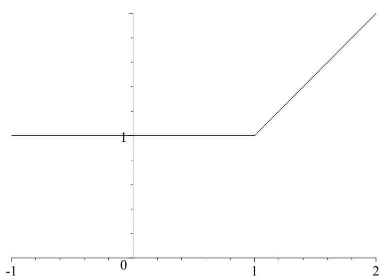
$$\overset{-1}{(a \cdot \mathrm{id} + b)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \frac{y - b}{a} \ ,$$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $a \cdot x + b = y$ zu $x = \frac{y-b}{a}$ äquivalent. □

DEFINITION 2 Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* bzw. *monoton fallend* , wenn für alle $u, v \in D$ mit $u \leqslant v$ gilt $f(u) \leqslant f(v)$ bzw. $f(u) \geqslant f(v)$.

Sie heißt *streng monoton wachsend* bzw. *streng monoton fallend* , wenn für alle $u, v \in D$ mit $u < v$ gilt $f(u) < f(v)$ bzw. $f(u) > f(v)$.

BEISPIEL 2 Die Funktion



$$\max(\mathrm{id}, 1) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \max(x, 1)$$

ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend.

SATZ *Eine streng monotone Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv.*

Sind $u, v \in D$ und $u \neq v$, so kann man annehmen, daß $u < v$, und es folgt $f(u) < f(v)$. $\square$

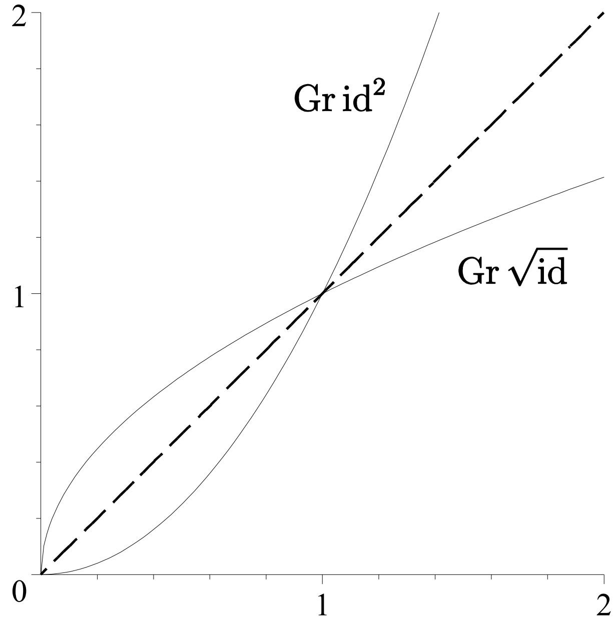
BEMERKUNG Die Umkehrung dieses Satzes ist richtig, aber nicht einfach zu beweisen !

BEISPIEL 3 Die *Wurzelfunktion*

$$\sqrt{\mathrm{id}} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto \sqrt{x}$$

ist die Umkehrfunktion von

$$\mathrm{id}^2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longrightarrow x^2 \ .$$



Daß die Wurzelfunktion auf $\mathrm{id}^2(\mathbb{R})$ definiert ist, folgt aus der strengen Monotonie von id^2 . Daß sie auf $\mathbb{R}_+ = \mathrm{id}^2(\mathbb{R})$ definiert ist, d.h. id^2 ist auf $\mathbb{R}_+$ surjektiv, folgt aus der Definition von $\mathbb{R}$ oder seiner Vollständigkeit : Die einzige Lösung für $y \in \mathbb{R}_+$ der Gleichung $x^2 = y$ ist

$$\sqrt{y} := \left\{u \in \mathbb{Q} \;\middle|\; u^2 < y\right\} \quad \text{als Dedekindscher Schnitt}$$

oder

$$\sqrt{y} := \sup\left\{u \in \mathbb{Q} \;\middle|\; u^2 < y\right\} \quad \text{als Supremum (Vollständigkeit von } \mathbb{R}\text{) .}$$

Im Beispiel 2.3.7 werden wir ein numerisches Verfahren angeben, um $\sqrt{y}$ zu berechnen.

BEISPIEL 4 Allgemeiner ist für $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geqslant 2$, die *p-te Wurzelfunktion*

$$\sqrt[p]{\mathrm{id}} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto \sqrt[p]{x}$$

die Umkehrfunktion von

$$\mathrm{id}^p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longrightarrow x^p \ .$$