Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Übungen zur Vorlesung

MATHEMATIK II

Prof. Dr. C. Portenier

unter Mitarbeit von

Michael Koch

Marburg, Sommersemester 2005

Fassung vom 1. Juli 2005

Mathematik II

Blatt 1

Abgabe : Freitag, 22.4.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (2 Punkte). Zeigen Sie:

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{für } n \geqslant 1 \ .$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \quad \text{für } n \geqslant 1 \ .$$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Finden Sie für das Produkt

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

eine "kleine" algebraische Formel und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 3$ gilt

$$n^2 \leqslant 2^n \ .$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 \ .$$

Aufgabe 4 (mündlich). Zeigen Sie: ist K ein endlicher Körper, so lässt sich K nicht anordnen.

Zum Erwerb des Übungsscheins der Vorlesung Mathematik II sind die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

- Regelmäßige und aktive Mitarbeit im Tutorium.
- Von den schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben sind 50% der Punkte zu erreichen.
- Von den mündlich zu bearbeitenden Aufgaben sind 1/3 vorzubereiten.
- Bestehen einer Klausur.

Mathematik II

Blatt 2

Abgabe : Freitag, 29.4.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Stellen Sie fest, welche der folgenden Implikationen über reelle Zahlen x, a, b allgemeingültig bzw. i.a. falsch sind. Man beweise die allgemeingültigen Aussagen und gebe für die übrigen Aussagen ein Gegenbeispiel an:

(a)

$$|x-a| < b \quad \Longrightarrow \quad a-b < x < a+b\ .$$

(b)

$$|x-a| < b \quad \Longrightarrow \quad x > a-2b\ .$$

(c)

$$\text{" } ab > 1 \text{ und } a < 1 \text{ "} \quad \Longleftrightarrow \quad b > 1\ .$$

(d)

$$x \cdot \left(x - 2a^2\right) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \left|x - a^2\right| > a^2\ .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Beschränktheit nach oben und bestimmen Sie gegebenenfalls das Supremum. Welche dieser Suprema sind Maxima ?

(a)

$$\left\{ 1 - \frac{1}{n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

(b)

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x^2}{(x+2)^2} > 1 \text{ und } x \neq -2 \right\}$$

(c)

$$\left\{ \frac{x}{|x+3|} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq -3 \right\}$$

Aufgabe 3 (mündlich). Sei X eine Menge, $R \subset X \times X$ eine Ordnung, d.h. mit der Bezeichnung

$$x \leqslant y :\Longleftrightarrow (x, y) \in R$$

für alle $x, y, z \in X$ gilt

O1

$$x \leqslant y \text{ und } y \leqslant z \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant z$$

O2

$$x \leqslant y \text{ und } y \leqslant x \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

O3

$$x \leqslant x$$

R heißt eine Total-Ordnung, wenn zusätzlich gilt

$$x \leqslant y \quad \text{oder} \quad y \leqslant x \ .$$

Zeigen Sie, daß die lexikographische Ordnung auf der Menge der Wörter eine Total-Ordnung ist. Dabei gelte für zwei Wörter

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ und } y = (y_1, \ldots, y_m) \quad \text{mit } x_j, y_j \in \{a, b, \ldots, z\}$$

$x \leqslant y$ wenn

(a) $n \leqslant m$ und $x_k = y_k$ für alle $k = 1, \ldots, n$
oder

(b) es existiert $k \in \{1, \ldots, \min\,(n, m)\}$, so daß

$$x_j = y_j \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, k-1 \quad \text{und} \quad x_k < y_k \ ,$$

letzteres im Sinne der alphabetischen Ordnung.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Berechnen Sie

(a) 114 im Dreiersystem,

$$114 = (d_k\, d_{k-1} \ldots\, d_1\, d_0)_3 \ .$$

(b) $\dfrac{1}{5}$ als periodischen dyadischen Bruch,

$$\frac{1}{5} = (0, d_{-1} d_{-2} \cdots)_2 \ .$$

Mathematik II

Blatt 3

Abgabe : Freitag, 6.5.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Konstruieren Sie Beispiele dafür, dass in der Gleitpunktarithmetik (mit fixer Länge der Mantisse in Normalform) die Assoziativgesetze und das Distributivgesetz nicht uneingeschränkt gelten. Dabei soll zur Herstellung der Normalform in üblicher Weise gerundet werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2-2}{3x^3+2x+17} \ .$$

(b) Für $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right) \ .$$

(c)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} \ .$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty} x - \lfloor x \rfloor \ ,$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl unterhalb x ist, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ mit $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$. Skizze !

Aufgabe 3 (4 Punkte).

(a) Zeigen Sie : Ist $a \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$a \leqslant 1 + n \cdot \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad a^{\frac{1}{n}} \leqslant 1 + \varepsilon \ .$$

(b) Folgern Sie: Für alle $a \in \mathbb{R}_+^*$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \ .$$

Aufgabe 4 (mündlich). Zeigen Sie : Ist $b, b' \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \neq b'$, so existieren Umgebungen U von b, V von b' mit $U \cap V = \emptyset$. Folgern Sie: Existiert $\lim_{x\to a} f(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$, so ist der Grenzwert eindeutig.

Mathematik II

Blatt 4

Abgabe : Freitag, 13.5.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei $a_0 > 0$ und $a_{k+1} = a_0 + (a_k)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie induktiv :

(a) Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

(b) Ist $a_0 \leqslant \frac{1}{4}$, so ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Berechnen Sie in diesem Fall den Grenzwert.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Seien $x, a \in \mathbb{R}_+^*$ mit $a^2 > x$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Iterationsfolge aus Beispiel 2.3.7 :

$$a_0 := a \quad \text{und} \quad a_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_k + \frac{x}{a_k} \right) ,$$

und r_k der relative Fehler,

$$r_k := \left| \frac{a_k - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right| .$$

(a) Zeigen Sie

$$r_{k+1} = \frac{r_k^2}{2\,(r_k + 1)} \leqslant \frac{1}{2} \cdot r_k^2 \leqslant 2 \cdot \left(\frac{r_0}{2} \right)^{2^{k+1}} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

(b) Für $x = 10$ und $a = \frac{10}{3}$ ist $r_0 < 0,06$.

Wieviele Iterationsschritte benötigt man, um $\sqrt{10}$ mit einem relativen Fehler $< 10^{-100}$ zu berechnen?

Aufgabe 3 (5 Punkte).

(a) Zeigen Sie : Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist $\left(z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge im Fall $|z| < 1$, sowie $\left(z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, also divergent, im Fall $|z| > 1$.

(b) Für $r > 0$ sei $z = \frac{1+i}{r}$. Berechnen Sie z^n für $n = 2, 3, 4, 5$ und skizzieren Sie z und diese Punkte für $r = 2$.

(c) Bestimmen Sie in (b) alle $r > 0$, für die $\left(z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 4 (mündlich). Zeigen Sie die sogenannte *Parallelogrammgleichung* ,

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2 \cdot \left(|z|^2 + |w|^2\right)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$, und geben Sie eine geometrische Deutung.

Mathematik II

Blatt 5

Abgabe : Freitag, 20.5.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechnen Sie :

(a)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{9k^2+2k+1} - 3k \ .$$

(b)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{k} \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \ .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Zeigen Sie, daß die folgenden Reihen konvergieren und berechnen Sie die Summen.

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^k} \ .$$

(b)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} \ .$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+6}{3^k} \ .$$

Aufgabe 3 (mündlich). Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \ .$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \iff \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \text{ konvergent} \ .$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \text{ konvergent} \ .$$

Aufgabe 4 (5 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3 + 3k}{3^k} \; .$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \; .$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^k$$

(in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$).

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k \cdot (k+1)}} \; .$$

Mathematik II

Blatt 6

Abgabe : Freitag, 27.5.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, daß $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot c_k$ absolut konvergiert.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Bestimmen Sie den Konvergenzradius von

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot (2x)^k \ .$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k} \ .$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2005} \cdot x^k \ .$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}$$

(setze $y := x^2$).

(e)

$$\sum_{k=n}^{\infty} x^k \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \ .$$

Berechnen Sie auch den Grenzwert.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 - 2x^2 + x \ .$$

(a) Begründen Sie, daß $g := f_{|[1,\infty[}$ eine Umkehrfunktion $\overset{-1}{g}$ besitzt.

(b) Wo ist $\overset{-1}{g}$ definiert ?

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f und $\overset{-1}{g}$ in einem Diagramm.

Aufgabe 4 (mündlich). Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

Zeigen Sie : $f = g$, d.h. $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Mathematik II

Blatt 7

Abgabe : Freitag, 3.6.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x^3 + 5x^2 - 2}{\left(x^2 + 1\right)^2} \ .$$

Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle hat. Von welcher Form ist $f\left(\mathbb{R}\right)$?

Aufgabe 2 (mündlich). Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} & \\ & \text{falls} \\ \frac{x}{x+2} & \end{cases} \quad \begin{matrix} x < 0 \\ \\ x \geqslant 0 \end{matrix}$$

auf ganz R stetig ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Es sei $a_0 := 1$ und $a_{k+1} := \sqrt{a_k} + \frac{15}{4}$. Zeigen Sie, dass $\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{1 + x^2} \ .$$

Auf welchen Intervallen besitzt f eine Umkehrfunktion ? Berechnen Sie diese und skizzieren Sie deren Graphen.

Mathematik II

Blatt 8

Abgabe : Freitag, 10.6.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Zeigen : Ist p ein Polynom vom Grad $n > 0$ und a eine Nullstelle von p , so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) \ ,$$

wobei q ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \left[0, \frac{n+1}{2}\right]$.

Zeigen Sie

$$\frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x^n}{n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} \quad \text{für alle } k \geqslant n$$

und folgern Sie

$$0 \leqslant \exp(x) - \sum_{k \in n} \frac{x^k}{k!} \leqslant 2 \cdot \frac{x^n}{n!} \ .$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right) \ ,$$

der *Sinus Hyperbolicus* . Zeigen Sie : sinh ist bijektiv und für die Umkehrfunktion arsinh , *Area Sinus Hyperbolicus* , gilt:

$$\operatorname{arsinh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R} \ .$$

Hinweis: Auflösen von $\ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) = x$ nach y .

Aufgabe 4 (mündlich). Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für $a, b \in \left]0, \infty\right[$ und $x, y \in \mathbb{R}$:

(a)
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \ .$$

(b)
$$(a^x) \cdot (b^x) = (a \cdot b)^x \ .$$

(c)
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \ .$$

Klausur : Montag, 18. 7. 2005, Hörsaal A (Chemie), Lahnberge, 9.30 - 12.00 Uhr.

Mathematik II

Blatt 9

Abgabe : Freitag, 17.6.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (mündlich).

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der komplexen Darstellung von cos :

$$\cos^3 t = \frac{1}{4} \cdot \cos(3t) + \frac{3}{4} \cdot \cos t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \ .$$

(b) Zeigen Sie : Ist $z \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, so hat die Gleichung

$$w^n = z$$

n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$. Skizzieren Sie für $z = 8i$ und $n = 3$ die Lösungen.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

(a)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{e^x}{1 + x^2} \ .$$

(b)

$$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^x \ .$$

(c)

$$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} - \sqrt{1 + x^2} \ .$$

(d)

$$f = \operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Benutzen Sie dabei die Formel zur Berechnung der Ableitung von Umkehrfunktionen und die Darstellung von arsinh aus Blatt 8, Aufgabe 3.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x > 0$.

(b) Zeigen Sie : f ist in 0 differenzierbar und $f'(0) = 0$.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f .

Aufgabe 4 (3 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte auf Existenz und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \ .$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{für } a \in \mathbb{R} \ .$$

Mathematik II

Blatt 10

Abgabe : Freitag, 24.6.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (5 Punkte). Sei

$$\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\chi \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R})$ ist. Skizzieren Sie für $\varepsilon = 2, 1, \frac{1}{2}$ die Funktion

$$\chi_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{\varepsilon} \cdot \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Brechnen Sie die folgenden Grenzwerte :

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} .$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x \cdot \sin x} .$$

(c)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} .$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} .$$

Aufgabe 3 (mündlich). Es sei $0 < a \leqslant 1$. Zeigen Sie, daß das Polynom $a \cdot x^3 - 3a \cdot x + b$ für jeden Wert von b höchstens eine Nullstelle auf dem Intervall $[-a, a]$ besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

auf Differenzierbarkeit und Extrema und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen.

Mathematik II

Blatt 11

Abgabe : Freitag, 1.7.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei

$$f :]-1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto (1+x)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Berechnen Sie für $n = 0, 1, 2, 3$ das n-te Taylorpolynom T_0^n von f in 0 und zeigen Sie:

Für $x \geqslant 0$ existiert ein $\alpha < 0$ mit $0 \geqslant (1+x)^{\frac{1}{2}} - T_0^3(x) \geqslant \alpha \cdot x^4$. Geben Sie α konkret an.

Aufgabe 2 (mündlich). Berechnen Sie für $|x| < 1$ die Summe der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \ .$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ x \longmapsto x^3 - x^2 - 2x - 1$.

(a) Bestimmen Sie ein Intervall J auf dem die Voraussetzungen des Newtonverfahrens gelten.

(b) Berechnen Sie mit einem geeigneten Startwert x_0 die Iterationswerte x_1, x_2, x_3 aus dem Newtonverfahren und geben Sie für die Nullstelle ξ eine Abschätzung von $|x_3 - \xi|$ an.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $f : \ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f([a, b]) \subset [a, b]$ und $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie :

(a) f besitzt einen Fixpunkt ξ (Hinweis ZWS).

(b) Der Fixpunkt ist eindeutig (Hinweis MWS).

(c) Ist außerdem $f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$, $x_0 = a$, $x_{k+1} = f(x_k)$, so konvergiert x_n gegen den Fixpunkt.

Mathematik II

Blatt 12

Abgabe : Freitag, 8.7.2005, 11 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (6 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \ .$$

(b)

$$\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx \ .$$

(c)

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx \ .$$

(d)

$$\int_1^2 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} \, dx \ .$$

Aufgabe 2 (3 Punkte) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f \geqslant 0$ und $\int_a^b f(x) \, dx = 0$. Zeigen Sie, daß $f = 0$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale. – Dazu gehört die Begründung der Konvergenz.

(a)

$$\int_0^1 \ln x \, dx$$

(b)

$$\int_0^{\infty} x^5 e^{-2x} \, dx \ .$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} \, dx \ .$$

Aufgabe 4 (mündlich) Es sei f stetig auf $[a, b]$ und φ, ψ seien differenzierbar auf $[\alpha, \beta]$ mit $\varphi([\alpha, \beta]), \psi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. Dann gilt

$$\left(\int_{\varphi(\diamond)}^{\psi(\diamond)} f(t)\ dt\right)'(x) = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\phi(x)) \cdot \varphi'(x) \ .$$

Hinweis : Kettenregel.