Kapitel 5

INTEGRATION

In diesem Kapitel ist
$[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$
und
J ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$.

Fassung vom 7. Juli 2005

5.1 Integration von Treppenfunktionen

Für Funktionen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wollen wir das Integral $I(f)$ definieren als die vom Graphen von f eingeschlossene Fläche, negativ gezählt falls f negativ ist. Zuerst wird das Integral von Treppenfunktionen durch die Fläche der eingeschlossenen Rechtecken definiert, dann das Integral von allgemeinere Funktionen durch Approximation.

DEFINITION 1 Eine Funktion $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion* , wenn eine *Unterteilung* $U = (u_k)_{k=0,\ldots,p}$ von $[a, b]$, d.h.

$$a = u_0 < u_1 < \ldots < u_{p-1} < u_p = b \ ,$$

existiert mit

$$\varphi_{|]u_k,u_{k+1}[} \quad \text{ist konstant für } k = 0, \ldots, p-1 \ .$$

Wir bezeichnen auch mit $\varphi_{|]u_k,u_{k+1}[}$ diese Konstante !

Sei $\mathcal{T}([a, b])$ die Menge aller Treppenfunktion auf $[a, b]$.

Man beachte, daß $\varphi(x_j)$ beliebig in $\mathbb{R}$ sein kann und daß man die Unterteilung zu φ verfeinern kann. Z.B. sind $u = (u_k)_{k=0,\ldots,p}$ und $v = (v_l)_{l=0,\ldots,q}$ zwei Unterteilungen von $[a, b]$, so ist $u \cup v = (u_k)_{k=0,\ldots,p} \cup (v_l)_{l=0,\ldots,q} = (w_j)_{j=0,\ldots,r}$ wieder eine Unterteilung von $[a, b]$.

LEMMA *$\mathcal{T}([a, b])$ ist ein reeller Vektorverband, d.h. für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a, b])$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen*

$$\alpha \cdot f \quad , \quad \varphi + \psi \quad \text{und} \quad |\varphi|$$

Treppenfunktionen.

Ist u eine gemeinsame Unterteilung für φ und ψ , so ist es sofort ersichtlich, daß diese Funktionen konstant auf $]u_k, u_{k+1}[$ sind. □

Seien $\varphi \in \mathcal{T}([a, b])$, u, v zwei Unterteilungen von $[a, b]$ zu φ und $u \cup v =: w = (w_j)_{j=0,\ldots,r}$. Es ist $\varphi_{|]u_k,u_{k+1}[} = \varphi_{|]w_j,w_{j+1}[}$ für jedes Teilinterval $]w_j, w_{j+1}[$ von w mit $]w_j, w_{j+1}[\subset]u_k, u_{k+1}[$ und $]u_k, u_{k+1}[$ ist die Vereinigung aller diese $]w_j, w_{j+1}[$, also gilt

$$\sum_{k=0}^{p-1} \varphi_{|]u_k,u_{k+1}[} \cdot (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{p-1} \varphi_{|]u_k,u_{k+1}[} \cdot \sum_{]w_j,w_{j+1}[\subset]u_k,u_{k+1}[} (w_{j+1} - w_j) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{]w_j,w_{j+1}[\subset]u_k,u_{k+1}[} \varphi_{|]w_j,w_{j+1}[} \cdot (w_{j+1} - w_j) = \sum_{j=0}^{r-1} \varphi_{|]w_j,w_{j+1}[} \cdot (w_{j+1} - w_j) \ .$$

Analog gilt

$$\sum_{l=0}^{q-1} \varphi_{|]v_l,v_{l+1}[} \cdot (v_{l+1} - v_l) = \sum_{j=0}^{r-1} \varphi_{|]w_j,w_{j+1}[} \cdot (w_{j+1} - w_j) \ ,$$

d.h.

$$\sum_{k=0}^{p-1} \varphi_{|]u_k,u_{k+1}[} \cdot (u_{k+1} - u_k) = \sum_{l=0}^{q-1} \varphi_{|]v_l,v_{l+1}[} \cdot (v_{l+1} - v_l)$$

und somit ist die folgende Definition sinnvoll :

DEFINITION 2 Ist $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ und $u = (u_k)_{k=0,\ldots,p}$ eine zugehörige Unterteilung, so heißt

$$\int_a^b \varphi := \sum_{k=0}^{p-1} \varphi_{|]u_k,u_{k+1}[} \cdot (u_{k+1} - u_k)$$

das *Integral* von φ auf $[a,b]$.

HAUPTSATZ *Für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $c \in [a,b]$ gilt*

(i)

$$\int_a^b \alpha \cdot \varphi = \alpha \cdot \int_a^b \varphi \quad , \quad \int_a^b (\varphi + \psi) = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi \ ,$$

d.h.

$$\int_a^b : \mathcal{T}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longmapsto \int_a^b \varphi \quad \textit{ist eine Linearform.}$$

(ii)

$$\varphi \leqslant \psi \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b \psi \quad , \quad \left| \int_a^b \varphi \right| \leqslant \int_a^b |\varphi| \ .$$

(iii)

$$\int_c^c \varphi = 0 \quad , \quad \int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi \ .$$

Alles folgt direkt aus der Definition; ist z.B. u eine gemeinsame Unterteilung von φ und ψ , so folgt

$$\int_a^b (\varphi + \psi) = \sum_{k=0}^{p-1} (\varphi + \psi)_{|]u_k,u_{k+1}[} \cdot (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\varphi_{|]u_k,u_{k+1}[} + \psi_{|]u_k,u_{k+1}[} \right) \cdot (u_{k+1} - u_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \varphi_{|]u_k,u_{k+1}[} \cdot (u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=0}^{p-1} \psi_{|]u_k,u_{k+1}[} \cdot (u_{k+1} - u_k) = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi \ .$$

$\square$

5.2 Das Riemann-Integral

Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine (beschränkte) Funktion, so werden wir ihr Integral durch Approximation von oben wie von unten durch Treppenfunktionen definieren. Dies wird mit Hilfe von folgenden beiden Zahlen formuliert.

DEFINITION 1 Für alle Funktionen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ setzt man

$$\int_a^{b*} f := \inf_{\varphi \in \mathcal{T}([a,b]), \varphi \geqslant f} \int_a^b \varphi \in \overline{\mathbb{R}}$$

und

$$\int_{a*}^{b} f := \sup_{\psi \in \mathcal{T}([a,b]), \psi \leqslant f} \int_a^b \psi \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

Man nennt diese Zahlen das *Darbouxsche Oberintegral* bzw. *Unterintegral* von f .

SATZ *Für jede Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist*

$$\int_{a*}^{b} f \leqslant \int_a^{b*} f \quad , \quad \int_{a*}^{b} f = -\int_a^{b*} (-f)$$

und

$$\int_a^{b*} f < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist nach oben beschränkt.}$$

Gilt $m \leqslant f \leqslant M$ für bestimmte $m, M \in \mathbb{R}$, so ist

$$m \cdot (b-a) \leqslant \int_{a*}^{b} f \leqslant \int_a^{b*} f \leqslant M \cdot (b-a) \ .$$

Für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a, b])$ mit $\psi \leqslant f \leqslant \varphi$ folgt $\int_a^b \psi \leqslant \int_a^b \varphi$, also $\int_{a*}^b f \leqslant \int_a^{b*} f$. —— □

DEFINITION 2 Eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *(Riemann-) integrierbar* , falls gilt

$$\int_{a*}^{b} f = \int_a^{b*} f \in \mathbb{R} \ .$$

Diese Zahl heißt das *(Riemann-) Integral* von f und wird mit

$$\int_a^b f$$

bezeichnet. Man schreibt auch $\int_a^b f(x)\, dx$.

Sei $\mathcal{R}([a, b])$ die Menge aller integrierbaren Funktionen.

Claude Portenier
Wolfgang Gromes

BEISPIEL 1 Für alle $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ gilt

$$\int_{a*}^{b} \varphi = \int_{a}^{b} \varphi = \int_{a}^{b*} \varphi \ .$$

Jede Treppenfunktion ist integrierbar und die beiden Integrale stimmen überein.

LEMMA *Eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gewisse $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ existieren, so daß*

$$\psi \leqslant f \leqslant \varphi \quad \textit{und} \quad \int_a^b (\varphi - \psi) \leqslant \varepsilon \ .$$

HAUPTSATZ

(i) Jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

(ii) $\mathcal{R}([a,b])$ ist ein reeller Vektorverband von beschränkten Funktionen, d.h. für alle integrierbare Funktionen $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty[$, sind die Funktionen

$$\alpha \cdot f \quad , \quad f + g \quad , \quad |f|^p \quad , \quad \min(f,g) \quad , \quad \max(f,g) \quad \textit{und} \quad f \cdot g$$

auch integrierbar, und

$$\int_a^b : \mathcal{R}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist eine Linearform, d.h. es gilt

$$\int_a^b \alpha \cdot f = \alpha \cdot \int_a^b f \quad , \quad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \ ,$$

(iii) Für alle $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ gilt

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \leqslant \int_a^b g \quad \textit{und} \quad \left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f| \ .$$

(iv) Für $c \in [a,b]$ gilt

$$\int_c^c f = 0 \quad , \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \ .$$

Beweis von (i). Man zeigt zuerst : Für alle $\varepsilon > 0$ existieren $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ mit

$$\psi \leqslant f \leqslant \varphi \quad \text{und} \quad \varphi - \psi \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \ .$$

Dann folgt $\int_a^b (\varphi - \psi) \leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$.

Beweis von (ii). Dies ergibt sich durch Approximation im Sinne des obigen Lemmas. Z.B. für jedes $\varepsilon > 0$ existieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi, \gamma, \theta \in \mathcal{T}([a,b])$ mit

$$\psi \leqslant f \leqslant \varphi \quad , \quad \theta \leqslant g \leqslant \gamma \quad \text{und} \quad \int_a^b (\varphi - \psi) \ , \ \int_a^b (\gamma - \theta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Daraus folgt aber

$$\psi + \theta \leqslant f + g \leqslant \varphi + \gamma$$

und

$$\int_a^b \Big([\varphi + \gamma] - [\psi + \theta]\Big) \leqslant \int_a^b (\varphi - \psi) + \int_a^b (\gamma - \theta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ ,$$

d.h. $f + g \in \mathcal{R}([a,b])$, und aus

$$\int_a^b \psi + \int_a^b \theta = \int_a^b (\psi + \theta) \leqslant \int_{a*}^b (f+g) \leqslant \int_a^{b*} (f+g) \leqslant \int_a^b (\varphi + \gamma) \leqslant \int_a^b \psi + \int_a^b \theta + \varepsilon$$

bekommt man

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_{a*}^b f + \int_{a*}^b g \leqslant \int_{a*}^b (f+g) \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^{b*} (f+g) \leqslant \int_{a*}^b f + \int_{a*}^b g + \varepsilon = \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon \ ,$$

also $\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g)$. Man verfährt analog für $\alpha \cdot f$ und $|f|^p$. Dann folgt

$$\min(f,g) \ , \ \max(f,g) \in \mathcal{R}([a,b])$$

mit Hilfe der Formeln aus Beispiel 3.1.4.

Da $f^2 = |f|^2$, ergibt sich schließlich die Integrierbarkeit von $f \cdot g$ aus der Formel

$$f \cdot g = \frac{1}{4} \cdot \left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right] \ .$$

Beweis von (iii). Dies folgt sofort aus dem Hauptsatz 5.1.ii.

Beweis von (iv). Dies folgt sofort aus dem Hauptsatz 5.1.iii. □

BEISPIEL 2 Definiert man

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(*Dirichlet-Funktion*), so gilt

$$\int_0^{1*} f = 1 \quad \text{und} \quad \int_{0*}^1 f = 0 \ ,$$

d.h. diese Funktion ist nicht (Riemann-) integrierbar.

DEFINITION 3 Eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *(Riemann-) integrierbar* , falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind, und das *Integral* von f ist durch

$$\int_a^b f := \int_a^b \operatorname{Re} f + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im} f$$

definiert.

BEMERKUNG Man verifiziert leicht, daß die Menge $\mathcal{R}\left([a,b],\mathbb{C}\right)$ aller komplexwertigen integrierbaren Funktionen einen Vektorraum ist und

$$\int_a^b \diamond : \mathcal{R}\left([a,b],\mathbb{C}\right) \longrightarrow \mathbb{C} : f \longmapsto \int_a^b f$$

eine Linearform ist.

5.3 Die Hauptsätze der Differential- und Integral-Rechnung

SATZ (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Für jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b-a) \ .$$

Seien $\xi_{\min}$ und $\xi_{\max} \in [a,b]$ mit

$$f(\xi_{\min}) \leqslant f(x) \leqslant f(\xi_{\max}) \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

(Hauptsatz 3.2 über Annahme von Maximum und Minimum). Aus Hauptsatz 5.2.iii folgt

$$f(\xi_{\min}) \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant f(\xi_{\max}) \cdot (b-a)$$

oder

$$f(\xi_{\min}) \leqslant \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f \leqslant f(\xi_{\max}) \ ,$$

also die Existenz eines ξ zwischen $\xi_{\min}$ und $\xi_{\max}$ und somit $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f$ mit Hilfe des Zwischenwertsatzes 3.2. $\square$

BEMERKUNG 1 Die Zahl $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f$ ist der *Mittelwert* von f auf $[a,b]$.

Wir werden jetzt den Zusammenhang von Differential- und Integralrechnung über das unbestimmte Integral untersuchen. Dies wird die Grundlage zur Berechnungen von Integralen im nächsten Paragraph sein.

DEFINITION 1 Seien J ein Intervall , $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ und $x, y \in J$. Ist f auf dem Intervall $J_{x,y}$ mit Endpunkten x und y integrierbar, so schreibt man

$$\int_x^y f := \begin{cases} \int_x^y f & \\ & \text{falls} \\ -\int_y^x f & \end{cases} \begin{matrix} x \leqslant y \\ \\ x > y \end{matrix} \ .$$

SATZ *Ist $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von J integrierbar und $\tau \in J$ gegeben, so ist das* ***unbestimmte Integral*** *von f*

$$\int_\tau^\diamond f : J \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto \int_\tau^x f$$

eine stetige Funktion, die in τ verschwindet.

Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß f reell ist. Nach Hauptsatz 7.2.i ist $\int_\tau^\diamond f$ wohl definiert. Für alle $x, y \in J$ ist f auf einem großen abgeschlossenen Intervall, das x, y, τ enthält, beschränkt durch ein $M \in \mathbb{R}_+$. Falls $\tau \leqslant x \leqslant y$ gilt dann (Hauptsatz 7.2, iii un iv)

$$\left|\int_\tau^y f - \int_\tau^x f\right| = \left|\int_\tau^x f + \int_x^y f - \int_\tau^x f\right| = \left|\int_x^y f\right| \leqslant \int_x^y |f| \leqslant M \cdot (y - x)$$

da $|f| \leqslant M \cdot 1_{[x,y]}$. Analog geht man für die anderen Fälle vor und bekommt

$$\left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| \leqslant M \cdot |y - x| \ .$$

Da die rechte Seite gegen 0 für $y \to x$ konvergiert, ist $\int_a^\diamond f$ in x stetig. □

BEISPIEL 1 Im allgemeinen ist F nicht differenzierbar, wie z.B. $\int_0^\diamond \text{signum}$.

In der Tat gilt

$$\int_0^x \text{signum} = \begin{cases} x & \\ & \text{falls} \\ -x & \end{cases} \begin{matrix} x \geqslant 0 \\ \\ x < 0 \end{matrix} = |x| \ ,$$

d.h. $\int_\tau^\diamond \text{signum} = |\text{id}|$ (vgl. Bemerkung 4.1.1).

HAUPTSATZ (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig und $\tau \in J$, so ist $\int_\tau^\diamond f$ differenzierbar mit

$$\left(\int_\tau^\diamond f\right)' = f \ .$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß f reell ist. Da f stetig ist, ist f nach Hauptsatz 5.2.i auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von J integrierbar, und für alle $x, y \in J$ mit $x \neq y$ gilt

$$\frac{\int_\tau^y f - \int_\tau^x f}{y - x} = \frac{1}{y - x} \cdot \int_x^y f = f\left(\xi_y\right)$$

für ein $\xi_y \in I_{x,y}$ nach dem obigen Mittelwertsatz der Integralrechnung. Für $y \to x$ konvergiert auch ξ_y gegen x , und da f stetig ist, folgt

$$\lim_{y \to x} \frac{\int_\tau^y f - \int_\tau^x f}{y - x} = \lim_{y \to x} f\left(\xi_y\right) = f(x) \ ,$$

d.h. $\int_\tau^\diamond f$ ist in x differenzierbar mit Ableitung $f(x)$. □

Aufgabe Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f \geqslant 0$ und $\int_a^b f = 0$, so folgt $f = 0$.

DEFINITION 2 Seien $f, F : J \longrightarrow \mathbb{K}$ Funktionen. Dann heißt F *Stammfunktion* von f , falls F differenzierbar ist mit $F' = f$.

BEISPIEL 2 Für jedes $c \in \mathbb{K}$ ist $\mathrm{id} + c$ Stammfunktion von 1 und $\exp + c$ Stammfunktion von $\exp$.

BEMERKUNG 2 Der 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt, daß jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt.

HAUPTSATZ (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Seien $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ eine stetige Funktion, F eine Stammfunktion von f und $\tau \in J$.

(i) Dann existiert $c \in \mathbb{K}$ mit

$$F = \int_\tau^\diamond f + c \ .$$

(ii) Für alle $a, b \in J$ gilt

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: \Big[F\Big]_a^b \ .$$

Beweis von (i). Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß f reell ist. Es ist

$$\left(F - \int_\tau^\diamond f\right)' = F' - \left(\int_\tau^\diamond f\right)' = f - f = 0 \ ,$$

also $F - \int_\tau^\diamond f = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ nach Korollar 4.3.i.

Beweis von (ii). Für $\tau := a$ gilt mit (i) $F(a) = \int_a^a f + c = c$ und

$$\int_a^b f = F(b) - c = F(b) - F(a) \ .$$

$\square$

BEISPIEL 3 Da $\sin' = \cos$ und $\cos$ stetig ist, ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos = \Big[\sin\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 \ .$$

BEISPIEL 4 Ist $G \in \mathcal{C}^{(1)}(J)$, so ist $G' \in \mathcal{C}(J)$, und G ist eine Stammfunktion von G' , also gilt

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G' \quad \text{für alle } a, b \in J \ .$$

Beschreibt $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}$ die Entfernung (Position) eines Objektes längs einer Kurve von einem Ursprung zur Zeit $\tau \in J$ (negativ gezählt für $t < \tau$) und ist $\gamma \in \mathcal{C}^{(1)}(J)$, so ist die Geschwindigkeit γ' stetig und

$$\gamma(t) - \gamma(\tau) = \int_\tau^t \gamma' = \left(\frac{1}{t-\tau} \cdot \int_\tau^t \gamma'\right) \cdot (t - \tau) \ ,$$

d.h. die Wegstrecke ist das Integral der Geschwindigkeit und das Produkt der Mittlere Geschwindigkeit mit dem Zeitintervall.

BEMERKUNG 3 Häufig werden Stammfunktionen von f mit $\int f$ (oder sogar $\int f(x)\, dx$) bezeichnet.

BEMERKUNG 4 Es gibt "elementare Funktionen" die keine "elementare" Stammfunktionen besitzen, z.B. $e^{-\mathrm{id}^2}$. Man definiert eine neue Funktion, die *Fehler-Funktion* erf durch

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\mathrm{id}^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \,.$$

5.4 Berechnung von Integralen

Wir geben jetzt Regeln zur Umformung von Integralen an.

HAUPTSATZ *Seien $a, b \in J$.*

(i) ***Partielle Integration*** *Sind $F, G \in \mathcal{C}^{(1)}(J)$, so gilt*

$$\int_a^b F' \cdot G = \Big[F \cdot G\Big]_a^b - \int_a^b F \cdot G' \ .$$

(ii) ***Substitutionsregel*** *Ist $f \in \mathcal{C}(J)$, I ein Intervall in $\mathbb{R}$, $\gamma \in \mathcal{C}^{(1)}(I)$, $\alpha, \beta \in I$ mit $\gamma(I_{\alpha,\beta}) \subset J$, so gilt*

$$\int_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)} f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(\gamma(y)) \cdot \gamma'(y)\ dy \ .$$

Man sagt, daß man die Variablenänderung $x = \gamma(y)$ durchgeführt hat. Man merke sich die mnemotechnische Regel

$$\frac{dx}{dy} = \gamma'(y) \quad \textit{oder} \quad dx = \gamma'(y)\ dy$$

und

$$y = \alpha \quad \Longrightarrow \quad x = \gamma(\alpha) \quad \textit{und} \quad y = \beta \quad \Longrightarrow \quad x = \gamma(\beta) \ .$$

Ist γ streng monoton, d.h. eine Bijektion von I auf $\gamma(I)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\overset{-1}{\gamma}(a)}^{\overset{-1}{\gamma}(b)} f(\gamma(y)) \cdot \gamma'(y)\ dy \ .$$

Beweis von (i). Da $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G' \in \mathcal{C}(J)$, gilt nach dem 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 5.3.ii

$$\int_a^b (F' \cdot G + F \cdot G') = \int_a^b (F \cdot G)' = \Big[F \cdot G\Big]_a^b \ ,$$

also die Behauptung mit der Linearität des Integrals.

Beweis von (ii). Ist F eine Stammfunktion von f (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 5.3), so ist nach der Kettenregel (Hauptsatz 4.2.v)

$$(F \circ \gamma)' = F' \circ \gamma \cdot \gamma' = f \circ \gamma \cdot \gamma' \ ,$$

d.h. $F \circ \gamma$ ist Stammfunktion von $f \circ \gamma \cdot \gamma'$, also folgt

$$\int_a^b f \circ \gamma \cdot \gamma' = \int_a^b (F \circ \gamma)' = \Big[F \circ \gamma\Big]_a^b = \Big[F\Big]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f$$

mit Hilfe des 2. Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung 5.3.ii. □

BEISPIEL 1 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b t \cdot e^t \, dt = b \cdot e^b - a \cdot e^a - \left(e^b - e^a\right) \ .$$

Mit Hilfe der partielle Integration folgt

$$\int_a^b t \cdot e^t \, dt = \left[t \cdot e^t\right]_a^b - \int_a^b e^t \, dt = b \cdot e^b - a \cdot e^a - \left(e^b - e^a\right) \ .$$

Nach eine solche Rechnung kann man zur Kontrolle eine Probe durchführen. Die rechte Seite als Funktion von b muß eine Stammfunktion von $\mathrm{id} \cdot e^{\mathrm{id}}$ sein :

$$\left(\mathrm{id} \cdot e^{\mathrm{id}} - x \cdot e^x - \left(e^{\mathrm{id}} - e^x\right)\right)' = e^{\mathrm{id}} + \mathrm{id} \cdot e^{\mathrm{id}} - e^{\mathrm{id}} = \mathrm{id} \cdot e^{\mathrm{id}} \ !$$

□

BEISPIEL 2 Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ gilt

$$\int_a^b \ln = \left[\mathrm{id} \cdot (\ln - 1)\right]_a^b \ .$$

Insbesondere ist $\mathrm{id} \cdot (\ln - 1)$ eine Stammfunktion von $\ln$.

Mit Hilfe der partielle Integration folgt

$$\int_a^b \ln = \int_a^b 1 \cdot \ln = \left[\mathrm{id} \cdot \ln\right]_a^b - \int_a^b \mathrm{id} \cdot \frac{1}{\mathrm{id}} = \left[\mathrm{id} \cdot (\ln - 1)\right]_a^b \ .$$

□

BEISPIEL 3 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \cos^2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\sin \cdot \cos + \mathrm{id}\right]_a^b \quad \text{und} \quad \int_a^b \sin^2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\mathrm{id} - \sin \cdot \cos\right]_a^b \ .$$

Speziell gilt

$$\int_0^\pi \cos^2 = \int_0^\pi \sin^2 = \frac{\pi}{2} \ .$$

Mit Hilfe der partielle Integration folgt

$$\int_a^b \cos^2 = \int_a^b \cos \cdot \cos = \left[\sin \cdot \cos\right]_a^b - \int_a^b \sin \cdot (-\sin) =$$

$$= \left[\sin \cdot \cos\right]_a^b + \int_a^b \left(1 - \cos^2\right) = \left[\sin \cdot \cos + \mathrm{id}\right]_a^b - \int_a^b \cos^2 \ ,$$

also die Behauptung. Daraus folgt

$$\int_a^b \sin^2 = \int_a^b \left(1 - \cos^2\right) = \left[\mathrm{id}\right]_a^b - \frac{1}{2} \cdot \left[\sin \cdot \cos + \mathrm{id}\right]_a^b = \frac{1}{2} \cdot \left[\mathrm{id} - \sin \cdot \cos\right]_a^b \ .$$

□

BEISPIEL 4 Für $\gamma \in \mathcal{C}^{(1)}([\alpha,\beta])$ mit $\gamma > 0$ auf $[\alpha,\beta]$ gilt

$$\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'}{\gamma} = \ln \frac{\gamma(\beta)}{\gamma(\alpha)} .$$

Mit Hilfe der Substitutionsregel ergibt sich

$$\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'}{\gamma} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\mathrm{id}} \circ \gamma \cdot \gamma' = \int_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)} \frac{1}{\mathrm{id}} = \Big[\ln\Big]_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)} = \ln \frac{\gamma(\beta)}{\gamma(\alpha)} .$$

□

BEISPIEL 5 Falls $[\alpha,\beta] \subset \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ gilt

$$\int_\alpha^\beta \tan = \ln \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} .$$

Insbesondere ist $-\ln \circ \cos_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ eine Stammfunktion von $\tan$.

Nach dem vorigen Beispiel ergibt sich

$$\int_\alpha^\beta \tan = -\int_\alpha^\beta \frac{-\sin}{\cos} = -\int_\alpha^\beta \frac{\cos'}{\cos} = \ln \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} .$$

□

BEISPIEL 6 Sei $r > 0$. Es gilt

$$\int_{-r}^x \sqrt{r^2-t^2}\,dt = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{x}{r} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} + \arcsin\frac{x}{r} + \frac{\pi}{2} \right) .$$

Insbesondere

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2-t^2}\,dt = \frac{\pi \cdot r^2}{2} ,$$

d.h. die Fläche des Kreises mit Radius r ist $\pi \cdot r^2$.

Mit Hilfe der Substitution

$$\gamma : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-r,r] : s \longmapsto t = r \cdot \sin s ,$$

die streng monoton wachsend ist, bekommt man $\overset{-1}{\gamma}(t) = \arcsin\frac{t}{r}$, $\overset{-1}{\gamma}(-r) = -\frac{\pi}{2}$, $\overset{-1}{\gamma}(x) = \arcsin\frac{x}{r}$, $dt = r \cdot \cos s\,ds$. Da $\cos \geqslant 0$ auf $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ folgt

$$\int_{-r}^x \sqrt{r^2-t^2}\,dt = r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\frac{x}{r}} \sqrt{1-\sin^2 s} \cdot \cos s\,ds = r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\frac{x}{r}} \cos^2 s\,ds =$$

$$= r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\sin \cdot \sqrt{1-\sin^2} + \mathrm{id}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\frac{x}{r}} = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{x}{r} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} + \arcsin\frac{x}{r} + \frac{\pi}{2} \right) .$$

□

BEISPIEL 7 (Partialbruchzerlegung) Diese Methode kann man für alle Integrale mit rationalen Integranden anwenden.

Z.B. sei $\pm 1 \notin [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b \frac{1}{\mathrm{id}^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \Big[\ln |\mathrm{id} - 1| - \ln |\mathrm{id} + 1| \Big]_a^b \ .$$

Man möchte diese Funktion als Partialbruch zerlegen : Man schreibt

$$\frac{1}{\mathrm{id}^2 - 1} = \frac{1}{(\mathrm{id} - 1) \cdot (\mathrm{id} + 1)} = \frac{A}{\mathrm{id} - 1} + \frac{B}{\mathrm{id} + 1} \ .$$

Dies ist äquivalent zu

$$1 = A \cdot (\mathrm{id} + 1) + B \cdot (\mathrm{id} - 1) = (A + B) \cdot \mathrm{id} + A - B \ ,$$

und gilt nur wenn $A + B = 0$ und $A - B = 1$, d.h. $A = \frac{1}{2}$ und $B = -\frac{1}{2}$. Somit ist

$$\int_a^b \frac{1}{\mathrm{id}^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b \left(\frac{1}{\mathrm{id} - 1} - \frac{1}{\mathrm{id} + 1} \right)$$

und die Behauptung folgt, da $\ln |\mathrm{id}|$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{\mathrm{id}}$ auf $\mathbb{R}^*$ ist. $\square$

5.5 Uneigentliche Integrale

DEFINITION Seien $a \in \mathbb{R}$, $c \in [a, \infty]$ und $f : [a, c[\longrightarrow \mathbb{K}$, so daß $f \in \mathcal{R}([a, b])$ für alle $b \in [a, c[$. Existiert

$$\int_a^c f := \lim_{b \to c-} \int_a^b f \in \mathbb{R} ,$$

so heißt $\int_a^c f$ *konvergent* . Ist $c \in \mathbb{R}$, $\int_a^c f$ konvergent und $f \notin \mathcal{R}([a, c])$, so heißt f *uneigentlich integrierbar* .

Analog für untere Grenzen.

BEMERKUNG Ist $\int_a^c f$ konvergent und $f \in \mathcal{R}([a, c])$, also $|f| \leqslant M$ für ein $M \in \mathbb{R}_+$, so gilt

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f \right| = \left| \int_b^c f \right| \leqslant \int_b^c |f| \leqslant M \cdot \int_b^c 1 = M \cdot (c - b) \to 0$$

für $b \to c$. Damit stimmt obige Definition des Integrals mit der aus Definition 5.2.2.

BEISPIEL 1 Für $s \in \mathbb{R}$ ist genau dann das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{\mathrm{id}^s}$ konvergent, wenn $s > 1$. In diesem Fall filt

$$\int_1^\infty \frac{1}{\mathrm{id}^s} = \frac{1}{s-1} .$$

Denn für $s \neq 1$ konvergiert das Integral

$$\int_1^b \frac{1}{\mathrm{id}^s} = \left[\frac{1}{1-s} \cdot \mathrm{id}^{-s+1} \right]_1^b = \frac{1}{(1-s) \cdot b^{s-1}} - \frac{1}{1-s}$$

für $b \to \infty$ nur wenn $s > 1$ und in diesem Fall gegen $\frac{1}{s-1}$. Bleibt noch der Fall $n = 1$: Aber

$$\int_1^b \frac{1}{\mathrm{id}} = \Big[\ln \Big]_1^b = \ln b$$

ist nicht konvergent für $b \to \infty$. □

BEISPIEL 2 Für $s \in \mathbb{R}$ ist genau dann das Integral $\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{id}^s}$ konvergent, wenn $s < 1$. In diesem Fall filt

$$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{id}^s} = \frac{1}{1-s} .$$

Denn für $s \neq 1$ konvergiert das Integral

$$\int_a^1 \frac{1}{\mathrm{id}^s} = \left[\frac{1}{1-s} \cdot \mathrm{id}^{-s+1} \right]_a^1 = \frac{1}{1-s} - \frac{a^{1-s}}{1-s}$$

Claude Portenier
Wolfgang Gromes

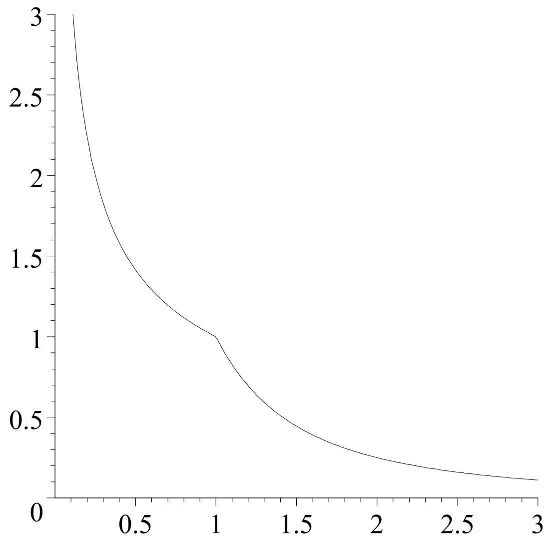
für $a \to 0$ nur wenn $s < 1$ und in diesem Fall gegen $\frac{1}{1-s}$. Bleibt noch der Fall $n = 1$: Aber

$$\int_a^1 \frac{1}{\mathrm{id}} = \Big[\ln\Big]_a^1 = -\ln a$$

ist nicht konvergent für $a \to 0$. □

BEISPIEL 3 Die Funktion

$$f := 1_{\mathbb{R}_+^*}(1-\mathrm{id}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{id}}} + 1_{\mathbb{R}_+^*}(\mathrm{id}-1) \cdot \frac{1}{\mathrm{id}^2} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & & x \in \left]0,1\right] \\ & \text{falls} & \\ \frac{1}{x^2} & & x \in \left]1,\infty\right[\end{cases}$$



ist uneigentlich integrierbar und

$$\int_0^\infty f = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{id}}} + \int_1^\infty \frac{1}{\mathrm{id}^2} = 2 + 1 = 3 \ .$$

BEISPIEL 4 Es gilt

$$\int_0^1 \ln = -1 \ .$$

Nach den Beispielen 5.4.2 und 4.4.2 folgt

$$\int_a^1 \ln = \Big[\mathrm{id} \cdot (\ln -1)\Big]_a^1 = -1 - a \cdot \ln a + a \to -1$$

und somit die Behauptung. □

5.6 Doppelintegrale

Für Funktionen von zwei Variablen $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$, wobei D eine "vernünftige" Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist, kann man analog der Begriff Integral von f über D definieren : Man schreibt

$$\int_D f = \iint_D f(x,y)\ d(x,y) \ .$$

Ist $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig, so gilt der Satz von Fubini

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\ d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right) dy \ .$$

Ist $B_R := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R \}$ und $f : B_R \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig, so gilt der Transformationssatz

$$\iint_{B_R} f(x,y)\ d(x,y) = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)\ d\varphi \right) \cdot r\, dr$$

mit der Variablenänderung $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$.

BEISPIEL 1 Wir möchten $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ berechnen. Es gilt

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^2 = \left(\lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} e^{-x^2}\, dx \right)^2 = \lim_{k\to\infty} \left(\int_{-k}^{k} e^{-x^2}\, dx \right) \cdot \left(\int_{-k}^{k} e^{-y^2}\, dy \right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \iint_{[-k,k]\times[-k,k]} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\, d(x,y) = \lim_{k\to\infty} \iint_{B_k} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\, d(x,y) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_0^k \left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\, d\varphi \right) \cdot r\, dr = 2\pi \cdot \lim_{k\to\infty} \int_0^k r \cdot e^{-r^2}\, dr =$$

$$\underset{t=r^2}{=} \pi \cdot \lim_{k\to\infty} \int_0^{\sqrt{k}} e^{-t}\, dt = \pi \cdot \lim_{k\to\infty} \Big[-e^{-t} \Big]_0^{\sqrt{k}} = \pi \cdot \lim_{k\to\infty} \left(-e^{-\sqrt{k}} + 1 \right) = \pi \ ,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \ .$$