Kapitel 4

DIFFERENTIATION

Fassung vom 1. Juli 2005

4.1 Grundbegriffe

Wir werden, neben Grenzwerten, grundlegende Techniken zur Untersuchung von Funktionen bereitstellen.

DEFINITION Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $x \in D$. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt in x *differenzierbar* , wenn $x \in \overline{D \setminus \{x\}}$ und

$$f'(x) := \lim_{x \neq y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

in $\mathbb{K}$ existiert. Diese Zahl nennt man dann die *Ableitung* von f in a .

f heißt *differenzierbar* , wenn f in allen Punkte $x \in D$ differenzierbar ist. Die Funktion

$$f' : D \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto f'(x)$$

nennt man die *Ableitung* von f .

Zur Vereinfachung schreibt man $\lim_{y \to x}$ statt $\lim_{x \neq y \to x}$ und $\lim_{h \to 0}$ statt $\lim_{0 \neq h \to 0}$.

BEISPIEL 1 Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ ist die Funktion

$$a \cdot \mathrm{id} + b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto a \cdot x + b$$

differenzierbar, und ihre Ableitung ist die konstante Funktion a .

Für alle $y \neq x$ gilt

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{a \cdot y + b - a \cdot x - b}{y - x} = a$$

und somit die Behauptung. $\square$

BEISPIEL 2 Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und

$$\exp' = \exp \ .$$

Insbesondere gilt $\exp'(0) = 1$.

Für alle $y \neq 0$ gilt

$$\frac{e^y - 1}{y} - 1 = \frac{1}{y} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k!} - 1 = y \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^{k-2}}{k!} \ ,$$

also

$$\left|\frac{e^y - 1}{y} - 1\right| \leqslant e \cdot y$$

falls $|y| \leqslant 1$. Daraus folgt

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \ ,$$

d.h. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in 0 differenzierbar und $\exp'(0) = 1$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt dann

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot \left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

und damit die Behauptung. □

SATZ (Quotientenfreie Definition der Ableitung) *Genau dann ist $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ in $x \in D$ differenzierbar, wenn ein $c \in \mathbb{K}$ und eine Funktion $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\lim_{y \to x} \varphi(y) = 0$ existieren, so daß gilt*

$$f(y) = f(x) + c \cdot (y - x) + \varphi(y) \cdot (y - x) \ . \qquad (*)$$

In diesem Fall ist $f'(x) = c$ und f stetig in x .

(i) ⇒ (ii) Definiert man

$$\varphi : D \longrightarrow \mathbb{K} : y \longmapsto \varphi(y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x) & \text{falls } y \neq x \\ 0 & \text{falls } y = x \end{cases} ,$$

so gilt $(*)$ mit $c := f'(x)$ und nach Definition der Ableitung auch $\lim_{y \to x} \varphi(y) = 0$.
(ii) ⇒ (i) Aus $(*)$ folgt für $x \neq y \to x$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = c + \varphi(y) \to c \ ,$$

d.h f ist in x differenzierbar und $f'(x) = c$.

Die Stetigkeit ist leicht nachzuprüfen :

$$\lim_{y \to x} f(y) = \lim_{y \to x} \Big[f(x) + c \cdot (y - x) + \varphi(y) \cdot (y - x)\Big] = f(x) + c \cdot 0 + 0 \cdot 0 = f(x) \ .$$

□

BEMERKUNG 1 Auch wenn die Funktion f stetig ist, ist sie i.a. nicht differenzierbar.

Z.B. ist $|\mathrm{id}| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in 0 nicht differenzierbar, da

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x| - |0|}{x} = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0+} \frac{|x| - |0|}{x} = 1 \ .$$

Man kann zeigen, daß die stetige Funktion

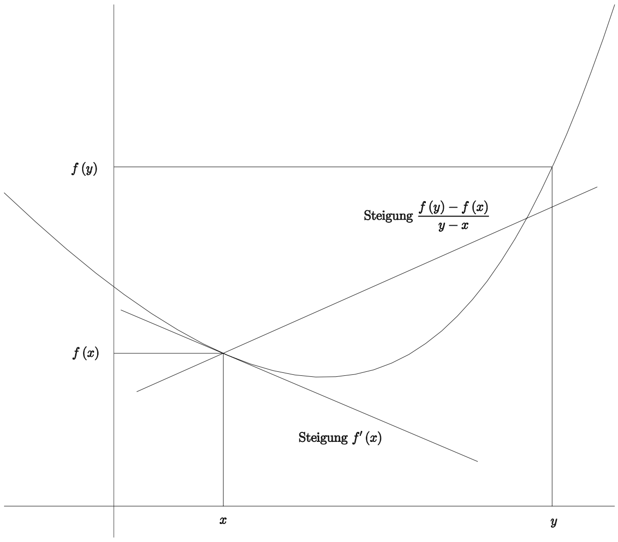
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(3^k \cdot x\right)}{2^k}$$

nirgends differenzierbar ist.

BEMERKUNG 2 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar. Das *Differentialquotient* $\frac{f(y)-f(x)}{x-x}$ ist die *Sekantensteigung* und $f'(x)$ die *Tangentensteigung* . Nach $(*)$ ist

$$y \longmapsto f(x) + f'(x) \cdot (y - x) : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

die beste lineare Approximation von f in der Nähe von x .



4.2 Rechenregeln

HAUPTSATZ *Seien $\alpha \in \mathbb{K}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x \in D$ und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ in x differenzierbare Funktionen. Dann gilt :*

(i) ***Faktorregel*** *$\alpha \cdot f$ ist in x differenzierbar und*

$$(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x) \ .$$

(ii) ***Summenregel*** *$f + g$ ist in x differenzierbar und*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \ .$$

(iii) ***Produktregel*** *$f \cdot g$ ist in x differenzierbar und*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \ .$$

(iv) ***Quotientenregel*** *$\frac{f}{g}$ ist in x differenzierbar und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

falls $g \neq 0$ auf D .

(v) ***Kettenregel*** *Seien $C \subset \mathbb{R}$, $u \in C$ und $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in u , so daß $h(C) \subset D$, d.h. $f \circ h$ ist definiert, und $h(u) = x$. Dann ist $f \circ h$ in u differenzierbar und*

$$(f \circ h)'(u) = f'(h(u)) \cdot h'(u) \ .$$

(vi) ***Ableitung der Umkehrfunktion*** *Seien D ein Intervall, f stetig streng monoton und $f'(x) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $\overset{-1}{f}$ in $f(x)$ differenzierbar und*

$$\left(\overset{-1}{f}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \textit{oder} \quad \left(\overset{-1}{f}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(\overset{-1}{f}(y)\right)} \ .$$

Alles folgt aus Hauptsatz 2.2 bis auf (iv).
Beweis von (i). Für $y \to x$ konvergiert

$$\frac{(\alpha \cdot f)(y) - (\alpha \cdot f)(x)}{y - x} = \alpha \cdot \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

gegen $\alpha \cdot f'(x)$ nach Definition und Hauptsatz 2.2.i.

Beweis von (ii). Nach Hauptsatz 2.2.ii gilt

$$\frac{(f + g)(y) - (f + g)(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \to f'(x) + g'(x)$$

für $y \to x$.

Beweis von (iii). Es gilt

$$\frac{(f\cdot g)(y)-(f\cdot g)(x)}{y-x}=\frac{\big(f(y)-f(x)\big)\cdot g(y)}{y-x}+\frac{f(x)\cdot\big(g(y)-g(x)\big)}{y-x}\ ,$$

und mit Hauptsatz 2.2.iii konvergiert für $y\to x$ die rechte Seite gegen $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

Beweis von (iv). Ist zuerst $f=1$, so gilt

$$\frac{\frac{1}{g}(y)-\frac{1}{g}(x)}{y-x}=-\frac{1}{g(y)\cdot g(x)}\cdot\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\to-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

für $y\to x$. Aus (iii) folgt damit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x)=f'(x)\cdot\frac{1}{g}(x)+f(x)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=$$

$$=\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}\ .$$

Beweis von (v). Mit Hilfe von Satz 4.1 sei

$$f(y)=f(x)+f'(x)\cdot(y-x)+\varphi(y)\cdot(y-x)\quad\text{für alle } y\in D$$

und

$$h(v)=h(u)+h'(u)\cdot(v-u)+\psi(v)\cdot(v-u)\quad\text{für alle } v\in C\ ,$$

wobei

$$\lim_{y\to x}\varphi(y)=0\quad\text{und}\quad\lim_{v\to u}\psi(v)=0\ .$$

Da

$$h(v)-x=h(v)-h(u)=h'(u)\cdot(v-u)+\psi(v)\cdot(v-u)=\Big[h'(u)+\psi(v)\Big]\cdot(v-u)\ ,$$

kann man schreiben

$$f(h(v))=f(x)+f'(x)\cdot(h(v)-x)+\varphi(h(v))\cdot(h(v)-x)=$$

$$=f(h(u))+f'(h(u))\cdot\Big[h'(u)+\psi(v)\Big]\cdot(v-u)+\varphi(h(v))\cdot\Big[h'(u)+\psi(v)\Big]\cdot(v-u)=$$

$$=f(h(u))+f'(h(u))\cdot(v-u)+\Big(\psi(v)+\varphi(h(v))\cdot\Big[h'(u)+\psi(v)\Big]\Big)\cdot(v-u)$$

und

$$\lim_{v\to u}\psi(v)+\varphi(h(v))\cdot\Big[h'(u)+\psi(v)\Big]=0+0\cdot(h'(u)+0)=0\ .$$

Beweis von (vi). Wegen der Stetigkeit von $\overset{-1}{f}$ (Hauptsatz 3.2) gilt

$$\lim_{v\to f(x)}\overset{-1}{f}(v)=\overset{-1}{f}(f(x))=x$$

und es folgt

$$\lim_{v\to f(x)} \frac{\overset{-1}{f}(v) - \overset{-1}{f}(f(x))}{v - f(x)} = \lim_{y\to x} \frac{1}{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

mit der Variablenänderung $y = \overset{-1}{f}(v)$ (Hauptsatz 2.2.v). □

BEMERKUNG 1 Schreibt man

$$\frac{f(h(v)) - f(h(u))}{v-u} = \frac{f(h(v)) - f(h(u))}{h(v) - h(u)} \cdot \frac{h(v) - h(u)}{v-u} ,$$

so bekommt man einen korrekten Beweis der Kettenregel nur, wenn h stetig und strikt monoton ist. Sonst existieren $v \neq u$ mit $h(v) = h(u)$, und man kann nicht weiter argumentieren !

BEISPIEL 1 Für $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$(\mathrm{id}^n)' = n \cdot \mathrm{id}^{n-1} .$$

Der Fall $n = 1$ folgt aus Beispiel 4.1.1 : $\mathrm{id}' = 1$. Durch Induktion kann man schließen :

$$\left(\mathrm{id}^{n+1}\right)' = (\mathrm{id}^n \cdot \mathrm{id})' = (\mathrm{id}^n)' \cdot \mathrm{id} + \mathrm{id}^n \cdot \mathrm{id}' = n \cdot \mathrm{id}^{n-1} \cdot \mathrm{id} + \mathrm{id}^n \cdot 1 = (n+1) \cdot \mathrm{id}^n .$$

□

BEISPIEL 2 Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left(e^{\lambda\cdot\mathrm{id}}\right)' = \lambda \cdot e^{\lambda\cdot\mathrm{id}} .$$

Dies folgt aus der Kettenregel und Beispiel 4.1.2 : $\exp' = \exp$ und man kann schreiben $e^{\lambda\cdot\mathrm{id}} = \exp(\lambda\cdot\mathrm{id}) = \exp\circ(\lambda\cdot\mathrm{id})$, also folgt

$$\left(e^{\lambda\cdot\mathrm{id}}\right)' = \exp'(\lambda\cdot\mathrm{id}) \cdot (\lambda\cdot\mathrm{id})' = \exp(\lambda\cdot\mathrm{id}) \cdot \lambda = \lambda \cdot e^{\lambda\cdot\mathrm{id}} .$$

□

BEISPIEL 3 Es gilt

$$\left(e^{c\cdot\mathrm{id}^2}\right)' = 2c \cdot \mathrm{id} \cdot e^{c\cdot\mathrm{id}^2} .$$

Dies folgt wiederum aus der Kettenregel und Beispiel 4.1.2 : $\exp' = \exp$ und man kann schreiben $e^{c\cdot\mathrm{id}^2} = \exp\left(c\cdot\mathrm{id}^2\right) = \exp\circ\left(c\cdot\mathrm{id}^2\right)$, also folgt

$$\left(e^{c\cdot\mathrm{id}^2}\right)' = \exp'\left(c\cdot\mathrm{id}^2\right) \cdot \left(c\cdot\mathrm{id}^2\right)' = \exp\left(c\cdot\mathrm{id}^2\right) \cdot 2c\cdot\mathrm{id} = 2c \cdot \mathrm{id} \cdot e^{c\cdot\mathrm{id}^2} .$$

□

BEISPIEL 4 Für $a \in \mathbb{R}_+^*$ gilt

$$\left(a^{\mathrm{id}}\right)' = \ln a \cdot a^{\mathrm{id}} .$$

Nach Definition der allgemeinen Potenzfunktion gilt

$$\left(a^{\mathrm{id}}\right)' = \left(e^{\ln a\cdot\mathrm{id}}\right)' = \ln a \cdot e^{\ln a\cdot\mathrm{id}} = \ln a \cdot a^{\mathrm{id}}$$

nach der Kettenregel oder obigem Beispiel 2. $\square$

BEMERKUNG 2 Man sieht, daß genau dann $\left(a^{\mathrm{id}}\right)' = a^{\mathrm{id}}$ gilt, wenn $\ln a = 1$ ist, d.h. $a = e$. Dies ist die Besonderheit der Basis e !

BEMERKUNG 3 Ist f eine streng monotone Funktion und in x differenzierbar, so folgt nicht $f'(x) \neq 0$, wie das Beispiel id^3 in 0 zeigt :

$$\left(\mathrm{id}^3\right)'(0) = 3 \cdot \mathrm{id}^2(0) = 0\ !$$

BEISPIEL 5 Der Logarithmus ist differenzierbar und

$$\ln' = \frac{1}{\mathrm{id}} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ .$$

Mit (v) folgt

$$\ln' = \left(\overset{-1}{\exp}\right)' = \frac{1}{\exp' \circ \overset{-1}{\exp}} = \frac{1}{\exp \circ \overset{-1}{\exp}} = \frac{1}{\mathrm{id}}\ .$$

$\square$

BEISPIEL 6 Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$\mathrm{id}^\alpha : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^\alpha$$

differenzierbar und

$$(\mathrm{id}^\alpha)' = \alpha \cdot \mathrm{id}^{\alpha-1}\ .$$

In der Tat

$$(\mathrm{id}^\alpha)' = \left(e^{\alpha\cdot\ln}\right)' = e^{\alpha\cdot\ln} \cdot \alpha \cdot \ln' = \alpha \cdot \mathrm{id}^\alpha \cdot \frac{1}{\mathrm{id}} = \alpha \cdot \mathrm{id}^{\alpha-1}$$

mit Hilfe der Kettenregel und vorigem Beispiel. $\square$

BEISPIEL 7 Die trigonometrischen Funktionen cos und sin sind differenzierbar, und es gilt

$$\cos' = -\sin \quad , \quad \sin' = \cos\ .$$

Es gilt

$$\frac{\cos y - \cos x}{y - x} + i \cdot \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \frac{e^{i\cdot y} - e^{i\cdot x}}{y - x} = e^{i\cdot x} \cdot \frac{e^{i\cdot(y-x)} - 1}{y - x}\ ,$$

und mit Lemma 3.6 konvergiert für $y \to x$ die rechte Seite gegen

$$e^{i\cdot x} \cdot i = i \cdot (\cos x + i \cdot \sin x) = -\sin x + i \cdot \cos x\ .$$

Vergleicht man Reell- und Imaginärteil, folgt die Behauptung. $\square$

Man hätte auch folgender Satz benutzen können :

SATZ *Ist $R > 0$ der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{id}^k$, so ist die Funktion*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{id}^k :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k$$

differenzierbar und

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{id}^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k \cdot \mathrm{id}^{k-1} \quad .$$

Daß die differenzierte Potenzreihe konvergiert, wurde in Hauptsatz 2.6.i bewiesen, daß sie mit der Ableitung der Funktion $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{id}^k$ übereinstimmt verläuft ähnlich wie der Beweis der Stetigkeit dieser Funktion (Satz 3.3.i) :

Für jedes $x \in]-R, R[$ existiert $\rho \in \mathbb{R}_+$ mit $|x| < \rho < R$ und für jedes $y \in U_{\rho-|x|}(x) \subset]-R, R[$ gilt $|x|, |y| \leqslant \rho$ und somit

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot y^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k}{y - x} - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k \cdot x^{k-1} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} y^{k-1-j} \cdot x^j - k \cdot x^{k-1} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=1}^{N-1} c_k \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} y^{k-1-j} \cdot x^j - k \cdot x^{k-1} \right) \right| + \sum_{k=N}^{\infty} k \cdot |c_k| \cdot \rho^{k-1} \ .$$

Nach Hauptsatz 2.6.i ist $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot k \cdot \rho^k$ konvergent, also für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} k \cdot |c_k| \cdot \rho^{k-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Da ein Polynom stetig ist folgt

$$\lim_{x \to y} \sum_{k=1}^{N-1} c_k \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} y^{k-1-j} \cdot x^j - k \cdot x^{k-1} \right) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} \cdot x^j - k \cdot x^{k-1} \right) = 0$$

und es existiert ein $\delta \in]0, \rho - |x|] > 0$, so daß für alle $y \in U_\delta(x)$ gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{N-1} c_k \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} y^{k-1-j} \cdot x^j - k \cdot x^{k-1} \right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Daraus ergibt sich

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot y^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k}{y - x} - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k \cdot x^{k-1} \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } y \in U_\delta(x) \ ,$$

d.h. $\lim_{x \to y} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot y^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k}{y-x} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k \cdot x^{k-1}$. □

4.3 Monotonie und die Wachstumsprozesse

Wir behandeln jetzt, die sogenannte "Kurvendiskussion". Der Ausgangspunkt ist der

SATZ (Mittelwertsatz) *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $]a,b[$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $\xi \in \,]a,b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi) \ .$$

Man betrachtet die stetige Funktion

$$h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \Big[f(b) - f(a)\Big] \cdot (x-a) - \Big[f(x) - f(a)\Big] \cdot (b-a) \ ,$$

die in a und b verschwindet. Nach Hauptsatz 3.2 nimmt sie ihr Maximum oder Minumum an einer Stelle $\xi \in \,]a,b[$ an. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß es ein Maximum ist. Für alle $x \in [a,b] \setminus \{\xi\}$ gilt dann

$$\frac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi} \begin{cases} \geqslant 0 & \text{falls} \quad x < \xi \\ \leqslant 0 & \phantom{\text{falls}} \quad x > \xi \end{cases} \ .$$

Da h in ξ differenzierbar ist, folgt

$$0 \leqslant \lim_{x \to \xi-} \frac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi} = h'(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi} \leqslant 0$$

und somit

$$0 = h'(\xi) = \Big[f(b) - f(a)\Big] - f'(x) \cdot (b-a) \ ,$$

woraus die Behauptung folgt. ——— □

DEFINITION Für ein Intervall J in $\mathbb{R}$ sei

$$J^\circ := J \setminus \{\text{Randpunkte von } J\} \ .$$

Als Folgerung erhalten wir

KOROLLAR (Monotoniekriterien) *Seien J ein Intervall und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, auf J° differenzierbare Funktion. Dann gilt*

(i)

$$f'(x) = 0 \text{ für alle } x \in J^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist auf } J \text{ konstant.}$$

(ii)

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ bzw. } \leqslant 0 \text{ für alle } x \in J^\circ \Longleftrightarrow f \text{ ist auf } J \text{ monoton wachsend bzw. fallend.}$$

(iii)

$$f'(x) > 0 \text{ bzw. } < 0 \text{ für alle } x \in J^\circ \Longrightarrow f \text{ ist auf } J \text{ streng monoton wachsend bzw. fallend.}$$

Für alle $x, y \in J$ mit $x < y$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in \left]x, y\right[$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x) \ . \tag{$*$}$$

Beweis von (i). Die Implikation $\Rightarrow$ folgt aus $(*)$, die Umkehrung aus Beispiel 4.1.1.

Beweis von (ii). Die Implikation $\Rightarrow$ folgt auch aus $(*)$. Für die Umkehrung beachtet man, falls f monoton wachsend ist, daß

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0 \ ,$$

also

$$f'(x) = \lim\nolimits_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0 \ .$$

Beweis von (iii). Dies folgt auch aus $(*)$. □

BEMERKUNG Die Umkehrung in (iii) ist falsch, wie das Beispiel id^3 zeigt. Dies Funktion ist streng monoton wachsend, aber $\left(\mathrm{id}^3\right)'(0) = 0$.

BEISPIEL 1 Mit (iii) und die Tatsachen $\exp > 0$ auf $\mathbb{R}$, $\sin > 0$ auf $\left]0, \pi\right[$ folgert man, daß $\exp$ auf $\mathbb{R}$ und $\cos$ auf $[0, \pi]$ streng monoton wachsend bzw. fallend sind.

Es gilt

$$\exp' = \exp > 0 \text{ auf } \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \cos' = -\sin < 0 \text{ auf } \left]0, \pi\right[\ .$$

□

BEISPIEL 2 Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathrm{id}^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

streng monoton wachsend, falls $\alpha > 0$ und fallend, falls $\alpha < 0$. Für $\alpha \geqslant 0$ kann man id^α in 0 stetig fortsetzen :

$$0^0 = \lim\nolimits_{x \to 0+} x^0 = 1 \quad \text{und} \quad 0^\alpha = \lim\nolimits_{x \to 0+} x^\alpha = 0 \ , \text{ falls } \alpha > 0 \ .$$

Dies ergibt sich aus (iii), da

$$\left(\mathrm{id}^\alpha\right)' = \alpha \cdot \mathrm{id}^{\alpha - 1} \quad \text{und} \quad \mathrm{id}^{\alpha - 1} > 0 \text{ auf } \mathbb{R}_+^* \ .$$

□

HAUPTSATZ *Seien $\lambda, a \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem :*
Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$

$$f' = \lambda \cdot f$$

und Anfangswert

$$f(0) = a \ ,$$

genau eine Lösung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *, nämlich*

$$a \cdot e^{\lambda \cdot \mathrm{id}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto a \cdot e^{\lambda \cdot t} \ .$$

Insbesondere ist exp *die einzige Lösung von*

$$f' = f \quad \textit{und} \quad f(0) = 1 \ .$$

Die Funktion $a \cdot e^{\lambda \cdot \mathrm{id}}$ ist trivialerweise eine Lösung. Ist $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Lösung, d.h. $g' = \lambda \cdot g$ und $g(0) = a$, so betrachtet man die Funktion

$$h := e^{-\lambda \cdot \mathrm{id}} \cdot g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto e^{-\lambda \cdot t} \cdot g(t) \ .$$

Es folgt

$$h' = -\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot \mathrm{id}} \cdot g + e^{-\lambda \cdot \mathrm{id}} \cdot g' = -\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot \mathrm{id}} \cdot g + e^{-\lambda \cdot \mathrm{id}} \cdot \lambda \cdot g = 0 \ ,$$

d.h. h ist eine konstante Funktion und

$$h(0) = e^{-\lambda \cdot 0} \cdot g(0) = a \ ,$$

also $h = a$ und somit

$$g = e^{\lambda \cdot \mathrm{id}} \cdot h = a \cdot e^{\lambda \cdot \mathrm{id}} \ ,$$

was zu beweisen war. □

BEMERKUNG Bei Zerfall- und Wachstumprozessen mit konstanten Außenbedingungen (z.B. radioaktiver Zerfall, Wachstum von Organismen) in kleinen Zeitintervallen, die durch eine Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ in Abhängigkeit der Zeit modelliert werden, gilt : Der Zuwachs von f zur Zeit t ist proportional zu $f(t)$ und dem Zeitzuwachs Δt für kleine Δt , also

$$f(t + \Delta t) - f(t) \simeq \lambda \cdot f(t) \cdot \Delta t \ .$$

Im mathematischen Modell heißt das, daß für $\Delta t \to 0$ gilt

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lambda \cdot f(t) \ ,$$

d.h.

$$f' = \lambda \cdot f \ .$$

Für $\tau \in J$, eine Zeit wo dieser Prozess bekannt ist : $f(\tau)$ ist die einzige Lösung durch

$$f = f(\tau) \cdot e^{\lambda \cdot (\mathrm{id} - \tau)} : J \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f(\tau) \cdot e^{\lambda \cdot (t - \tau)}$$

gegeben.

Für große Zeitintervallen gelten i.a. diese Voraussetzungen nicht, da Sättigungsphänomene auftreten : das *logistisches* Wachstum ist sinnvoller.

BEISPIEL 3 Eine Volkswirtschaft, gemessen an ihrem BSP f , entwickelt sich jährlich mit einem Wachstumsrate r , d.h. von $r \cdot 100\,\%$. Es gilt also

$$f(1) = f(0) + r \cdot f(0) = (1 + r) \cdot f(0) \ ,$$

$$f(2) = (1 + r) \cdot f(1) = (1 + r)^2 \cdot f(0)$$

und somit

$$f(k) = (1+r)^k \cdot f(0) = f(0) \cdot e^{k \cdot \ln(1+r)} \ .$$

Es ist sinnvoll ein kontinuierliches Modell zu benutzen, d.h.

$$f(t) = f(0) \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad \text{für } t \geqslant 0 \ ,$$

wobei

$$\lambda = \ln(1+r) \ .$$

Wir werden später sehen (Taylor-Entwicklung), daß für kleine r gilt $\ln(1+r) \simeq r$, z.B. für 1% järhlichem Wachstum ist $\ln(1.01) = 0.009.950\ldots \simeq 0.01$.

Wann hat sich diese Volkswirtschaft verdoppelt ? Bezeichnet τ diese Verdoppelungszeit, so gilt

$$2 \cdot f(0) = f(0) \cdot e^{\lambda \cdot \tau} \quad \text{oder} \quad e^{\lambda \cdot \tau} = 2 \ ,$$

d.h.

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \ .$$

Für 1% järhlichem Wachstum ist also die Verdoppelungszeit

$$\frac{\ln 2}{\ln(1.01)} \simeq 69,6\ldots$$

BEISPIEL 4 Datierung mit Hilfe des Kohlenstoffes C^{14}

Die Zerfall eines radioaktiven Materials ist durch das Gesetz

$$m' = -\lambda \cdot m$$

beschrieben, wobei $m(t)$ die Masse (oder die Konzentration) dieses Materials zur Zeit t ist und λ die Zerfallskonstante. Bezeichnet m_0 die Masse zur Zeit t_0 , so gilt

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot (t-t_0)} \ .$$

Ist τ die *Halbwertzeit* , z.B. 5730 Jahre für C^{14} , so gilt nach Definition

$$\frac{1}{2} \cdot m_0 = m(t_0 + \tau) = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \ ,$$

also

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \ .$$

Es gilt somit

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau} \cdot (t-t_0)} \ .$$

Das Verhälniss u_0 des Kohlenstoffes C^{14} zu seinem Isotop C^{12} ist wegen der kosmischen Strahlen bis 1950 ungefähr konstant geblieben. Dieses Verhältnis ist durch die Atmung für jedes Lebewesen das gleiche. Nach dem Tod zerfällt der vorhandene Kohlenstoff C^{14} , und das Verhältnis $u(T)$ des C^{14} zur C^{12} nach T Jahre ist durch

$$u(T) = u_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau} \cdot T}$$

gegeben. Misst man $u(T)$, so bekommt man

$$T = \frac{\tau}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{u_0}{u(T)}\right) \ .$$

4.4 Lokale Extrema, die de l'Hospital Regel und Konvexität

DEFINITION 1 Sei $D \subset \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ hat in $\xi \in D$ ein *lokales Maximum* bzw. *isoliertes lokales Maximum* , wenn gilt : Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$f(x) \leqslant f(\xi) \quad \text{bzw.} \quad f(x) < f(\xi) \quad \text{für alle } x \in D \cap U_\varepsilon(\xi) \smallsetminus \{\xi\} \ .$$

ξ heißt *absolutes Maximum* , wenn

$$f(x) \leqslant f(\xi) \quad \text{für alle } x \in D \ .$$

Analog für *Minimum* . Wenn ξ ein Maximum oder ein Minimum ist, so spricht man von *Extremum* .

HAUPTSATZ (Kriterium für Extremum) *Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\xi \in J^\circ$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf J° differenzierbare Funktion.*

(i) Hat f in ξ ein lokales Extremum, so ist $f'(\xi) = 0$.

(ii) Ist $f'(\xi) = 0$ und existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ bzw. } f'(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \left]\xi - \varepsilon, \xi\right[$$

und

$$f'(x) \leqslant 0 \text{ bzw. } f'(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in \left]\xi, \xi + \varepsilon\right[\ ,$$

so hat f ein lokales bzw. isoliertes Maximum in ξ .

(iii) Analog für Minimum durch Umkehrung der Ungleichungen.

Beweis von (i). Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß f in ξ ein lokales Maximum hat. Mit den Notationen der Definition gilt

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqslant 0 \quad \text{für alle } x \in \left]\xi - \varepsilon, \xi\right[$$

und

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leqslant 0 \quad \text{für alle } x \in \left]\xi, \xi + \varepsilon\right[\ ,$$

also

$$0 \leqslant \lim_{x \to \xi -} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi) = \lim_{x \to \xi +} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leqslant 0 \ .$$

Beweis von (ii). Dies folgt sofort aus Korollar 4.3. □

BEISPIEL 1 Die Funktion

$$\mathrm{id}^{\mathrm{id}} = e^{\mathrm{id}\cdot\ln} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^x = e^{x\cdot\ln x}$$

ist differenzierbar mit

$$\left(\mathrm{id}^{\mathrm{id}}\right)' = e^{\mathrm{id}\cdot\ln} \cdot (\mathrm{id}\cdot\ln)' = (1+\ln)\cdot\mathrm{id}^{\mathrm{id}} \ .$$

Da $\mathrm{id}^{\mathrm{id}} > 0$ auf $\mathbb{R}_+^*$ ist $\left(\mathrm{id}^{\mathrm{id}}\right)'(x) = 0$ zu $1 + \ln x = 0$ äquivalent, d.h zu $x = \frac{1}{e}$. Dies ist der einzige Kandidat für ein lokales Extremum. Da exp streng monoton wachsend ist, folgt

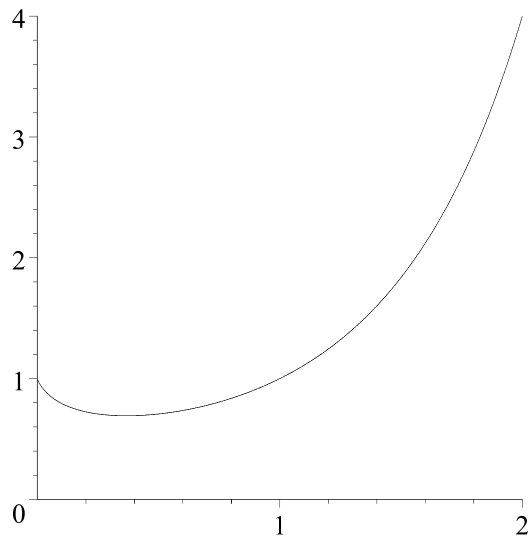
$$\left(\mathrm{id}^{\mathrm{id}}\right)'(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x < -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x < \frac{1}{e}$$

und

$$\left(\mathrm{id}^{\mathrm{id}}\right)'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x > -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x > \frac{1}{e} \ ,$$

d.h. f hat in $\frac{1}{e}$ ein isoliertes lokales, sogar absolutes Minimum mit

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = 0.692\,200\,627\ldots$$



Es gilt

$$\lim\nolimits_{x\to\infty} x^x = \lim\nolimits_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln x} \underset{y=x\cdot\ln x}{=} \lim\nolimits_{y\to\infty} e^y = \infty \ ,$$

da $\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln x = (\lim_{x\to\infty} x)\cdot(\lim_{x\to\infty}\ln x) = \infty\cdot\infty = \infty$. Weiter gilt

$\lim_{x\to 0+}\left(\mathrm{id}^{\mathrm{id}}\right)'(x) = \lim_{x\to 0+}(1+\ln x)\cdot x^x = (1+\lim_{x\to 0+}\ln x)\cdot\lim_{x\to 0+} x^x = (-\infty)\cdot\infty = -\infty$.

Wie berechnet man

$$\lim\nolimits_{x\to 0+} x^x \quad \text{oder} \quad \lim\nolimits_{x\to 0+} x\cdot\ln x \ ?$$

Dazu

SATZ (Regel von de l'Hospital) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$ einen Randpunkt von J und $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g, g' \neq 0$ auf J . Gilt*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty \ ,$$

und existiert $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\overline{\mathbb{R}}$, so existiert auch $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und es gilt

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Für einen Beweis verweise ich auf die französische Version meiner Vorlesung *Analysis,* § 8.8.

□

BEMERKUNG 1 Falls $c \in \mathbb{R}$, f, g auf $J \cup \{c\}$ differenzierbar sind, $g \neq 0$ auf J , $f(c) = g(c) = 0$ und $g'(c) \neq 0$, so gilt

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ .$$

Der Beweis ist elementar : Wegen der Differnzierbarkeit von f und g gibt es Funktionen $\varphi, \psi : J \cup \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \to c} \varphi(x) = \lim_{x \to c} \psi(x) = 0$$

und

$$f(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x - c) + \varphi(x) \cdot (x - c) = \Big[f'(c) + \varphi(x)\Big] \cdot (x - c)$$

sowie

$$g(x) = g(c) + g'(c) \cdot (x - c) + \psi(x) \cdot (x - c) = \Big[g'(c) + \psi(x)\Big] \cdot (x - c) \ .$$

Daraus folgt

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\Big[f'(c) + \varphi(x)\Big] \cdot (x - c)}{\Big[g'(c) + \psi(x)\Big] \cdot (x - c)} = \frac{\lim_{x \to c} \Big[f'(c) + \varphi(x)\Big]}{\lim_{x \to c} \Big[g'(c) + \psi(x)\Big]} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ .$$

□

BEISPIEL 2 Es gilt

$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0+} x^x = 1 \ ,$$

sowie

$$\lim_{x \to 0+} \left(\mathrm{id}^{\mathrm{id}}\right)'(x) = -\infty \ .$$

Die Funktion $\mathrm{id}^{\mathrm{id}}$ ist in 0 stetig fortsetzbar durch $0^0 = 1$!

Da $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$, folgt

$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0+} x = 0 \ ,$$

also

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\cdot\ln x} = e^{\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln x} = e^0 = 1 \ ,$$

da exp stetig ist. □

BEISPIEL 3 Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ .$$

Dies wurde bereits in Lemma 3.6 berechnet !

Da $\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} x = 0$, folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1 \ ,$$

da cos stetig ist. □

Es ist noch von Interesse weitere geometrischen Eigenschaften wie die *Krümmung* von $\mathrm{id}^{\mathrm{id}}$ zu untersuchen.

DEFINITION 2 Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex* , wenn für alle $x, y, \xi \in J$ mit $x < \xi < y$ gilt

$$f(\xi) \leqslant \frac{y-\xi}{y-x} \cdot f(x) + \frac{\xi - x}{y-x} \cdot f(y) \ . \qquad (*)$$

Sie heißt *konkav* , wenn $-f$ konvex ist.

HAUPTSATZ (Konvexitätskriterium) *Sei $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf J° differenzierbar. Dann sind äquivalent :*

(i) *f ist konvex.*

(ii) *f' ist auf J° monoton wachsend.*

(iii) *Für alle $\xi \in J^\circ$ gilt*

$$f(x) \geqslant f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi) \quad \text{für alle } x \in J \ .$$

Man beachte zuerst, daß $(*)$, wegen $\frac{y-\xi}{y-x} + \frac{\xi-x}{y-x} = 1$ zu

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leqslant \frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi} \qquad (**)$$

äquivalent ist.

(i) ⇒ (ii) Für $x, \xi, y, \eta \in J^\circ$ mit $x < \xi < y < \eta$ folgt aus $(**)$

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leqslant \frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi} \leqslant \frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y} \ ,$$

also

$$f'(x) = \lim_{\xi\to x+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leqslant \lim_{\eta\to y+} \frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y} = f'(y)$$

mit Hilfe von Satz 2.3.i.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Definiert man

$$g := f - f(\xi) - f'(\xi) \cdot (x - \xi) \ ,$$

so ist $g(\xi) = 0$ und

$$g'(x) = f'(x) - f'(\xi) \begin{cases} \geqslant 0 & \\ & \text{falls} \\ \leqslant 0 & \end{cases} \begin{matrix} x \geqslant \xi \\ \\ x \leqslant \xi \end{matrix} \ .$$

Das Kriterium für Extremum zeigt, daß g ein absolutes Minimum in ξ hat, also gilt

$$f(x) - f(\xi) - f'(\xi) \cdot (x - \xi) = g(x) \geqslant g(\xi) = 0 \ .$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Für alle $x, y, \xi \in J$ mit $x < \xi < y$ liefert (iii)

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leqslant f'(\xi) \leqslant \frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi}$$

und somit $(*)$. □

BEISPIEL 4 exp ist konvex, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^x \geqslant 1 + x \ .$$

Da $\exp' = \exp$ und exp monoton wachsend ist, folgt die erste Behauptung aus (ii) $\Rightarrow$ (i). Aus (i) $\Rightarrow$ (iii) ergibt sich mit $\xi = 0$ die Ungleichung :

$$e^x \geqslant e^0 + \exp'(0) \cdot (x - 0) = 1 + x \ .$$

□

BEISPIEL 5 ln ist konkav, und für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$ gilt

$$\ln x \leqslant x - 1 \ .$$

Da $\ln' = \frac{1}{\mathrm{id}}$ und id monoton fallend ist, folgt die erste Behauptung aus (ii) $\Rightarrow$ (i). Aus (i) $\Rightarrow$ (iii) ergibt sich mit $\xi = 1$ die Ungleichung :

$$\ln x \geqslant \ln 1 + \ln'(1) \cdot (x - 1) = x - 1 \ .$$

□

DEFINITION 3 Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt *zweimal differenzierbar* , wenn f differenzierbar ist und ihre Ableitung $f' : D \longrightarrow \mathbb{K}$ differenzierbar ist. Man schreibt

$$f'' := (f')' : D \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

KOROLLAR *Sei $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf J° zweimal differenzierbar.*

(i) Genau dann ist f konvex, wenn $f'' \geqslant 0$.

(ii) Ist f'' auf J° stetig und gelte für $\xi \in J^\circ$: $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$ bzw. $f''(\xi) < 0$, so hat f ein lokales isoliertes Minimum bzw. Maximum in ξ .

Beweis von (i). Nach Korollar 4.3.ii ist genau dann f' monoton wachsend, wenn $f'' = (f')' \geqslant 0$.

Beweis von (ii). Da f'' stetig ist, existiert für $\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot f''(\xi)$ ein $\delta > 0$ mit

$$f''(x) \geqslant f''(\xi) - \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot f''(\xi) > 0 \quad \text{für alle } x \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \ .$$

Damit ist f' auf $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ streng monoton wachsend, und wegen $f'(\xi) = 0$ ergibt sich

$$f'(x) < 0 < f'(y) \quad \text{für alle } x \in \left]\xi - \delta, \xi\right[\text{ und } y \in \left]\xi, \xi + \delta\right[\ .$$

Mit dem Kriterium für ein Extremum (ii) folgt die Behauptung. □

BEISPIEL 6 Die Funktion $\mathrm{id}^{\mathrm{id}} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ist konvex.

Auf $\mathbb{R}_+^*$ gilt

$$\left(\mathrm{id}^{\mathrm{id}}\right)'' = \left[(1 + \ln) \cdot \mathrm{id}^{\mathrm{id}}\right]' = \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \mathrm{id}^{\mathrm{id}} + (1 + \ln)^2 \cdot \mathrm{id}^{\mathrm{id}} > 0 \ .$$

□

BEMERKUNG 2 Qualitative Funktionsuntersuchung :

(a) Grenzwerte, Randverhalten.

(b) Extrema.

(c) Monotonie-Intervalle.

(d) Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle.

Man beachte, daß man eigentlich nur die Funktion und ihre erste Ableitung benötigt.

4.5 Höhere Ableitungen und die Taylor-Entwicklung

DEFINITION 1 Sei $k \in \mathbb{N}$. Durch Induktion heißt $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ *k-mal differenzierbar* , wenn

$f^{(0)} := f$, für jedes $j = 0, \ldots, k-1$ die Funktion $f^{(j)}$ differenzierbar ist und $f^{(j+1)} := \left(f^{(j)}\right)'$.

f heißt *k-mal stetig differenzierbar* , wenn f k-mal differenzierbar und $f^{(k)}$ stetig ist.

Man bezeichnet mit $\mathcal{C}^{(k)}(D)$ und $\mathcal{C}^{(\infty)}(D)$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren bzw. unendlich oft differenzierbaren Funktionen.

BEMERKUNG 1 Die Ableitungen $f^{(j)}$ für $j = 0, \ldots, k-1$ sind nach Satz 4.1 stetig.

BEISPIEL 1 Für ein Polynom $\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \mathrm{id}^k$ gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \mathrm{id}^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k \cdot c_k \cdot \mathrm{id}^{k-1} \quad , \quad \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \mathrm{id}^k\right)'' = \sum_{k=2}^{n} k \cdot (k-1) \cdot c_k \cdot \mathrm{id}^{k-2} \quad ,$$

usw...

$$\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \mathrm{id}^k\right)^{(n)} = n! \cdot c_n \; .$$

BEISPIEL 2 Man verifiziert leicht, daß die folgenden Funktionen unendlich oft differenzierbar sind :

Polynome, $\exp$, $\ln$, $\mathrm{id}^\alpha : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\exp(i \cdot \mathrm{id}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\cos$, $\sin$.

Z.B. gilt

$$\ln^{(k)} = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot \frac{1}{\mathrm{id}^k} \quad \text{für alle } k \geqslant 1 \; .$$

Diese Formel ist richtig für $k = 1$. Durch die Induktionsvoraussetzung folgt

$$\ln^{(k+1)} = \left((-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot \frac{1}{\mathrm{id}^k}\right)' = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot \frac{-k}{\mathrm{id}^{k+1}} = (-1)^k \cdot k! \cdot \frac{1}{\mathrm{id}^k} \; ,$$

was zu zeigen war. □

BEISPIEL 3 Die Funktion

$$|\mathrm{id}| \cdot \mathrm{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x| \cdot x = \begin{cases} x^2 & \\ & \text{falls} \\ -x^2 & \end{cases} \begin{matrix} x \geqslant 0 \\ \\ x < 0 \end{matrix}$$

ist nicht zweimal differenzierbar.

Es ist

$$(|\mathrm{id}| \cdot \mathrm{id})' = 2\,|\mathrm{id}|$$

und $|\mathrm{id}|$ ist in 0 nicht differenzierbar (vgl. Bemerkung 4.1). □

Wir suchen jetzt nach besseren Approximationen einer Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ in der Nähe eines Punktes $x \in D$ als die affine Approximation : Ist f differenzierbar, so gilt

$$f(y) = f(x) + f'(x) \cdot (y - x) + \varphi(y) \cdot (y - x) \quad \text{mit } \lim_{y \to x} \varphi(y) = 0 \ .$$

Die affine Approximation ist

$$T_x^1 f(y) := f(x) + f'(x) \cdot (y - x)$$

und

$$T_x^1 f(x) = f(x) \quad , \quad \left(T_x^1 f\right)'(x) = f'(x) \ .$$

DEFINITION 2 Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $x \in D$, so heißt

$$T_x^n f(y) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (y - x)^k$$

das *n-te Taylorpolynom* von f in x .

BEMERKUNG 2 Es gilt

$$\left(T_x^n f\right)^{(j)}(y) := \sum_{k=j}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-j)!} \cdot (y - x)^{k-j} \ ,$$

und insbesondere

$$\left(T_x^n f\right)^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) \quad \text{für alle } j = 0, \ldots, n \ .$$

Der Beweis folgt einfach durch Induktion :

$$\left(T_x^n f\right)^{(j+1)}(y) := \left(\sum_{k=j}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-j)!} \cdot (y - x)^{k-j}\right)' = \sum_{k=j+1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-(j+1))!} \cdot (y - x)^{k-(j+1)} \ .$$

□

Analog zum Satz 4.1 gilt :

SATZ *Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ n-mal differenzierbar, so existiert $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\lim_{y \to x} \varphi(y) = 0$, so daß gilt*

$$f(y) = T_x^n f(y) + \varphi(y) \cdot (y - x)^n \ .$$

Durch $(n-1)$-malige Anwendung der de l'Hospital Regel :

$$\lim_{y \to x} \varphi(y) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - T_x^n f(y)}{(y - x)^{n+1}} = \ldots$$

Claude Portenier
Wolfgang Gromes

$$\ldots = \lim_{y\to x} \frac{f^{(n-1)}(y) - (T_x^n f)^{(n-1)}(y)}{n \cdot \ldots \cdot 2 \cdot (y-x)} =$$

$$= \lim_{y\to x} \frac{f^{(n-1)}(y) - f^{(n-1)}(x) - f^{(n)}(x)\cdot(y-x)}{n! \cdot (y-x)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \left(\lim_{y\to x} \frac{f^{(n-1)}(y) - f^{(n-1)}(x)}{y-x} - f^{(n)}(x) \right) = 0 \ .$$

□

Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ unendlich oft differenzierbar, so schreibt man

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (y-x)^k + R_{n+1}(y) \ .$$

Falls für alle $y \in D$ gilt $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(y) = 0$, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (y-x)^k = f(y) - \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(y) = f(y) \ ,$$

d.h.

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (y-x)^k \ .$$

DEFINITION 3 Man sagt in diesem Fall, daß $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (\mathrm{id} - x)^k$ die *Taylorreihe* in x von f ist oder daß

$$f(x + \mathrm{id}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot \mathrm{id}^k \quad \text{auf } D - x := \{y - x \mid y \in D\}$$

als Potenzreihe darstellbar ist.

BEMERKUNG 3 Ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{id}^k$ eine auf $D-x$ konvergierende Potenzreihe mit $f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot h^k$ für alle $h \in D - x$, so folgt

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

nach dem Identitätssatz 3.3.ii.

HAUPTSATZ (Taylor-Formel) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß $f^{(n)}$ in J° differentzierbar ist, und $x \in J$.*

Für alle $y \in J$ existiert ein ξ strikt zwischen x und y mit

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (y-x)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (y-x)^{n+1} \ .$$

Man schreibt auch

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot h^k + \frac{f^{(n+1)}(x+\theta \cdot h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}$$

für ein $\theta \in \left]0,1\right[$.

Für $n = 1$ ist dies der Mittelwertsatz 4.3. Für beliebiges n läuft der Beweis analog. □

BEMERKUNG 4 Das Taylorpolynom von f in x gibt eine gute *lokale* Approximation von f , d.h. in der Nähe von x . Falls man $f^{(n+1)}$ auf J abschätzen kann, bekommt man sogar Abschätzungen von f auf J .

KOROLLAR *Genau dann ist*

$$f = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (\mathrm{id} - x)^k \ ,$$

wenn gilt

$$f^{(n+1)} = 0 \quad \textit{auf } J^{\circ} \ .$$

BEMERKUNG 5 Ist insbesondere p ein Polynom vom Grad n , so gilt

$$p(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x)}{k!} \cdot (y-x)^k \ .$$

Numerisch bekommt man diese Entwicklung schneller mit Hilfe der Polynomdivision (Horner Schema).

BEISPIEL 4 Die Taylorreihe von ln in 1 . Es gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k \quad \text{für alle } x \in \left]-1,1\right] \ .$$

Insbesondere gilt

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \ .$$

Für alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt nach obigem Beispiel 2

$$\ln^{(k)}(1) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot \frac{1}{\mathrm{id}^k}(1) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

und $\ln 1 = 0$. Somit existiert für jedes $x \in \left]-1,\infty\right[$ ein $\theta \in \left]0,1\right[$ mit

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} \cdot x^k + \frac{(-1)^n \cdot n!}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta \cdot x)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k + \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta \cdot x)^{n+1}} .$$

Für $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ ist $\frac{x^{n+1}}{(1+\theta \cdot x)^{n+1}} \leqslant 1$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta \cdot x)^{n+1}} = 0 ,$$

und somit ist $\ln(1+\mathrm{id})$ um 0 in Potenzreihe darstellbar :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k \quad \text{für alle } x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] .$$

Mit einem anderen Zugang können wir diese Darstellung verbessern. Nach Beispiel 2.6 hat die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \mathrm{id}^k$ Konvergenzradius 1 , also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \mathrm{id}^k : \left]-1,1\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k$$

definiert und nach Satz 4.2 differenzierbar mit Ableitung

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \mathrm{id}^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \mathrm{id}^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{id})^k = \frac{1}{1+\mathrm{id}} .$$

Daraus folgt

$$\left(\ln(1+\mathrm{id}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \mathrm{id}^k\right)' = 0 \quad \text{auf } \left]-1,1\right[,$$

d.h.

$$\ln(1+\mathrm{id}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \mathrm{id}^k \quad \text{auf } \left]-1,1\right[$$

nach Korollar 4.3.i, da $\ln 1 = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot 0^k$. □

BEISPIEL 5 Die Taylorreihe von arctan in 0 . Es gilt

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} \quad \text{für alle } x \in [-1,1] .$$

Insbesondere gilt

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} .$$

Wir wissen (vgl. Definition 3.7.2), daß die Funktion

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig und streng monoton wachsend ist. Ihre Ableitung ist

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} \ .$$

Die Hauptsätze über die Umkehrfunktion 3.2 und 4.2.vi zeigen, daß

$$\arctan := \overset{-1}{\tan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

stetig und differenzierbar ist, und es gilt

$$\arctan' = \cos^2(\arctan) = \frac{\cos^2}{\cos^2 + \sin^2}(\arctan) = \frac{1}{1+\tan^2}(\arctan) = \frac{1}{1+\mathrm{id}^2} \ .$$

Da

$$\frac{1}{1+\mathrm{id}^2} = \frac{1}{1-\left(-\mathrm{id}^2\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\mathrm{id}^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \mathrm{id}^{2k} \quad \text{auf } \left]-1,1\right[$$

und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \mathrm{id}^{2k+1}$ nach Beispiel 2.6 Konvergenzradius 1 hat, folgt wie oben

$$\left(\arctan - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \mathrm{id}^{2k+1}\right)' = \frac{1}{1+\mathrm{id}^2} - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \mathrm{id}^{2k+1}\right)' = 0 \ ,$$

also

$$\arctan = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \mathrm{id}^{2k+1} \quad \text{auf } \left]-1,1\right[\ ,$$

da $\arctan 0 = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot 0^{2k+1}$. Um die Formel in 1 zu beweisen, muß man zeigen, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \mathrm{id}^{2k+1}$ auf $[-1,1]$ konvergiert und eine stetige Funktion definiert. Da arctan stetig ist, folgt die Behauptung.

Die letzte Formel ergibt sich aus $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1$, d.h. $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. □

4.6 Iterative Lösung von Gleichungen und das Newton-Verfahren

Die drei Gleichungen
Nullstellen

$$f(x) = 0$$

Wertannahme

$$g(x) = w$$

Fixpunkte

$$\Phi(x) = x$$

sind äquivalent. Die letzte ist die günstigste zum Lösen.

Die erste kann man in der Form $f(x) + x = x$, die zweite in $g(x) + x - w = x$ schreiben. Es gibt aber auch andere Möglichkeiten :

BEISPIEL Das Newtonverfahren : Falls f differenzierbar ist und $f' \neq 0$ überall, so ist $f(x) = 0$ zu $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$ äquivalent.

Newton argumentiert sinnentsprechend folgendermaßen. Ist x_0 nahe bei einer Nullstelle von f , so gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi(x) \cdot (x - x_0) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \ .$$

Da der Term $\varphi(x) \cdot (x - x_0)$ klein ist, wird man "wohl" eine bessere Approximation der Nullstelle bekommen, wenn man die rechte Seite annuliert :

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \quad \text{, d.h.} \quad x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \ ,$$

usw...

Damit hat Newton die Methode der sukzessiven Approximationen, um eine Fixpunktgleichung $\Phi(x) = x$ zu lösen, fast erfunden. Ist x_0 gegeben, so definiert man falls möglich die Iterationsfolge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch Induktion

$$x_{k+1} := \Phi(x_k) \ .$$

Bleibt zu zeigen, daß diese Folge gegen einen Fixpunkt konvergiert.

HAUPTSATZ (Newtonverfahren) *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ undw2 $f(b) > 0$.*

(i) *Es gibt genau eine Nullstelle $\xi \in \,]a, b[$ von f .*

(ii) *Ist $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \geqslant 0$ gegeben, so ist die Iterationsfolge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit*

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ .

(iii) Ist f zweimal differenzierbar auf $[a,b]$ und existieren $m, M \in \mathbb{R}_+$, so daß $f'(\xi) \geqslant m > 0$ und $f'' \leqslant M$ auf $[\xi, b]$, so gilt

$$|x_{k+1} - \xi| \leqslant \frac{M}{2m} \cdot |x_{k+1} - x_k|^2 \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N} \ .$$

Beweis von (i). Nach dem Zwischenwertsatz 3.2 existiert eine Nullstelle $\xi \in \left]a,b\right[$ von f . Da f' monoton wachsend ist (Hauptsatz 4.4.ii), muß $f'(\xi) > 0$, sonst wäre $f' \leqslant 0$ auf $[a,\xi]$, also f monoton fallend (Korollar 4.3.ii) und somit $f(a) \geqslant 0$, im Widerspruch zu $f(a) < 0$! Es folgt wiederum mit Hauptsatz 4.4.ii, daß $f' \geqslant f'(\xi) > 0$ auf $[\xi, b]$ und mit Korollar 4.3.iii, daß f auf $[\xi, b]$ streng monoton wachsend ist. Dort gibt es also keine andere Nullstelle. Da ξ eine beliebige Nullstelle war, ist sie eindeutig.

Beweis von (ii). Da $f(x_0) \geqslant 0$, folgt $x_0 \geqslant \xi$, sonst wäre wegen $f(a) < 0$ noch eine Nullstelle $< \xi$. Damit ist $f'(x_0) \geqslant f'(\xi) > 0$ und

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ist wohl definert und $\leqslant x_0$. Nach Satz 4.4.iii gilt

$$f(x_1) \geqslant f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) = 0 \ ,$$

d.h. $x_1 \geqslant \xi$, und ebenso folgt

$$x_k \geqslant x_{k+1} \geqslant \xi \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ .$$

Nach Satz 2.3 ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen $x_\infty \geqslant \xi$. Aber f und f' sind stetig und es folgt

$$x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) = x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)} \ ,$$

also $f(x_\infty) = 0$ und somit $x_\infty = \xi$.

Beweis von (iii). Für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt aus dem Mittelwertsatz 4.3 die Existenz eines $\eta_k \in \left]\xi, x_k\right[$, so daß

$$\frac{f(x_{k+1})}{x_{k+1} - \xi} = \frac{f(x_{k+1}) - f(\xi)}{x_{k+1} - \xi} = f'(\eta_{k+1}) \geqslant m \ ,$$

also

$$|x_{k+1} - \xi| \leqslant \frac{f(x_{k+1})}{m} \ .$$

Betrachten wir jetzt die Funktion

$$g := f - f(x_k) - f'(x_k) \cdot (\mathrm{id} - x_k) - \frac{M}{2} \cdot (\mathrm{id} - x_k)^2 \ .$$

Es gilt $g' = f' - f'(x_k) - M \cdot (\mathrm{id} - x_k)$ und $g'' = f'' - M \leqslant 0$ auf $[\xi, b]$, also ist g' auf diesem Intervall monoton fallend. Da $g'(x_k) = 0$ ist $g' \geqslant 0$ auf $[\xi, x_k]$, also g dort monoton wachsend. Wegen $g(x_k) = 0$ und $x_{k+1} \leqslant x_k$ bekommt man $g(x_{k+1}) \leqslant 0$ und somit

$$f(x_{k+1}) \leqslant f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) + \frac{M}{2} \cdot (x_{k+1} - x_k)^2 = \frac{M}{2} \cdot (x_{k+1} - x_k)^2 \ ,$$

woraus die Behauptung folgt. □

BEMERKUNG 1 Die Abschätzung in (iii) bedeutet im Wesentlichen :
Bei jeden Iterationsschritt verdoppelt sich die Anzahl der gültigen Dezimalen.

BEMERKUNG 2 Der Satz gilt entsprechend für $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, und konkaven Funktionen mit $f(x_0) \leqslant 0$.

BEMERKUNG 3 Die Folge aus Beispiel 2.3.7

$$x_{k+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right) \quad \text{für } a > 0$$

ist die Iterationsfolge zu

$$f(x) := x^2 - a \ ,$$

da

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right) \ .$$

□

Es gibt einen sehr allgemeinen Satz über die Existenz eines Fixpunktes :

HAUPTSATZ (Banachsche Fixpunktsatz) *Sei X eine metrischer Raum, d.h. eine Menge versehen mit einer Distanzfunktion*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

für die gilt

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

$$d(x,y) = d(y,x)$$

und

$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$

für alle $x, y, z \in X$, und $\Phi : X \longrightarrow X$ eine Kontraktion, d.h. es gibt ein $q \in [0,1[$, so daß

$$d(\Phi(y), \Phi(x)) \leqslant q \cdot d(x,y) \ .$$

Ist X vollständig, dies ersetzt den Satz von Dedekind 1.5.ii, so besitzt Φ genau einen Fixpunkt $\xi \in X$, d.h. $\Phi(\xi) = \xi$, und ist $x_0 \in X$ beliebig so konvergiert die Iteratiosfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definert durch

$$x_{k+1} := \Phi(x_k)$$

gegen ξ .