

Fachbereich Mathematik und Informatik  
Philipps-Universität Marburg



# ONDELETTES

Claude Portenier

Semestre d'été 1998



# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Distributions</b>	<b>1</b>
1.1	La notion de distribution . . . . .	2
1.2	Dérivation . . . . .	4
1.3	Multiplication, translation et dilatation . . . . .	7
1.4	Primitives . . . . .	9
1.5	Circuit RC . . . . .	11
1.6	Principe de superposition . . . . .	15
1.7	Filtres . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>21</b>
2.1	Fonctions périodiques et coefficients de Fourier . . . . .	22
2.2	Formule d'inversion . . . . .	27
2.3	Distributions sur $\mathbb{T}^n$ . . . . .	33
2.4	Distributions périodiques . . . . .	37
2.5	Périodisée d'une distribution à support compact . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Transformation de Fourier</b>	<b>43</b>
3.1	Intégrales de Fourier . . . . .	44

## TABLE DES MATIÈRES

3.2	Formule d'inversion . . . . .	46
3.3	Convolution des fonctions . . . . .	48
3.4	Distributions tempérées . . . . .	50
3.5	Transformation de Fourier d'une distribution . . . . .	52
3.6	Convolution des distributions . . . . .	54
3.7	Fonctions à spectre compact . . . . .	56
3.8	Filtres de convolution . . . . .	59
3.9	Echantillonnage d'un signal . . . . .	61
3.10	Théorème de Shannon . . . . .	64
3.11	Théorème de Shannon dans $\mathbf{L}^2$ . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Décompositions continues en ondelettes</b>	<b>69</b>
4.1	Transformation de Gabor . . . . .	70
4.2	Décomposition continue en ondelettes. . . . .	74
4.3	Théorème de reconstruction . . . . .	79
4.4	Exemples d'ondelettes . . . . .	81
4.5	Exemples de transformées en ondelettes . . . . .	90
4.6	Ondelettes régulières . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Bases d'ondelettes</b>	<b>95</b>
5.1	Analyses multi-échelles de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ . . . . .	96
5.2	Construction du père des ondelettes . . . . .	101
5.3	Construction de la mère des ondelettes . . . . .	108
<b>6</b>	<b>Polynômes trigonométriques et symboles de Legendre</b>	<b>119</b>
6.1	Formules trigonométriques . . . . .	120
6.2	Formule de Jackson . . . . .	122
6.3	Sommes de Gauss . . . . .	124
6.4	Polynômes trigonométriques de Bernstein . . . . .	127
6.5	La fonction de Carleman . . . . .	129

# Introduction

L'étude d'un signal  $f$ , défini sur  $\mathbb{R}$ , se fait en général à l'aide de la transformation de Fourier, discrète s'il est périodique de période 1 par exemple, ou continue dans le cas général. On décompose, i.e. on analyse,  $f$  en série de Fourier

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{2\pi i k \cdot \diamond} \quad \text{avec} \quad c_k = \int_0^1 e^{-2\pi i k \cdot t} \cdot f(t) dt$$

dans le premier cas, ou en intégrale de Fourier

$$f = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\lambda) \cdot e^{2\pi i \lambda \cdot \diamond} d\lambda \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \lambda \cdot t} \cdot f(t) dt$$

dans le second. La suite  $(e^{2\pi i k \cdot \diamond})_{k \in \mathbb{Z}}$  des exponentielles 1-périodiques est une base hilbertienne de  $\mathbf{L}^2([0, 1])$ , tandis que la famille  $(e^{2\pi i \lambda \cdot \diamond})_{\lambda \in \mathbb{R}}$  de toutes les exponentielles, qui n'est pas dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , en fournit une décomposition continue, mais nécessite un outil plus élaboré. Ces ondes élémentaires sont caractérisées par leur fréquence  $k$ , respectivement  $\lambda$ , bien déterminée. Toutefois, cette méthode s'est avérée dans les applications pratiques avoir un inconvénient majeur : les ondes élémentaires ont une extension spatiale complète. On a essayé d'y remédier en introduisant la transformation de Fourier à fenêtre glissante  $\rho$  due à D. Gabor dans les années 1940

$$f = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}_\rho f(\lambda, s) \cdot \rho(\diamond - s) \cdot e^{2\pi i \lambda \cdot \diamond} d\lambda ds$$

avec

$$\mathcal{F}_\rho f(\lambda, s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \lambda \cdot t} \cdot \bar{\rho}(t - s) \cdot f(t) dt,$$

par exemple  $\rho(t) = e^{-\pi t^2}$ . Son défaut est la largeur fixe de la fenêtre. C'est un géophysicien J. Morlet qui, pour des problèmes de prospection pétrolière, a proposé en 1983 une nouvelle méthode. Soit  $\zeta$  une fonction de base, appelée ondelette-mère. Pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose

$$\zeta_{s,\varepsilon}(t) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \zeta\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad c_\zeta := \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{1/2}.$$

## Introduction

Si  $\zeta = \check{\zeta}$  et  $c_\zeta < \infty$ , on a

$$f = c_\zeta^{-2} \cdot \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}f(s, \varepsilon) \cdot \zeta_{s, \varepsilon} \frac{ds d\varepsilon}{\varepsilon^2} \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}f(s, \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\zeta_{s, \varepsilon}}(t) \cdot f(t) dt .$$

Morlet a tout d'abord utilisé la fonction  $\zeta(t) = e^{-t^2/2} \cdot \cos 5t$ , qui malheureusement ne satisfait pas à la condition  $c_\zeta < \infty$ ; par contre on peut prendre la 8ème dérivée d'une gaussienne. C'est finalement Y. Meyer qui a pû en 1985 construire une ondelette  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  telle, qu'en posant

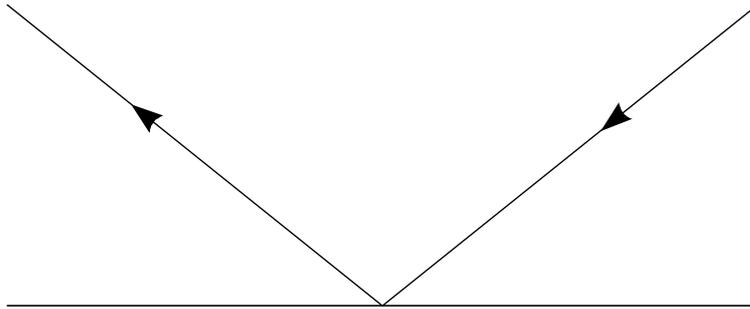
$$\zeta_{j, k}(t) := 2^{j/2} \cdot \zeta(2^j t - k) ,$$

la suite double  $(\zeta_{j, k})_{j, k \in \mathbb{Z}}$  soit une base hilbertienne de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , i.e.

$$f = \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} c_{j, k} \cdot \zeta_{j, k} \quad \text{avec} \quad c_{j, k} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\zeta_{j, k}}(t) \cdot f(t) dt .$$

La mise en oeuvre de ce programme avec un appareil assez proche de notre intuition nous oblige à introduire les distributions. Voici une manière de comprendre la nécessité de leur utilisation, et le rôle tout à fait naturel qu'elles jouent.

Considérons une boule de billard et le problème de la réflexion sur une bande au temps  $t = 0$ :



Admettons qu'il existe un appareil (idéel) qui mesure la variation de la seconde coordonnée  $p$  de l'impulsion entre deux temps donnés. Nous supposons que  $p$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Par l'expérience nous savons que, pour  $s < t$  avec  $s, t \neq 0$ , on a

$$p(t) - p(s) = \begin{cases} \alpha & \text{si } s < 0 < t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour un certain  $\alpha > 0$  dépendant de la vitesse et de l'angle d'incidence. Si ce phénomène est décrit par une fonction force de composante  $F$ , la loi de Newton  $F = \dot{p}$  entraîne

$$p(t) - p(s) = \int_s^t \dot{p} = \int_s^t F = \int 1_{[s, t]} \cdot F .$$

Si  $F$  est continue, voire même  $F \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$ , le théorème de la convergence dominée de Lebesgue montre, en choisissant des suites  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que  $s_k < 0 < t_k$  et  $\lim_k s_k = \lim_k t_k = 0$ , que

$$\int 1_{[s_k, t_k]} \cdot F \longrightarrow 0 ,$$

ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de fonction force. Par quoi faut-il la remplacer ?

En fait l'expérience nous fournit la correspondance

$$1_{[s, t]} \longmapsto \alpha \cdot 1_{[s, t]}(0) ,$$

puis la forme linéaire

$$\varphi \longmapsto \alpha \cdot \varphi(0) : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} ,$$

où  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des fonctions en escalier sur  $\mathbb{R}$ . Cela signifie qu'une fonction en escalier (fonction test) correspond à un appareil (idéal), l'addition de deux fonctions s'exprimant par un certain amalgame des appareils correspondants. Un appareil réel ne réagissant pas instantanément, il est certainement plus naturel de lui associer une fonction continue, voire même indéfiniment dérivable, à support compact.

Remarquons en outre que l'opération de moyenne pondérée de  $F$

$$\varphi \longmapsto \int \varphi \cdot F ,$$

est plus proche de la réalité expérimentale, une fonction n'étant connue ponctuellement que par certaines limites de telles moyennes.

Ceci montre qu'il est plus général et plus naturel de considérer des formes linéaires que des fonctions. L'espace vectoriel des fonctions-test peut être de nature très différente suivant les besoins :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbb{R}) &\text{ pour les probabilités (théorie de la mesure)} \\ \mathcal{K}(\mathbb{R}) &\text{ pour l'analyse (théorie de l'intégration)} \\ \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\text{ pour l'analyse fonctionnelle (théorie des distributions).} \end{aligned}$$

Nous allons dans la suite concentrer notre attention sur le dernier cas.



# Chapitre 1

## Distributions

## 1.1 La notion de distribution

Soit  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , ou plus généralement une sous-variété avec bord de  $\mathbb{R}^n$ . Rappelons que  $\mathcal{D}(X)$  désigne l'espace vectoriel des fonctions complexes indéfiniment dérivables à support compact dans  $X$ . L'exemple standard d'une telle fonction est

$$\rho(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{(|x|^2-1)}} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

**DEFINITION 1** Nous dirons qu'une forme linéaire

$$\xi : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \xi(\varphi) =: \langle \varphi, \xi \rangle ,$$

i.e. un élément du dual algébrique  $\mathcal{D}(X)^*$  de  $\mathcal{D}(X)$ , est une *distribution (algébrique) sur  $X$* . Nous écrivons  $\langle \varphi, \xi \rangle_{\mathcal{D}}$  si cela est nécessaire.

La notion de distribution habituelle nécessite encore une condition de continuité, pour restreindre la classe d'objets considérés et obtenir des théorèmes de structure intéressants. Mais nous n'en aurons pas besoin dans la suite.

Rappelons que la structure d'espace vectoriel de  $\mathcal{D}(X)^*$  est donnée, pour tout  $\xi, \eta \in \mathcal{D}(X)^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ , par

$$\langle \varphi, \alpha \cdot \xi \rangle = \alpha \cdot \langle \varphi, \xi \rangle \quad \text{et} \quad \langle \varphi, \xi + \eta \rangle = \langle \varphi, \xi \rangle + \langle \varphi, \eta \rangle .$$

**EXEMPLE 1** Soit  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(X)$ . Il est clair que

$$[f] : \varphi \longmapsto \int \varphi \cdot f = \int \varphi(x) \cdot f(x) dx$$

est une forme linéaire sur  $\mathcal{D}(X)$ , donc une distribution sur  $X$ . L'application

$$f \longmapsto [f] : \mathbf{L}_{loc}^1(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)^*$$

est évidemment linéaire et on peut montrer qu'elle est injective (exercice), ce qui signifie que la forme linéaire  $[f]$  détermine parfaitement la classe  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(X)$ , ou bien la fonction  $f$  à un ensemble de mesure nulle près. Ceci montre que les distributions sont des "fonctions généralisées".

L'exemple le plus simple d'une distribution qui n'est pas de la forme  $[f]$  est celle de Dirac (exercice) :

**DEFINITION 2** Pour tout  $x \in X$ , on dit que la forme linéaire d'évaluation en  $x$

$$\delta_x : \varphi \longmapsto \varphi(x)$$

est la *distribution de Dirac en  $x$* . Si  $X$  est une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $0 \in X$ , on écrit  $\delta$  à la place de  $\delta_0$ .

**EXEMPLE 2** Soit  $\alpha$  une fonction croissante sur un intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbb{R}$ . Il est clair que

$$\lambda_\alpha : \varphi \longmapsto \int \varphi(t) d\alpha(t)$$

est une forme linéaire sur  $\mathcal{D}(J)$ , i.e une distribution sur  $J$ .

Par exemple

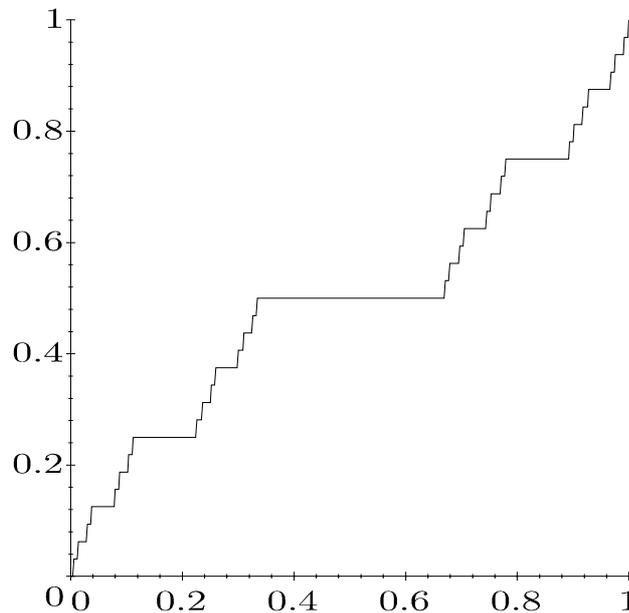
$$\lambda := \lambda_{\text{id}} : \varphi \longmapsto \int \varphi$$

est l'intégrale de Lebesgue. Avec les notations ci-dessus on a

$$\langle \varphi, \lambda \rangle = \int \varphi = \langle \varphi, [1] \rangle,$$

i.e. l'intégrale de Lebesgue est la fonction généralisée 1 !

La fonction  $\alpha$  strictement croissante et continue, dont le graphe est en première approximation



définit la mesure de Hausdorff sur l'ensemble de Cantor. Rappelons que cet ensemble a une mesure de Lebesgue nulle !

**DEFINITION 3** Pour tout  $t \in J$ , on pose  $h_t := 1_{[t, \infty[ J}$  et on dit que c'est la *fonction de Heaviside* en  $t$ . Si  $0 \in J$ , on écrit par commodité  $h$  à la place de  $h_0$ .

On a  $\int \varphi dh_t = \varphi(t)$ , ce qui montre que  $\lambda_{h_t} = \varepsilon_t$  est la distribution de Dirac en  $t$ .

## 1.2 Dérivation

Si  $f \in \mathcal{C}^{(1)}(X)$  et  $j \in \{1, \dots, n\}$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ , on a

$$\langle \varphi, [\partial_j f] \rangle = \int \varphi \cdot \partial_j f = - \int \partial_j \varphi \cdot f = - \langle \partial_j \varphi, f \rangle$$

en ayant utilisé une partition de l'unité, le théorème de Fubini et la formule d'intégration par partie. Ceci nous conduit à poser la

**DEFINITION 1** Pour tout  $\xi \in \mathcal{D}(X)^*$  et  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on définit une distribution  $\partial_j \xi$  par

$$\langle \varphi, \partial_j \xi \rangle := - \langle \partial_j \varphi, \xi \rangle ,$$

dite la *dérivée de  $\xi$  au sens des distributions*. Plus généralement, si  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on pose  $|\alpha| := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$  et on définit la distribution  $\partial^\alpha \xi$  par

$$\langle \varphi, \partial^\alpha \xi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha \varphi, \xi \rangle .$$

Le calcul du début montre par récurrence que :

**PROPOSITION** Si  $f \in \mathcal{C}^{(k)}(X)$ , alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  avec  $|\alpha| \leq k$ , la dérivée au sens des distributions coïncide avec la dérivée classique  $\partial^\alpha f$ , i.e.

$$\partial^\alpha [f] = [\partial^\alpha f] .$$

Nous travaillons dans les exemples qui suivent dans l'espace des distributions sur  $\mathbb{R}$  ou un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ .

**EXEMPLE 1** Calculons

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \partial [|\text{id}|] \rangle &= - \langle \partial \varphi, [|\text{id}|] \rangle = - \int \partial \varphi(s) \cdot |s| \, ds = \int_{-\infty}^0 \partial \varphi(s) \cdot s \, ds - \int_0^{\infty} \partial \varphi(s) \cdot s \, ds = \\ &= - \int_{-\infty}^0 \varphi(s) \, ds + \int_0^{\infty} \varphi(s) \, ds = \int \varphi(s) \cdot \text{sgn}(s) \, ds = \langle \varphi, \text{sgn} \rangle . \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\partial [|\text{id}|] = [\text{sgn}] .$$

**EXEMPLE 2** De même, on a

$$\langle \varphi, \partial [\text{sgn}] \rangle = - \langle \partial \varphi, [\text{sgn}] \rangle = \int_{-\infty}^0 \partial \varphi(s) \, ds - \int_0^{\infty} \partial \varphi(s) \, ds = \varphi(0) + \varphi(0) = \langle \varphi, 2\delta \rangle ,$$

ce qui montre que

$$\partial [\text{sgn}] = 2\delta .$$

Avec un calcul analogue on obtient

$$\partial [h_t] = \delta_t .$$

Plus généralement :

**EXEMPLE 3** Soit  $\alpha$  une fonction croissante sur  $\mathbb{R}$  . Etant donné  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $(t_j)$  une subdivision de son support, il existe  $s_j \in [t_j, t_{j+1}]$  avec

$$\partial\varphi(s_j) = \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{t_{j+1} - t_j} .$$

Grâce au théorème de Lebesgue, il vient alors

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \partial[\alpha] \rangle &= - \langle \partial\varphi, \alpha \rangle = - \int \partial\varphi(x) \cdot \alpha(x-) \, dx = - \lim \sum \partial\varphi(s_j) \cdot \alpha(t_{j+1}-) \cdot (t_{j+1} - t_j) = \\ &= - \lim \sum [\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)] \cdot \alpha(t_{j+1}-) = - \lim \left[ \sum \varphi(t_j) \alpha(t_j-) - \sum \varphi(t_j) \alpha(t_{j+1}-) \right] = \\ &= \lim \sum \varphi(t_j) \cdot [\alpha(t_{j+1}-) - \alpha(t_j-)] = \int \varphi \, d\alpha = \langle \varphi, \lambda_\alpha \rangle , \end{aligned}$$

car  $\sum \partial\varphi(s_j) \cdot 1_{[t_j, t_{j+1}[}$  converge ponctuellement vers  $\partial\varphi$  et  $\sum \alpha(t_{j+1}-) \cdot 1_{[t_j, t_{j+1}[}$  vers  $\alpha(\diamond-)$  .  
Ainsi

$$\partial[\alpha] = \lambda_\alpha .$$

Avant la théorie des distributions, les électrotechniciens et les physiciens ont “résolu” le problème du choc d’une boule de billard en introduisant un nouvel objet  $\delta$  , dite fonction de Dirac , ayant les propriétés suivantes :

$$\delta(t) = 0 \text{ pour tout } t \neq 0 \text{ et } \delta(0) = \infty ,$$

mais

$$\int \delta(t) \, dt = 1 !$$

On en “déduisait” que

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(s) \, ds \quad , \text{ i.e. } \partial h = \delta ,$$

puis que

$$\int \varphi(t) \cdot \delta(t) \, dt = \varphi(t) \cdot h(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int \partial\varphi(t) \cdot h(t) \, dt = - \int_0^{\infty} \partial\varphi(t) \, dt = \varphi(0) .$$

Ces calculs sont analogues à ceux que nous avons fait ci-dessus, la seule différence provenant du fait que les objets avec lesquels nous travaillons sont mathématiquement bien définis.

**EXEMPLE 4** Soient  $F$  une fonction sur  $J$  telle qu’il existe  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(J)$  et  $\tau \in J$  avec

$$F = F(\tau) + \int_{\tau}^{\diamond} f(s) \, ds .$$

Alors  $F$  est une fonction continue, on a

$$\partial[F] = [f] ,$$

$f$  est univoquement déterminée par  $F$  et la formule est vraie pour tout  $\tau \in J$ .

Il est clair que  $F$  est continue (théorème de Lebesgue). Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ , grâce au théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \partial[F] \rangle &= -\langle \partial\varphi, F \rangle = -\int \partial\varphi(t) \cdot c dt - \int \partial\varphi(t) \cdot \left( \int_{\tau}^t f(s) ds \right) dt = \\ &= \int_{\inf J}^{\tau} \left( \int_{\inf J}^s \partial\varphi(t) dt \right) \cdot f(s) ds - \int_{\tau}^{\sup J} \left( \int_s^{\sup J} \partial\varphi(t) dt \right) \cdot f(s) ds = \\ &= \int_{\inf J}^{\tau} \varphi(s) \cdot f(s) ds + \int_{\tau}^{\sup J} \varphi(s) \cdot f(s) ds = \int \varphi(s) \cdot f(s) ds = \langle \varphi, [f] \rangle . \end{aligned}$$

Si  $\tilde{f} \in \mathbf{L}_{loc}^1(J)$  est telle que  $F = F(\tau) + \int_{\tau}^{\diamond} \tilde{f}(s) ds$ , on a

$$[f] = \partial[F] = [\tilde{f}] ,$$

donc  $f = \tilde{f}$  (comme classe de fonctions), puisque l'application  $f \mapsto [f] : \mathbf{L}_{loc}^1(J) \rightarrow \mathcal{D}(J)^*$  est injective (cf. exemple 1.1.1). La formule est également vraie pour  $\tilde{\tau} \in J$ , puisque

$$F(\tau) + \int_{\tau}^{\diamond} f = F(\tau) + \int_{\tau}^{\tilde{\tau}} f + \int_{\tilde{\tau}}^{\diamond} f = F(\tilde{\tau}) + \int_{\tilde{\tau}}^{\diamond} f . \quad \square$$

**DEFINITION 2** On dit qu'une fonction  $F$  sur  $J$  est (localement) absolument continue s'il existe  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(J)$  telle que

$$F = F(\tau) + \int_{\tau}^{\diamond} f(s) ds \quad \text{pour tout } \tau \in J .$$

La fonction  $f$  est dite la *dérivée* de  $F$  et on écrit  $f = \partial F$ . On désigne par  $\mathcal{AC}(J)$  l'ensemble des fonctions absolument continues sur  $J$ .

Il est clair qu'une fonction continûment dérivable sur  $J$  est absolument continue.

**REMARQUE** Lebesgue a montré que  $F$  est dérivable *p.p.* et que cette dérivée, définie *p.p.*, est égale *p.p.* à  $f$ . Ce résultat n'est pas utile car on ne peut pas le généraliser aux dimensions supérieures.

**THEOREME** Si  $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ , alors  $F \cdot G \in \mathcal{AC}(J)$  et

$$\partial(F \cdot G) = \partial F \cdot G + F \cdot \partial G .$$

La démonstration est laissée en exercice.  $\square$

### 1.3 Multiplication, translation et dilatation

Soit  $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$  et  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(X)$ . Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ , on a alors

$$\langle \varphi, [g \cdot f] \rangle = \int \varphi \cdot g \cdot f = \langle g \cdot \varphi, [f] \rangle$$

puisque  $g \cdot \varphi \in \mathcal{D}(X)$ . Ceci nous conduit à poser la

**DEFINITION 1** Pour tout  $\xi \in \mathcal{D}(X)^*$  et  $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ , on définit la distribution *produit*  $g \cdot \xi$  de  $\xi$  par  $g$  en posant

$$\langle \varphi, g \cdot \xi \rangle := \langle g \cdot \varphi, \xi \rangle .$$

Le calcul du début montre que, pour tout  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(X)$ , on a

$$g \cdot [f] = [g \cdot f] .$$

**EXEMPLE** Pour tout  $x \in X$ , on a  $g \cdot \delta_x = g(x) \cdot \delta_x$ .

En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ , il vient

$$\langle \varphi, g \cdot \delta_x \rangle = \langle g \cdot \varphi, \delta_x \rangle = g(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \langle \varphi, \delta_x \rangle = \langle \varphi, g(x) \cdot \delta_x \rangle . \quad \square$$

**PROPOSITION (Règle du produit)** On a

$$\partial_j (g \cdot \xi) = \partial_j g \cdot \xi + g \cdot \partial_j \xi .$$

En effet

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \partial_j g \cdot \xi + g \cdot \partial_j \xi \rangle &= \langle \partial_j g \cdot \varphi, \xi \rangle + \langle g \cdot \varphi, \partial_j \xi \rangle = \langle \partial_j g \cdot \varphi, \xi \rangle - \langle \partial_j (g \cdot \varphi), \xi \rangle = \\ &= - \langle g \cdot \partial_j \varphi, \xi \rangle = - \langle \partial_j \varphi, g \cdot \xi \rangle = \langle \varphi, \partial_j (g \cdot \xi) \rangle . \quad \square \end{aligned}$$

**REMARQUE** Par récurrence on démontre la formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha (g \cdot \xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \partial^\beta g \cdot \partial^{\alpha-\beta} \xi .$$

Si  $f$  est une fonction sur  $\mathbb{R}^n$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , on définit la *fonction translatée*  $T_y f = f_y$  par

$$f_y(x) := f(x - y) .$$

Si  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ , alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\langle \varphi, [f_y] \rangle = \int \varphi(x) \cdot f(x - y) dx = \int \varphi(x + y) \cdot f(x) dx = \langle \varphi_{-y}, [f] \rangle .$$

Ceci nous conduit à poser la

**DEFINITION 2** Si  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ , la *distribution translatée*  $T_y \xi = \xi_y$  est définie par

$$\langle \varphi, \xi_y \rangle := \langle \varphi_{-y}, \xi \rangle .$$

Le calcul ci-dessus montre que

$$[f]_y = [f_y] .$$

Il est évident que  $h_t$  et  $\delta_t$  sont les translatées de  $h$  et  $\delta$ .

**PROPOSITION (Invariance par translation de la dérivation)** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$  et  $y \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\partial^\alpha (\xi_y) = (\partial^\alpha \xi)_y .$$

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \partial^\alpha (\xi_y) \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \cdot \langle \partial^\alpha \varphi, \xi_y \rangle = (-1)^{|\alpha|} \cdot \langle (\partial^\alpha \varphi)_{-y}, \xi \rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \cdot \langle \partial^\alpha (\varphi_{-y}), \xi \rangle = \langle \varphi_{-y}, \partial^\alpha \xi \rangle = \langle \varphi, (\partial^\alpha \xi)_y \rangle . \quad \square \end{aligned}$$

Si  $f$  est une fonction sur  $\mathbb{R}^n$ , pour tout  $h \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , on définit la *fonction dilatée*  $S_h f$  par

$$S_h f(x) := \frac{1}{h^{\frac{n}{2}}} \cdot f\left(\frac{x}{h}\right) .$$

Si  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ , alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\langle \varphi, [S_h f] \rangle = \int \varphi(x) \cdot \frac{1}{h^{\frac{n}{2}}} \cdot f\left(\frac{x}{h}\right) dx = \int h^{\frac{n}{2}} \cdot \varphi(hx) \cdot f(x) dx = \langle S_{\frac{1}{h}} \varphi, [f] \rangle .$$

Ceci nous conduit à poser la définition

**DEFINITION 3** Si  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ , la *distribution dilatée*  $S_h \xi$  est définie par

$$\langle \varphi, S_h \xi \rangle := \left\langle S_{\frac{1}{h}} \varphi, \xi \right\rangle .$$

Le calcul ci-dessus montre que  $S_h [f] = [S_h f]$ .

**REMARQUE** Le cas particulier  $h = -1$  de la *symétrie centrale* se note

$$\check{f} := S_{-1} f \quad \text{et} \quad \check{\xi} := S_{-1} \xi .$$

## 1.4 Primitives

**PROPOSITION** Soit  $J$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $\xi \in \mathcal{D}(J)^*$ . Si  $\partial\xi = 0$ , alors  $\xi$  est une fonction constante.

Si  $\xi \neq 0$  et  $\chi \in \mathcal{D}(J)$  avec  $\langle \chi, \xi \rangle = 1$ , alors

$$\mathcal{D}(J) = \text{Ker } \xi \oplus \mathbb{C} \cdot \chi .$$

Remarquons que l'unique décomposition de  $\varphi \in \mathcal{D}(J)$  par rapport à cette somme s'écrit sous la forme

$$\varphi = [\varphi - \langle \varphi, \xi \rangle \cdot \chi] + \langle \varphi, \xi \rangle \cdot \chi .$$

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ , on a

$$\langle \partial\varphi, \xi \rangle = -\langle \varphi, \partial\xi \rangle = 0 ,$$

donc

$$\partial(\mathcal{D}(J)) \subset \text{Ker } \xi .$$

En particulier, puisque  $\partial\lambda = \partial[1] = 0$ , il vient

$$\partial(\mathcal{D}(J)) \subset \text{Ker } \lambda = \left\{ \psi \in \mathcal{D}(J) \mid \int \psi = 0 \right\} .$$

En fait on a égalité, car si  $\psi \in \text{Ker } \lambda$ , en posant

$$\varphi := \int_{\leftarrow}^{\circ} \psi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(J) ,$$

on a  $\varphi$  à support compact et  $\partial\varphi = \psi$ . Ainsi  $\text{Ker } \lambda \subset \text{Ker } \xi$ , mais puisque ces sous-espaces vectoriels sont de codimension 1, ils sont égaux. Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ , on a alors

$$\varphi - \langle \varphi, \xi \rangle \cdot \chi \in \text{Ker } \xi = \text{Ker } \lambda ,$$

donc

$$\langle \varphi, \xi \rangle \langle \chi, \lambda \rangle = \langle \varphi, \lambda \rangle .$$

Comme  $\chi \notin \text{Ker } \xi = \text{Ker } \lambda$ , on a  $\langle \chi, \lambda \rangle \neq 0$  et par suite

$$\langle \varphi, \xi \rangle = \left\langle \varphi, \frac{1}{\langle \chi, \lambda \rangle} \cdot \lambda \right\rangle = \left\langle \varphi, \frac{[1]}{\langle \chi, \lambda \rangle} \right\rangle ,$$

i.e.

$$\xi = \left[ \frac{1}{\langle \chi, \lambda \rangle} \right] . \quad \square$$

**THEOREME** Toute distribution possède une primitive :

Pour tout  $\eta \in \mathcal{D}(J)^*$ , il existe  $\xi \in \mathcal{D}(J)^*$  avec  $\partial\xi = \eta$ . Cette distribution est univoquement déterminée à une fonction constante additive près.

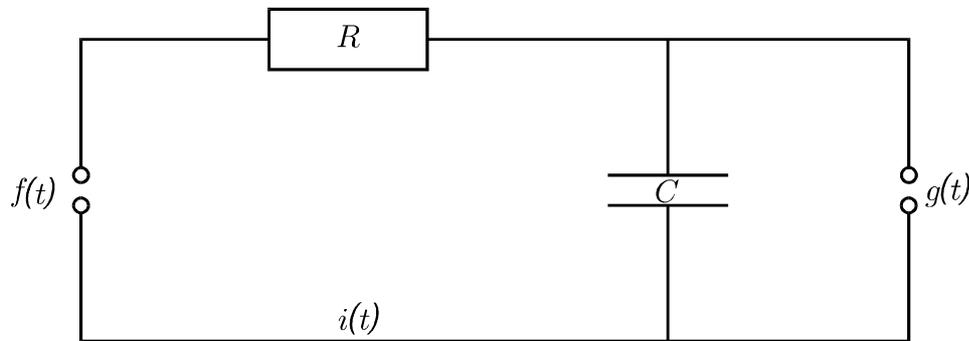
La démonstration est laissée en exercice.  $\square$

**COROLLAIRE** Si  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(J)$ , alors toute solution  $\xi \in \mathcal{D}(J)^*$  de  $\partial\xi = [f]$  est de la forme  $\xi = [F]$  avec  $F \in \mathcal{AC}(J)$  et  $\partial F = f$ , i.e. si  $\tau \in J$  est donné, on a

$$F = c + \int_{\tau}^{\diamond} f \quad \text{pour un certain } c \in \mathbb{C} .$$

**REMARQUE** On peut adapter les constructions que nous avons faites dans le cadre des distributions à d'autres situations faisant intervenir un espace vectoriel (de fonctions) test  $F$  et l'espace vectoriel  $F^*$  des distributions correspondantes, pour autant que les opérations effectuées aient un sens. Il est en général utile d'introduire une topologie d'espace localement convexe sur  $F$ .

## 1.5 Circuit RC



Les lois de Kirchhoff et d'Ohm fournissent tout d'abord l'équation

$$R \cdot i + g = f ,$$

puis celle du condensateur les relations

$$i = \partial Q \quad \text{et} \quad g = \frac{1}{C} \cdot Q .$$

Ainsi

$$RC \cdot \partial g + g = f .$$

On considère ce circuit comme un *filtre*, de *signal d'entrée*  $f$  et de *signal de sortie*  $g$ . On dit aussi que  $g$  est le *signal filtré*, ou la *réponse*. Dans le cas continûment dérivable la théorie des équations différentielles ordinaires montre que ce dernier signal est univoquement déterminé par une condition initiale, en 0 par exemple. Pratiquement il est plus utile d'imposer la condition

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 0 ,$$

mais cela nécessite une condition supplémentaire sur  $f$ .

Nous allons maintenant nous placer dans le cadre des distributions. Peut-on résoudre, au sens des distributions, l'équation différentielle

$$RC \cdot \partial \xi + \xi = \eta \tag{*, \eta}$$

avec  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$  donné ?

Remarquons tout d'abord, puisque  $e^{\pm \frac{\text{id}}{RC}} \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , que l'application

$$\xi \longmapsto e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot \xi$$

est une bijection de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$  sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ , d'inverse

$$\zeta \longmapsto e^{-\frac{\text{id}}{RC}} \cdot \zeta .$$

**THEOREME** Pour tout  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ , posons  $\zeta := e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot \xi$ .

(i) Pour que  $\xi$  soit solution de  $(*, \eta)$ , il faut et il suffit que  $\zeta$  soit solution de

$$\partial\zeta = \frac{1}{RC} \cdot e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot \eta . \quad (**, \eta)$$

(ii) Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Si  $\xi$  est solution de  $(*, \eta)$ , alors  $\xi_y$  est solution de  $(*, \eta_y)$ .

(iii) Si  $\tilde{\zeta}$  est une primitive de  $\frac{1}{RC} \cdot e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot \eta$ , i.e. une solution de  $(**, \eta)$ , alors toute solution de  $(*, \eta)$  est de la forme

$$e^{-\frac{\text{id}}{RC}} \cdot ([c] + \tilde{\zeta}) \quad \text{avec } c \in \mathbb{C} .$$

Soit  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$ .

(iv) Toute solution de  $(*, [f])$  est une fonction absolument continue de la forme

$$e^{-\frac{\text{id}}{RC}} \cdot \left( [c] + \int_0^\diamond \frac{1}{RC} \cdot e^{\frac{s}{RC}} \cdot f(s) ds \right) \quad \text{avec } c \in \mathbb{C} .$$

(v) Pour que  $(*, [f])$  possède une solution  $g$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 0 ,$$

il faut et il suffit que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_0^t e^{\frac{s}{RC}} \cdot f(s) ds \quad \text{existe} .$$

(vi) Si  $1_{]-\infty, 0]} \cdot e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , alors  $f$  satisfait à la condition de (v) et on a

$$g = \int_{-\infty}^\diamond \frac{1}{RC} \cdot e^{\frac{(s-\diamond)}{RC}} \cdot f(s) ds .$$

C'est le cas par exemple s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  avec

$$1_{]-\infty, 0]} \cdot \frac{f}{\text{id}^k} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) .$$

**Démonstration de (i)** C'est immédiat, car par la règle du produit (cf. 1.3) on a

$$\partial\zeta = \frac{1}{RC} \cdot e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot \xi + e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot \partial\xi = \frac{1}{RC} \cdot e^{\frac{\text{id}}{RC}} (RC \cdot \partial\xi + \xi) .$$

**Démonstration de (ii)** En effet

$$RC \cdot \partial(\xi_y) + \xi_y = (RC \cdot \partial\xi + \xi)_y = \eta_y$$

par l'invariance de la dérivation par translation (cf. 1.3).

**Démonstration de (iii)** Cela découle du théorème 1.4.

**Démonstration de (iv)** C'est une conséquence de l'exemple 1.2.4 et (iii).

**Démonstration de (v)** C'est immédiat par (iv).

**Démonstration de (vi)** En écrivant

$$\int_0^t e^{\frac{s}{RC}} \cdot f(s) ds = - \int_{\mathbb{R}} 1_{]-\infty, t]} \cdot e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot f ,$$

on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. En effet

$$1_{]-\infty, t]} \cdot e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot f \rightarrow 0 \quad \text{ponctuellement}$$

et

$$\left| 1_{]-\infty, t]} \cdot e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot f \right| \leq \left| 1_{]-\infty, 0]} \cdot e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot f \right|$$

pour tout  $t \leq 0$ . S'il existe  $k \in \mathbb{N}$  avec  $1_{]-\infty, 0]} \cdot \frac{f}{\text{id}^k} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , la condition est satisfaite car la fonction  $\text{id}^k \cdot e^{\frac{\text{id}}{RC}}$  est bornée sur  $]-\infty, 0]$ .  $\square$

**COROLLAIRE** Soit  $E$  le sous-espace vectoriel  $E$  des  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$  tels que

$$1_{]-\infty, 0]} \cdot e^{\frac{\text{id}}{RC}} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) .$$

*L'application "solution"*

$$T : f \mapsto \int_{-\infty}^{\diamond} \frac{1}{RC} \cdot e^{\frac{(s-\diamond)}{RC}} \cdot f(s) ds : E \longrightarrow \mathcal{AC}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$$

est linéaire et invariante par translation. C'est un inverse à droite de l'opérateur différentiel

$$RC \cdot \partial + \diamond : \mathcal{D}(\mathbb{R})^* \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})^* ,$$

i.e.  $(RC \cdot \partial + \diamond) \circ T$  est l'injection canonique  $E \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ .

Nous allons maintenant exprimer cette solution sous une autre forme que nous pourrons interpréter. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} \cdot e^{\frac{(s-t)}{RC}} \cdot f(s) ds = \int \frac{1}{RC} \cdot h(t-s) \cdot e^{-\frac{(t-s)}{RC}} \cdot f(s) ds = \\ &= \int E_s(t) \cdot f(s) ds , \end{aligned}$$

en ayant posé

$$E := \frac{1}{RC} \cdot h \cdot e^{-\frac{\text{id}}{RC}} \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}) .$$

Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a trivialement  $\lim_{t \rightarrow -\infty} E_s(t) = 0$  et

$$\begin{aligned} \partial[E_s] &= \partial \left( \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{(\text{id}-s)}{RC}} \cdot [h_s] \right) = \\ &= -\frac{1}{(RC)^2} \cdot e^{-\frac{(\text{id}-s)}{RC}} \cdot [h_s] + \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{(\text{id}-s)}{RC}} \cdot \delta_s = \\ &= -\frac{1}{RC} \cdot [E_s] + \frac{1}{RC} \cdot \delta_s , \end{aligned}$$

par l'exemple 1.3. Ainsi

$$RC \cdot \partial [E_s] + [E_s] = \delta_s ,$$

i.e.  $[E_s]$  est solution de  $(*, \delta_s)$ .

On dit que  $E_s$  est la *solution élémentaire* en  $s$  de notre problème avec condition initiale, ou la *réponse impulsionnelle*.

Ceci nous permet d'interpréter la solution  $g$  comme la superposition des réponses impulsionnelles pondérées par  $f$ . On peut aussi écrire  $g$  à l'aide du *produit de convolution* :

$$g = E * f .$$

Rappelons que le produit de convolution de deux fonctions  $u, v$  sur  $\mathbb{R}^n$  est défini par

$$u * v (x) := \int u (x - y) \cdot v (y) dy$$

si cela a un sens (exercice).

## 1.6 Principe de superposition

Du fait de la linéarité de l'équation différentielle  $(*, \eta)$  du paragraphe précédent, on a un principe de superposition élémentaire :

**LEMME** Si  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont solutions de  $(*, \eta_1)$  et  $(*, \eta_2)$  respectivement, alors  $\xi_1 + \xi_2$  est solution de  $(*, \eta_1 + \eta_2)$ .

On peut généraliser ce principe comme suit :

**DEFINITION** Soit  $F$  un espace vectoriel (de fonctions) test. Si  $m$  est une intégrale sur un espace topologique séparé  $\Lambda$  et si  $\zeta : \lambda \mapsto \zeta(\lambda) : \Lambda \rightarrow F^*$  est une application à valeurs dans  $F^*$ , on dit que  $\zeta$  est *m-intégrable dans  $F^*$*  si, pour tout  $\varphi \in F$ , la fonction

$$\langle \varphi, \zeta \rangle : \lambda \mapsto \langle \varphi, \zeta(\lambda) \rangle : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$$

est *m-intégrable*. Dans ce cas on peut définir une forme linéaire

$$\int \zeta \, dm : \varphi \mapsto \int \langle \varphi, \zeta \rangle \, dm : F \rightarrow \mathbb{C}.$$

On a donc

$$\left\langle \varphi, \int \zeta \, dm \right\rangle = \int \langle \varphi, \zeta \rangle \, dm,$$

et on dit que  $\int \zeta \, dm$  est l'*intégrale de  $\zeta$  dans  $F^*$* .

**EXEMPLE 1** Si  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$ , l'application  $s \mapsto f(s) \cdot \delta_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$  est Lebesgue-intégrable dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$  et on a

$$[f] = \int f(s) \cdot \delta_s \, ds.$$

En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , la fonction

$$s \mapsto \langle \varphi, f(s) \cdot \delta_s \rangle = \varphi(s) \cdot f(s)$$

est Lebesgue-intégrable et

$$\left\langle \varphi, \int f(s) \cdot \delta_s \, ds \right\rangle = \int \langle \varphi, f(s) \cdot \delta_s \rangle \, ds = \int \varphi(s) \cdot f(s) \, ds = \langle \varphi, [f] \rangle. \quad \square$$

**EXEMPLE 2** Si  $1_{]-\infty, 0]} \cdot e^{\frac{id}{RC}} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , l'application  $s \mapsto f(s) \cdot [E_s] : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$  est Lebesgue-intégrable dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ .

Il nous suffit de montrer que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ , la fonction

$$s \mapsto \int \varphi(t) \cdot \frac{1}{RC} \cdot h(t-s) \cdot e^{-\frac{(t-s)}{RC}} \cdot f(s) \, dt$$

est Lebesgue-intégrable. Par le théorème de Tonelli on obtient

$$\begin{aligned}
& \int^* \left| \int \varphi(t) \cdot \frac{1}{RC} \cdot h(t-s) \cdot e^{-\frac{(t-s)}{RC}} \cdot f(s) dt \right| ds \leq \\
& \leq \frac{1}{RC} \cdot \int^* \left( \int^* |\varphi(t)| \cdot 1_{[0, \infty[}(t-s) \cdot e^{-\frac{(t-s)}{RC}} \cdot |f(s)| dt \right) ds = \\
& = \frac{1}{RC} \cdot \int^* |\varphi(t)| \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left( \int^* 1_{]-\infty, t]}(s) \cdot e^{\frac{s}{RC}} \cdot |f(s)| ds \right) dt \leq \\
& \leq \frac{1}{RC} \cdot \left( \int_a^b |\varphi(t)| \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^b e^{\frac{s}{RC}} \cdot |f(s)| ds \right) < \infty,
\end{aligned}$$

si  $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$ .  $\square$

**THEOREME (Principe de superposition)** Soient  $S : F \longrightarrow F$  une application linéaire et

$$\xi_\diamond : \lambda \longmapsto \xi_\lambda, \quad \eta_\diamond : \lambda \longmapsto \eta_\lambda : \Lambda \longrightarrow F^*$$

telles que, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\xi_\lambda$  soit une solution de  $S^t \xi_\lambda = \eta_\lambda$ . Si  $\xi_\diamond$  est  $m$ -intégrable dans  $F^*$  avec  $\xi := \int \xi_\lambda dm(\lambda)$ , alors  $\eta_\diamond$  est  $m$ -intégrable dans  $F^*$  et  $\xi$  est solution de  $S^t \xi = \eta := \int \eta_\lambda dm(\lambda)$ .

En effet, pour tout  $\varphi \in F$ , on a

$$\langle \varphi, \eta_\diamond \rangle = \langle \varphi, S^t \xi_\diamond \rangle = \langle S\varphi, \xi_\diamond \rangle \in \mathbf{L}^1(m),$$

ce qui montre que  $\eta_\diamond$  est  $m$ -intégrable, et

$$\langle \varphi, S^t \xi \rangle = \langle S\varphi, \xi \rangle = \int \langle S\varphi, \xi_\lambda \rangle dm(\lambda) = \int \langle \varphi, S^t \xi_\lambda \rangle dm(\lambda) = \left\langle \varphi, \int \eta_\lambda dm(\lambda) \right\rangle,$$

donc

$$S^t \xi = \int \eta_\lambda dm(\lambda). \quad \square$$

**EXEMPLE 3** Nous pouvons appliquer ce résultat à l'exemple 1.5 car l'opérateur différentiel

$$RC \cdot \partial + Id : \mathcal{D}(\mathbb{R})^* \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$$

est la transposée de

$$-RC \cdot \partial + Id : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ainsi, si  $\xi_\diamond : \Lambda \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$  est  $m$ -intégrable dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$  et, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\xi_\lambda$  est une solution de  $(*, \eta_\lambda)$ , alors  $\eta_\diamond$  est  $m$ -intégrable et  $\xi := \int \xi_\lambda dm(\lambda)$  est solution de  $(*, \eta)$  avec  $\eta := \int \eta_\lambda dm(\lambda)$ .

Grâce aux exemples 1 et 2 ci-dessus, on en déduit que

$$[g] = \int f(s) \cdot [E_s] ds$$

est solution de  $(*, [f])$  .

Remarquons que ce résultat ne fournit qu'un résultat d'existence, mais sans avoir besoin de la théorie (élémentaire) des équations différentielles développée en 1.4. Il est en outre plus faible que l'égalité ponctuelle obtenue en 1.5. Toutefois on rencontre beaucoup de situations où cette égalité ponctuelle n'est plus possible, et où l'interprétation d'une solution comme superposition de solution élémentaire est très utile.

## 1.7 Filtres

L'exemple précédent nous conduit à introduire les notions suivantes. Un système (de transmission) est la modélisation d'un appareil ou d'un phénomène naturel transformant un signal d'entrée en un signal de sortie. Si  $E$  et  $S$  sont respectivement l'ensemble des signaux d'entrées et l'ensemble des signaux de sortie, on caractérise le système par une application  $T : E \longrightarrow S$ .

**DEFINITION** Soient  $E$  et  $S$  des espaces vectoriels de fonctions ou, plus généralement de distributions sur  $\mathbb{R}^n$ , invariants par translation et munis de topologies localement convexes, par exemple normés. Nous dirons que  $T : E \longrightarrow S$  est un *opérateur invariant par translation* ou un *filtre*, si  $T$  est une application linéaire continue invariante par translation, i.e. telle que

$$T(\xi_y) = (T\xi)_y \text{ pour tout } \xi \in E \text{ et } y \in \mathbb{R}^n .$$

Si pour un  $\lambda \in \mathbb{C}^n$ , on a  $[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] \in E$ , alors pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}]_{-y} = [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet (\text{id} + y)}] = e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \cdot [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}]$$

et

$$(T[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}])_{-y} = T([e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}]_{-y}) = e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \cdot T[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] ,$$

D'autre part si  $T[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] = [g]$  avec  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ , il vient

$$[g_{-y}] = (T[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}])_{-y} = e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \cdot T[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] = [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \cdot g] ,$$

donc  $g_{-y} = e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \cdot g$  par continuité. Il vient alors

$$g(y) = g_{-y}(0) = e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \cdot g(0) ,$$

et par suite

$$T[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] = g(0) \cdot [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] .$$

En écrivant  $T[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}](0)$  à la place de  $g(0)$ , nous avons prouvé la

**PROPOSITION** Si  $T : E \longrightarrow S$  est un filtre, alors toute exponentielle  $[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] \in E$ , telle que  $T[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ , est une fonction propre de  $T$  de valeur propre  $T[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}](0)$ .

**DEFINITION 1** La fonction  $\kappa : \lambda \longmapsto T[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}](0)$ , en général définie sur  $\mathbb{R}^n$ , donc telle que

$$T[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] = \kappa(\lambda) \cdot [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] ,$$

s'appelle la *fonction de transfert* du filtre  $T$ . Les fonctions  $|\kappa|$  et  $|\kappa|^2$  sont appelées respectivement *spectre d'amplitude* et *spectre d'énergie* du filtre.

**REMARQUE 1** Cette proposition est une généralisation de la constatation suivante. Si

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha|_1 \leq m} a_\alpha \cdot \partial^\alpha : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$$

est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants avec  $\partial = \frac{1}{2\pi i} \cdot \partial$ , on a

$$\sum_{|\alpha|_1 \leq m} a_\alpha \cdot \partial^\alpha [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] = \left( \sum_{|\alpha|_1 \leq m} a_\alpha \cdot \lambda^\alpha \right) \cdot [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] .$$

Si  $T : E \longrightarrow S$  est un filtre, inverse à droite de cet opérateur aux dérivées partielles, alors

$$\begin{aligned} \left( \sum_{|\alpha|_1 \leq m} a_\alpha \cdot \lambda^\alpha \right) \cdot \kappa(\lambda) \cdot [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] &= P(\partial) (\kappa(\lambda) \cdot [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}]) = \\ &= P(\partial) T [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] = [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] , \end{aligned}$$

donc

$$\kappa \cdot \left( \sum_{|\alpha|_1 \leq m} a_\alpha \cdot \text{id}^\alpha \right) = 1 .$$

En particulier, dans le cas du circuit RC (cf. 1.5), l'opérateur différentiel est

$$RC \cdot \partial + 1 \cdot = 2\pi i \cdot RC \cdot \partial + 1 \cdot ,$$

donc

$$\kappa(\lambda) = \frac{1}{1 + 2\pi i RC \cdot \lambda} ,$$

et par suite

$$|\kappa(\lambda)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 \cdot \lambda^2} .$$

La fréquence  $\frac{1}{2\pi RC}$ , au delà de laquelle les amplitudes sont réduites d'un facteur inférieur à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  par le filtre, i.e.  $|\kappa(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , dit *passé-bas*, est considérée comme une *fréquence de coupure*.

**REMARQUE 2** Le principe de superposition nous invite à considérer des distributions de la forme

$$\xi = \sum c_k \cdot [e^{2\pi i \cdot \lambda_k \bullet \text{id}}] \quad , \quad \xi = \int c(\lambda) \cdot [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] d\lambda ,$$

ou plus généralement

$$\xi = \int [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] dm(\lambda) ;$$

dans le premier cas on prend  $m := \sum c_k \cdot \delta_{\lambda_k}$ , dans le second  $m := c \cdot \lambda$ . Sous certaines hypothèses on aura

$$T\xi = \int T [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] (0) \cdot [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] dm(\lambda) .$$

Ceci nous donne un autre moyen pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles inhomogènes.

Nous sommes donc conduit au problème de la détermination des distributions ayant la forme ci-dessus : on dit que l'on fait l' *analyse spectrale des distributions* . Si les  $\lambda_k$  sont multiple entier d'une fréquence de base, on est dans le cadre des séries de Fourier (cf. chap.2), sinon dans celui de la transformation de Fourier (cf. chap. 3).

**REMARQUE 3** Les exemples précédents montre également l'utilité des concepts suivants :

Si  $F$  est un espace vectoriel (de fonctions) test, nous dirons qu'une suite  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $F^*$  converge dans  $F^*$  si, pour tout  $\varphi \in F$  , la suite  $(\langle \varphi, \xi_k \rangle)$  converge dans  $\mathbb{C}$  . Dans ce cas on peut définir une forme linéaire

$$\lim_k \xi_k : \varphi \longmapsto \lim \langle \varphi, \xi_k \rangle : F \longrightarrow \mathbb{C}$$

On a donc

$$\langle \varphi, \lim_k \xi_k \rangle = \lim \langle \varphi, \xi_k \rangle ,$$

et on dit que  $\lim_k \xi_k$  est la *limite* des  $\xi_k$  dans  $F^*$  . Nous avons ainsi défini une *notion d'approximation* dans  $F^*$  .

On dit que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k$  *converge dans  $F^*$*  si la suite des sommes partielles converge dans  $F^*$  vers une forme linéaire encore notée  $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k$  . On a donc

$$\left\langle \varphi, \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi, \xi_k \rangle ,$$

et on dit que  $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k$  est la *somme* des  $\xi_k$  dans  $F^*$  .

Soit  $J$  un ensemble dénombrable d'indices. Rappelons que si  $(g_j)_{j \in J}$  est une famille dans un espace normé  $G$  , on dit que la série  $\sum_{j \in J} g_j$  est *sommable* (on dit aussi *commutativement convergente* ) si, pour toute énumération de  $J$  la série correspondante est convergente dans  $G$  . La somme ne dépend pas de cette énumération et on la note encore  $\sum_{j \in J} g_j$  .

Si  $\sum_{j \in J} g_j$  est *normalement sommable* , i.e.  $\sum_{j \in J} \|g_j\|$  est sommable, alors  $\sum_{j \in J} g_j$  est sommable. Si  $G$  est de dimension finie, la réciproque est vraie. Dans le cas des nombres complexes on dit *absolument sommable* .

Si  $(\xi_j)_{j \in J}$  est une famille dans  $F^*$  , nous dirons que la série  $\sum_{j \in J} \xi_j$  est sommable dans  $F^*$  , si pour tout  $\varphi \in F$  , la série  $\sum_{j \in J} \langle \varphi, \xi_j \rangle$  est absolument sommable dans  $\mathbb{C}$  . Dans ce cas on peut définir une forme linéaire également notée

$$\sum_{j \in J} \xi_j : \varphi \longmapsto \sum_{j \in J} \langle \varphi, \xi_j \rangle .$$

On a donc

$$\left\langle \varphi, \sum_{j \in J} \xi_j \right\rangle = \sum_{j \in J} \langle \varphi, \xi_j \rangle ,$$

et on dit que  $\sum_{j \in J} \xi_j$  est la somme des  $\xi_j$  dans  $F^*$  .

Cela signifie que, pour toute énumération de  $J$  , la série correspondante converge dans  $F^*$  , ou bien que la fonction  $j \longmapsto \xi_j$  est  $\#$ -intégrable dans  $F^*$  , où  $\#$  désigne l'intégrale de comptage sur  $J$  . La notion de sommabilité est donc un cas particulier de celle d'intégrabilité définie en 1.6.

# Chapitre 2

## Séries de Fourier

## 2.1 Fonctions périodiques et coefficients de Fourier

**DEFINITION 1** Nous dirons qu'une fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  est *périodique*,  $\mathbb{Z}^n$ -*périodique* s'il faut préciser, si l'on a

$$g(x+z) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } z \in \mathbb{Z}^n .$$

Nous désignerons par  $\mathbf{L}_{loc,p}^1(\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des fonctions  $g \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  qui sont périodiques, ainsi que par  $\mathcal{C}_p^{(k)}(\mathbb{R}^n)$ , pour  $k \in \overline{\mathbb{N}}$ , le sous-espace vectoriel de celles qui sont  $k$ -fois continûment dérivables.

Considérons le groupe topologique quotient  $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ . Toute fonction périodique  $g$  sur  $\mathbb{R}^n$  est par définition constante sur les classes modulo  $\mathbb{Z}^n$ , donc passe au quotient en une fonction  $g_{\mathbb{T}^n}$  sur  $\mathbb{T}^n$ . Comment peut-on se représenter  $\mathbb{T}^n$ ? Il y a deux possibilités.

(a) Les classes de  $\mathbb{R}^n$  modulo  $\mathbb{Z}^n$  sont indexées par

$$Q := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[^n ,$$

ce qui permet d'identifier l'ensemble  $\mathbb{T}^n$  avec  $Q$  et revient à calculer mod 1 composante par composante. Une fonction périodique  $g$  sur  $\mathbb{R}^n$  peut s'écrire sous la forme

$$g = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} (1_Q \cdot g)_z \quad \text{ponctuellement.}$$

Elle est donc univoquement déterminée par sa restriction à  $Q$ , et celle-ci s'identifie à la fonction  $g_{\mathbb{T}^n}$  sur  $\mathbb{T}^n$ . L'espace topologique  $\mathbb{T}^n$  est compact, car il est l'image par l'application quotient de  $\overline{Q}$ , qui est compact.

Nous munirons  $\mathbb{T}^n$  de l'intégrale induite par celle de Lebesgue sur  $Q$ . Elle est invariante par les translations de  $\mathbb{T}^n$  et de masse totale 1. On dit que c'est l'*intégrale de Haar sur  $\mathbb{T}^n$* .

En effet, par Fubini on se ramène au cas  $n = 1$ . On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} (g_{\mathbb{T}})_t &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s-t) ds = \left( \int_{-\frac{1}{2}-t}^{-\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-t} \right) g(s) ds = \\ &= \left( \int_{\frac{1}{2}-t}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-t} \right) g(s) ds = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s) ds = \int_{\mathbb{T}} g_{\mathbb{T}} , \end{aligned}$$

car  $g$  est périodique et nous pouvons supposer que  $t \in [0, 1[$ .  $\square$

Réciproquement si  $f$  est une fonction sur  $\mathbb{T}^n$ , nous désignerons par  $f_{\mathbb{R}^n}$  la fonction périodique sur  $\mathbb{R}^n$  correspondante. En identifiant  $\mathbb{T}^n$  avec  $Q$  et en prolongeant  $f$  par 0 hors de

$Q$ , on a

$$f_{\mathbb{R}^n} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f_z .$$

(b) Le groupe  $\mathbb{T}^n$  est isomorphe au groupe  $\mathbb{U}^n$ , où  $\mathbb{U}$  est le sous-groupe de  $\mathbb{C}$  des nombres complexes de module 1, en considérant l'homomorphisme continu surjectif de groupe

$$e^{2\pi i \cdot \diamond} : x = (x_j)_{j=0, \dots, n} \mapsto (e^{2\pi i \cdot x_j})_{j=1, \dots, n} := e^{2\pi i \cdot x} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{U}^n ,$$

qui passe au quotient. C'est un homéomorphisme, puisque  $\mathbb{T}^n$  est compact. Il y a correspondance biunivoque entre les fonctions  $f$  sur  $\mathbb{U}^n$  et les fonctions périodiques sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$f \mapsto f \circ e^{2\pi i \cdot \diamond} .$$

Remarquons que

$$e^{2\pi i \cdot \diamond} : Q \longrightarrow \mathbb{U}^n$$

est une bijection et que sa restriction à  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [^n$  est une paramétrisation de la sous-variété  $(\mathbb{U} \setminus \{-1\})^n$  de  $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ .

L'image de l'intégrale de Haar sur  $\mathbb{T}^n$  est évidemment  $(\frac{1}{2\pi})^n \cdot \lambda_{\mathbb{U}^n}$  sur  $\mathbb{U}^n$ .

**DEFINITION 2** Pour tout  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{T}^n)$  et  $z \in \mathbb{Z}^n$ , on pose

$$\mathcal{F}f(z) := \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i \cdot z \bullet t} \cdot f(t) dt .$$

On dit que ce sont les *coefficients de Fourier de  $f$*  et que l'application

$$\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}f : \mathbf{L}^1(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$$

est la *transformation de Fourier*.

**PROPOSITION** La transformation de Fourier est une application linéaire continue de norme  $\leq 1$  de  $\mathbf{L}^1(\mathbb{T}^n)$  dans  $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ , i.e.

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1 .$$

En effet

$$|\mathcal{F}f(z)| \leq \int_{\mathbb{T}^n} |e^{-2\pi i \cdot z \bullet t}| \cdot |f(t)| dt = \|f\|_1 . \quad \square$$

**LEMME** (i) Pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  avec  $\gamma > n$ , on a

$$\sum_{0 \neq z \in \mathbb{Z}^n} |z|^{-\gamma} < \infty .$$

(ii) Pour tout  $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\left\| |\text{id}|^k \cdot c \right\|_\infty := \sup_{z \in \mathbb{Z}^n} |z|^k \cdot |c(z)| < \infty .$$

(b) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\left\| |\text{id}|^k \cdot c \right\|_1 := \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} |z|^k \cdot |c(z)| < \infty .$$

(c) Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on a

$$\text{id}^\alpha \cdot c \in \ell^1(\mathbb{Z}^n) .$$

(d) Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on a

$$\text{id}^\alpha \cdot c \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^n) .$$

**Démonstration de (i)** Si  $\gamma > n$ , il vient

$$\begin{aligned} \sum_{0 \neq z \in \mathbb{Z}^n} |z|^{-\gamma} &= \int \sum_{0 \neq z \in \mathbb{Z}^n} |z|^{-\gamma} \cdot 1_{z+Q} \leq \left( \frac{\sqrt{n}}{2} + 1 \right)^\gamma \cdot \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q} |\text{id}|^{-\gamma} \leq \\ &\leq \left( \frac{\sqrt{n}}{2} + 1 \right)^\gamma \cdot \int_{\mathbb{C}\mathbb{B}_{1/2}} |\text{id}|^{-\gamma} < \infty , \end{aligned}$$

car si  $q \in Q$ , on a  $|q| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$  et

$$|z + q| \leq |z| + \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \left( \frac{\sqrt{n}}{2} + 1 \right) \cdot |z| ,$$

puisque  $|z| \geq 1$ , donc

$$|z|^{-\gamma} \cdot 1_{z+Q} \leq \left( \frac{\sqrt{n}}{2} + 1 \right) \cdot 1_{z+Q} \cdot |\text{id}|^{-\gamma} .$$

**Démonstration de (ii)** On a (a)  $\Rightarrow$  (b) car

$$\left\| |\text{id}|^k \cdot c \right\|_1 \leq |c(0)| + \left\| |\text{id}|^{\gamma+k} \cdot c \right\|_\infty \cdot \sum_{0 \neq z \in \mathbb{Z}^n} |z|^{-\gamma} ,$$

et (b)  $\Rightarrow$  (c) puisque

$$\|\text{id}^\alpha \cdot c\|_1 \leq \left\| |\text{id}|^{|\alpha|_1} \cdot c \right\|_1 .$$

L'inclusion  $\ell^1(\mathbb{Z}^n) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$  prouve (c)  $\Rightarrow$  (d). Finalement

$$\left\| |\text{id}|^k \cdot c \right\|_\infty \leq \left\| |\text{id}|_1^k \cdot c \right\|_\infty \leq \sum_{|\alpha|_1 \leq k} a_\alpha \cdot \|\text{id}^\alpha \cdot c\|_\infty ,$$

avec certains coefficients  $a_\alpha \in \mathbb{R}_+$ , ce qui prouve (d)  $\Rightarrow$  (a).  $\square$

**DEFINITION 3** Nous désignerons par  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  l'ensemble des suites  $c = (c_z)_{z \in \mathbb{Z}^n} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$  qui satisfont à l'une des propriétés équivalentes ci-dessus. On dit qu'elles sont à *décroissance rapide*.

Pour  $k \in \overline{\mathbb{N}}$ , nous dirons qu'une fonction  $f$  sur  $\mathbb{T}^n$  est *k-fois continûment dérivable* si la fonction périodique  $f_{\mathbb{R}^n}$  correspondante sur  $\mathbb{R}^n$  l'est aussi. Nous désignerons, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , par  $\partial^\alpha f$  la fonction sur  $\mathbb{T}^n$  correspondant à  $\partial^\alpha f_{\mathbb{R}^n}$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

Nous noterons  $\mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{T}^n)$  l'espace vectoriel des fonctions  $k$ -fois continûment dérivables sur  $\mathbb{T}^n$  et par  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$  celles qui sont indéfiniment dérivables.

Ces fonctions sont évidemment à support compact, puisque  $\mathbb{T}^n$  est compact.

**REMARQUE** Plus généralement, toute opération sur un espace vectoriel de fonctions périodiques sur  $\mathbb{R}^n$  peut être considérée comme une opération sur l'espace vectoriel correspondant des fonctions sur  $\mathbb{T}^n$ .

**THEOREME** Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

(i) Pour tout  $f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{T}^n)$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  avec  $|\alpha|_1 \leq k$ , on a

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = \text{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}f.$$

En particulier si  $f \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{T}^n)$ , on a

$$\mathcal{F}(\Delta f) = |\text{id}|^2 \cdot \mathcal{F}f$$

et

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n).$$

(ii) Pour tout  $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$  avec  $|\text{id}|^k \cdot c \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$ , on a

$$\widehat{\mathcal{F}}c := \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} c(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}} \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{T}^n)$$

et

$$\partial^\alpha (\widehat{\mathcal{F}}c) = \widehat{\mathcal{F}}(\text{id}^\alpha \cdot c) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha|_1 \leq k,$$

ces séries étant uniformément sommables sur  $\mathbb{T}^n$ , i.e. sommables dans  $\mathcal{C}(\mathbb{T}^n)$ .

En particulier

$$\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)) \subset \mathcal{D}(\mathbb{T}^n).$$

(iii) Quel que soit  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{T}^n)$  et  $t \in \mathbb{T}^n$ , on a

$$\mathcal{F}(f_t) = e^{-2\pi i \cdot \text{id} \bullet t} \cdot \mathcal{F}f.$$

(iv) **Riemann-Lebesgue** Pour tout  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{T}^n)$ , on a  $\mathcal{F}f \in c^0(\mathbb{Z}^n)$ .

**Démonstration de (i)** En effet, grâce au théorème de Fubini et en intégrant par partie (on peut remarquer que  $\partial$  est formellement auto-adjoint !), on obtient

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(z) = \int_Q e^{-2\pi i \cdot z \bullet x} \cdot \partial^\alpha f_{\mathbb{R}^n}(x) dx = \int_Q z^\alpha \cdot e^{-2\pi i \cdot z \bullet x} \cdot f_{\mathbb{R}^n}(x) dx = z^\alpha \cdot \mathcal{F}f(z),$$

le terme intégré s'annulant à cause de la périodicité. Si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ , on a donc  $\text{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi) \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$  par la proposition, donc  $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  par le lemme.

**Démonstration de (ii)** Les séries  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} z^\alpha \cdot c(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}$  sont normalement, donc uniformément sommables sur  $\mathbb{T}^n$  (ou  $\mathbb{R}^n$  !), puisque

$$\|z^\alpha \cdot c(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}\|_\infty \leq |z|^k \cdot |c(z)|.$$

On peut donc intervertir dérivation et sommation. Si  $c \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $|\text{id}|^k \cdot c \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$  par le lemme (ii), d'où le résultat.

**Démonstration de (iii)** Puisque l'intégrale de Haar sur  $\mathbb{T}^n$  est invariante par translation, on obtient

$$\mathcal{F}(f_t)(z) = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i \cdot z \bullet s} \cdot f_t(s) \, ds = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i \cdot z \bullet (s+t)} \cdot f(s) \, ds = e^{-2\pi i \cdot z \bullet t} \cdot \mathcal{F}f(z) .$$

**Démonstration de (iv)** Puisque  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$  est dense dans  $\mathbf{L}^1(\mathbb{T}^n)$  et que

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \subset c^0(\mathbb{Z}^n) ,$$

il vient

$$\mathcal{F}(\mathbf{L}^1(\mathbb{T}^n)) = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)}) \subset \overline{\mathcal{F}(\mathcal{D}(\mathbb{T}^n))} \subset \overline{c^0(\mathbb{Z}^n)} = c^0(\mathbb{Z}^n)$$

car  $\mathcal{F} : \mathbf{L}^1(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$  est continue par la proposition.  $\square$

## 2.2 Formule d'inversion

**REMARQUE 1** Les applications

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) : \psi \longmapsto \mathcal{F}\psi = \int e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet t} \cdot f(t) dt$$

et

$$\widehat{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{T}^n) : c \longmapsto \widehat{\mathcal{F}}c = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} c(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \diamond}$$

sont bien définies et linéaires par le théorème 2.1.

Nous allons montrer qu'elles sont réciproques l'une de l'autre.

Introduisons tout d'abord, pour  $r \in [0, 1[$ , la fonction  $r^{|\text{id}|_1} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  et

$$\widehat{\mathcal{F}}r^{|\text{id}|_1} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} r^{|\text{id}|_1} \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}} \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n) .$$

On a

$$\widehat{\mathcal{F}}r^{|\text{id}|_1} = \sum_{(z_j)_{j=1, \dots, n} \in \mathbb{Z}^n} \prod_{j=1}^n r^{|z_j|} \cdot e^{2\pi i \cdot z_j \cdot pr_j} = \prod_{j=1}^n \sum_{z_j \in \mathbb{Z}} r^{|z_j|} \cdot e^{2\pi i \cdot z_j \cdot pr_j} = \bigotimes_{j=1}^n \rho_r ,$$

avec

$$\rho_r := \sum_{z \in \mathbb{Z}} r^{|z|} \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}} \in \mathcal{D}(\mathbb{T}) .$$

Soit  $t \in \mathbb{T}$  et  $u := e^{2\pi i t}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \rho_r(t) &= 1 + \sum_{k \geq 1} r^k \cdot (u^k + u^{-k}) = 1 + \frac{ru}{1 - ru} + \frac{\frac{r}{u}}{1 - \frac{r}{u}} = \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - r \cdot (u + \frac{1}{u}) + r^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cdot \cos(2\pi t) + r^2} . \end{aligned}$$

On en déduit que  $\rho_r \geq 0$ , car  $1 - 2r \cdot \cos(2\pi t) + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 \geq 0$ . En outre

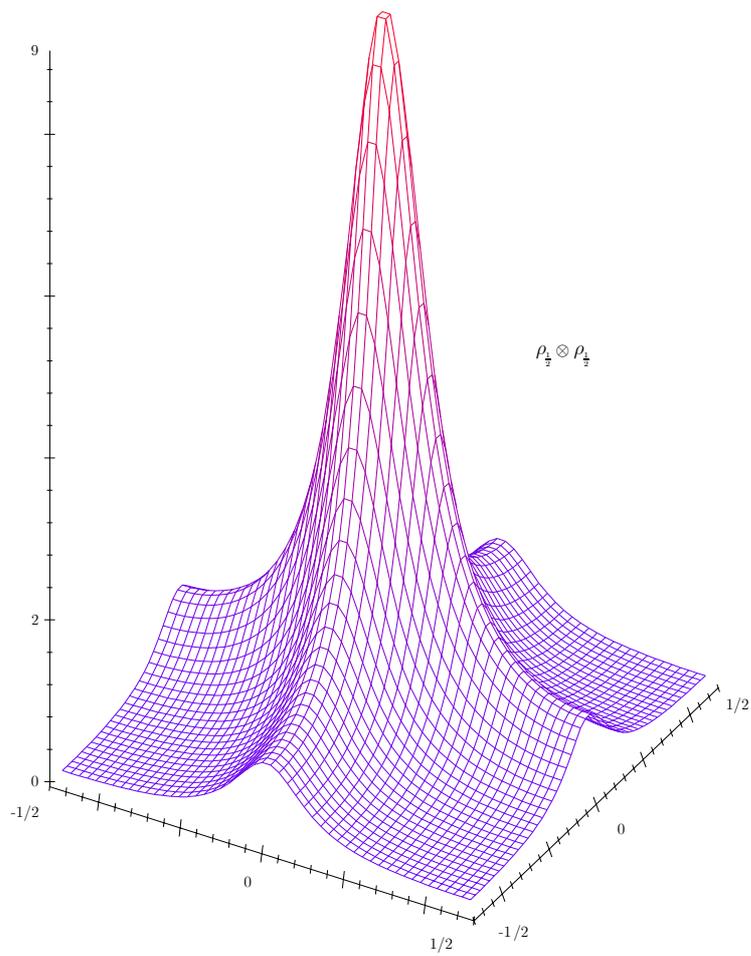
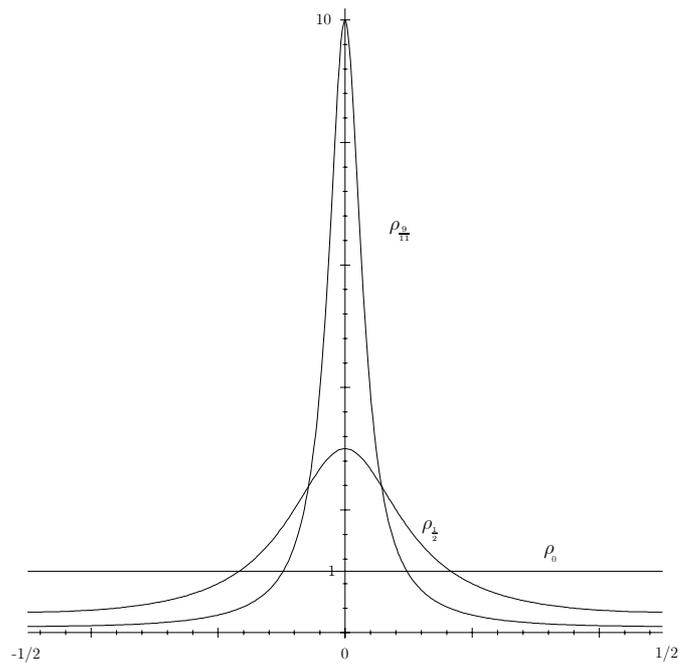
$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \rho_r(t) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{T} \setminus \{0\} \\ \infty & t = 0 \end{cases} ,$$

puisque si  $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ , on a

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} [1 - 2 \cdot \cos(2\pi t) \cdot r + r^2] = 2 - 2 \cdot \cos(2\pi t) \neq 0 , \text{ si } x \in Q \setminus \{0\} ,$$

et

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \rho_r(0) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1 - r^2}{1 - 2r + r^2} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1 + r}{1 - r} = \infty .$$



Finalement

$$\int_{\mathbb{T}^n} \widehat{\mathcal{F}}_r^{|\text{id}|_1} = \prod_{j=1}^n \int \left( \sum_{z_j \in \mathbb{Z}} r^{|z_j|} \cdot e^{2\pi i \cdot z_j \bullet t_j} \right) dt_j = \prod_{j=1}^n \left( \sum_{z_j \in \mathbb{Z}} r^{|z_j|} \cdot \int e^{2\pi i \cdot z_j \bullet t_j} dt_j \right) = 1 .$$

**LEMME** Si  $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{T}^n)$  et  $f$  est continue en  $0$ , alors

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}^n} \widehat{\mathcal{F}}_r^{|\text{id}|_1} \cdot f(t) dt = f(0) .$$

En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $\delta > 0$  tel que l'on ait  $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$  si  $|t|_\infty \leq \delta$ , donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^n} \widehat{\mathcal{F}}_r^{|\text{id}|_1} \cdot f(t) dt - f(0) \right| &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \widehat{\mathcal{F}}_r^{|\text{id}|_1} \cdot |f(t) - f(0)| dt \leq \\ &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \cdot \int_{\mathbb{T}^n \setminus \{|t|_\infty \leq \delta\}} \left( \bigotimes_{j=1}^n \rho_r \right) (t) dt . \end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\mathbb{T}^n \setminus \{|t|_\infty \leq \delta\}} \left( \bigotimes_{j=1}^n \rho_r \right) (t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{T}^n \setminus \{|t_k| \leq \delta\}} \left( \bigotimes_{j=1}^n \rho_r \right) (t) dt = n \cdot \int_{\mathbb{T} \setminus \{|t| \leq \delta\}} \rho_r(t) dt$$

tend vers 0 lorsque  $r$  tend vers  $1^-$ . En effet si  $r \in [\frac{1}{2}, 1[$  et  $|t| \geq \delta$ , on a

$$0 \leq \rho_r(t) = \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 2r \cdot (1 - \cos 2\pi t)} \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \cos 2\pi t} \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \cos 2\pi \delta} ,$$

d'où le résultat par le théorème de Lebesgue.  $\square$

**THEOREME (Formule d'inversion)** Si  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^n)$  et  $\mathcal{F}f \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$ , alors

$$f(t) = \widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}f(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet t} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^n .$$

En effet

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}f(z) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \lim_{r \rightarrow 1^-} r^{|z|_1} \cdot \mathcal{F}f(z) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} r^{|z|_1} \cdot \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i \cdot z \bullet t} \cdot f(t) dt = \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}^n} \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} r^{|z|_1} \cdot e^{-2\pi i \cdot z \bullet t} \right) \cdot f(t) dt = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}^n} \widehat{\mathcal{F}}_r^{|\text{id}|_1} \cdot f(t) dt = f(0) , \end{aligned}$$

en ayant utilisé les théorèmes de Lebesgue et Fubini, la somme étant interprétée comme l'intégrale par rapport à  $\#\mathbb{Z}^n := \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \delta_z$ . Ainsi

$$f(t) = f_{-t}(0) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}(f_{-t})(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}f(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet t} ,$$

par le théorème 2.1.(iii).  $\square$

**COROLLAIRE** La transformation de Fourier est une bijection de  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  :

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) : \psi \longmapsto \mathcal{F}\psi := \left( \int_{z \in \mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i \cdot z \bullet t} \cdot f(t) dt \right)$$

et

$$\mathcal{F}^{-1} = \widehat{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{T}^n) : c \longmapsto \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} c(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}} .$$

Le théorème montre que  $\widehat{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \text{Id}_{\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)}$ , donc que  $\mathcal{F}$  est injective. Elle est surjective car, pour tout  $w \in \mathbb{Z}^n$ , on a

$$\int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i \cdot w \bullet t} \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} c(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet t} \right) dt = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} c(z) \cdot \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i \cdot (z-w) \bullet t} dt = c(w) ,$$

donc

$$\mathcal{F} \circ \widehat{\mathcal{F}} = \text{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)} . \quad \square$$

**REMARQUE 2** La formule d'inversion

$$f = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}f(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}$$

peut se démontrer en utilisant la théorie des séries de Fourier dans  $\mathbf{L}^2(Q)$ , i.e. en admettant que la transformation de Fourier est une bijection de  $\mathbf{L}^2(Q) \subset \mathbf{L}^1(Q)$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ , ou plus précisément que  $(e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}})_{z \in \mathbb{Z}^n}$  est une base hilbertienne  $\mathbf{L}^2(Q)$ . Cela signifie que, pour tout  $f \in \mathbf{L}^2(Q)$ , la série  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}f(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}$  est sommable dans  $\mathbf{L}^2(Q)$  avec

$$f = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}f(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}$$

et, pour tout  $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ , la série est sommable dans  $\mathbf{L}^2(Q)$  avec  $f := \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} c(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}$  telle que  $\mathcal{F}f = c$ .

L'hypothèse  $\mathcal{F}f \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$  montre que la série du membre de droite est normalement sommable, donc définit une fonction continue. Utilisant une énumération de  $\mathbb{Z}^n$ , le théorème de Riesz-Fischer entraîne l'existence d'une sous-suite des sommes partielles qui converge presque partout vers  $f$ . Mais comme  $f$  est continue on obtient alors l'égalité partout.

Nous démontrerons ce résultat dans le numéro qui suit (cf. théorème 2.3).

**PROPOSITION** On a  $f \in \mathcal{AC}(\mathbb{T})$  si, et seulement si,  $|\text{id}| \cdot \mathcal{F}f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ . Dans ce cas

$$\mathcal{F}(\partial f) = \text{id} \cdot \mathcal{F}f .$$

Si  $f \in \mathcal{AC}(J)$  la formule se démontre en intégrant par partie. On a alors

$$\text{id} \cdot \mathcal{F}f = \mathcal{F}(\partial f) \in \ell^2(\mathbb{Z}) .$$

Réciproquement si  $\text{id} \cdot \mathcal{F}f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , on a

$$\mathcal{F}f|_{\mathbb{Z}^*} \in \frac{1}{\text{id}} \cdot \ell^2(\mathbb{Z}^*) \subset \ell^1(\mathbb{Z}^*) ,$$

donc  $\mathcal{F}f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . On a  $f = \widehat{\mathcal{F}}\mathcal{F}f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  et  $g := \widehat{\mathcal{F}}(\text{id} \cdot \mathcal{F}f) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \int_0^\diamond g &= 2\pi i \cdot \left( 1_0^\diamond \left| \sum_{z \in \mathbb{Z}} z \cdot \mathcal{F}f(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \diamond} \right. \right) = 2\pi i \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}} z \cdot \mathcal{F}f(z) \cdot (1_0^\diamond | e^{2\pi i \cdot z \bullet \diamond}) = \\ &= 2\pi i \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^*} z \cdot \mathcal{F}f(z) \cdot \frac{e^{2\pi i \cdot z \bullet \diamond}}{2\pi i \cdot z} \Big|_0^\diamond = \sum_{z \in \mathbb{Z}^*} \mathcal{F}f(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \diamond} \Big|_0^\diamond = \widehat{\mathcal{F}}\mathcal{F}f \Big|_0^\diamond = -f(0) + f, \end{aligned}$$

donc  $f \in \mathcal{AC}(\mathbb{T})$  et  $\partial f = g$ .  $\square$

**REMARQUE 3** Si  $f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{T}^n)$ , alors  $|\text{id}|^{k-\gamma} \cdot \mathcal{F}f \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$  pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  avec  $\gamma > n$ .

Cela découle du théorème 2.1.(i), puisque  $\sum_{0 \neq z \in \mathbb{Z}^n} |z|^{-\gamma} < \infty$  si  $\gamma > n$  par le lemme 2.1.(ii) :

$$\begin{aligned} \left\| |\text{id}|^{k-\gamma} \cdot \mathcal{F}f \right\|_1 &\leq \left\| |\text{id}|^{-\gamma} \cdot |\text{id}|^k \cdot \mathcal{F}f \right\|_1 \leq \sum_{|\alpha|_1 \leq k} a_\alpha \cdot \left\| |\text{id}|^{-\gamma} \cdot \text{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}f \right\|_1 \leq \\ &\leq \sum_{|\alpha|_1 \leq k} a_\alpha \cdot \|\mathcal{F}(\partial^\alpha f)\|_\infty \cdot \sum_{0 \neq z \in \mathbb{Z}^n} |z|^{-\gamma} < \infty. \end{aligned}$$

Utilisant la théorie des séries de Fourier (cf. la remarque précédente) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient même l'assertion pour  $\gamma > \frac{n}{2}$  :

$$\left\| |\text{id}|^{k-\gamma} \cdot \mathcal{F}f \right\|_1 \leq \sum_{|\alpha|_1 \leq k} a_\alpha \cdot \|\mathcal{F}(\partial^\alpha f)\|_2 \cdot \left( \sum_{0 \neq z \in \mathbb{Z}^n} |z|^{-2\gamma} \right)^{1/2} < \infty.$$

Si  $n = 1$ , alors  $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{T})$  entraîne  $|\text{id}|^\gamma \cdot \mathcal{F}f \in \ell^1(\mathbb{Z})$  pour tout  $\gamma \in [0, \frac{1}{2}[$ . Ce résultat peut-il être amélioré ou bien existe-il une fonction  $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{T})$  telle que  $|\text{id}|^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{F}f \notin \ell^1(\mathbb{Z})$ ? La réciproque est par contre fautive. Par exemple les coefficients de Fourier de la fonction  $1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[} \cdot |\text{id}|$  sont

$$\mathcal{F}|\text{id}|(k) = \frac{1}{2} \frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2}.$$

On a même  $|\text{id}|^\gamma \cdot \mathcal{F}\left(1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[} \cdot |\text{id}|)\right) \in \ell^1(\mathbb{Z})$  pour tout  $\gamma \in [0, 1[$ , mais

$$1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[} \cdot |\text{id}| \in \mathcal{AC}(\mathbb{T}) \setminus \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{T}).$$

La fonction de Riemann <sup>1</sup>

$$r := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \sin(\pi k^2 \cdot \diamond)$$

<sup>1</sup> P. du Bois-Raymond, Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen, J. für Math. 79 (1875), p. 28.

G.H. Hardy, Weierstrass's nondifferentiable function, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), p. 301-325.

J. Gerver, The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of  $\pi$ , Amer. J. Math. XCII (1970), n° 1.

—, More on the differentiability of the Riemann function.

satisfait à  $|\text{id}|^\gamma \cdot \mathcal{F}r \in \ell^1(\mathbb{Z})$  pour tout  $\gamma \in [0, \frac{1}{2}[$ ,  $|\text{id}|^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{F}r \notin \ell^1(\mathbb{Z})$  et elle n'est dérivable qu'en les points rationnels de la forme  $\frac{p}{q}$  avec  $p \equiv q \equiv 1 \pmod{2}$ . On a donc  $r \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \setminus \mathcal{AC}(\mathbb{T})$ .

Le théorème 2.1.(ii) montre que  $c \in \ell^1(\mathbb{Z})$  entraîne  $\widehat{\mathcal{F}c} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ . L'exemple ci-dessus montre que l'on ne peut pas avoir  $\widehat{\mathcal{F}c} \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{T})$ . Carleman<sup>2</sup> a montré qu'il existe une fonction  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  telle que  $\mathcal{F}f \notin \ell^p(\mathbb{Z})$  pour tout  $p \in [1, 2[$ . Les détails de la construction de Carleman sont présentés au chapitre 6.

Ceci montre qu'il n'est pas possible de caractériser  $\mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{T}^n)$  à l'aide de conditions de la forme  $|\text{id}|^{k-\gamma} \cdot \mathcal{F}f \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$ .

**REMARQUE 4** La formule d'inversion fournit une classe de fonctions pour lesquelles la formule

$$f(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}f(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet x} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \left( \int e^{2\pi i z \cdot (t-s)} \cdot f(s) ds \right).$$

est valable pour tout  $t \in \mathbb{T}^n$ .

Le membre de droite ne peut malheureusement pas être transformé en utilisant le théorème de Fubini. L'expression  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}$  n'a pas de sens, mais semble définir une fonction de Dirac : en tous les points de  $\mathbb{Z}^n$  elle vaut  $\infty$ , en les autres on a l'impression que les valeurs de cette série se compensent. Nous allons dans ce qui suit donner un sens à cette expression et généraliser le théorème d'inversion (cf. théorème 2.3), mais en remplaçant la convergence ponctuelle par une convergence dans un espace de distributions.

---

<sup>2</sup> T. Carleman, Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion, Acta Math. 41 (1918), p. 377-384.

## 2.3 Distributions sur $\mathbb{T}^n$

**DEFINITION 1** Nous dirons qu'une forme linéaire

$$\eta : \mathcal{D}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C} : \psi \longmapsto \eta(\psi) =: \langle \psi, \eta \rangle ,$$

i.e. un élément de  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^*$ , est une distribution (algébrique) sur  $\mathbb{T}^n$ .

**EXEMPLE 1** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ . Il est clair que

$$[f] : \psi \longmapsto \int_{\mathbb{T}^n} \psi \cdot f : \mathcal{D}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est une distribution sur  $\mathbb{T}^n$ . L'application

$$f \longmapsto [f] : L^1(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^*$$

est injective, comme dans le cas des distributions.

**EXEMPLE 2** Pour tout  $t \in \mathbb{T}^n$ ,

$$\delta_t : \psi \longmapsto \psi(t) : \mathcal{D}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est la *distribution de Dirac* en  $t$ .

**DEFINITION 2** Soit  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  l'ensemble des suites  $\gamma \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$  à *croissance polynomiale*, i.e. telles qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  avec  $|\gamma(z)| \leq M \cdot (1 + |z|^k)$  pour un certain  $M < \infty$ .

**REMARQUE 1** Pour tout  $c \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  et  $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$ , la série  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} c(z) \cdot \gamma(z)$  est absolument sommable,

$$[\gamma] : c \longmapsto \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} c(z) \cdot \gamma(z) : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est une forme linéaire et l'application linéaire

$$\gamma \longmapsto [\gamma] : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)^*$$

est injective.

C'est immédiat, puisque

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} |c(z) \cdot \gamma(z)| \leq M \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} (1 + |z|^k) \cdot |c(z)| < \infty$$

par le lemme 2.1.  $\square$

**REMARQUE 2** On peut montrer que  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  s'identifie au dual topologique de  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  muni d'une topologie localement convexe adéquate.

**LEMME** Pour tout  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{T}^n)$  et  $c \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$ , on a

$$\langle c, [\mathcal{F}f] \rangle = \left\langle \widehat{\mathcal{F}}\check{c}, [f] \right\rangle .$$

En effet  $\mathcal{F}f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  et

$$\begin{aligned} \langle c, [\mathcal{F}f] \rangle &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} c(z) \cdot \mathcal{F}f(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} c(z) \cdot \left( \int e^{-2\pi i \cdot z \bullet t} \cdot f(t) dt \right) = \\ &= \int \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} c(z) \cdot e^{-2\pi i \cdot z \bullet t} \right) \cdot f(t) dt = \left\langle \widehat{\mathcal{F}}\check{c}, [f] \right\rangle \end{aligned}$$

, par le théorème de Fubini.  $\square$

Ceci nous conduit à poser la

**DEFINITION 3** Pour tout  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^*$ , on définit sa *transformée de Fourier*  $\mathcal{F}\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)^*$  par

$$\langle c, \mathcal{F}\eta \rangle := \left\langle \widehat{\mathcal{F}}\check{c}, \eta \right\rangle \quad \text{pour tout } c \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) .$$

Ainsi  $\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^* \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)^*$  est la transposée de  $\widehat{\mathcal{F}} \circ \check{\cdot} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ , et comme  $\widehat{\mathcal{F}} \circ \check{\cdot}$  est une bijection linéaire, on en déduit que  $\mathcal{F}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^*$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)^*$  dont l'application réciproque est la transposée de  $\check{\cdot} \circ \mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ . Nous allons l'étudier d'un peu plus près en nous intéressant au sous-espace vectoriel  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)^*$ .

**PROPOSITION** Pour tout  $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$ , la série  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \gamma(z) \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}]$  est sommable dans  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^*$ ; sa somme est notée

$$\widehat{\mathcal{F}}\gamma := \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \gamma(z) \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] .$$

En effet, pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ , on a

$$\langle \psi, [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} \psi \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}} = \mathcal{F}\psi(-z) .$$

Le résultat découle donc de la remarque 1, puisque  $\mathcal{F}\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ . Rappelons que par définition  $\widehat{\mathcal{F}}\gamma$  est la forme linéaire

$$\psi \longmapsto \left\langle \psi, \widehat{\mathcal{F}}\gamma \right\rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \gamma(z) \cdot \langle \psi, [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \gamma(z) \cdot \mathcal{F}\psi(-z) . \quad \square$$

**EXEMPLE 3** Pour tout  $t \in \mathbb{T}^n$ , on a

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i \cdot z \bullet t} \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] = \delta_t .$$

C'est immédiat par le corollaire 2.2 puisque, pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ , on a

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \langle \psi, e^{-2\pi i \cdot z \bullet t} \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}\psi(-z) \cdot e^{-2\pi i \cdot z \bullet t} = \widehat{\mathcal{F}}\mathcal{F}\psi(t) = \psi(t) . \quad \square$$

**REMARQUE 3** La topologie localement convexe naturelle sur  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$  est celle de la convergence uniforme de toutes les dérivées partielles sur  $\mathbb{T}^n$ . Utilisant le théorème d'inversion 2.2, on montre que, pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ , on a

$$\psi = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}\psi(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}$$

dans l'espace localement convexe  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ .

Nous pouvons maintenant généraliser le théorème d'inversion 2.2.

**THEOREME** La transformation de Fourier est un isomorphisme de  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)'$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)' \subset \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)^*$  :

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)' : \eta \longmapsto \mathcal{F}\eta(\diamond) = [\langle e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet \text{id}}, \eta \rangle]$$

et

$$\mathcal{F}^{-1} = \widehat{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)' : \gamma \longmapsto \widehat{\mathcal{F}}\gamma = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \gamma(z) \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] .$$

En particulier on a

$$\gamma = \left\langle e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet \text{id}}, \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \gamma(z) \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \right\rangle$$

et

$$\eta = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}\eta(z) \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \quad \text{dans } \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^* .$$

En outre  $\mathcal{F}$  est une isométrie de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n)$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ , i.e.  $(e^{2\pi i \cdot z \bullet \diamond})_{z \in \mathbb{Z}^n}$  est une base hilbertienne de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n)$ .

Admettant la première partie, la première formule découle de la proposition puisque

$$\left\langle e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet \text{id}}, \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \gamma(z) \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \right\rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \gamma(z) \cdot \langle e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet \text{id}}, [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \gamma(z) \cdot \delta_{\diamond, z} = \gamma .$$

La seconde formule découle, grâce à la remarque 3 ci-dessus, de la continuité de  $\eta$  sur  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$  :

$$\langle \psi, \eta \rangle = \left\langle \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}\psi(z) \cdot e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}, \eta \right\rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}\psi(-z) \cdot \langle e^{-2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}, \eta \rangle =$$

$$= \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \langle e^{-2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}, \eta \rangle \cdot \langle \psi, [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \rangle = \left\langle \psi, \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \langle e^{-2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}, \eta \rangle \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \right\rangle .$$

Finalement le lemme ci-dessus montre en utilisant le corollaire 2.2 que  $\mathcal{F}$  est une isométrie de  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  pour les normes induites par  $\mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n)$  et  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  respectivement. Le résultat en découle puisque ces sous-espaces vectoriels sont denses.  $\square$

## 2.4 Distributions périodiques

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , la série  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi_z$  ne contient, sur tout compact de  $\mathbb{R}^n$ , qu'un nombre fini de termes non-nuls et

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi_z \in \mathcal{C}_p^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) .$$

**DEFINITION** (a) Nous dirons qu'une distribution  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$  est *périodique* si l'on a  $\xi_z = \xi$  pour tout  $z \in \mathbb{Z}^n$ . Nous désignerons par  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_p^*$  l'ensemble de ces distributions.

On définit une application linéaire

$$\Phi : \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^* \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_p^*$$

par

$$\langle \varphi, \Phi \eta \rangle := \left\langle \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi_z, \eta \right\rangle ,$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  et  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^*$ .

(b) On dit que  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  définit une *partition périodique de l'unité*  $(\rho_z)_{z \in \mathbb{Z}^n}$  si  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \rho_z = 1$ , et on définit une application linéaire

$$\Psi : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_p^* \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^*$$

par

$$\langle \psi, \Psi \xi \rangle := \langle \rho \psi, \xi \rangle ,$$

pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$  et  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ .

**REMARQUE** Dans l'expression  $\rho \psi$  on considère  $\psi$  comme une fonction périodique sur  $\mathbb{R}^n$  !

**EXEMPLE 1** On construit une partition périodique de l'unité en choisissant  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\theta \geq 0$  et  $\theta > 0$  sur  $Q$ . On a donc  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \theta_z \neq 0$  partout et il suffit de poser

$$\rho := \theta \Big/ \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \theta_z .$$

**THEOREME** Si  $\rho$  définit une partition périodique de l'unité, les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des isomorphismes réciproque l'un de l'autre entre l'espace des distributions sur  $\mathbb{T}^n$  et celui des distributions périodiques sur  $\mathbb{R}^n$ . En particulier  $\Psi$  ne dépend pas de la partition périodique de l'unité choisie.

Pour tout  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^*$  et  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ , on a

$$\langle \psi, \Psi\Phi\eta \rangle = \langle \rho\psi, \Phi\eta \rangle = \left\langle \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} (\rho\psi)_z, \eta \right\rangle = \left\langle \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \rho_z \right) \cdot \psi, \eta \right\rangle = \langle \psi, \eta \rangle ,$$

puisque  $\psi$  est périodique sur  $\mathbb{R}^n$ .

Pour tout  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_p^*$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , l'ensemble

$$Z := \{z \in \mathbb{Z}^n \mid \text{supp } \varphi_z \cap \text{supp } \rho \neq \emptyset\}$$

est fini, et on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \Phi\Psi\xi \rangle &= \left\langle \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi_z, \Psi\xi \right\rangle = \left\langle \rho \cdot \sum_{z \in Z} \varphi_z, \xi \right\rangle = \\ &= \sum_{z \in Z} \langle \rho \cdot \varphi_z, \xi_z \rangle = \left\langle \sum_{z \in Z} \rho_{-z} \cdot \varphi, \xi \right\rangle = \langle \varphi, \xi \rangle , \end{aligned}$$

puisque  $\xi$  est périodique et  $\sum_{z \in Z} \rho_{-z} = 1$  sur  $\text{supp } \varphi$ .  $\square$

**EXEMPLE 2** Pour tout  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{T}^n)$ , on a évidemment  $\Phi[f] = [f]$ , en interprétant  $f$  comme une fonction sur  $\mathbb{T}^n$ , puis comme une fonction périodique sur  $\mathbb{R}^n$ .

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , il vient

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \Phi[f] \rangle &= \left\langle \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi_z, [f] \right\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi_z \right) \cdot f = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_Q \varphi_z \cdot f = \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q-z} \varphi \cdot f_{-z} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot f = \langle \varphi, [f] \rangle . \quad \square \end{aligned}$$

**COROLLAIRE** La transformation de Fourier induit un isomorphisme de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_p'$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  par

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_p' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)' : \xi \longmapsto \mathcal{F}\xi(\diamond) := [\langle \rho \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet \text{id}}, \xi \rangle]$$

et

$$\mathcal{F}^{-1} = \widehat{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_p' : \gamma \longmapsto \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \gamma(z) \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] .$$

En particulier

$$\xi = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}\xi(z) \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}]$$

est l'unique décomposition de  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_p'$  comme somme d'exponentielles dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$  avec des coefficients dans  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$ .

C'est immédiat par le théorème 2.3.  $\square$

## 2.5 Périodisée d'une distribution à support compact

**REMARQUE 1** Si  $\xi$  est une distribution sur  $\mathbb{R}^n$  on peut montrer, en utilisant une partition de l'unité suffisamment fine, qu'il existe une plus petite partie fermée  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  avec  $\text{supp } \varphi \cap A = \emptyset$ , on ait  $\langle \varphi, \xi \rangle = 0$ . On dit que cette partie est le *support* de  $\xi$  et on le désigne par  $\text{supp } \xi$ .

**DEFINITION 1** Nous dirons qu'une distribution  $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$  est à *support compact* si  $\text{supp } \zeta$  est compact et nous désignerons par  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_c^*$  l'espace vectoriel de ces distributions.

**LEMME** Si  $\zeta$  est une distribution à support compact, la série  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \zeta_z$  est sommable dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$  et sa somme est une distribution périodique.

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , l'ensemble des  $z \in \mathbb{Z}^n$  tels que  $\langle \varphi, \zeta_z \rangle = \langle \varphi_{-z}, \zeta \rangle \neq 0$  est fini, donc  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \zeta_z$  est sommable dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ . Pour tout  $w \in \mathbb{Z}^n$ , on a alors

$$\left\langle \varphi, \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \zeta_z \right)_w \right\rangle = \left\langle \varphi_{-w}, \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \zeta_z \right\rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \langle \varphi_{-w}, \zeta_z \rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \langle \varphi_{-z}, \zeta \rangle = \left\langle \varphi, \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \zeta_z \right\rangle,$$

ce qui montre que  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \zeta_z$  est périodique.  $\square$

**DEFINITION 2** On dit que la distribution périodique

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \zeta_z : \varphi \mapsto \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \langle \varphi, \zeta_z \rangle$$

est la *périodisée* de  $\zeta$ .

**EXEMPLE 1** Si  $f \in \mathbf{L}_{loc,p}^1(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} (1_Q \cdot f)_z$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ .

**DEFINITION 3** Si  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  définit une partition périodique de l'unité, pour toute distribution à support compact  $\zeta$ , nous poserons

$$\rho_\zeta := \sum_{\text{supp } \rho_z \cap \text{supp } \zeta \neq \emptyset} \rho_z.$$

**PROPOSITION** (i) Pour tout  $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)_c^*$  et  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ , on a

$$\left\langle \psi, \Psi \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \zeta_z \right) \right\rangle = \langle \rho_\zeta \cdot \psi, \zeta \rangle.$$

(ii) Si la série  $\sum_{j \in J} \eta_j$  est sommable dans  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^*$ , alors  $\sum_{j \in J} \Phi \eta_j$  est sommable dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$  et on a

$$\Phi \left( \sum_{j \in J} \eta_j \right) = \sum_{j \in J} \Phi \eta_j .$$

**Démonstration de (i)** En effet

$$\left\langle \psi, \Psi \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \zeta_z \right) \right\rangle = \left\langle \rho \psi, \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \zeta_{-z} \right\rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \langle \rho_z \cdot \psi, \zeta \rangle = \langle \rho_\zeta \cdot \psi, \zeta \rangle ,$$

puisque  $\psi$  est périodique et  $\langle \rho_z \cdot \psi, \zeta \rangle = 0$  si  $\text{supp } \rho_z \cap \text{supp } \zeta = \emptyset$ .

**Démonstration de (ii)** En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\langle \varphi, \Phi \eta_j \rangle = \left\langle \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi_z, \eta_j \right\rangle ,$$

donc

$$\sum_{j \in J} \langle \varphi, \Phi \eta_j \rangle = \sum_{j \in J} \left\langle \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi_z, \eta_j \right\rangle = \left\langle \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi_z, \sum_{j \in J} \eta_j \right\rangle = \left\langle \varphi, \Phi \left( \sum_{j \in J} \eta_j \right) \right\rangle . \quad \square$$

**EXEMPLE 2** Il est clair que la distribution de Dirac  $\delta$  sur  $\mathbb{R}^n$  est à support dans  $\{0\}$ . Sa périodisée  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \delta_z$  s'appelle le *peigne de Dirac* et on a

$$\Psi \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \delta_z \right) = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)^* .$$

C'est immédiat, car pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ , on a

$$\left\langle \psi, \Psi \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \delta_z \right) \right\rangle = \langle \rho_\delta \cdot \psi, \delta \rangle = \rho_\delta(0) \cdot \psi(0) = \langle \psi, \delta \rangle ,$$

puisque  $\rho_\delta(0) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \rho_z(0) = 1$ .  $\square$

**THEOREME (Formule sommatoire de Poisson)** La série  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}]$  est sommable dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$  et on a

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \delta_z .$$

D'après les exemples 2.3.3 et 2.4.2, on a

$$\delta = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \quad \text{et} \quad \Phi [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] = [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] .$$

La proposition (ii) montre donc que  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}]$  est sommable dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$  et que

$$\Phi\delta = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] .$$

Mais l'exemple 2 ci-dessus et le théorème 2.4 montrent que

$$\Phi\delta = \Phi\Psi \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \delta_z \right) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \delta_z ,$$

d'où le résultat.  $\square$

**REMARQUE 2** La formule sommatoire de Poisson peut aussi s'écrire

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}\varphi(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi(z) ,$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , en ayant posé

$$\mathcal{F}\varphi(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \cdot \varphi(x) dx .$$

En effet

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}\varphi(z) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \langle \varphi, [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \rangle = \left\langle \varphi, \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] \right\rangle = \\ &= \left\langle \varphi, \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \delta_z \right\rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi(z) . \end{aligned}$$

On peut en donner une démonstration directe. Nous allons généraliser cette formule à l'aide des intégrales de Fourier, et donner une interprétation élégante du problème d'échantillonnage.



# Chapitre 3

## Transformation de Fourier

### 3.1 Intégrales de Fourier

**DEFINITION 1** Soit  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , on définit l' *intégrale de Fourier* de  $f$  en  $\lambda$  par

$$\mathcal{F}f(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \cdot f(x) dx .$$

On dit que

$$\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \lambda \longmapsto \mathcal{F}f(\lambda)$$

est la *transformée de Fourier* de  $f$  et que l'application

$$\mathcal{F} : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$$

est la *transformation de Fourier*.

Bien que la situation soit symétrique, il est préférable dans les applications de faire une distinction entre l'espace-position de variable  $x$  et l'espace-fréquence de variable  $\lambda$ .

**DEFINITION 2** Pour tout  $g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$  soit

$$\widehat{\mathcal{F}}g := \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \diamond} d\lambda .$$

**REMARQUE** De façon générale si  $G$  est un groupe localement compact abélien, on peut montrer que l'ensemble  $\widehat{G}$  des *caractères (bornés)*  $\chi$  sur  $G$ , i.e  $\chi$  est un homomorphisme de  $G$  dans le groupe  $\mathbb{T}$ , est aussi un groupe localement compact abélien. On dit que c'est le *dual* de  $G$ . La dualité de Pontryagin affirme que le dual de  $\widehat{G}$  est  $G$ .

Le dual de  $\mathbb{R}^n$  est  $\mathbb{R}^n$ , celui de  $\mathbb{T}^n$  est  $\mathbb{Z}^n$  et celui de  $\mathbb{Z}^n$  est  $\mathbb{T}^n$ .

La théorie se développe suivant les mêmes idées que pour les séries de Fourier. Nous ne démontrerons donc pas tous les résultats.

**PROPOSITION** La transformation de Fourier est une application linéaire continue de norme  $\leq 1$  de  $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$ , i.e.

$$\|\mathcal{F}f\|_{\infty} \leq \|f\|_1 .$$

C'est immédiat.  $\square$

**DEFINITION 3** Nous poserons

$$\langle x \rangle := 1 + |x|^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n .$$

Soit  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions  $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$  telles que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on ait

$$\sup_{|\alpha| \leq k, x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^k \cdot |\partial^\alpha \varphi(x)| < \infty ,$$

i.e. si toutes les dérivées de cette fonction sont à *décroissance rapide* .

**THEOREME** Soit  $k \in \mathbb{N}$  .

(i) Pour tout  $f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  avec  $|\alpha|_1 \leq k$ , on a

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = \text{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}f .$$

En particulier si  $f \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\mathcal{F}([1 + \Delta] f) = \langle \text{id} \rangle \cdot \mathcal{F}f .$$

(ii) Pour toute fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\langle \text{id} \rangle^{k/2} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , on a  $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^n)$  et

$$\partial^\alpha \mathcal{F}f = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \mathcal{F}(\text{id}^\alpha \cdot f) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha|_1 \leq k .$$

En particulier

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

(iii) Quel que soit  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\widehat{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}\check{f}} = (\mathcal{F}f)^\vee = \mathcal{F}\check{\check{f}}$$

et

$$\mathcal{F}(f_x) = e^{-2\pi i \cdot \text{id} \bullet x} \cdot \mathcal{F}f .$$

(iv) **Riemann-Lebesgue** On a

$$\mathcal{F}(\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) .$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 2.1.  $\square$

## 3.2 Formule d'inversion

**REMARQUE 1** Les applications

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \varphi \longrightarrow \mathcal{F}\varphi = \int e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet x} \cdot \varphi(x) dx$$

et

$$\widehat{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \psi \longmapsto \widehat{\mathcal{F}}\psi = \int \psi(\lambda) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \diamond} d\lambda$$

sont bien définies et linéaires par le théorème 3.1.

Nous allons montrer qu'elles sont réciproques l'une de l'autre.

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , la fonction  $e^{-2\pi\varepsilon \cdot |\text{id}|_1} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$  et on a

$$\rho_\varepsilon := \widehat{\mathcal{F}}e^{-2\pi\varepsilon \cdot |\text{id}|_1} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\pi\varepsilon} \cdot \left\langle \frac{pr_j}{\varepsilon} \right\rangle^{-1}.$$

En outre  $\rho_\varepsilon \geq 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon = 1.$$

**LEMME** Si  $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $f$  est continue en 0, alors

$$f(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\pi\varepsilon} \cdot \left\langle \frac{pr_j}{\varepsilon} \right\rangle \cdot f(x) dx.$$

**THEOREME (Formule d'inversion)** Si  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{F}f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$f(x) = \widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)(x) = \int \mathcal{F}f(\lambda) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \diamond} d\lambda \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

**REMARQUE 2** L'hypothèse  $f \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$  peut être supprimée en utilisant la densité de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ .

**COROLLAIRE** La transformation de Fourier est une bijection de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  :

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \varphi \longrightarrow \mathcal{F}\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet x} \cdot \varphi(x) dx$$

et

$$\mathcal{F}^{-1} = \widehat{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \psi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\lambda) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \diamond} d\lambda .$$

**REMARQUE 3** La formule d'inversion fournit une classe de fonctions pour lesquelles la formule

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(\lambda) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet x} d\lambda = \int \left( \int e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet (x-y)} \cdot \mathcal{F}f(\lambda) dy \right) d\lambda .$$

est valable pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  .

Remarquons que l'on ne peut pas utiliser directement le théorème de Fubini ! Comme dans le chapitre précédent, nous verrons dans le paragraphe suivant comment l'on peut donner un sens à  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}} d\lambda$  . En outre, il nous faut étendre la transformation de Fourier à des fonctions plus générales que celles de  $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$  , en particulier aux exponentielles  $e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  et aux polynômes.

**EXEMPLE** Pour tout  $a > 0$  , on a  $\mathcal{F}e^{-\pi a \cdot \text{id}^2} = \sqrt{\frac{1}{a}} \cdot e^{-\pi \cdot \text{id}^2 / a}$  .

Grâce au théorème 3.1,  $\mathcal{F}e^{-\pi a \cdot \text{id}^2}$  satisfait à une équation différentielle que l'on peut résoudre (exercice).  $\square$

### 3.3 Convolution des fonctions

**PROPOSITION** Pour tout  $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , la fonction  $f(x - \diamond) \cdot g$  est intégrable pour tous les  $x \in \mathbb{R}^n$  et

$$f * g := \int f(\diamond - y) \cdot g(y) dy \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

avec

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1 .$$

En outre, si  $f \in \mathcal{C}^{(k),b}(\mathbb{R}^n)$ , i.e.  $f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^n)$  et  $\partial^\alpha f \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $|\alpha| \leq k$ , alors  $f * g \in \mathcal{C}^{(k),b}(\mathbb{R}^n)$  et on a

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g .$$

C'est presque immédiat, la seconde partie en utilisant le théorème de Lebesgue.  $\square$

**REMARQUE** La seconde partie montre que la convolution est une opération régularisante.

**THEOREME** Pour tout  $f, g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , la fonction  $f(x - \diamond) \cdot g$  est intégrable pour presque tous les  $x \in \mathbb{R}^n$  et

$$f * g := \int f(\diamond - y) g(y) dy \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

avec

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 .$$

En outre, on a

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g .$$

La première partie découle du théorème de Fubini grâce à la formule des changements de variables. Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\lambda) &= \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \left( \int f(x - y) \cdot g(y) dy \right) dx = \\ &= \iint e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet (z+y)} \cdot f(z) \cdot g(y) dz dy = \mathcal{F}f(\lambda) \cdot \mathcal{F}g(\lambda) . \quad \square \end{aligned}$$

**DEFINITION** Pour tout  $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , on dit que la fonction  $f * g$  est le *produit de convolution* ou la *convoluée* de  $f$  par  $g$ .

**COROLLAIRE** Pour tout  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , ainsi que

$$\partial^\alpha (\varphi * \psi) = (\partial^\alpha \varphi) * \psi$$

et

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}\psi \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\varphi \cdot \psi) = \mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi .$$

En effet les formules découlent de ce qui précède, et comme  $\mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on obtient

$$\varphi * \psi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}\psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) . \quad \square$$

### 3.4 Distributions tempérées

**DEFINITION** Nous dirons qu'une forme linéaire

$$\xi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \xi(\varphi) =: \langle \varphi, \xi \rangle ,$$

i.e. un élément de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ , est une *distribution (algébrique) tempérée*.

**EXEMPLE 1** Soit  $f \in \mathbf{L}_{mod}^1(\mathbb{R}^n)$  une fonction à croissance modérée, i.e. telle qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  avec

$$\int \frac{|f(x)|}{\langle x \rangle^k} dx < \infty .$$

Il est clair que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $\varphi f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$  et

$$[f] : \varphi \longmapsto \int \varphi \cdot f$$

est une distribution tempérée. L'application

$$f \longmapsto [f] : \mathbf{L}_{mod}^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$$

est injective comme dans le cas des distributions.

Remarquons que  $e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot \text{id}} \in \mathbf{L}_{mod}^1(\mathbb{R}^n)$  si, et seulement si, on a  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

$$\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) , \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) , \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}_{mod}^1(\mathbb{R}^n) ,$$

où  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  désigne l'espace vectoriel des polynômes sur  $\mathbb{R}^n$ .

**EXEMPLE 2** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , soit

$$\delta_x : \varphi \longmapsto \varphi(x) .$$

C'est une distribution tempérée et  $\text{supp } \delta_x = \{x\}$ .

**REMARQUE 1** Les opérations introduites pour les distributions peuvent être adaptées aux distributions tempérées, mais avec quelques modifications.

Par exemple si  $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$  et  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ , on ne peut définir  $g\xi$  que si l'on a  $g\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . On peut montrer qu'il est équivalent que  $g$ , ainsi que toutes ses dérivées, soient au plus à croissance polynomiale, i.e. pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  et  $c \in \mathbb{R}_+$ , tels que

$$|\partial^\alpha g| \leq c \cdot \langle \text{id} \rangle^k .$$

On dit que  $g$  est *tempérée*. On désigne par  $\mathcal{C}_{temp}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel de ces fonctions.

**REMARQUE 2** L'introduction d'une topologie localement convexe métrisable sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  permettrait de comparer l'espace des distributions tempérées (continues) avec celui des distributions. On montre en effet que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , ce qui permet d'identifier  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$  avec un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ . C'est la raison pour laquelle nous ne faisons pas de distinction typographique entre  $[f]$ , respectivement  $\delta_x$ , comme distribution tempérée et comme distribution.

### 3.5 Transformation de Fourier d'une distribution

**LEMME** Pour tout  $f, g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\int g(\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) d\lambda = \int \mathcal{F}g(x) \cdot f(x) dx .$$

Par le théorème de Fubini, on a en effet

$$\begin{aligned} \int g(\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) d\lambda &= \int g(\lambda) \cdot \left( \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \cdot f(x) dx \right) d\lambda = \\ &= \int \left( \int g(\lambda) \cdot e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} d\lambda \right) \cdot f(x) dx = \int \mathcal{F}g(x) \cdot f(x) dx . \quad \square \end{aligned}$$

**REMARQUE** Du fait de la symétrie nous avons pu écrire  $\mathcal{F}g$  à la place de  $\widehat{\mathcal{F}}\check{g}$  (cf. définition 2.3.3) !

En particulier, pour tout  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , il vient

$$\langle \psi, [\mathcal{F}f] \rangle = \langle \mathcal{F}\psi, [f] \rangle .$$

Ceci nous conduit à la

**DEFINITION** Si  $\xi$  est une distribution tempérée, on définit sa *transformée de Fourier*  $\mathcal{F}\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$  par

$$\langle \psi, \mathcal{F}\xi \rangle := \langle \mathcal{F}\psi, \xi \rangle \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) ,$$

et sa *cotransformée de Fourier*  $\widehat{\mathcal{F}}\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  par

$$\langle \varphi, \widehat{\mathcal{F}}\xi \rangle := \langle \widehat{\mathcal{F}}\varphi, \xi \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

Le calcul ci-dessus montre que, pour tout  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\mathcal{F}[f] = [\mathcal{F}f] \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{F}}[f] = [\widehat{\mathcal{F}}f] .$$

**THEOREME** La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  est une bijection linéaire de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$  dont l'application réciproque est  $\widehat{\mathcal{F}}$ .

On a

$$\widehat{\mathcal{F}}\xi = (\mathcal{F}\xi)^\vee = \mathcal{F}\check{\xi} ,$$

ainsi que

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha \xi) = \text{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\xi \quad , \quad \partial^\alpha \mathcal{F}\xi = \mathcal{F}([- \text{id}]^\alpha \cdot \xi)$$

et

$$\mathcal{F}(\xi_x) = e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet x} \cdot \mathcal{F}\xi \ .$$

C'est immédiat par le corollaire 3.2.  $\square$

**EXEMPLE 1** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on a

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta_x) = \text{id}^\alpha \cdot [e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet x}] \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{F}}[\text{id}^\alpha \cdot e^{2\pi i \cdot \diamond \bullet x}] = \partial^\alpha \delta_x \ .$$

Il nous suffit de démontrer la première formule pour  $\alpha = 0$ . On a

$$\langle \psi, \mathcal{F}\delta_x \rangle = \langle \mathcal{F}\psi, \delta_x \rangle = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \cdot \psi(\lambda) \, d\lambda = \langle \psi, [e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet x}] \rangle \ . \quad \square$$

**EXEMPLE 2** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\delta_x = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \cdot [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] \, d\lambda \ .$$

Cela découle immédiatement du corollaire 3.2 comme dans l'exemple 2.3.3.  $\square$

### 3.6 Convolution des distributions

Si  $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , alors pour tout  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , le théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, [\psi * f] \rangle &= \int \varphi(x) \cdot \left( \int \psi(x-y) \cdot f(y) dy \right) dx = \\ &= \int \left( \int \varphi(x) \cdot \psi(x-y) dx \right) \cdot f(y) dy = \\ &= \int \left( \int \varphi(y-z) \cdot \check{\psi}(z) dz \right) \cdot f(y) dy = \langle \varphi * \check{\psi}, [f] \rangle . \end{aligned}$$

Ceci nous conduit à la

**DEFINITION 1** Pour tout  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$  et  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on définit la *convolution de  $\psi$  avec  $\xi$*  par

$$\langle \varphi, \psi * \xi \rangle := \langle \varphi * \check{\psi}, \xi \rangle .$$

**PROPOSITION** Pour tout  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$  et  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\partial^\alpha (\psi * \xi) = \psi * \partial^\alpha \xi = (\partial^\alpha \psi) * \xi \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n ,$$

ainsi que

$$\mathcal{F}(\psi * \xi) = \mathcal{F}\psi \cdot \mathcal{F}\xi .$$

D'après le corollaire 3.3, on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \partial^\alpha (\psi * \xi) \rangle &= (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle (\partial^\alpha \varphi) * \check{\psi}, \xi \rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle \partial^\alpha (\varphi * \check{\psi}), \xi \rangle = \\ &= \langle \varphi * \check{\psi}, \partial^\alpha \xi \rangle = \langle \varphi, \psi * \partial^\alpha \xi \rangle , \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \partial^\alpha (\psi * \xi) \rangle &= (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle \partial^\alpha (\varphi * \check{\psi}), \xi \rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle \varphi * \partial^\alpha \check{\psi}, \xi \rangle = \\ &= \langle \varphi * (\partial^\alpha \psi)^\vee, \xi \rangle = \langle \varphi, (\partial^\alpha \psi) * \xi \rangle . \end{aligned}$$

D'autre part

$$\langle \gamma, \mathcal{F}(\psi * \xi) \rangle = \langle \mathcal{F}\gamma, \psi * \xi \rangle = \langle \mathcal{F}\gamma * \check{\psi}, \xi \rangle = \langle \mathcal{F}(\gamma \cdot \mathcal{F}\psi), \xi \rangle = \langle \gamma, \mathcal{F}\psi \cdot \mathcal{F}\xi \rangle ,$$

ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**EXEMPLE** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\psi * \delta_x = \psi_x$ .

En effet, on a

$$\langle \varphi, \psi * \delta_x \rangle = \left\langle \int \varphi(\diamond - y) \cdot \check{\psi}(y) dy, \delta_x \right\rangle = \int \varphi(y) \cdot \psi(y - x) dy = \langle \varphi, (\psi_x) \rangle . \quad \square$$

**REMARQUE** Si  $\xi$  est une distribution tempérée continue (cf. remarque 3.4.2), i.e.  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ , on peut montrer que la fonction

$$g : x \longmapsto \langle (\check{\psi})_x, \xi \rangle = \langle \psi(x - \diamond), \xi \rangle$$

est tempérée et que  $\psi * \xi = [g]$ . Par simplification, on désigne aussi par  $\psi * \xi$  cette fonction !

**DEFINITION 2** On dit qu'une distribution tempérée  $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$  est à *décroissance rapide* si, pour tout  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $\psi * \zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . On désigne par  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{rap}$  l'espace vectoriel de ces distributions.

Pour tout  $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{rap}$  et  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ , on définit la *convolution*  $\zeta * \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$  de  $\zeta$  avec  $\xi$  par

$$\langle \varphi, \zeta * \xi \rangle := \langle \varphi * \check{\zeta}, \xi \rangle .$$

On peut montrer le

**THEOREME** (i) Si  $f \in \mathbf{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  est telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on ait  $\langle \text{id} \rangle^k \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , en particulier si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $[f] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{rap}$ .

(ii) Pour tout  $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{rap}$  et  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ , on a

$$\text{supp } \zeta * \xi \subset \overline{\text{supp } \zeta + \text{supp } \xi} .$$

(iii) La transformation de Fourier est une bijection de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{rap}$  sur  $\mathcal{C}_{temp}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$  et, pour tout  $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{rap}$  et  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ , on a

$$\mathcal{F}(\zeta * \xi) = \mathcal{F}\zeta \cdot \mathcal{F}\xi .$$

La seconde partie de (iii) découle de la proposition car, pour tout  $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\langle \gamma, \mathcal{F}(\zeta * \xi) \rangle = \langle \mathcal{F}\gamma * \check{\zeta}, \xi \rangle = \langle \mathcal{F}(\gamma \cdot \mathcal{F}\zeta), \xi \rangle = \langle \gamma \cdot \mathcal{F}\zeta, \mathcal{F}\xi \rangle = \langle \gamma, \mathcal{F}\zeta \cdot \mathcal{F}\xi \rangle ,$$

ce qui a un sens puisque  $\mathcal{F}\zeta \in \mathcal{C}_{temp}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

### 3.7 Fonctions à spectre compact

**REMARQUE 1** Comme pour les distributions (cf. remarque 2.5.1), on peut définir la notion de support d'une distribution tempérée. Nous désignerons par  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_c$  l'espace vectoriel des distributions tempérées (continues) à support compact.

**THEOREME** Toute distribution  $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$  à support compact est à décroissance rapide, i.e.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_c \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{rap} ,$$

et la fonction tempérée  $\mathcal{F}\zeta$  est donnée par

$$\mathcal{F}\zeta(\diamond) = \langle \chi \cdot e^{-2\pi i \cdot \text{id} \cdot \diamond}, \zeta \rangle$$

pour tout  $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\chi \cdot \zeta = \zeta$ .

La distribution  $\zeta$  est considérée dans l'espace-fréquence et sa transformée de Fourier dans l'espace-position. Si l'on admet que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\chi \cdot \mathcal{F}\varphi = \int \varphi(x) \cdot \chi \cdot e^{-2\pi i \diamond \cdot x} dx \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) ,$$

comme intégrale faible ou comme limite de sommes de Riemann, alors

$$\langle \varphi, \mathcal{F}\zeta \rangle = \langle \mathcal{F}\varphi, \chi \cdot \zeta \rangle = \left\langle \int \varphi(x) \cdot \chi \cdot e^{-2\pi i \text{id} \cdot \bullet \cdot x} dx, \zeta \right\rangle = \int \varphi(x) \cdot \langle \chi \cdot e^{-2\pi i \text{id} \cdot \bullet \cdot x}, \zeta \rangle dx . \quad \square$$

**EXEMPLE 1** Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  et  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ , on a  $\delta_\lambda * \xi = \xi_\lambda$ . En particulier  $\delta * \xi = \xi$ .

En effet, pour tout  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , il vient

$$\langle \psi, \delta_x * \xi \rangle = \langle \psi * (\delta_\lambda)^\vee, \xi \rangle = \langle \psi * \delta_{-\lambda}, \xi \rangle = \langle \psi_{-x}, \xi \rangle = \langle \psi, \xi_x \rangle$$

d'après l'exemple 3.6.  $\square$

**EXEMPLE 2** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on a  $(\partial^\alpha \delta) * \xi = \partial^\alpha \xi$ .

En effet, la proposition 3.6 montre que

$$\langle \psi, (\partial^\alpha \delta) * \xi \rangle = \langle \psi * (\partial^\alpha \delta)^\vee, \xi \rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle \partial^\alpha (\psi * \delta), \xi \rangle = \langle \psi, \partial^\alpha \xi \rangle . \quad \square$$

**DEFINITION** Nous dirons qu'une fonction  $f \in \mathbf{L}_{mod}^1(\mathbb{R}^n)$  est à spectre compact si la distribution tempérée  $\mathcal{F}[f]$  est à support compact. On dit aussi que  $\mathcal{F}[f]$  est le spectre de  $f$ .

**COROLLAIRE** Si  $f$  est une fonction à spectre compact et si  $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est tel que  $\mathcal{F}[f] = \chi \cdot \mathcal{F}[f]$ , alors on a

$$f(x) = \langle \chi \cdot e^{2\pi i \cdot \text{id} \bullet x}, \mathcal{F}[f] \rangle \quad \text{pour presque tous les } x \in \mathbb{R}^n ,$$

et

$$\langle \chi \cdot e^{2\pi i \cdot \text{id} \bullet \diamond}, \mathcal{F}[f] \rangle \in \mathcal{C}_{temp}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) .$$

Grâce au théorème 3.5, on a  $[f] = \widehat{\mathcal{F}}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}((\mathcal{F}[f])^\vee)$  et  $\check{\chi} \cdot = (\chi \cdot \mathcal{F}[f])^\vee$ , donc

$$f(\diamond) = \langle \check{\chi} \cdot e^{-2\pi i \cdot \text{id} \bullet \diamond}, \rangle \quad \text{presque partout}$$

par le théorème ci-dessus; le résultat en découle car

$$\langle \check{\chi} \cdot e^{-2\pi i \cdot \text{id} \bullet \diamond}, (\mathcal{F}[f])^\vee \rangle = \langle \chi \cdot e^{2\pi i \cdot \text{id} \bullet \diamond}, \mathcal{F}[f] \rangle . \quad \square$$

**REMARQUE 2** Voici une démonstration élémentaire du corollaire. Posons

$$\begin{aligned} g(\diamond) &:= \langle \chi \cdot e^{2\pi i \cdot \text{id} \bullet \diamond}, \mathcal{F}[f] \rangle = \int \chi(\lambda) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \diamond} \cdot \left( \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \cdot f(x) dx \right) d\lambda = \\ &= \int \left( \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet (x - \diamond)} \cdot \chi(\lambda) d\lambda \right) \cdot f(x) dx = \int \mathcal{F}\chi(x - \diamond) \cdot f(x) dx . \end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{F}\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , le théorème de Lebesgue montre que  $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ . D'autre part, si  $k \in \mathbb{N}$  est tel que

$$\int \frac{|f(y)|}{\langle y \rangle^k} dy < \infty ,$$

et comme, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\langle x + y \rangle \leq \langle x \rangle (1 + |y|)^2 \leq 2 \langle x \rangle \langle y \rangle ,$$

ou bien

$$\langle x \rangle \leq 2 \langle x - y \rangle \langle y \rangle , \quad (*)$$

pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  avec  $|\alpha|_1 \leq k$ , il vient

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha g(y)| &\leq \int |\partial^\alpha \mathcal{F}\chi(x - y)| \cdot |f(x)| dx \leq \\ &\leq 2^k \cdot \langle y \rangle^k \cdot \int \langle x - y \rangle^k \cdot |\partial^\alpha \mathcal{F}\chi(x - y)| \cdot \frac{|f(x)|}{\langle x \rangle^k} dx \leq \\ &\leq 2^k \cdot \left\| \langle \text{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha \mathcal{F}\chi \right\|_\infty \cdot \left( \int \frac{|f(x)|}{\langle x \rangle^k} dx \right) \cdot \langle y \rangle^k . \end{aligned}$$

Ceci finit de prouver que  $g$  est à croissance lente.

Finalement, pour tout  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , le corollaire 3.3 montre que

$$\langle \mathcal{F}\psi, [f] \rangle = \langle \psi, \mathcal{F}[f] \rangle = \langle \psi, \chi \cdot \mathcal{F}[f] \rangle = \langle \mathcal{F}(\chi \cdot \psi), [f] \rangle = \langle \mathcal{F}\chi * \mathcal{F}\psi, [f] \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left( \int \mathcal{F}\chi(x-y) \cdot \mathcal{F}\psi(y) \, dy \right) \cdot f(x) \, dx = \\
&= \int \mathcal{F}\psi(y) \cdot \left( \int \mathcal{F}\chi(x-y) \cdot f(x) \, dx \right) \, dy = \langle \mathcal{F}\psi, [g] \rangle ,
\end{aligned}$$

car nous pouvons appliquer le théorème de Fubini :

$$|\mathcal{F}\psi(y) \cdot \mathcal{F}\chi(x-y) \cdot f(x)| \leq \left\| \langle \text{id} \rangle^k \cdot \mathcal{F}\chi \right\|_{\infty} \cdot \langle y \rangle^k \cdot |\mathcal{F}\psi(y)| \cdot \frac{|f(x)|}{\langle x \rangle^k} .$$

Ainsi  $[f] = [g]$  , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**REMARQUE 3** Cette formule est une généralisation de la formule d'inversion

$$f(x) = \int \mathcal{F}f(\lambda) \cdot e^{2\pi i \lambda \cdot x} \, d\lambda ,$$

valable pour  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$  avec  $\mathcal{F}f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$  .

**EXEMPLE** On a

$$\widehat{\mathcal{F}}1_{[a,b]} = (b-a) \cdot e^{\pi i \cdot (a+b) \cdot \diamond} \cdot \text{sinc}((b-a)\pi \diamond) ,$$

en ayant défini la fonction *sinus cardinal* *sinc* par

$$\text{sinc}(x) := \frac{\sin x}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

et

$$\text{sinc}(0) = 1 .$$

En effet

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot x} \, d\lambda &= \frac{1}{2\pi i \cdot x} \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot x} \Big|_a^b = \frac{1}{2\pi i \cdot x} \cdot (e^{2\pi i \cdot b \cdot x} - e^{2\pi i \cdot a \cdot x}) = \\
&= \frac{e^{\pi i \cdot (a+b) \cdot x}}{2\pi i \cdot x} \cdot (e^{\pi i \cdot (b-a) \cdot x} - e^{-\pi i \cdot (b-a) \cdot x}) = (b-a) \cdot e^{\pi i \cdot (a+b) \cdot x} \cdot \text{sinc}((b-a)\pi \cdot x) . \quad \square
\end{aligned}$$

### 3.8 Filtres de convolution

**DEFINITION 1** Nous dirons que  $T$  est un *filtre de convolution* si  $T$  est de la forme

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^* : \xi \longmapsto \zeta * \xi$$

avec  $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{rap}$ .

Déterminons la fonction de transfert

$$\kappa : \lambda \longmapsto T [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] (0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

d'un tel filtre. On a

$$\mathcal{F}(\zeta * [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}]) = \mathcal{F}\zeta \cdot \mathcal{F}[e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] = \mathcal{F}\zeta \cdot \delta_\lambda = \mathcal{F}\zeta(\lambda) \cdot \delta_\lambda$$

d'après l'exemple 3.5.1 et l'exemple 1.3.1 adapté aux distributions tempérées. Ainsi

$$\zeta * [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\zeta(\lambda) \cdot \delta_\lambda) = \mathcal{F}\zeta(\lambda) \cdot [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}],$$

donc

$$\kappa(\lambda) = T [e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \text{id}}] (0) = \mathcal{F}\zeta(\lambda).$$

Remarquons en outre que

$$T\delta = \zeta * \delta = \zeta;$$

si  $T$  est l'inverse à droite d'un opérateur aux dérivées partielles

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha|_1 \leq m} a_\alpha \cdot \partial^\alpha,$$

alors  $\zeta$  est une solution élémentaire :

$$P(\partial)\zeta = P(\partial)T\delta = \delta.$$

On peut montrer en utilisant les méthodes qui précèdent (exercice) le

**THEOREME** Si  $P$  et  $Q$  sont des polynômes et si  $P$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^n$ , alors pour tout  $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$  l'équation aux dérivées partielles

$$P(\partial)\xi = Q(\partial)\eta$$

possède une unique solution  $\xi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ .

Si  $n = 1$ , on montre qu'il existe  $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'_{rap}$ , que l'on peut calculer explicitement, telle que  $\xi = \zeta * \eta$ .

**REMARQUE** Un filtre modèle d'un système physique, du type circuit RC, jouit de la propriété suivante : si deux signaux d'entrée sont égaux pour tout  $t < t_0$ , alors les signaux de sortie sont aussi égaux pour tout  $t < t_0$ , ou bien par linéarité que si un signal d'entrée est nul

pour tout  $t < t_0$ , alors le signal de sortie est nul pour tout  $t < t_0$ . Ceci nous conduit à poser la

**DEFINITION 2** On dit qu'un filtre  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$  est *réalisable* (ou *causal*) si pour tout  $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$

$$\text{supp } \eta \subset [t_0, \infty[ \quad \Rightarrow \quad \text{supp } T\eta \subset [t_0, \infty[ .$$

**PROPOSITION** Si  $T : \xi \longmapsto \zeta * \xi$  est un filtre de convolution, alors  $T$  est réalisable si, et seulement si,

$$\text{supp } \zeta \subset [0, \infty[ .$$

Si  $T$  est réalisable, on a

$$\text{supp } \zeta = \text{supp } T\delta \subset [0, \infty[ ,$$

puisque  $\text{supp } \delta = \{0\} \subset [0, \infty[$ .

Réciproquement il vient

$$\text{supp } T\eta = \text{supp } \zeta * \eta \subset \overline{\text{supp } \zeta + \text{supp } \eta} \subset \overline{[0, \infty[ + [t_0, \infty[} = [t_0, \infty[$$

par le théorème 3.6.(ii).  $\square$

**EXEMPLE** Un filtre de convolution *parfait*, i.e un filtre ayant une fonction de transfert du type  $\mathcal{F}\zeta = 1_{[a,b]}$ , n'est pas réalisable.

En effet le support de  $(b-a) \cdot e^{\pi i(a+b)\cdot\omega} \cdot \text{sinc}((b-a)\pi\omega)$  est  $\mathbb{R}$  (cf. exemple 3.7).  $\square$

### 3.9 Echantillonnage d'un signal

**REMARQUE 1** Pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , la série  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \partial^\alpha(\varphi_z)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^n$ , donc que

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi_z \in \mathcal{C}_p^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) .$$

Puisque  $\partial^\alpha(\varphi_z) = (\partial^\alpha \varphi)_z$  et que  $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , il nous suffit de montrer que  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi_z$  converge uniformément sur  $Q$ . Pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , on a  $|\varphi(x)| \leq \left\| \langle \text{id} \rangle^l \cdot \varphi \right\|_\infty \cdot \langle x \rangle^{-l}$ , donc

$$|\varphi(x-z)| \leq \left\| \langle \text{id} \rangle^l \cdot \varphi \right\|_\infty \cdot \langle x-z \rangle^{-l} \leq \left\| \langle \text{id} \rangle^l \cdot \varphi \right\|_\infty \cdot 2^l \cdot \langle x \rangle^l \cdot \langle z \rangle^{-l}$$

par l'inégalité (\*) de 3.7, ce qui prouve notre assertion.  $\square$

Cette remarque permet de généraliser les résultats des paragraphes 2.4 et 2.5 aux distributions tempérées continues. On en déduit le

**LEMME (Formule sommatoire de Poisson)** *Les séries*

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} [e^{2\pi i \cdot \frac{z}{h} \bullet \text{id}}] \quad \text{et} \quad \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \delta_{hz}$$

sont sommables dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$  et on a

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} [e^{2\pi i \cdot \frac{z}{h} \bullet \text{id}}] = h^n \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \delta_{hz}$$

i.e.

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}\varphi\left(\frac{z}{h}\right) = h^n \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi(hz)$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**REMARQUE 2** Pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et toute fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  à croissance au plus polynomiale, on a

$$(\varphi(hz))_{z \in \mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \quad \text{et} \quad (f(hz))_{z \in \mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$$

Comme  $\langle \varphi, f(hz) \cdot \delta_{hz} \rangle = \varphi(hz) \cdot f(hz)$ , la série  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(hz) \cdot \delta_{hz}$  est sommable dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$  (cf. remarque 2.3.1). Ceci nous permet de poser la

**DEFINITION** Soit  $h > 0$ . Nous poserons

$$\Delta_h := h^n \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \delta_{hz}$$

et nous dirons que c'est le *peigne de Dirac* de largeur  $h$ .

Pour toute fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  à croissance au plus polynomiale nous dirons que

$$f \cdot \Delta_h := h^n \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(hz) \cdot \delta_{hz}$$

est l'*échantillonnage* de  $f$  et que  $h$  est le *pas de l'échantillonnage*.

**LEMME** Si  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  est à croissance au plus polynomiale, alors

$$[f] = \lim_{h \rightarrow 0^+} f \cdot \Delta_h \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^* .$$

On a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \lim_{h \rightarrow 0^+} f \cdot \Delta_h \rangle &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \varphi, f \cdot \Delta_h \rangle = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^n \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \varphi(hz) \cdot f(hz) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \int \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} (\varphi \cdot f)(hz) \cdot 1_{hQ+hz} = \int \varphi \cdot f = \langle \varphi, [f] \rangle \end{aligned}$$

par le théorème de Lebesgue, puisque .  $\square$

**REMARQUE 3** Ceci montre que, pour  $h$  suffisamment petit, l'échantillonnage  $f \cdot \Delta_h$  de  $f$  est une bonne approximation de  $f$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ .

Nous pouvons maintenant comparer le spectre de  $f$  et celui de  $f \cdot \Delta_h$ . On a le

**THEOREME** Si  $f$  est une fonction à spectre compact, alors

$$\mathcal{F}(f \cdot \Delta_h) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} (\mathcal{F}[f])_{\frac{z}{h}} \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^* ,$$

i.e. le spectre de l'échantillonnage de  $f$  est égal à la  $\frac{1}{h}$ -périodisée du spectre de  $f$ .

Grâce aux théorème 3.7 et 3.6 il vient

$$\mathcal{F}(f \cdot \Delta_h) = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}\Delta_h = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}\left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} [e^{2\pi i \cdot \frac{z}{h} \cdot \text{id}}]\right) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}[f] * \delta_{\frac{z}{h}} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} (\mathcal{F}[f])_{\frac{z}{h}} . \quad \square$$

On a

$$\mathcal{F}(f \cdot \Delta_h) = h^n \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}(f \cdot \delta_{hz}) = h^n \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(hz) \cdot [e^{-2\pi i \cdot hz \cdot \text{id}}] .$$

En remplaçant  $\mathcal{F}[f]$  par  $\zeta$ , la formule du théorème est un cas particulier de la

**PROPOSITION (Formule sommatoire généralisée de Poisson)** On a

$$\zeta * \Delta_{\frac{1}{h}} = \frac{1}{h^n} \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \zeta_{\frac{z}{h}} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}\zeta(hz) \cdot [e^{2\pi i \cdot hz \cdot \text{id}}] \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^* ,$$

pour tout  $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{rap}$ , mais aussi pour tout  $\zeta = [g]$  avec  $g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ .

**EXEMPLE 1** Si  $g \in \mathbf{L}_{loc,p}^1(\mathbb{R}^n)$ , alors  $[1_Q \cdot g] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{rap}$  et

$$\mathcal{F}[1_Q \cdot g](z) = \int_Q e^{-2\pi i \cdot z \bullet x} \cdot g(x) dx = \mathcal{F}g_{\mathbb{T}^n}(z) .$$

Ainsi la formule de Poisson

$$[g] = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} [1_Q \cdot g]_z = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}[1_Q \cdot g](z) \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}] = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}g_{\mathbb{T}^n}(z) \cdot [e^{2\pi i \cdot z \bullet \text{id}}]$$

n'est rien d'autre que le série de Fourier de  $g_{\mathbb{T}^n}$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ . Par transformation de Fourier, on obtient

$$\mathcal{F}[g] = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}g_{\mathbb{T}^n}(z) \cdot \delta_z ,$$

ces formules explicitant le lien entre séries et intégrales de Fourier.

**EXEMPLE 2** Soit  $g \in \mathcal{AC}(\mathbb{R})$  avec  $g, \partial g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$\frac{1}{h} \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}} g\left(x - \frac{z}{h}\right) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}g(hz) \cdot e^{2\pi i \cdot hz \bullet \text{id}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} ,$$

la série du membre de gauche étant normalement convergente sur tout compact de  $\mathbb{R}$  et celle de droite uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ .

Remarquons que si  $g \in \mathcal{AC}^{(k)}(\mathbb{R})$  avec  $\partial^l g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$  si  $0 \leq l \leq k$ , alors

$$\mathcal{F}g(hz) = \frac{1}{(2\pi i h z)^k} \cdot \mathcal{F}(\partial^k g)(hz) ;$$

ainsi la convergence de la seconde série peut être bien meilleure que celle de la première !

Le cas général est assez compliqué, par contre si  $k = 2$ , en utilisant la théorie des séries de Fourier, on obtient une démonstration directe de la formule ci-dessus, donc aussi de la formule sommatoire de Poisson dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

### 3.10 Théorème de Shannon

Dans ce qui suit, nous supposons que  $f \in \mathbf{L}_{\text{mod}}^1(\mathbb{R}^n)$  est une fonction à spectre dans le cube

$$Q_a := \left[ -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right]^n .$$

Rappelons que  $f \in \mathcal{C}_{\text{temp}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$  (cf. corollaire 3.7). Si le pas d'échantillonnage  $h$  est assez petit, i.e. si la condition de Nyquist

$$\frac{1}{h} > a$$

est satisfaite, alors les supports des translatées  $(\mathcal{F}[f])_{\frac{z}{h}}$  sont deux à deux disjoints, et il va être possible d'isoler  $\mathcal{F}[f]$  parmi la somme de ces translatées, puis de reconstruire  $f$  à l'aide des seules valeurs  $f(hz)$ .

Par contre si le pas d'échantillonnage est trop grand, i.e. si

$$\frac{1}{h} < a ,$$

il y a superposition des translatées et par suite disparition de  $\mathcal{F}[f]$  dans la somme des translatées, ce qui empêche la reconstruction de  $f$ .

Le cas

$$\frac{1}{h} = a$$

est intermédiaire; il sera traité dans le cadre  $\mathbf{L}^2$  au paragraphe suivant.

**THEOREME (de reconstruction)** Soient  $f$  une fonction à spectre dans  $Q_a$ ,  $\frac{1}{h} > a$  et  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  avec

$$\chi = \tilde{\chi} \quad , \quad \chi = 1 \text{ sur un voisinage de } Q_a \quad \text{et} \quad \text{supp } \chi \subset Q_{\frac{1}{h}} .$$

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a la formule de reconstruction

$$f(x) = h^n \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(hz) \cdot \mathcal{F}\chi(x - hz) .$$

On a

$$\mathcal{F}[f] = \chi \cdot \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} (\mathcal{F}[f])_{\frac{z}{h}} \right) = \chi \cdot \mathcal{F}(f \cdot \Delta_h) ,$$

donc

$$[f] = \mathcal{F}^{-1}(\chi \cdot \mathcal{F}(f \cdot \Delta_h)) = \mathcal{F}\chi * (f \cdot \Delta_h) .$$

Mais d'après la remarque 1.12, la distribution  $\mathcal{F}\chi * (f \cdot \Delta_h)$  est une fonction appartenant à

$\mathcal{C}_{temp}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ , ce que du reste on vérifie facilement à la main, et

$$\mathcal{F}\chi * (f \cdot \Delta_h)(x) = \langle \mathcal{F}\chi(x - \diamond), f \cdot \Delta_h \rangle = h^n \cdot \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(hz) \cdot \mathcal{F}\chi(x - hz) ,$$

d'où le résultat.  $\square$

**REMARQUE** D'après la remarque 3.7.2, on a

$$f(hz) = \int \mathcal{F}\chi(x - hz) \cdot f(x) dx .$$

On peut donc interpréter la formule de reconstruction comme un développement de  $f$  dans la "base" des translatées  $(\mathcal{F}\chi)_{hz}_{z \in \mathbb{Z}^n}$ .

**EXEMPLE** Si  $\frac{1}{h} < a$ , il existe une fonction  $f \neq 0$  à spectre dans le cube  $Q_a$  et telle que  $f(hz) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{Z}^n$ .

Dans le cas  $n = 1$ , soit  $\varepsilon > 0$  avec  $\frac{1}{h} + \varepsilon \leq a$  et  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  à support dans  $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ , et posons

$$f := \sin\left(\pi \cdot \frac{\diamond}{h}\right) \cdot \mathcal{F}^{-1}\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

Pour tout  $z \in \mathbb{Z}$ , on a évidemment  $f(hz) = 0$ , et comme

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\left(\sin\left(\pi \cdot \frac{\diamond}{h}\right)\right) * [\rho] = \frac{1}{2i} \cdot \left(\delta_{\frac{1}{2h}} - \delta_{-\frac{1}{2h}}\right) * [\rho] = \frac{1}{2i} \cdot \left(\left[\rho_{\frac{1}{2h}}\right] - \left[\rho_{-\frac{1}{2h}}\right]\right) ,$$

le spectre de  $f$  est contenu dans  $[-\frac{1}{2h} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2h} + \frac{\varepsilon}{2}] \subset [-a, a]$ .  $\square$

### 3.11 Théorème de Shannon dans $\mathbf{L}^2$

Rappelons tout d'abord le

**THEOREME (de Plancherel)** *La transformation de Fourier est une isométrie de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$  sur  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ .*

*Plus précisément, si  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$  et si  $(\varphi_k)$  est une suite de  $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ , en particulier de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , telle que  $f = \lim_k \varphi_k$  dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\mathcal{F}f := \lim_k \mathcal{F}\varphi_k$  converge dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$  et*

$$\mathcal{F}[f] = [\lim_k \mathcal{F}\varphi_k] .$$

*En outre, pour tout  $f, g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ , on a*

$$(f|g) = (\mathcal{F}f|\mathcal{F}g) .$$

Nous allons en déduire à l'aide de la théorie des séries de Fourier le théorème de reconstruction de Shannon dans le cadre  $\mathbf{L}^2$ . Il suffit ici que  $\frac{1}{h} \geq a$ .

Soit  $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, Q_{\frac{1}{h}}\right)$  le sous-espace vectoriel des fonctions de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$  ayant un spectre dans  $Q_{\frac{1}{h}}$  et définissons la fonction sinc sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$\text{sinc}(x) := \prod_{j=1}^n \text{sinc}(x_j) .$$

Remarquons que par le théorème de Fubini, on a

$$\mathcal{F}^{-1}1_{Q_{\frac{1}{h}}}(x) = \prod_{j=1}^n \mathcal{F}^{-1}1_{[-\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}]}(x_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{h} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{h} \cdot x_j\right) = \frac{1}{h^n} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{h} \cdot x\right) .$$

**THEOREME (de Shannon)** *Si  $f \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, Q_{\frac{1}{h}}\right)$ , alors  $f \in \mathcal{C}_{temp}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$  et on a*

$$f(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(hz) \cdot \text{sinc}\left(\pi \cdot \left(\frac{x}{h} - z\right)\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n ,$$

*la série du membre de droite étant normalement convergente sur  $\mathbb{R}^n$ .*

*En outre  $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, Q_{\frac{1}{h}}\right)$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$  et*

$$\left(h^{-\frac{n}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\pi \cdot \left(\frac{\diamond}{h} - z\right)\right)\right)_{z \in \mathbb{Z}^n}$$

*en est une base hilbertienne.*

D'après le théorème de Plancherel, la transformation de Fourier est un isomorphisme hilbertien de  $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, Q_{\frac{1}{h}}\right)$  sur  $\mathbf{L}^2\left(Q_{\frac{1}{h}}\right)$ . Mais  $\left(h^{\frac{n}{2}} \cdot 1_{Q_{\frac{1}{h}}} \cdot e^{2\pi i \diamond \bullet hz}\right)_{z \in \mathbb{Z}^n}$  est une base hilbertienne de ce dernier espace, ce qui montre que les fonctions

$$h^{\frac{n}{2}} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi i \diamond \bullet hz} \cdot 1_{Q_{\frac{1}{h}}}\right) = h^{\frac{n}{2}} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi i \diamond \bullet hz}\right) * \mathcal{F}^{-1}1_{Q_{\frac{1}{h}}} =$$

$$= h^{-\frac{n}{2}} \cdot \delta_{hz} * \text{sinc} \left( \frac{\pi}{h} \cdot \diamond \right) = h^{-\frac{n}{2}} \cdot \text{sinc} \left( \pi \cdot \left( \frac{\diamond}{h} - z \right) \right)$$

forment une base hilbertienne de  $\mathbf{L}^2 \left( \mathbb{R}^n, Q_{\frac{1}{h}} \right)$ . Pour tout  $f \in \mathbf{L}^2 \left( \mathbb{R}^n, Q_{\frac{1}{h}} \right)$ , le corollaire 3.7 montre que  $f \in \mathcal{C}_{temp}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$  et on a

$$\begin{aligned} \left( h^{-\frac{n}{2}} \cdot \text{sinc} \left( \pi \cdot \left( \frac{\diamond}{h} - z \right) \right) \middle| f \right) &= \left( h^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet hz} \cdot 1_{Q_{\frac{1}{h}}} \middle| \mathcal{F}f \right) = \\ &= h^{\frac{n}{2}} \cdot \int 1_{Q_{\frac{1}{h}}}(\lambda) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet hz} \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \, d\lambda = h^{\frac{n}{2}} \cdot \int \chi(\lambda) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet hz} \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \, d\lambda = \\ &= h^{\frac{n}{2}} \cdot \langle \chi \cdot e^{2\pi i \cdot \diamond \bullet hz}, \mathcal{F}[f] \rangle = h^{\frac{n}{2}} \cdot f(hz) . \end{aligned}$$

Ainsi

$$f = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(hz) \cdot \text{sinc} \left( \pi \cdot \left( \frac{\diamond}{h} - z \right) \right)$$

dans  $\mathbf{L}^2 \left( \mathbb{R}^n, Q_{\frac{1}{h}} \right)$ , donc dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ .

Finalement, on a tout d'abord  $(f(hz))_{z \in \mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ . D'autre part, pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in \left[ -\frac{hr}{2}, \frac{hr}{2} \right]$  et  $z \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\left| \text{sinc} \left( \pi \cdot \left( \frac{x}{h} - z \right) \right) \right| = \frac{|\sin \pi \cdot \left( \frac{x}{h} - z \right)|}{\left| \pi \cdot \left( \frac{x}{h} - z \right) \right|} \leq \begin{cases} 1 & \text{si } |z| \leq \frac{r}{2} \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{|z| - \frac{r}{2}} & \text{si } |z| > \frac{r}{2} \end{cases} ,$$

donc

$$\left( \left\| \text{sinc} \left( \pi \cdot \left( \frac{\diamond}{h} - z \right) \right) \right\|_{\infty, \left[ -\frac{hr}{2}, \frac{hr}{2} \right]} \right)_{z \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) .$$

On peut donc passer au cas multi-dimensionnel et on en déduit que

$$\left( \left\| \text{sinc} \left( \pi \cdot \left( \frac{\diamond}{h} - z \right) \right) \right\|_{\infty, Q_{hr}} \right)_{z \in \mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n) ;$$

le critère de Weierstraß et l'inégalité de Cauchy-Schwarz montrent alors que la série converge normalement, donc uniformément, sur  $Q_{hr}$ . Elle définit donc une fonction continue, égale presque partout à  $f$ , puisqu'il existe par le théorème de Riesz-Fischer une sous-suite des sommes partielles qui converge presque partout vers  $f$ . La fonction  $f$  étant aussi continue, on obtient l'égalité partout.  $\square$



# Chapitre 4

## Décompositions continues en ondelettes

## 4.1 Transformation de Gabor

La transformation de Fourier ne permet pas de faire l'analyse d'un signal en temps réel, i.e. localement, puisqu'il faut le connaître sur  $\mathbb{R}$  !

On a essayé d'y remédier en introduisant la transformation de Fourier à fenêtre glissante, due à D. Gabor dans les années 1940. Mais la largeur fixe de la fenêtre empêche une bonne analyse des sauts du signal. La décomposition en ondelettes, étudiée plus loin, semble résoudre ce problème.

Soit  $\rho \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$  avec  $\|\rho\|_2 = 1$ . Pour tout  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  et tout  $\lambda, s \in \mathbb{R}$ , on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) &:= (e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \diamond} \cdot \rho_s | f) = \\ &= \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet t} \cdot \bar{\rho}_s(t) \cdot f(t) dt = \mathcal{F}(\bar{\rho}_s \cdot f)(\lambda), \end{aligned}$$

et on dit que c'est la *transformée de Gabor* de  $f$ . L'application linéaire

$$\mathcal{F}_\rho : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}^2}$$

s'appelle la *transformation de Gabor*. On dit aussi *transformation de Fourier à fenêtre glissante*.

**LEMME** Pour tout  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , on a  $\lim_{s \rightarrow 0} \|f - f_s\|_2 = 0$ .

La démonstration est laissée en exercice.  $\square$

**PROPOSITION** Pour tout  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , on a  $\mathcal{F}_\rho f \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^2) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$  avec

$$\|\mathcal{F}_\rho f\|_\infty \leq \|f\|_2,$$

ainsi que la conservation de l'énergie, i.e.

$$\|\mathcal{F}_\rho f\|_2 = \|f\|_2.$$

Tout d'abord, on a

$$|\mathcal{F}_\rho f(s, \lambda)| \leq \int |\rho_s(t)| \cdot |f(t)| dt \leq \|\rho\|_2 \cdot \|f\|_2 = \|f\|_2$$

et

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_\rho f(u, \mu) - \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda)| &\leq \int |\rho_u(t) \cdot e^{2\pi i \cdot \mu t} - \rho_s(t) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda t}| \cdot |f(t)| dt \leq \\ &\leq \|f\|_2 \cdot \|\rho_u \cdot e^{2\pi i \cdot \mu \diamond} - \rho_s \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \diamond}\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot (\|\rho_u - \rho_s\|_2 + \|(e^{2\pi i \cdot (\mu - \lambda) \diamond} - 1) \cdot \rho_s\|_2). \end{aligned}$$

Lorsque  $(u, \mu)$  tend vers  $(s, \lambda)$ , le premier terme de la parenthèse tend vers 0 par le lemme; quant au second cela découle du théorème de Lebesgue, puisque  $|\rho_s|^2 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ . Ceci finit de prouver la première partie.

Remarquons maintenant que, par le théorème de Tonelli, on a

$$\iint |\bar{\rho}_s(t) \cdot f(t)|^2 d(t, s) = \int |f(t)|^2 \cdot \left( \int |\rho_s(t)|^2 ds \right) dt = \|\rho\|_2^2 \cdot \|f\|_2^2 = \|f\|_2^2 < \infty ,$$

ce qui montre, par le théorème de Fubini, que pour presque tous les  $s \in \mathbb{R}$ , on a

$$\bar{\rho}_s \cdot f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) .$$

En utilisant les théorèmes de Tonelli et Plancherel, on obtient

$$\begin{aligned} \iint |\mathcal{F}_\rho f(s, \lambda)|^2 d(s, \lambda) &= \int \left( \int |\mathcal{F}(\bar{\rho}_s \cdot f)(\lambda)|^2 d\lambda \right) ds = \\ &= \int \left( \int |\bar{\rho}_s(t) \cdot f(t)|^2 dt \right) ds = \|f\|_2^2 . \quad \square \end{aligned}$$

**THEOREME (Formule d'inversion de Gabor)** *Pour tout  $\mu > 0$  et  $t \in \mathbb{R}$ , la restriction de la fonction*

$$(s, \lambda) \longmapsto \rho(t-s) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot t}$$

*appartient à  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R} \times [-\mu, \mu])$ . Pour tout  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , en posant*

$$f_\mu(t) := \iint_{\mathbb{R} \times [-\mu, \mu]} \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) \cdot \rho(t-s) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot t} d(s, \lambda) ,$$

*on a*

$$f = \lim_{\mu \rightarrow \infty} f_\mu \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) .$$

Remarquons tout d'abord que

$$\overline{(\mathcal{F}\rho)_\lambda} \cdot \mathcal{F}f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) ,$$

puisque  $\mathcal{F}\rho \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , et que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) &= (e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot \diamond} \cdot \rho_s | f) = (\mathcal{F}(e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot \diamond} \cdot \rho_s) | \mathcal{F}f) = \\ &= ((\mathcal{F}\rho_s)_\lambda | \mathcal{F}f) = ((e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot s} \cdot \mathcal{F}\rho)_\lambda | \mathcal{F}f) = \\ &= \int e^{2\pi i \cdot (\nu - \lambda) \cdot s} \cdot \overline{(\mathcal{F}\rho)_\lambda}(\nu) \cdot \mathcal{F}f(\nu) d\nu = e^{-2\pi i \cdot \lambda \cdot s} \cdot \widehat{\mathcal{F}} \left[ \overline{(\mathcal{F}\rho)_\lambda} \cdot \mathcal{F}f \right] (s) . \end{aligned}$$

La première assertion est évidente. Par le théorème de Fubini on a alors

$$f_\mu(t) := \int_{-\mu}^{\mu} \left( \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) \cdot \rho(t-s) ds \right) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot t} d\lambda ,$$

puis par le lemme 3.5

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) \cdot \rho(t-s) ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \cdot \lambda \cdot s} \cdot \widehat{\mathcal{F}} \left[ \overline{(\mathcal{F}\rho)_\lambda} \cdot \mathcal{F}f \right] (s) \cdot \rho(t-s) ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{(\mathcal{F}\rho)_\lambda}(\nu) \cdot \mathcal{F}f(\nu) \cdot \widehat{\mathcal{F}}[e^{-2\pi i \cdot \lambda \diamond} \cdot \rho(t - \diamond)](\nu) \, d\nu = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{(\mathcal{F}\rho)_\lambda}(\nu) \cdot \mathcal{F}f(\nu) \cdot \left(\widehat{\mathcal{F}\check{\rho}_t}\right)_\lambda(\nu) \, d\nu = \int_{\mathbb{R}} \overline{(\mathcal{F}\rho)_\lambda}(\nu) \cdot \mathcal{F}f(\nu) \cdot (e^{2\pi i \cdot \diamond \cdot t} \cdot \mathcal{F}\rho)_\lambda(\nu) \, d\nu = \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \cdot (\nu - \lambda) \cdot t} \cdot |(\mathcal{F}\rho)_\lambda(\nu)|^2 \cdot \mathcal{F}f(\nu) \, d\nu .
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\int_{-\mu}^{\mu} \left( \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}\rho)_\lambda(\nu)|^2 \cdot |\mathcal{F}f(\nu)| \, d\nu \right) d\lambda &\leq 2\mu \cdot \|\mathcal{F}\rho\|_\infty \cdot \|\mathcal{F}\rho\|_2 \cdot \|\mathcal{F}f\|_2 \leq \\
&\leq 2\mu \cdot \|\rho\|_1 \cdot \|\rho\|_2 \cdot \|f\|_2 < \infty ,
\end{aligned}$$

grâce au théorème de Tonelli, on peut appliquer le théorème de Fubini et il vient

$$\begin{aligned}
f_\mu(t) &:= \int_{-\mu}^{\mu} \left( \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) \cdot \rho(t - s) \, ds \right) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot t} \, d\lambda = \\
&= \int_{-\mu}^{\mu} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \cdot (\nu - \lambda) \cdot t} \cdot |\mathcal{F}\rho(\nu - \lambda)|^2 \cdot \mathcal{F}f(\nu) \, d\nu \right) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot t} \, d\lambda = \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \cdot \nu \cdot t} \cdot \left( \int_{-\mu}^{\mu} |\mathcal{F}\rho(\nu - \lambda)|^2 \, d\lambda \right) \cdot \mathcal{F}f(\nu) \, d\nu = \widehat{\mathcal{F}}(\theta_\mu \cdot \mathcal{F}f)(t) ,
\end{aligned}$$

en ayant posé

$$\theta_\mu(\nu) := \int_{-\mu}^{\mu} |\mathcal{F}\rho(\nu - \lambda)|^2 \, d\lambda .$$

Finalement, on a

$$\|f - f_\mu\|_2^2 = \|\mathcal{F}f - \mathcal{F}f_\mu\|_2^2 = \|(1 - \theta_\mu) \cdot \mathcal{F}f\|_2^2 = \int |1 - \theta_\mu|^2 \cdot |\mathcal{F}f|^2 ,$$

ainsi que

$$|\theta_\mu| \leq \|\mathcal{F}\rho\|_2^2 = \|\rho\|_2^2 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \theta_\mu = 1 \quad \text{ponctuellement,}$$

d'où la formule d'inversion par le théorème de Lebesgue.  $\square$

**REMARQUE** Le théorème de Plancherel, i.e la conservation de l'énergie par  $\mathcal{F}$ , peut se formuler de la manière suivante :

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) = \int^\oplus \mathbb{C} \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \diamond} \, d\lambda \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' ,$$

i.e. pour toute fonction  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ , la transformée de Fourier  $\mathcal{F}f$  est l'unique fonction de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$f = \int \mathcal{F}f(\lambda) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \diamond} \, d\lambda ,$$

l'intégrale se calculant dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ .

Pour la transformation de Gabor il en est de même, à part l'unicité. On a

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \int \mathbb{C} \cdot \rho_s \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot \diamond} d(s, \lambda) \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) ,$$

i.e. pour toute fonction  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , la transformée de Gabor  $\mathcal{F}_\rho f$  est l'unique fonction de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$  de norme minimale telle que

$$f = \int \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) \cdot \rho_s \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot \diamond} d(s, \lambda) ,$$

l'intégrale se calculant dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ .

C'est la raison pour laquelle on parle de décomposition continue.

## 4.2 Décomposition continue en ondelettes.

Afin de palier aux inconvénients des transformations de Fourier et de Gabor, le géophysicien J. Morlet, pour des problèmes de traitement numérique des signaux sismiques en prospection pétrolière, puis en collaboration avec A. Grossman pour des problèmes de physique théorique, a introduit la transformation continue en ondelettes. L'idée de base est celle de l'accordéon permettant de supprimer les désavantages de la largeur fixe de la fenêtre de Gabor.

Pour tout  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ ,  $s \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose

$$f_{s,h}(t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot f\left(\frac{t-s}{h}\right) .$$

Etant donné  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , on dit que la fonction

$$\mathcal{W}f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C} ,$$

définie par

$$\mathcal{W}f(s, h) := (\zeta_{s,h} | f) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\zeta_{s,h}}(t) \cdot f(t) dt ,$$

est la *transformée en ondelettes* de  $f$  et que

$$\mathcal{W} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}^2}$$

est la *transformation en ondelettes*.

Le problème est de savoir sous quelles conditions on peut reconstruire  $f$  à l'aide de  $\mathcal{W}f$ . Introduisons les opérateurs suivants :

$$T_s : f \longmapsto f_s \quad , \quad S_h : f \longmapsto \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot f\left(\frac{\diamond}{h}\right) \quad \text{et} \quad E_s : f \longmapsto e^{2\pi i \diamond \cdot s} \cdot f .$$

On vérifie immédiatement que ces opérateurs sont unitaires dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , i.e. des bijections qui conservent la norme  $\|\cdot\|_2$  et le produit scalaire. Il en est de même de la transformation de Fourier par le théorème de Plancherel.

**LEMME** Soit  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ .

- (i) On a  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \|S_h f - f\|_2 = 0$ .
- (ii) Pour tout  $s, t \in \mathbb{R}$  et  $h, k \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$T_s T_t = T_{s+t} \quad , \quad S_h S_k = S_{hk} \quad , \quad S_h T_s = T_{hs} S_h ,$$

$$f_{s,h} = T_s S_h f \quad , \quad f_{s,h}(t) = \check{f}_{t,h}(s)$$

et

$$\mathcal{W}(f_{t,k})(s, h) = \mathcal{W}f\left(\frac{s-t}{k}, \frac{h}{k}\right) .$$

En outre

$$\mathcal{F}S_h = S_{\frac{1}{h}}\mathcal{F} \quad , \quad \mathcal{F}T_s = E_{-s}\mathcal{F} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{F}}E_{-s} = T_s\widehat{\mathcal{F}} \quad .$$

**Démonstration de (i)** La démonstration est analogue à celle du lemme 4.1 et est aussi laissé en exercice.

**Démonstration de (ii)** En effet, les deux premières formules sont immédiates et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$S_h T_s f(x) = \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot T_s f\left(\frac{x}{h}\right) = \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot f\left(\frac{x}{h} - s\right) = \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot f\left(\frac{x - hs}{h}\right) = T_{hs} S_h f(x) \quad ,$$

ce qui prouve la troisième. Les deux suivantes sont aussi immédiates, puis

$$\mathcal{W}(f_{t,k})(s, h) = (\zeta_{s,h} | T_t S_k f) = \left( S_{\frac{1}{k}} T_{-t} T_s S_h \zeta \middle| f \right) = \left( T_{\frac{s-t}{k}} S_{\frac{h}{k}} \zeta \middle| f \right) = \mathcal{W}f\left(\frac{s-t}{k}, \frac{h}{k}\right) \quad .$$

Finalement, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , il vient

$$(\mathcal{F}S_h \varphi)(\lambda) = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \cdot t} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \varphi\left(\frac{t}{h}\right) dt = \sqrt{h} \cdot \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \cdot ht} \cdot \varphi(t) dt = \left( S_{\frac{1}{h}} \mathcal{F} \varphi \right)(\lambda) \quad ,$$

puis

$$(\mathcal{F}T_s \varphi)(\lambda) = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \cdot t} \cdot \varphi(t-s) dt = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \cdot (t+s)} \cdot \varphi(t) dt = (E_{-s} \mathcal{F} \varphi)(\lambda)$$

et

$$T_s \widehat{\mathcal{F}} \varphi = \widehat{\mathcal{F}} \mathcal{F} T_s \widehat{\mathcal{F}} \varphi = \widehat{\mathcal{F}} E_{-s} \mathcal{F} \widehat{\mathcal{F}} \varphi = \widehat{\mathcal{F}} E_{-s} \varphi \quad ,$$

d'où le résultat par continuité, puisque  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est dense dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ .  $\square$

**COROLLAIRE** Pour tout  $(s, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$\mathcal{W}f(s, h) = \widehat{\mathcal{F}} \left( S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}} \zeta \cdot \mathcal{F} f \right)(s) \quad ,$$

et

$$\mathcal{W}f \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \quad \text{avec} \quad \|\mathcal{W}f\|_\infty \leq \|\zeta\|_2 \cdot \|f\|_2 \quad .$$

En outre, si  $\zeta \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\|\mathcal{W}f(\cdot, h)\|_2 \leq \sqrt{h} \cdot \|\zeta\|_1 \cdot \|f\|_2 \quad .$$

Si en plus  $\mathcal{F}f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\|\mathcal{W}f(\cdot, h)\|_\infty \leq \sqrt{h} \cdot \|\zeta\|_1 \cdot \|\mathcal{F}f\|_1 \quad .$$

Par le théorème de Plancherel, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{W}f(s, h) &= (\zeta_{s,h} | f) = (\mathcal{F}T_s S_h \zeta | \mathcal{F}f) = \left( E_{-s} S_{\frac{1}{h}} \mathcal{F} \zeta \middle| \mathcal{F}f \right) = \\ &= \int e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot s} \cdot \left( S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}} \zeta \right)(\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) d\lambda = \widehat{\mathcal{F}} \left( S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}} \zeta \cdot \mathcal{F}f \right)(s) \end{aligned}$$

et, pour tout  $(t, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , il vient

$$|\mathcal{W}f(t, k) - \mathcal{W}f(s, h)| \leq |\mathcal{W}f(t, k) - \mathcal{W}f(t, h)| + |\mathcal{W}f(t, h) - \mathcal{W}f(s, h)| ,$$

ainsi que

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}f(t, k) - \mathcal{W}f(t, h)| &= \left| \widehat{\mathcal{F}} \left( \left[ S_{\frac{1}{k}} - S_{\frac{1}{h}} \right] \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f \right) (t) \right| \leq \left\| \widehat{\mathcal{F}} \left( \left[ S_{\frac{1}{k}} - S_{\frac{1}{h}} \right] \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f \right) \right\|_{\infty} \leq \\ &\leq \left\| \left[ S_{\frac{1}{k}} - S_{\frac{1}{h}} \right] \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f \right\|_1 \leq \left\| \left[ S_{\frac{1}{k}} - S_{\frac{1}{h}} \right] \overline{\mathcal{F}\zeta} \right\|_2 \cdot \|f\|_2 \end{aligned}$$

et

$$|\mathcal{W}f(t, h) - \mathcal{W}f(s, h)| = \left| \widehat{\mathcal{F}} \left( S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f \right) (t) - \widehat{\mathcal{F}} \left( S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f \right) (s) \right| .$$

On en déduit la continuité de  $\mathcal{W}f$ , par le lemme (i) pour traiter le premier terme et le fait que  $S_{\frac{1}{k}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , donc  $\widehat{\mathcal{F}} \left( S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f \right) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  pour le second. D'autre part,

$$|\mathcal{W}f(s, h)| = |(\zeta_{s,h} | f)| \leq \|\zeta_{s,h}\|_2 \cdot \|f\|_2 = \|\zeta\|_2 \cdot \|f\|_2$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Finalement, si  $\zeta \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$  on a

$$\begin{aligned} \int |\mathcal{W}f(s, h)|^2 ds &= \int \left| \widehat{\mathcal{F}} \left( S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f \right) (s) \right|^2 ds = \int \left| S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta}(\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \right|^2 d\lambda = \\ &= h \cdot \int \left| \overline{\mathcal{F}\zeta}(h\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \right|^2 d\lambda \leq h \cdot \|\mathcal{F}\zeta\|_{\infty}^2 \cdot \|\mathcal{F}f\|_2^2 = h \cdot \|\zeta\|_1^2 \cdot \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

par le théorème de Plancherel. Si en plus  $\mathcal{F}f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}f(s, h)| &= \left| \left( E_{-s} S_{\frac{1}{h}} \mathcal{F}\zeta \mid \mathcal{F}f \right) \right| \leq \sqrt{h} \cdot \|\mathcal{F}\zeta(h \cdot \diamond) \cdot \mathcal{F}f\|_1 \leq \\ &\leq \sqrt{h} \cdot \|\mathcal{F}\zeta\|_{\infty} \cdot \|\mathcal{F}f\|_1 \leq \sqrt{h} \cdot \|\zeta\|_1 \cdot \|\mathcal{F}f\|_1 . \quad \square \end{aligned}$$

**REMARQUE 1** Considérons sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  l'intégrale  $\frac{1}{h^2} \cdot \lambda_{\mathbb{R}} \otimes \lambda_{\mathbb{R}_+^*}$ , dont l'élément de volume est aussi noté

$$\frac{dsdh}{h^2} .$$

C'est une intégrale de Haar à gauche sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  considéré comme le groupe (non-commutatif) des transformations affines dans  $\mathbb{R}$  de la forme

$$x \longmapsto hx + s ,$$

la loi étant donnée par

$$(s, h)(t, k) = (s + ht, hk) .$$

Pour simplifier, on désigne par  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$  l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable par rapport à cette intégrale.

**REMARQUE 2** Sur le groupe multiplicatif commutatif  $\mathbb{R}_+^*$  l'intégrale  $\frac{1}{\text{id}} \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+^*}$  est aussi une intégrale de Haar.

**THEOREME** Si  $c_\zeta := \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(\nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(-\nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ , alors l'application

$$f \longmapsto \frac{1}{c_\zeta} \cdot \mathcal{W}f$$

est une isométrie de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ .

Grâce aux théorèmes de Tonelli et Plancherel, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}f\|_2^2 &= \iint |\mathcal{W}f(s, h)|^2 \frac{dsdh}{h^2} = \int_{\mathbb{R}_+^*} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\mathcal{F}} \left( S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f \right) (s) \right|^2 ds \right) \frac{dh}{h^2} = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \sqrt{h} \cdot \overline{\mathcal{F}\zeta}(h\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \right|^2 d\lambda \right) \frac{dh}{h^2} = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(h\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda)|^2 \frac{d\lambda dh}{h} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(\text{sgn } \lambda \cdot \nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu} \right) \cdot |\mathcal{F}f(\lambda)|^2 d\lambda = c_\zeta^2 \cdot \|f\|_2^2. \quad \square \end{aligned}$$

**DEFINITION** Nous dirons que  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  est une *ondelette* si elle satisfait aux hypothèses du théorème. Nous dirons qu'elle est *normalisée* si  $c_\zeta = 1$ .

**REMARQUE 3** L'égalité

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(\nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu} = \int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(-\nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu}$$

est en particulier satisfaite si

$$\check{\zeta} = u \cdot \zeta_s \quad \text{avec } u \in \mathbb{U} \text{ et } s \in \mathbb{R}.$$

En effet, on a

$$|(\mathcal{F}\zeta)^\vee| = |\mathcal{F}\check{\zeta}| = |u \cdot e^{-2\pi i \diamond s} \cdot \mathcal{F}\zeta| = |\mathcal{F}\zeta|. \quad \square$$

**REMARQUE 4** Si  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , alors  $\int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(\nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu} < \infty$  entraîne

$$\int \zeta(t) dt = 0.$$

Réciproquement, cette condition est suffisante si  $\text{id} \cdot \zeta \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ .

En effet,  $\mathcal{F}\zeta$  est continue, donc  $\int \zeta(t) dt = \mathcal{F}f(0) = 0$ , puisque  $\frac{1}{\text{id}}$  n'est pas intégrable au voisinage de 0. Réciproquement, les hypothèses entraînent, par le théorème de Lebesgue,

que  $\mathcal{F}f$  est continûment dérivable. Comme  $\mathcal{F}f(0) = 0$ , on en déduit que  $\frac{\mathcal{F}f}{\text{id}}$  se prolonge par continuité en 0, donc que  $\int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(\nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu} < \infty$ .  $\square$

La condition  $\int \zeta(t) dt = 0$  signifie que  $\zeta$  est oscillante !

**REMARQUE 5** Comme  $\frac{1}{c_\zeta} \cdot \mathcal{W}$  est une isométrie, elle conserve le produit scalaire. Ainsi, pour tout  $f, g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , on a

$$\begin{aligned} (g|f) &= \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot (\mathcal{W}g|\mathcal{W}f) = \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \iint \overline{\mathcal{W}g(s, h)} \cdot \mathcal{W}f(s, h) \frac{dsdh}{h^2} = \\ &= \iint \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{g(t)} \cdot \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \mathcal{W}f(s, h) \cdot \zeta_{s, h}(t) dt \right) \frac{dsdh}{h^2}, \end{aligned}$$

donc

$$f = \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \iint \mathcal{W}f(s, h) \cdot \zeta_{s, h} \frac{dsdh}{h^2} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\mathbb{R}),$$

considéré comme le semi-dual topologique de lui-même. Dans beaucoup de situations cette égalité, utilisant la notion d'intégrale faible, est suffisante. On a donc

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \int \mathbb{C} \cdot \zeta_{s, h} \frac{dsdh}{h^2}$$

comme intégrale de sous-espaces hilbertiens dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , mais sans être directe. La transformée en ondelettes  $\mathcal{W}f$  est le représentant de Parseval de  $f$ .

### 4.3 Théorème de reconstruction

**THEOREME** Soit  $\zeta$  une ondelette. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $\delta > 0$ , la fonction

$$(s, h) \longmapsto \zeta_{s,h}(t)$$

appartient à  $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R} \times [\delta, \infty[, \frac{dsdh}{h^2}\right)$ , et si  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , nous poserons

$$f_\delta(t) := \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \iint_{\mathbb{R} \times \{h \geq \delta\}} \mathcal{W}f(s, h) \cdot \zeta_{s,h}(t) \frac{dsdh}{h^2}.$$

Si  $\zeta \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , on a

$$f = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f_\delta \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\mathbb{R}).$$

La première partie est immédiate, car on a

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R} \times \{h \geq \delta\}} |\zeta_{s,h}(t)|^2 \frac{dsdh}{h^2} &= \iint_{\mathbb{R} \times \{h \geq \delta\}} \frac{1}{h} \cdot \left| \zeta\left(\frac{t-s}{h}\right) \right|^2 \frac{dsdh}{h^2} = \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \{h \geq \delta\}} |\zeta(s)|^2 \frac{dsdh}{h^2} = \frac{1}{\delta} \cdot \|\zeta\|_2^2, \end{aligned}$$

grâce à la transformation

$$(s, h) \longmapsto \left( \frac{t-s}{h} \right)$$

dont le jacobien est  $\frac{1}{h}$ . Ceci montre que  $f_\delta$  est bien définie.

Par le lemme et le corollaire 4.2 les fonctions  $\zeta_{\diamond, h}(t) = \check{\zeta}_{t,h}$  et  $\mathcal{W}f(\diamond, h)$  appartiennent à  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , et grâce au théorème de Plancherel nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}f(s, h) \cdot \zeta_{s,h}(t) ds &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{F}}\left(S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f\right)(s) \cdot T_t S_h \check{\zeta}(s) ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{h} \cdot \overline{\mathcal{F}\zeta}(h\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \cdot \widehat{\mathcal{F}}(T_t S_h \check{\zeta})(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{h} \cdot \overline{\mathcal{F}\zeta}(h\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \cdot \left(E_{-t} S_{\frac{1}{h}} \mathcal{F}\check{\zeta}\right)(-\lambda) d\lambda = \\ &= h \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot t} \cdot |\mathcal{F}\zeta(h\lambda)|^2 \cdot \mathcal{F}f(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f_\delta(t) := \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \int_{\{h \geq \delta\}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot t} \cdot |\mathcal{F}\zeta(h\lambda)|^2 \cdot \mathcal{F}f(\lambda) d\lambda \right) \frac{dh}{h}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \theta_\delta(\lambda) &:= \int_{\{h \geq \delta\}} |\mathcal{F}\zeta(h\lambda)|^2 \frac{dh}{h} = \int_{\{\nu \geq \delta|\lambda\}} |\mathcal{F}\zeta(\operatorname{sgn} \lambda \cdot \nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu} \leq \\ &= \begin{cases} \int |\mathcal{F}\zeta(\operatorname{sgn} \lambda \cdot \nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu} \\ \frac{1}{\delta|\lambda|} \cdot \int_{\{\nu \geq \delta|\lambda\}} |\mathcal{F}\zeta(\operatorname{sgn} \lambda \cdot \nu)|^2 d\nu \end{cases} \leq \min\left(c_\zeta^2, \frac{1}{\delta|\lambda|} \cdot \|\zeta\|_2^2\right) \cdot 1 \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que  $\theta_\delta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  et nous pouvons, grâce au théorème de Tonelli, à nouveau appliquer le théorème de Fubini. Il vient alors

$$f_\delta(t) = \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \lambda \cdot t} \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \cdot \theta_\delta(\lambda) d\lambda = \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f \cdot \theta_\delta)(t) ,$$

puis

$$\|f - f_\delta\|_2^2 = \|\mathcal{F}(f - f_\delta)\|_2^2 = \left\| \left(1 - \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \theta_\delta\right) \cdot \mathcal{F}f \right\|_2^2 = \int \left|1 - \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \theta_\delta(\lambda)\right|^2 \cdot |\mathcal{F}f(\lambda)|^2 d\lambda .$$

Comme  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \theta_\delta = c_\zeta^2$  ponctuellement en croissant, le théorème de Lebesgue finit de prouver notre assertion.  $\square$

**REMARQUE** Si  $\zeta \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ ,  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{F}f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , on peut donc admettre que  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ , on a

$$f(t) = \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \int \left( \int \mathcal{W}f(s, h) \cdot \zeta_{s, h}(t) ds \right) \frac{dh}{h^2} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} .$$

En effet, grâce à l'une des formules ci-dessus, aux théorèmes de Tonelli et Fubini, ainsi qu'à la formule d'inversion de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \int \left( \int \mathcal{W}f(s, h) \cdot \zeta_{s, h}(t) ds \right) \frac{dh}{h^2} &= \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \int \left( \int e^{2\pi i \lambda \cdot t} \cdot |\mathcal{F}\zeta(h\lambda)|^2 \cdot \mathcal{F}f(\lambda) d\lambda \right) \frac{dh}{h} = \\ &= \frac{1}{c_\zeta^2} \cdot \int e^{2\pi i \lambda \cdot t} \cdot \left( \int |\mathcal{F}\zeta(v)|^2 \frac{dv}{v} \right) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) d\lambda = f(t) . \quad \square \end{aligned}$$

## 4.4 Exemples d'ondelettes

**EXEMPLE 1** J. Morlet a utilisé une fonction du type

$$\zeta := e^{-\frac{1}{2} \cdot \text{id}^2} \cdot \cos 2\pi \cdot \text{id} .$$

On a

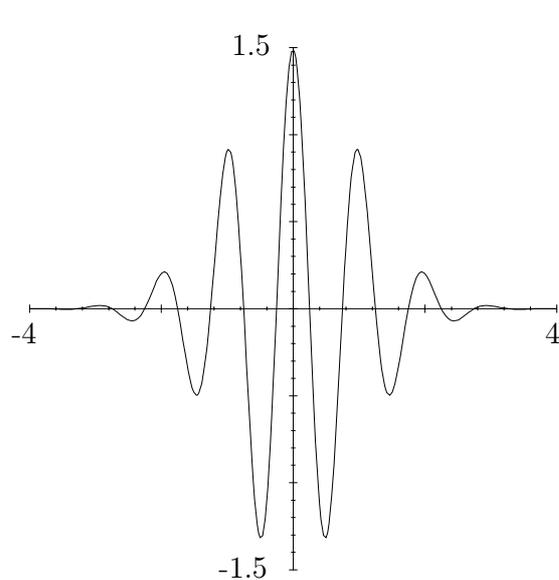
$$\mathcal{F}\zeta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left( e^{-2\pi^2 \cdot (\text{id}-1)^2} + e^{-2\pi^2 \cdot (\text{id}+1)^2} \right) ,$$

donc

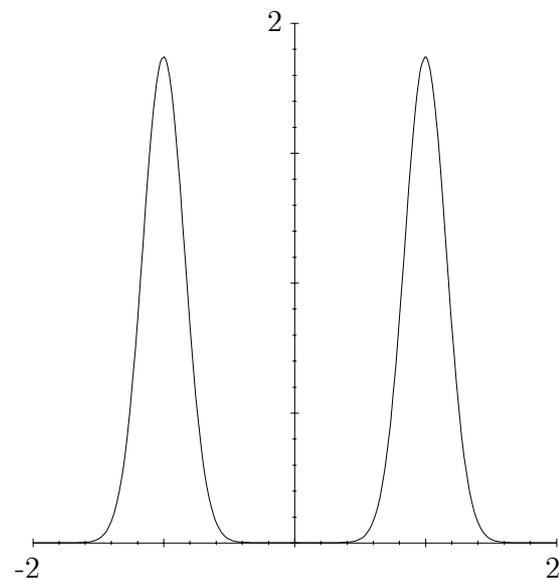
$$\int \zeta(t) dt = \mathcal{F}\zeta(0) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-2\pi^2} \simeq 6.706 \times 10^{-9} .$$

La remarque 4.2.3 montre donc que  $\zeta$  n'est pas une ondelette, mais presque. Numériquement il est raisonnable de prendre

$$c_\zeta = \sqrt{.44895} = .67004 \quad , \quad \frac{1}{c_\zeta} = \frac{1}{\sqrt{.44895}} \simeq 1.4925 .$$



Ondelette de Morlet  
modifiée et normalisée



Transformée  
de Fourier

**EXEMPLE 2** Toute dérivée d'une gaussienne, par exemple

$$\zeta_k := \varphi^k e^{-\frac{2\pi^2}{k} \cdot \text{id}^2}$$

pour  $k > 0$ , est une ondelette.

En effet, il est clair que  $\zeta$  est d'intégrale nulle, et elle satisfait évidemment à la condition suffisante de la remarque 4.2.3. On a

$$\mathcal{F}\zeta_k = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \cdot \text{id}^k \cdot e^{-\frac{k}{2} \cdot \text{id}^2} .$$

En outre

$$\int_0^\infty t^{2k-1} e^{-kt^2} dt = \int_0^\infty \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{u} \right)^{2k-1} \frac{e^{-u}}{\sqrt{k} \sqrt{u}} du = \frac{1}{2} k^{-k} \Gamma(k) ,$$

donc

$$c_k := c_{\zeta_k} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{k!}{\pi \cdot k^k}} .$$

Les paramètres de la gaussienne ont été choisis pour pouvoir la comparer avec l'ondelette de Morlet modifiée, dont les maxima de la transformée de Fourier se trouvent en  $\pm 1$  . On a

$$\frac{1}{c_k} \cdot \mathcal{F}\zeta_k(1) = \sqrt{\frac{2 \cdot k^{k+1}}{e^k \cdot k!}} \sim \sqrt[4]{\frac{2k}{\pi}}$$

par la formule de Stirling en écrivant

$$\sqrt{\frac{2 \cdot k^{k+1}}{e^k \cdot k!}} = \sqrt{\sqrt{\frac{2k}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi k} \cdot k^k}{e^k \cdot k!}} .$$

Voici quelques exemples.

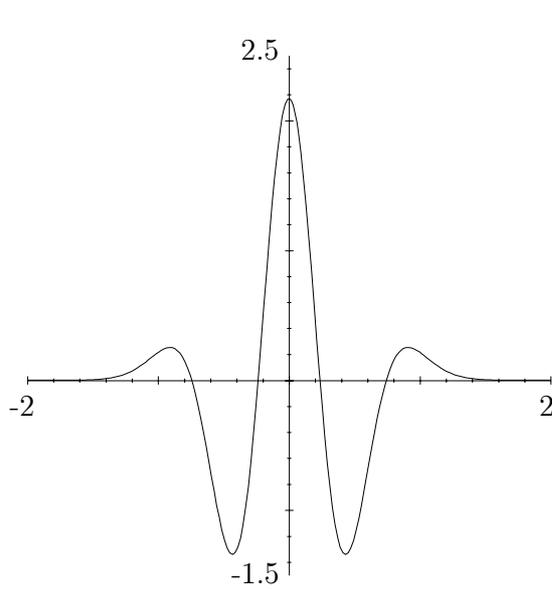
$$k = 4$$

$$c_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4!}{\pi 4^4}} = \frac{\sqrt{6}}{16\sqrt{\pi}} \simeq 8.6374 \times 10^{-2}$$

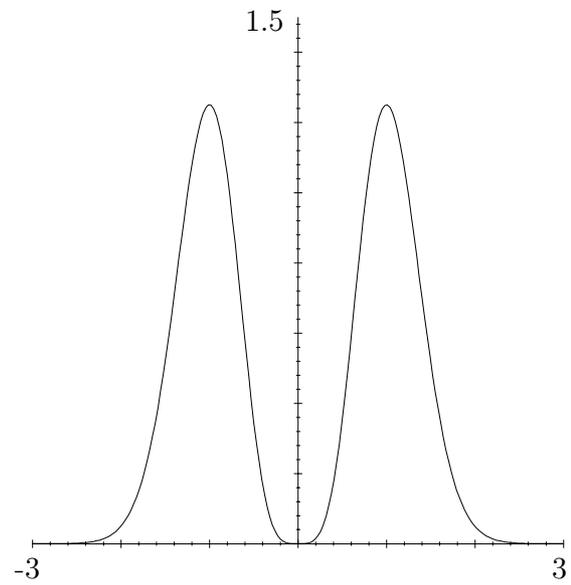
$$\frac{1}{c_4} \cdot \zeta_4(t) := \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4!}{\pi 4^4}}} \frac{1}{(2\pi i)^4} \frac{d^4}{dt^4} e^{-\frac{\pi^2}{2} t^2} = \frac{\sqrt{6\pi}}{6} (\pi^4 t^4 - 6\pi^2 t^2 + 3) e^{-\frac{\pi^2}{2} t^2}$$

$$\frac{1}{c_4} \cdot \zeta_4(0) = \frac{\sqrt{6\pi}}{2} \simeq 2.1708$$

$$\frac{1}{c_4} \cdot \mathcal{F}\zeta_4(\lambda) = \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4!}{\pi 4^4}}} \sqrt{\frac{4}{2\pi}} \cdot \lambda^4 \cdot e^{-2\lambda^2} = \frac{16}{\sqrt{3}} \lambda^4 e^{-2\lambda^2}$$



4-ième dérivée



Transformée de Fourier

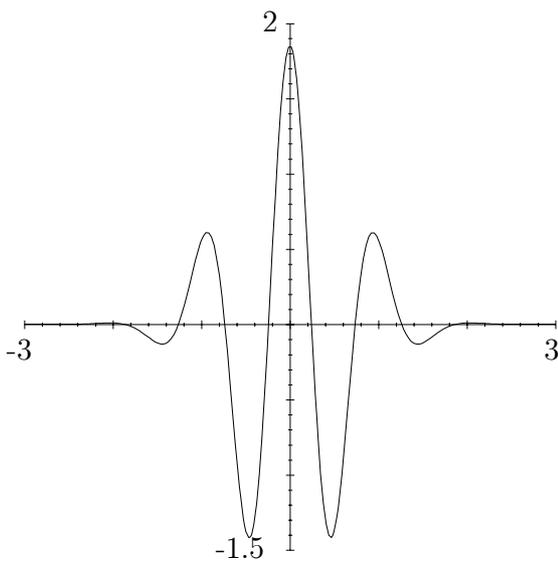
$$k = 8$$

$$c_8 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8!}{\pi 8^8}} = \frac{3\sqrt{70}}{1024\sqrt{\pi}} \simeq 1.3829 \times 10^{-2}$$

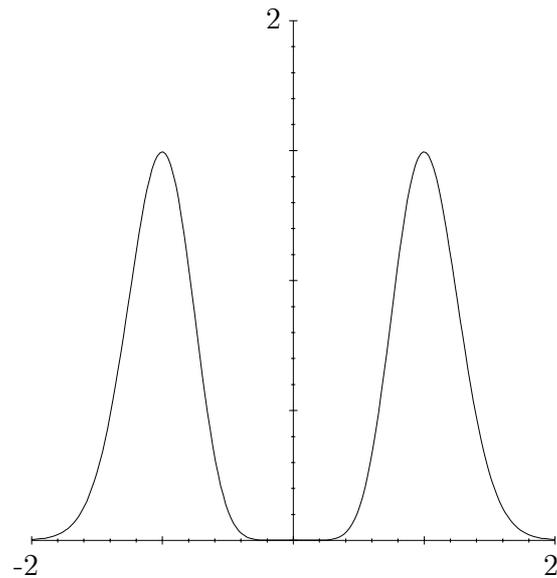
$$\begin{aligned} \frac{1}{c_8} \cdot \zeta_8(t) &:= \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8!}{\pi 8^8}}} \frac{1}{(2\pi i)^8} \frac{d^8}{dt^8} e^{-\frac{\pi^2}{4} t^2} = \\ &= \frac{\sqrt{70\pi} (\pi^8 t^8 - 56\pi^6 t^6 + 840\pi^4 t^4 - 3360\pi^2 t^2 + 1680)}{13440} e^{-\frac{\pi^2}{4} t^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c_8} \cdot \zeta_8(0) = \frac{\sqrt{70\pi} 1680}{13440} \simeq 1.8537$$

$$\frac{1}{c_8} \cdot \mathcal{F}\zeta_8(\lambda) = \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8!}{\pi 8^8}}} \sqrt{\frac{8}{2\pi}} \cdot \lambda^8 \cdot e^{-4\lambda^2} = \frac{1024\sqrt{70}}{105} \lambda^8 e^{-4\lambda^2}$$



8-ième dérivée



Transformée de Fourier

$$k = 16$$

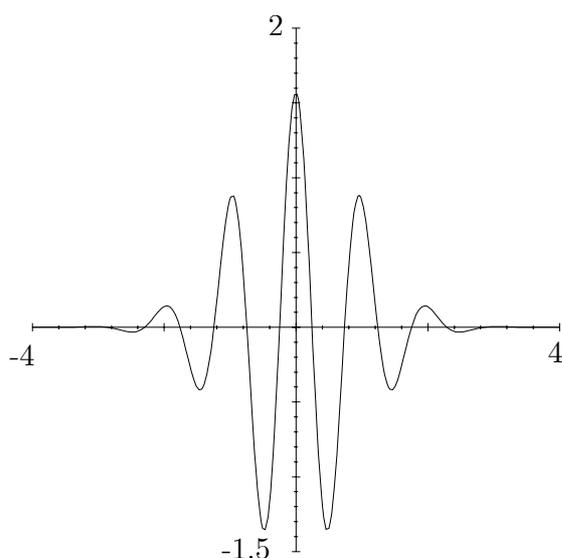
$$c_{16} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16!}{\pi 16^{16}}} = \frac{945\sqrt{1430}}{67108864\sqrt{\pi}} \simeq 3.0043 \times 10^{-4}$$

$$\frac{1}{c_{16}} \cdot \zeta_{16}(t) := \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{16!}{\pi 16^{16}}}} \frac{1}{(2\pi i)^{16}} \frac{d^{16}}{dt^{16}} e^{-\frac{\pi^2}{8} t^2} =$$

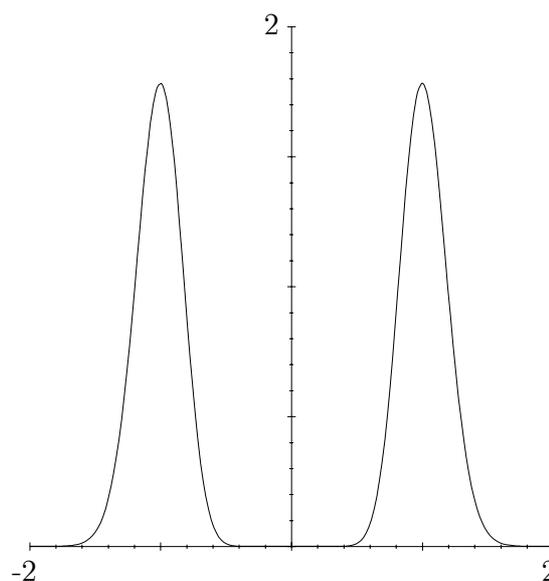
$$= (\pi^{16} t^{16} - 480\pi^{14} t^{14} + 87360\pi^{12} t^{12} - 7687680\pi^{10} t^{10} + 345945600\pi^8 t^8 - 7749181440\pi^6 t^6 + 77491814400\pi^4 t^4 - 265686220800\pi^2 t^2 + 132843110400) \frac{\sqrt{1430\pi}}{5667972710400} e^{-\frac{\pi^2}{8} t^2}$$

$$\frac{1}{c_{16}} \cdot \zeta_{16}(0) = \frac{132843110400}{5667972710400} \sqrt{1430\pi} \simeq 1.5709$$

$$\frac{1}{c_{16}} \cdot \mathcal{F}\zeta_{16}(\lambda) = \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{16!}{\pi 16^{16}}}} \sqrt{\frac{16}{2\pi}} \cdot \lambda^{16} \cdot e^{-8\lambda^2} = \frac{134217728}{675675} \sqrt{715} \lambda^{16} e^{-8\lambda^2}$$



16-ième dérivée



Transformée de Fourier

$$k = 32$$

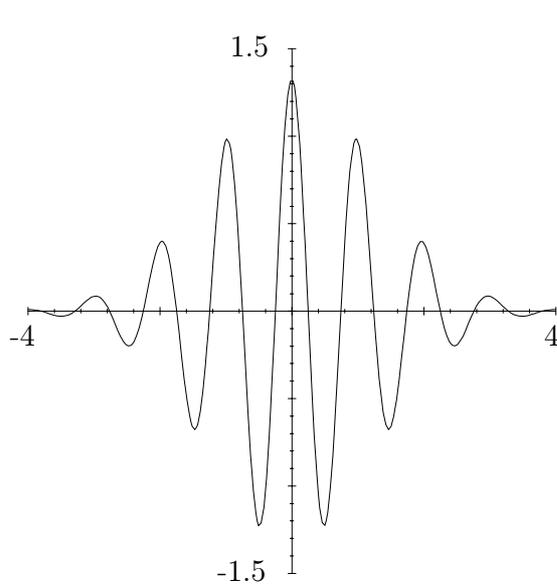
$$c_{32} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{32!}{\pi 32^{32}}} = \frac{19155\ 38625 \sqrt{66786710}}{73786\ 97629\ 48382\ 06464 \sqrt{\pi}} \simeq 1.197 \times 10^{-7}$$

$$\frac{1}{c_{32}} \cdot \zeta_{32}(t) := \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32!}{\pi 32^{32}}}} \frac{1}{(2\pi i)^{32}} \frac{d^{32}}{dt^{32}} e^{-\frac{\pi^2}{16} t^2} =$$

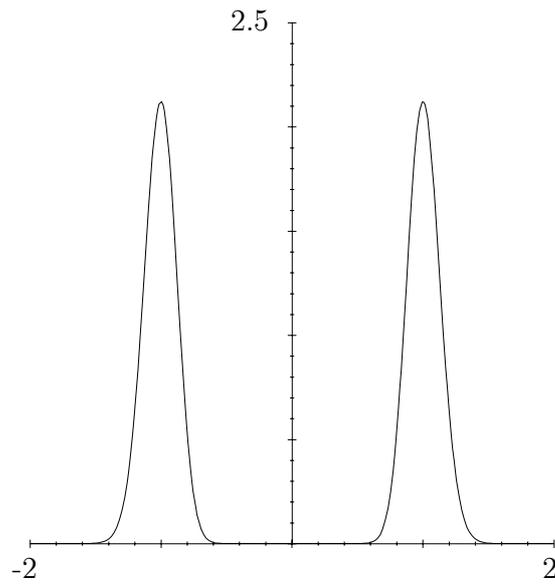
$$\begin{aligned} &= (\pi^{32} t^{32} - 3968 \pi^{30} t^{30} + 6904320 \pi^{28} t^{28} - 69595\ 54560 \pi^{26} t^{26} + 452\ 37104\ 64000 \pi^{24} t^{24} \\ &- 1\ 99767\ 05409\ 02400 \pi^{22} t^{22} + 615\ 28252\ 65979\ 39200 \pi^{20} t^{20} - 1\ 33604\ 20577\ 55525\ 12000 \pi^{18} t^{18} \\ &+ 204\ 41443\ 48365\ 95343\ 36000 \pi^{16} t^{16} - 21804\ 20638\ 25701\ 69958\ 40000 \pi^{14} t^{14} \\ &+ 15\ 87346\ 22465\ 11083\ 72971\ 52000 \pi^{12} t^{12} - 761\ 92618\ 78325\ 32019\ 02632\ 96000 \pi^{10} t^{10} \\ &+ 22857\ 78563\ 49759\ 60570\ 78988\ 80000 \pi^8 t^8 - 3\ 93857\ 22940\ 26627\ 05219\ 76422\ 40000 \pi^6 t^6 \\ &+ 33\ 75919\ 10916\ 56803\ 30455\ 12192\ 00000 \pi^4 t^4 - 108\ 02941\ 14933\ 01770\ 57456\ 39014\ 40000 \pi^2 t^2 \\ &+ 54\ 01470\ 57466\ 50885\ 28728\ 19507\ 20000) \frac{\sqrt{66786710\pi}}{5\ 89984\ 62596\ 87520\ 69697\ 88498\ 70643\ 20000} e^{-\frac{\pi^2}{16} t^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c_{32}} \cdot \zeta_{32}(0) = 54\ 01470\ 57466\ 50885\ 28728\ 19507\ 20000 \frac{\sqrt{66786710\pi}}{5\ 89984\ 62596\ 87520\ 69697\ 88498\ 70643\ 20000} \simeq 1.3261$$

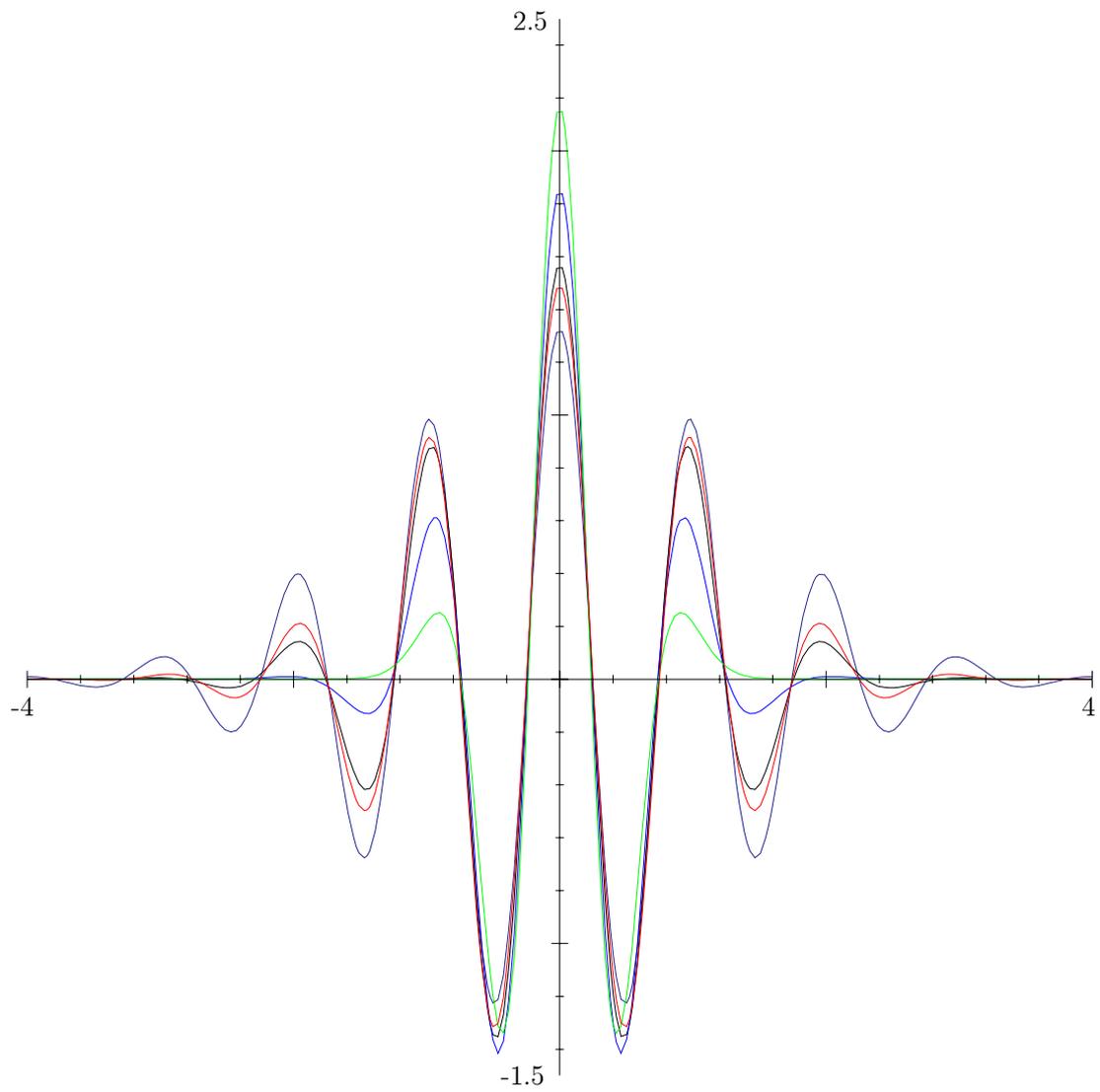
$$\frac{1}{c_{32}} \cdot \mathcal{F}\zeta_{32}(\lambda) = \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32!}{\pi 32^{32}}}} \sqrt{\frac{32}{2\pi}} \cdot \lambda^{32} \cdot e^{-16\lambda^2} = \frac{147573\ 95258\ 96764\ 12928}{63\ 96626\ 13208\ 36875} \sqrt{66786710} \lambda^{32} e^{-16\lambda^2}$$



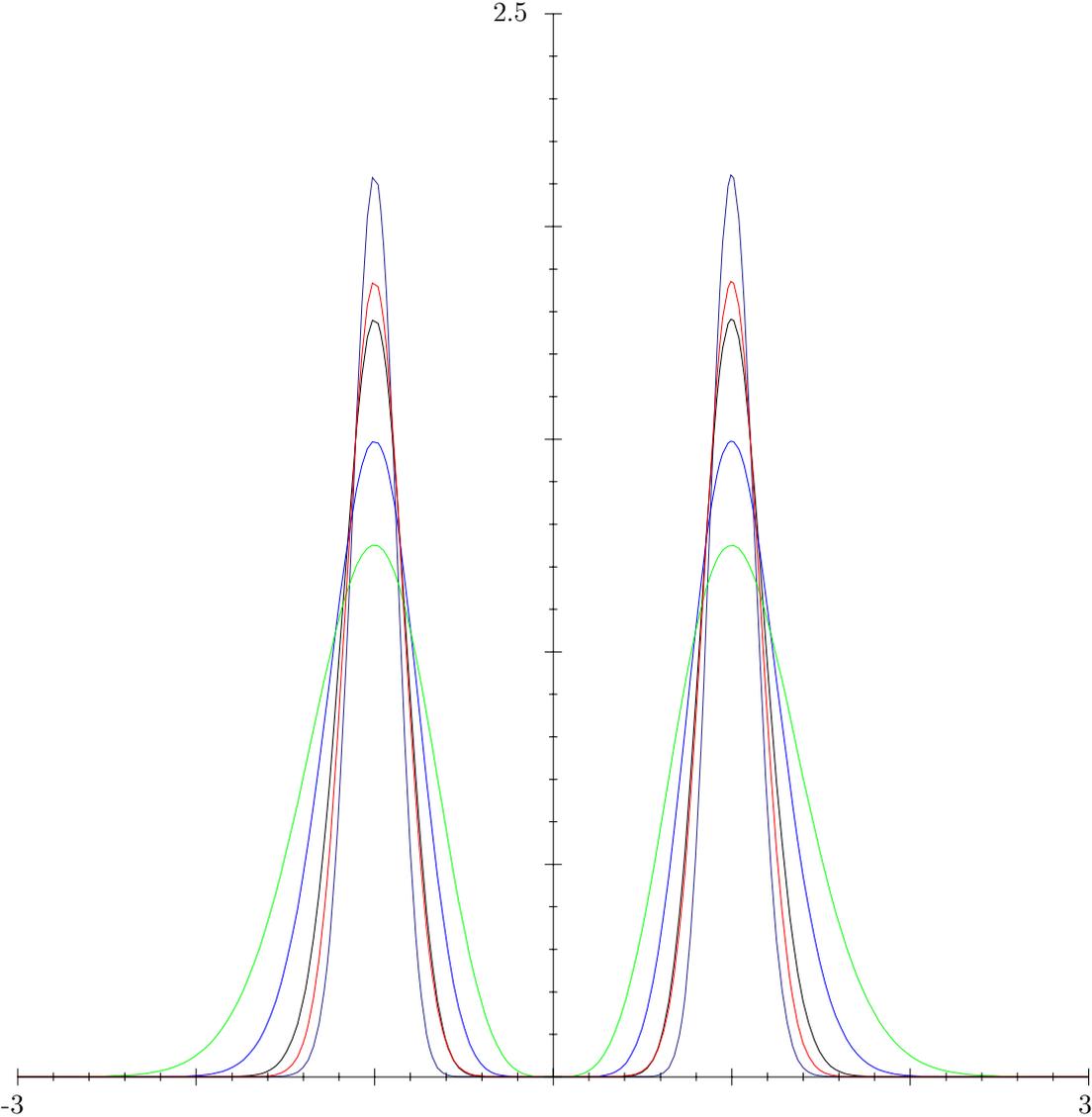
32-ième dérivée



Transformée de Fourier



Ondelette de Morlet et d'érivées de gaussiennes



Transformées de Fourier

**EXEMPLE 3** L'exemple le plus simple est l' *ondelette de Haar*

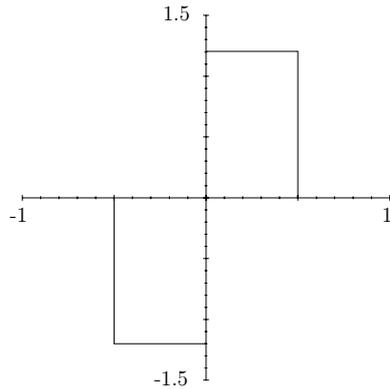
$$\zeta := -1_{[-\frac{1}{2}, 0[} + 1_{[0, \frac{1}{2}[} .$$

On a  $\check{\zeta} = -\zeta$  (cf. remarque 4.2.3),

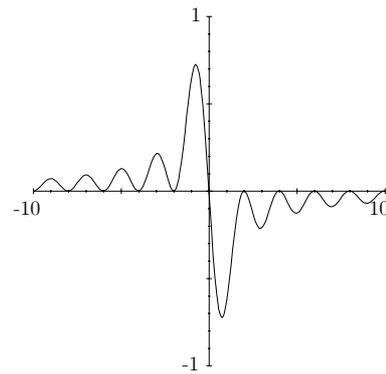
$$\mathcal{F}\zeta = -i \cdot \sin \frac{\pi \cdot \text{id}}{2} \cdot \text{sinc} \frac{\pi \cdot \text{id}}{2} = i \frac{\cos \pi \cdot \text{id} - 1}{\pi \cdot \text{id}}$$

et

$$c_\zeta = \sqrt{\ln 2} .$$



Ondelette de Haar



$\frac{1}{i}$  Transformée de Fourier

**EXEMPLE 4** La fonction

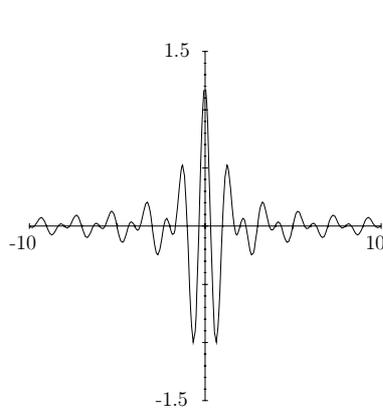
$$\begin{aligned} \zeta &:= 2 \cdot \text{sinc} 2\pi \cdot \text{id} - \text{sinc} \pi \cdot \text{id} = \\ &= (2 \cos \pi \cdot \text{id} - 1) \cdot \text{sinc} \pi \cdot \text{id} \end{aligned}$$

est une ondelette. On a

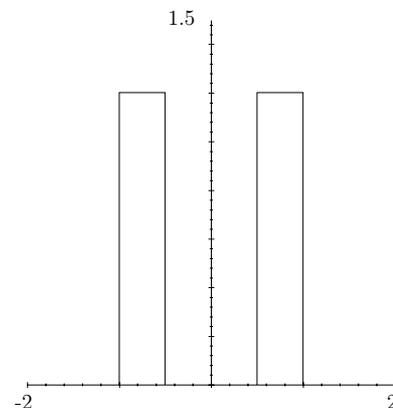
$$\mathcal{F}\zeta = 1_{[-1, 1]} - 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$$

et

$$c_\zeta = \sqrt{\ln 2} .$$



Ondelette sinc



Transformée de Fourier

## 4.5 Exemples de transformées en ondelettes

Dans ce qui suit  $\zeta$  est une ondelette paire,  
i.e.  $\check{\zeta} = \zeta$  ,  
et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $\text{supp } \zeta$  .

**EXEMPLE 1** Considérons un signal de la forme

$$f = |f| \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot \diamond} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) .$$

On dit que c'est une *ligne spectrale* .

Si  $|f| \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$  et étant donné  $s \in \mathbb{R}$  , le théorème de la moyenne nous permet d'écrire

$$|f| = |f|(s) + r(s, \diamond) \cdot (\diamond - s) \quad \text{avec } r(s, \diamond) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) .$$

En effet, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  avec  $t \neq s$  , on a

$$r(s, t) = \frac{1}{t - s} \cdot \int_s^t |f|'(u) \, du$$

et

$$\lim_{t \rightarrow s} r(s, t) = |f|'(s) .$$

En outre

$$|r(s, t)| \leq \| |f|' \|_{\infty, I(s, t)} ,$$

où  $I(s, t)$  désigne l'intervalle d'extrémités  $s$  et  $t$  .

En faisant le changement de variable  $u = \frac{t-s}{h}$  , il vient

$$\begin{aligned} Wf(s, h) &= \int \overline{\zeta_{s, h}}(t) \cdot f(t) \, dt = h^{\frac{1}{2}} \cdot \int \overline{\zeta}(u) \cdot f(h \cdot u + s) \, du = \\ &= h^{\frac{1}{2}} \cdot \int \overline{\zeta}(u) \cdot (|f|(s) + r(s, h \cdot u + s) \cdot h \cdot u) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot (h \cdot u + s)} \, du = \\ &= |f|(s) \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot s} \cdot \overline{\mathcal{F}\zeta}(h \cdot \lambda) \cdot h^{\frac{1}{2}} + R(s, h) \cdot h^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

avec

$$R(s, h) = e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot s} \cdot \int u \cdot \overline{\zeta}(u) \cdot r(s, h \cdot u + s) \cdot e^{2\pi i \cdot h \cdot \lambda \cdot u} \, du .$$

Ainsi

$$Wf(s, h) = \left( f(s) + \frac{R(s, h)}{\overline{\mathcal{F}\zeta}(h \cdot \lambda)} \cdot h \right) \cdot \overline{\mathcal{F}\zeta}(h \cdot \lambda) \cdot h^{\frac{1}{2}}$$

et

$$|R(s, h)| \leq \| |f|' \|_{\infty, h \cdot I + s} \cdot \int |u \cdot \zeta(u)| \, du .$$

Supposons que la fonction  $|\mathcal{F}\zeta|$  possède sur  $\mathbb{R}$  deux maxima en  $\pm\lambda_0$ , avec  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$ , et est qu'elle soit très concentrée autour de ces points. La restriction de  $Wf$  sur une bande verticale  $J \times \mathbb{R}_+^*$  est concentrée sur une petite bande horizontale à la hauteur  $h_0 \simeq \frac{\lambda_0}{|\lambda|}$  pour autant que  $\frac{R(\diamond, h_0)}{\mathcal{F}\zeta(\lambda_0)} \cdot h_0$  soit petit sur  $J$  par rapport à  $f$ . On a alors

$$f \simeq \frac{1}{\overline{\mathcal{F}\zeta}(\lambda_0) \cdot h_0^{\frac{1}{2}}} \cdot W(\diamond, h_0) \quad \text{sur } J,$$

ce qui nous permet de reconnaître une portion de la ligne spectrale dans la transformée en ondelettes.

Il suffit donc que

$$\| |f'| \|_{\infty, h \cdot I + s} \cdot h_0 \ll \frac{\overline{\mathcal{F}\zeta}(\lambda_0) \cdot \|f\|_{\infty, J}}{\int |u \cdot \zeta(u)| du}.$$

Cette condition est donc satisfaite si  $|f|$  est presque constante sur l'intervalle  $h_0 \cdot I + J$ , ou bien si  $|\lambda| \gg \lambda_0$ .

**EXEMPLE 2** Considérons un signal  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$  tels que l'on ait

$$|f(t) - f(\tau)| \leq c \cdot |t - \tau|^\alpha \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Remarquons tout d'abord que, pour tout  $a, b \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha.$$

Nous pouvons évidemment supposer que  $a \leq b$ . Par le théorème de la moyenne il existe un certain  $\xi \in \mathbb{R}_+^*$  entre  $b$  et  $a + b$  tel que

$$(a + b)^\alpha - b^\alpha = a \cdot \alpha \cdot \xi^{\alpha-1} \leq a \cdot a^{\alpha-1} = a^\alpha,$$

puisque  $\text{id}^{\alpha-1}$  est une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On choisit une ondelette  $\zeta$  telle que  $\zeta, \text{id} \cdot \zeta \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ . Elle est donc d'intégrale nulle par la remarque 4.2.4 et il vient

$$\begin{aligned} |Wf(s, h)| &= h^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \int \bar{\zeta}(u) \cdot (f(h \cdot u + s) - f(\tau)) dt \right| \leq c \cdot \int |\zeta(u)| \cdot |h \cdot u + s - \tau|^\alpha dt \leq \\ &\leq c \cdot h^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int |\zeta(u)| \cdot |hu|^\alpha du + |s - \tau|^\alpha \cdot \int |\zeta(u)| du \right) \leq \\ &\leq c \cdot \left( \int |\zeta(u)| du \right) \cdot |s - \tau|^\alpha \cdot h^{\frac{1}{2}} + c \cdot \left( \int |\zeta(u)| \cdot (1 + |u|) du \right) \cdot h^{\frac{1}{2} + \alpha}. \end{aligned}$$

Il est donc possible d'estimer  $\tau$  et  $\alpha$ .

## 4.6 Ondelettes régulières

Soit  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  une ondelette. Rappelons (lemme 4.2.(ii)) que, pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$\mathcal{W}f(s, h) = \mathcal{W}(T_{-s}f)(0, h) .$$

Pour étudier le comportement de  $\mathcal{W}f$  au voisinage de  $\mathbb{R} \times \{0\}$ , il nous suffit donc d'étudier celui de  $\mathcal{W}f(0, h)$  lorsque  $h$  tend vers 0, et nous allons voir qu'il dépend essentiellement des moments de  $\zeta$ .

Pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , nous dirons que  $\zeta$  à des *moments finis jusqu'à l'ordre  $r$*  si  $\text{id}^k \cdot \zeta \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  avec  $0 \leq k \leq r$ , et nous poserons

$$M_k := \int \bar{\zeta}(t) \cdot t^k dt .$$

**REMARQUE 1** Si  $\zeta$  est une ondelette dont le premier moment est fini, on a  $M_0 = 0$ . Réciproquement si les moments d'ordre 0 et 1 sont finis et  $M_0 = 0$ , alors  $\zeta$  est une ondelette.

Ce n'est qu'une reformulation de la remarque 4.2.4.

**REMARQUE 2** Si les moments de  $\zeta$  sont finis jusqu'à l'ordre  $r$ , alors  $\mathcal{F}\zeta \in \mathcal{C}^{(r)}(\mathbb{R})$  et  $M_k = (-1)^k \vartheta^k \mathcal{F}\zeta(0)$  par le théorème 3.1.(ii). Mais remarquons que  $\mathcal{F}\zeta$  peut être nulle au voisinage de 0 sans que l'on ait  $\zeta \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$  comme le montre l'exemple 4.4.4.

Etant donné  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^{(r)}(\mathbb{R})$ , considérons son développement limité de Taylor en 0

$$f(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot t^k + R_r(t)$$

avec

$$R_r(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot f^{(r)}(s) ds .$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sqrt{h} \cdot \mathcal{W}f(0, h) &= \int \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) \cdot f(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot \int \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) \cdot t^k dt + \int \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) \cdot R_r(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot M_k \cdot h^{k+1} + \tilde{R}_r(h) , \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{R}_r(h) = \int \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) \cdot \left( \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot f^{(r)}(s) ds \right) dt .$$

**PROPOSITION** Soient  $\zeta$  une ondelette et  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^{(r)}(\mathbb{R})$ .

(i) Si les moments de  $\zeta$  sont finis jusqu'à l'ordre  $r-1$  et  $f^{(r)} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{R}_r(h)}{h^r} = 0 ,$$

i.e.

$$\mathcal{W}f(0, h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \left( \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot M_k \cdot h^{k+1} + o(h^r) \right) .$$

(ii) Si les moments de  $\zeta$  sont finis jusqu'à l'ordre  $r$  et  $f^{(r)} \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R})$ , alors

$$\left| \tilde{R}_r(h) \right| \leq \frac{\|f^{(r)}\|_\infty}{r!} \cdot \left( \int |\zeta(t)| \cdot |t|^r dt \right) \cdot h^{r+1} ,$$

i.e.

$$\mathcal{W}f(0, h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \left( \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot M_k \cdot h^k + O(h^{r+1}) \right) .$$

En effet

$$\begin{aligned} \left| \tilde{R}_r(h) \right| &= \left| \int \bar{\zeta}(t) \cdot \left( \int_0^{ht} \frac{(ht-s)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot f^{(r)}(s) ds \right) \cdot h dt \right| \leq \\ &\leq \frac{h^r}{(r-1)!} \cdot \int |\zeta(t)| \cdot |t|^{r-1} \cdot \left( \int_{-h \cdot |t|}^{h \cdot |t|} |f^{(r)}(s)| ds \right) dt , \end{aligned}$$

d'où le résultat par le théorème de Lebesgue, puisque  $\zeta \cdot \text{id}^{r-1} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$  et

$$\int_{-h \cdot |t|}^{h \cdot |t|} |f^{(r)}(s)| ds \leq \|f^{(r)}\|_1 < \infty .$$

Pour la seconde partie, il vient

$$|R_r(t)| \leq \|f^{(r)}\|_\infty \cdot \frac{|t|^r}{r!} ,$$

donc

$$\left| \tilde{R}_r(h) \right| \leq \frac{\|f^{(r)}\|_\infty}{r!} \cdot \int \left| \zeta\left(\frac{t}{h}\right) \right| \cdot |t|^r dt = \frac{\|f^{(r)}\|_\infty}{r!} \cdot \left( \int |\zeta(t)| \cdot |t|^r dt \right) \cdot h^{r+1} . \quad \square$$

Cette formule montre que la convergence de  $\mathcal{W}f(0, h)$  vers 0, lorsque  $h$  tend vers 0, est d'autant plus rapide lorsque le plus grand  $r$ , tel que  $M_k = 0$  pour tout  $k \leq r$ , est grand. Remarquons que dans la formule de reconstruction, si l'ondelette est bien concentrée au voisinage de 0, par exemple à décroissance rapide, seules les valeurs  $s$  proches de  $t$  sont

nécessaires et que la qualité de la convergence ci-dessus entraîne une bonne convergence de l'intégrale, supprimant l'effet négatif dû au facteur  $\frac{1}{h^2}$ . Ceci nous conduit à poser la

**DEFINITION** Soit  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  et  $r \in \mathbb{N}$ . On dit que  $\zeta$  est une *ondelette régulière d'ordre  $r$*  si

$$(a) \quad \zeta \in \mathcal{AC}^{(r)}(\mathbb{R})$$

et, pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $k = 0, \dots, r$ , on a

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \langle t \rangle^m \cdot |\partial^k \zeta(t)| < \infty.$$

$$(b) \quad M_k := \int t^k \cdot \zeta(t) dt = 0 \quad \text{pour tout } k = 0, \dots, r.$$

Rappelons que  $\mathcal{AC}^{(0)}(\mathbb{R}) = \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$ . La régularité d'ordre 0 signifie que  $\zeta$  est à décroissance rapide et que  $\int \zeta(t) dt = 0$ .

**EXEMPLE 1** L'ondelette

$$2 \cdot (\cos \pi \cdot \text{id} - 1) \cdot \text{sinc } \pi \cdot \text{id}$$

(cf. exemple 4.4.4) est une ondelette, mais elle n'est pas régulière, car elle n'est pas intégrable.

On peut le vérifier élémentairement (exercice), mais cela découlera aussi de la théorie qui va suivre (cf. exemple 5.3.1).

**EXEMPLE 2** L'ondelette de Haar

$$-1_{[-\frac{1}{2}, 0[} + 1_{[0, \frac{1}{2}[}$$

(cf. exemple 4.4.3) est une ondelette régulière d'ordre 0.

**EXEMPLE 3** La dérivée  $(r+1)$ -ième d'une gaussienne est une ondelette régulière d'ordre  $r$ .

# Chapitre 5

## Bases d'ondelettes

## 5.1 Analyses multi-échelles de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

**DEFINITION 1** On dit qu'une ondelette  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  est une *ondelette-mère* si la suite des fonctions  $(\zeta_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  avec

$$\zeta_{k,j}(t) := 2^{\frac{j}{2}} \cdot \zeta(2^j \cdot t - k) = \zeta_{\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}}(t)$$

est une base hilbertienne de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , dite *base hilbertienne d'ondelettes*.

Si  $\zeta$  est régulière d'ordre  $r$ , on dit  $(\zeta_{k,j})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  est une *base hilbertienne d'ondelettes régulières d'ordre  $r$* .

**REMARQUE 1** Si  $\zeta$  est une ondelette-mère, alors pour tout  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  la série

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} (\zeta_{k,j} | f) \cdot \zeta_{k,j}$$

est sommable dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  et on a

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |(\zeta_{k,j} | f)|^2.$$

Remarquons que

$$(\zeta_{k,j} | f) = \mathcal{W}f\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right).$$

En posant

$$\widehat{\mathcal{W}}_j f := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\zeta_{k,j} | f) \cdot \zeta_{k,j},$$

on obtient une décomposition de  $f$  en “voix”  $\widehat{\mathcal{W}}_j f$  :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{W}}_j f.$$

Si l'on pose

$$F_l := \sum_{j < l, k \in \mathbb{Z}} (\zeta_{k,j} | f) \cdot \zeta_{k,j},$$

alors l'approximation  $F_{l+1}$  s'obtient à partir de  $F_l$  en ajoutant le “détail”  $\widehat{\mathcal{W}}_l f$ .

Considérons les sous-espaces vectoriels fermés  $V_l$  de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  engendrés par les  $\zeta_{k,j}$  avec  $j < l$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . On a  $\zeta \in V_1$  et

$$(\zeta_{k,j})_{k \in \mathbb{Z}, j \leq 0} = (\zeta_{k,j})_{k \in \mathbb{Z}, j < 0} \cup (\zeta_k)_{k \in \mathbb{Z}},$$

donc  $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne du supplémentaire orthogonal  $W_0$  à  $V_0$  dans  $V_1$ . En outre

$$\zeta_{k,j+1} = S_{\frac{1}{2}} \zeta_{k,j}.$$

On dit que  $\zeta$  est *adaptée* à  $(V_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ .

La suite  $(V_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  est croissante et possède les propriétés (a)-(c) de la définition qui suit. La condition (d) n'est pas nécessairement satisfaite, mais nous verrons qu'elle est suffisante pour la construction d'une ondelette-mère et conduit à beaucoup d'exemples pratiques.

**DEFINITION 2** On appelle *analyse multi-échelles* de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  la donnée d'une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés  $(V_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  ayant les propriétés suivantes :

- (a)  $\bigcap_{l \in \mathbb{Z}} V_l = \{0\}$  et  $\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} V_l$  est dense dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ .
- (b) Pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ , on a  $f \in V_l$  si, et seulement si,  $S_{\frac{1}{2}} f \in V_{l+1}$ .
- (c) Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et  $f \in V_0$ , on a  $f_k := T_k f \in V_0$ , i.e.  $V_0$  est stable par les  $\mathbb{Z}$ -translations.
- (d) Il existe un isomorphisme linéaire  $\Phi : V_0 \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  tel que

$$\Phi(f_k) = (\Phi f)_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

i.e. commutant avec les  $\mathbb{Z}$ -translations.

**REMARQUE 2** Dire que  $\Phi$  est un isomorphisme signifie aussi que  $\Phi$  est une application linéaire bijective et que  $\|\Phi\|, \|\Phi^{-1}\| < \infty$ , i.e. qu'il existe des constantes  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  telles que

$$a \cdot \|f\|_2 \leq \|\Phi f\|_2 \leq b \cdot \|f\|_2.$$

On peut prendre  $a = \frac{1}{\|\Phi^{-1}\|}$  et  $b = \|\Phi\|$ .

**REMARQUE 3** En admettant (c), la condition (d) est équivalente à

(d') Il existe une fonction  $v \in V_0$  et des constantes  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  satisfaisant à la propriété suivante : pour tout  $f \in V_0$ , il existe une unique suite  $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$  telle que l'on ait

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \cdot v_k,$$

la série étant sommable dans  $V_0$ , et telle que

$$a \cdot \|f\|_2 \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq b \cdot \|f\|_2.$$

On dit que  $v$  engendre l'analyse multi-échelles  $(V_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ .

Il suffit de poser  $v := \Phi^{-1} e_0$  pour la nécessité et  $\Phi f := c$  pour la suffisance.  $\square$

**REMARQUE 4** Avec les notations ci-dessus, si  $a = b = 1$ , alors  $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_0$ .

**REMARQUE 5** L'homothétie  $S_{\frac{1}{2}}$  est une isométrie de  $V_l$  sur  $V_{l+1}$  et

$$S_{\frac{1}{2}} : f \longmapsto 2^{\frac{l}{2}} \cdot f(2^l \diamond)$$

est une isométrie de  $V_0$  sur  $V_l$ . En outre  $V_l$  est stable par les  $\frac{1}{2^l} \cdot \mathbb{Z}$ -translations.

C'est immédiat par (b) et (c), puisque

$$T_{\frac{k}{2^l}} S_{\frac{1}{2}} = S_{\frac{1}{2}} T_k$$

par le lemme 4.2.(ii).  $\square$

**EXEMPLE 1** La fonction sinc  $\pi \diamond$  engendre l'analyse multi-échelles définie par :

$V_l$  est le sous-espace vectoriel des  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  tels que  $\text{supp } \mathcal{F}f \subset [-2^{l-1}, 2^{l-1}]$ .

Le théorème de Shannon 1.17 montre que  $(\text{sinc } \pi(\diamond - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_0$ . Les détails de la vérification sont laissés en exercice.

**EXEMPLE 2** La fonction  $1_{[0,1[}$  engendre l'analyse multi-échelles définie par :

$V_l$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  des fonctions constantes sur les intervalles de la subdivision  $(\frac{k}{2^l})_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Il est clair que  $(1_{[0,1[}(\diamond - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_0$ .

**EXEMPLE 3** La fonction  $1_{[0,1[} * 1_{[0,1[} = (1 - |\text{id} - 1|)^+$  engendre l'analyse multi-échelles définie par :

$V_l$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{AC}(\mathbb{R})$  des fonctions continues affines par morceaux sur la subdivision  $(\frac{k}{2^l})_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Les propriétés (a) à (c) sont immédiates, car  $v := 1_{[0,1[} * 1_{[0,1[} \in V_0$  et on a

$$v(1) = 1 \quad \text{et} \quad v(k) = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}.$$

En particulier, tout  $f \in V_0$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k+1) \cdot v_k \quad \text{ponctuellement.}$$

Sur  $[k, k+1]$ , on a

$$f = f(k) \cdot v_{k-1} + f(k+1) \cdot v_k$$

et

$$\int_k^{k+1} v_{k-1}^2 = \int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{3} \cdot (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\int_k^{k+1} v_{k-1} \cdot v_k = \int_0^1 (1-x) \cdot x dx = \left( \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6},$$

$$\int_k^{k+1} v_k^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

donc

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} |f(k) \cdot v_{k-1} + f(k+1) \cdot v_k|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( |f(k)|^2 \cdot \int_k^{k+1} v_{k-1}^2 \right. \\ &+ \left[ \overline{f(k)} \cdot f(k+1) + \overline{f(k+1)} \cdot f(k) \right] \cdot \int_k^{k+1} v_{k-1} \cdot v_k + |f(k+1)|^2 \cdot \int_k^{k+1} v_k^2 \Big) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( 2 \cdot |f(k)|^2 + \left[ \overline{f(k)} \cdot f(k+1) + \overline{f(k+1)} \cdot f(k) \right] + 2 \cdot |f(k+1)|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|f(k)|^2 + |f(k+1)|^2 + |f(k) + f(k+1)|^2). \end{aligned}$$

Puisque

$$|f(k) + f(k+1)|^2 \leq 2 \cdot (|f(k)|^2 + |f(k+1)|^2),$$

on en déduit que

$$\frac{1}{3} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k+1)|^2 = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|f(k)|^2 + |f(k+1)|^2) \leq \|f\|_2^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k+1)|^2,$$

i.e.

$$\|f\|_2 \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k+1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{3} \cdot \|f\|_2,$$

ce qui montre que  $f \longmapsto (f(k+1))_{k \in \mathbb{Z}}$  est un isomorphisme de  $V_0$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .  $\square$

Plus généralement

**EXEMPLE 4** Etant donné  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit

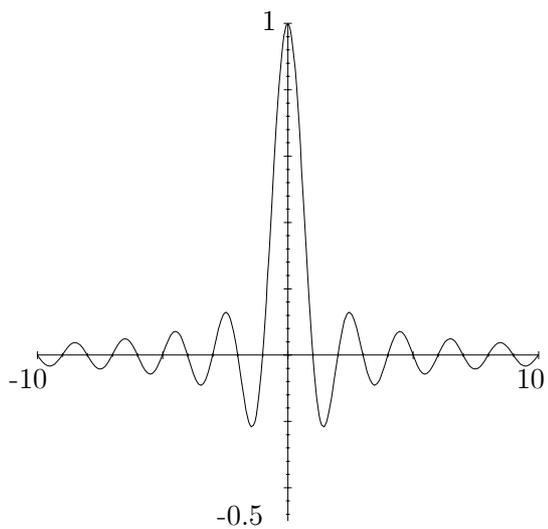
$$v := (1_{[0,1[})^{*(n+1)}$$

la puissance  $(n+1)$ -ème convolutive de  $1_{[0,1[}$ . Cette fonction engendre l'analyse multi-échelles définie par :

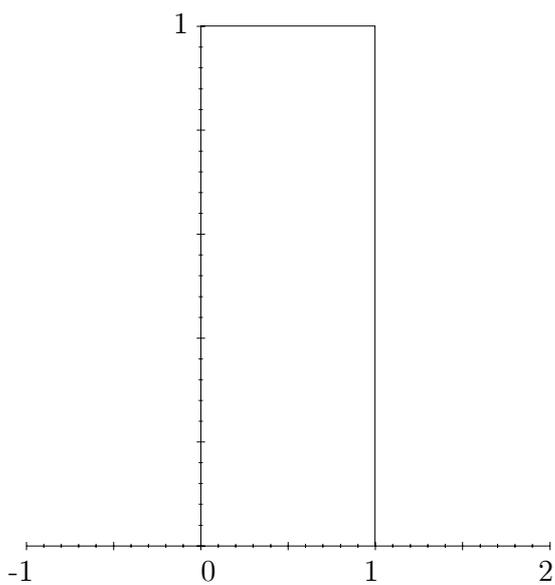
$V_l$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{AC}^{(n)}(\mathbb{R})$  des fonctions spline de degré  $n$  sur la subdivision  $(\frac{k}{2^l})_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Par exemple  $(1_{[0,1[})^{*3}$  est une spline quadratique à support dans  $[0, 3]$  définie par

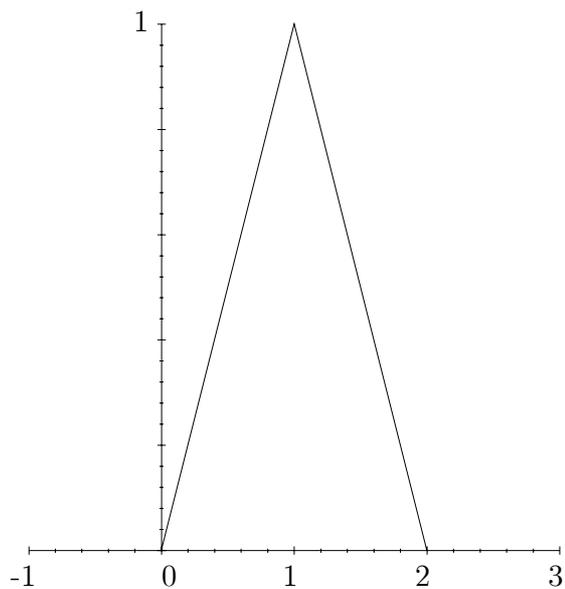
$$(1_{[0,1[})^{*3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x^2 & x \in [0, 1[ \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2} & \text{si } x \in [1, 2[ \\ \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 & x \in [2, 3] \end{cases}.$$



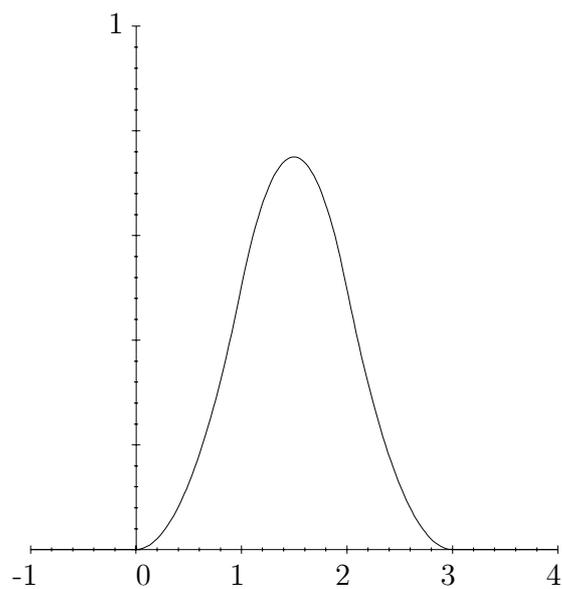
sinc



Spline de degré 0



Spline de degré 1



Spline de degré 2

## 5.2 Construction du père des ondelettes

Dans ce qui suit  $(V_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multi-échelles, et nous utiliserons les notations de 5.1 correspondantes. Pour simplifier, nous dirons qu'une suite est convergente ou qu'une série est sommable dans  $\mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$ , respectivement  $\mathbf{L}_{loc}^2(\mathbb{R})$ , si cela a lieu par restriction dans  $\mathbf{L}^1(K)$ , respectivement dans  $\mathbf{L}^2(K)$ , pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}$ .

**LEMME** Soient  $f, g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ . Alors

(i) La série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\overline{\mathcal{F}f} \cdot \mathcal{F}g)_k$  est absolument sommable dans  $\mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$ , ainsi que ponctuellement presque partout, et la somme appartient à  $\mathbf{L}_{loc,p}^1(\mathbb{R})$ .

(ii) Pour que la suite des translatées  $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $f$  soit orthonormée, il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}f|_k^2 = 1 .$$

(iii) Pour que  $g$  soit orthogonale à toutes les  $f_k$ , i.e. que toutes les  $g_l$  soient orthogonales à toutes les  $f_k$ , il faut et il suffit que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\overline{\mathcal{F}f} \cdot \mathcal{F}g)_k = 0 .$$

**Démonstration de (i)** La fonction  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}f|_k^2$  est définie ponctuellement à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  et elle est périodique. Comme

$$\int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}f|_k^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-k}^{1-k} |\mathcal{F}f|^2 = \int |\mathcal{F}f|^2 < \infty ,$$

le théorème de Beppo Levi et la périodicité montrent que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}f|_k^2$  est absolument sommable dans  $\mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$  et finie presque partout. D'autre part, par Cauchy-Schwarz, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |(\overline{\mathcal{F}f} \cdot \mathcal{F}g)_k| \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}f|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}g|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

ainsi que

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |(\overline{\mathcal{F}f} \cdot \mathcal{F}g)_k| \leq \\ & \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_0^1 |\mathcal{F}f|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_0^1 |\mathcal{F}g|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\mathcal{F}f|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\mathcal{F}g|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \end{aligned}$$

ce qui prouve la première assertion.

**Démonstration de (ii)** On a tout d'abord

$$(f|f_k) = (\mathcal{F}f|\mathcal{F}f_k) = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \cdot k} \cdot |\mathcal{F}f(\lambda)|^2 d\lambda = \mathcal{F}(|\mathcal{F}f|^2)(k) .$$

D'autre part, puisque  $|\mathcal{F}f|^2 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ , la formule sommatoire de Poisson généralisée 3.9, montre que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}f|_k^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(|\mathcal{F}f|^2)(k) \cdot [e^{2\pi i k \cdot \text{id}}] \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R})^* .$$

Mais  $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée si, et seulement si,  $(f|f_k) = \mathcal{F}(|\mathcal{F}f|^2)(k) = \delta_{0,k}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , ce qui est équivalent à

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}f|_k^2 = 1 \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R})^* ,$$

i.e. presque partout par ce qui précède.

**Démonstration de (iii)** Comme ci-dessus on a tout d'abord

$$(f_k|g) = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}f} \cdot \mathcal{F}g)(-k)$$

puis, par la formule sommatoire de Poisson généralisée 3.9,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\overline{\mathcal{F}f} \cdot \mathcal{F}g)_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}f} \cdot \mathcal{F}g)(k) \cdot [e^{2\pi i k \cdot \text{id}}] \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R})^* .$$

Le corollaire 2.4 montre alors que  $g$  est orthogonale à tous les  $f_k$  si, et seulement si,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\overline{\mathcal{F}f} \cdot \mathcal{F}g)_k = 0 \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R})^* ,$$

i.e. presque partout.  $\square$

**PROPOSITION** Soit  $(V_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  une analyse multi-échelles engendrée par  $v$  et posons

$$\rho := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}v|_k^2 \in \mathbf{L}_{loc,p}^1(\mathbb{R}) .$$

(i) Pour tout  $f \in V_0$ , la série

$$\Psi f := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi f(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond \cdot k}$$

est sommable dans  $\mathbf{L}_{loc,p}^2(\mathbb{R})$  et l'application

$$\Psi : V_0 \longrightarrow \mathbf{L}_{loc,p}^2(\mathbb{R}) : f \longmapsto \Psi f$$

est bijective. On a les formules

$$\Psi f \cdot \mathcal{F}v = \mathcal{F}f , \quad ()$$

$$\Psi^{-1}\eta = \widehat{\mathcal{F}}(\eta \cdot \mathcal{F}v) \quad \text{pour tout } \eta \in \mathbf{L}_{loc,p}^2(\mathbb{R}) , \quad ()$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\overline{\mathcal{F}f} \cdot \mathcal{F}g)_k = \rho \cdot \overline{\Psi f} \cdot \Psi g . \quad ()$$

et

$$\Psi T_l = E_{-l} \Psi \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{Z} . \quad ()$$

(ii) *L'application*

$$1_{[0,1[} \cdot \Psi : V_0 \longrightarrow \mathbf{L}^2([0,1[, \rho) : f \longmapsto 1_{[0,1[} \cdot \Psi f$$

est une isométrie. En outre,

$$\frac{1}{\|\Phi\|^2} \leq \rho \leq \|\Phi^{-1}\|^2 .$$

**Démonstration de (i)** Remarquons tout d'abord que, pour tout  $f \in V_0$ , on a

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi f(k) \cdot v_k ,$$

donc

$$\mathcal{F}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi f(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond k} \cdot \mathcal{F}v$$

dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , et par suite dans  $\mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$ . Mais comme la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi f(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond k}$  est sommable dans  $\mathbf{L}_{loc,p}^2(\mathbb{R})$  et, puisque la multiplication

$$\mathbf{L}_{loc}^2(\mathbb{R}) \times \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$$

est continue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient (1) :

$$\Psi f \cdot \mathcal{F}v = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi f(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond k} \right) \cdot \mathcal{F}v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi f(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond k} \cdot \mathcal{F}v = \mathcal{F}f .$$

Il est clair que  $\Psi = \widehat{\mathcal{F}}_{\mathbb{T}} \circ (\Phi)^{\vee}$  est bijective, en identifiant  $\mathbf{L}^2(\mathbb{T})$  avec  $\mathbf{L}_{loc,p}^2(\mathbb{R})$ . Pour tout  $\eta \in \mathbf{L}_{loc,p}^2(\mathbb{R})$ , il vient alors

$$\mathcal{F}\Psi^{-1}\eta = (\Psi\Psi^{-1}\eta) \cdot \mathcal{F}v = \eta \cdot \mathcal{F}v ,$$

donc (2) :

$$\Psi^{-1}\eta = \widehat{\mathcal{F}}(\eta \cdot \mathcal{F}v) .$$

Puisque  $\Psi f$  est périodique, on obtient également la formule

$$\begin{aligned} \rho \cdot \overline{\Psi f} \cdot \Psi g &= \overline{\Psi f} \cdot \Psi g \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}v|_k^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\overline{\Psi f} \cdot \mathcal{F}v \cdot \Psi g \cdot \mathcal{F}v)_k = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\overline{\mathcal{F}f} \cdot \mathcal{F}g)_k . \end{aligned}$$

Pour la dernière formule on a

$$\Psi T_l f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi(f_l)(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi f(k-l) \cdot e^{-2\pi i \diamond k} =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi f(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond \cdot (k+l)} = E_{-l} \Psi f .$$

**Démonstration de (ii)** On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xrightarrow{1_{[0,1[} \cdot \Psi} & \mathbf{L}^2([0, 1[, \rho) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow Id \\ \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\approx} & \mathbf{L}^2([0, 1[ \\ c & \longmapsto & \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond \cdot k} \end{array} ,$$

et comme

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \|\mathcal{F}f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\Psi f|^2 \cdot |\mathcal{F}v|^2 = \int_0^1 |\Psi f|^2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}v|_k^2 = \\ &= \int_0^1 |\Psi f|^2 \cdot \rho , \end{aligned}$$

$1_{[0,1[} \cdot \Psi$  est une isométrie. Il vient alors

$$\|\rho\|_\infty = \sup_{\|h\|_2 \leq 1} \int_0^1 |h|^2 \cdot \rho = \sup_{\|h\|_2 \leq 1} \|h\|_{2,\rho}^2 = \|Id^{-1}\|^2 = \|\Phi^{-1}\|^2 ,$$

ainsi que

$$\left\| \frac{1}{\rho} \right\|_\infty = \sup_{\|\sqrt{\rho} \cdot h\|_2 \leq 1} \int_0^1 |\sqrt{\rho} \cdot h|^2 \cdot \frac{1}{\rho} = \sup_{\|h\|_{2,\rho} \leq 1} \|h\|_2^2 = \|Id\|_2^2 = \|\Phi\|^2 . \quad \square$$

**DEFINITION** On dit que  $\omega \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  est une *ondelette-père*, associée à l'analyse multi-échelles  $(V_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ , si la suite des fonctions  $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_0$ .

**REMARQUE 1** Comme  $S_{\frac{1}{2^l}} : f \longmapsto 2^{\frac{l}{2}} \cdot f(2^l \diamond)$  est une isométrie de  $V_0$  sur  $V_l$  (cf. remarque 5.1.5), la suite de fonctions  $\left( S_{\frac{1}{2^l}} \omega_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_l$ . Une ondelette-père associée à l'analyse multi-échelles  $(V_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  engendre évidemment cette analyse. La proposition prend dans ce cas une forme simple puisque  $\rho = 1$ .

Plus précisément on a le

**COROLLAIRE** Soit  $\omega \in V_0$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\omega$  est une ondelette-père.
- (ii)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}\omega|_k^2 = 1$ .
- (iii) Il existe une unique fonction  $\gamma \in \mathbf{L}_p^\infty(\mathbb{R})$  avec  $|\gamma| = 1$  telle que

$$\omega = \widehat{\mathcal{F}} \left( \gamma \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{F}v \right) .$$

Dans ce cas, si  $\gamma \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(k) \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot k}$ , alors

$$\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(k) \cdot v_k .$$

Le lemme montre que (i) entraîne (ii). Si (ii) est satisfaite, alors  $|\Psi\omega| = \rho^{-\frac{1}{2}}$  par (3). Puisque  $\Psi\omega$  est périodique, il existe un unique  $\gamma \in \mathbf{L}_p^\infty(\mathbb{R})$  avec  $|\gamma| = 1$  et  $\Psi\omega = \gamma \cdot \rho^{-\frac{1}{2}}$ , ce qui prouve (iii) par (1).

Pour prouver que (iii) entraîne (i), remarquons que si  $\omega = \widehat{\mathcal{F}}\left(\gamma \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{F}v\right)$  on a

$$\Psi\omega = \Psi\widehat{\mathcal{F}}\left(\gamma \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{F}v\right) = \gamma \cdot \rho^{-\frac{1}{2}}$$

par (2). Mais par (4) on a

$$\Psi\omega_k = E_{-k}\Psi\omega = e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot k} \cdot \Psi\omega = \gamma \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot k} .$$

Il nous suffit donc de montrer que la suite  $\left(\gamma \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2\pi i \cdot \diamond \cdot k}\right)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $\mathbf{L}^2([0, 1[ , \rho)$ . Mais comme

$$h \longmapsto \gamma \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot h : \mathbf{L}^2([0, 1[) \longrightarrow \mathbf{L}^2([0, 1[ , \rho)$$

est une isométrie surjective par la dernière assertion de la proposition, le résultat en découle puisque  $(e^{2\pi i \cdot \diamond \cdot k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $\mathbf{L}^2([0, 1[)$ .

Finalement

$$\omega = \widehat{\mathcal{F}}\left(\gamma \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{F}v\right) = \Psi^{-1}\left(\gamma \cdot \rho^{-\frac{1}{2}}\right) = \Psi^{-1}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} p(k) \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot k}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(k) \cdot v_k . \quad \square$$

**REMARQUE 2** La construction d'une ondelette-père dépend essentiellement de  $v$ , donc de  $\Phi$ . L'ondelette-père canonique associée à ces données est obtenue en prenant  $\gamma = 1$ , i.e.

$$\omega := \widehat{\mathcal{F}}\left(\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}v|_k^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{F}v\right) .$$

Nous utilisons les notations des exemples 5.1 correspondants.

**EXEMPLE 1** La fonction sinc  $\pi \diamond$  est l'ondelette-père canonique.

Cela découle du théorème de Shannon dans  $\mathbf{L}^2$  démontré dans 3.11, mais aussi du corollaire puisque

$$\mathcal{F} \text{ sinc } \pi \diamond = 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}$$

par l'exemple 3.7, donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}_k\right|^2 = 1 . \quad \square$$

**EXEMPLE 2** La fonction  $1_{[0, 1[}$  est l'ondelette-père canonique.

C'est immédiat car tout  $f \in V_0$  s'écrit

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{[k, k+1[} \cdot f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \cdot 1_{[k, k+1[} \cdot \quad \square$$

Puisque  $\mathcal{F}1_{[0,1[} = e^{-\pi i \diamond} \cdot \text{sinc } \pi \diamond$ , le corollaire montre alors que

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\text{sinc } \pi \cdot (\diamond - k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2 \pi \cdot (\diamond - k)}{\pi^2 \cdot (\diamond - k)^2} = \frac{\sin^2 \pi \diamond}{\pi^2} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\diamond - k)^2},$$

i.e.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\diamond - k)^2} = \left( \frac{\pi}{\sin \pi \diamond} \right)^2,$$

un résultat bien connu de la théorie des fonctions.

**EXEMPLE 3** Comme  $\mathcal{F}1_{[0,1[} = e^{-\pi i \diamond} \cdot \text{sinc } \pi \diamond$ , on a  $\mathcal{F}(1_{[0,1[} * 1_{[0,1[}) = e^{-2\pi i \diamond} \cdot \text{sinc}^2 \pi \diamond$ , et par suite

$$\rho = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}^4 \pi (\diamond - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^4 \pi \cdot (\diamond - k)}{\pi^4 \cdot (\diamond - k)^4} = \frac{\sin^4 \pi \diamond}{\pi^4} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\diamond - k)^4}.$$

Puisque la série de fonctions méromorphes  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\diamond - k)^2}$  converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}$  vers  $\left(\frac{\pi}{\sin \pi \diamond}\right)^2$ , par dérivation (cf. Théorème Chap. V, §2, n° 1, p. 151 de H. Cartan<sup>3</sup>) on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\diamond - k)^4} &= \frac{1}{6} \cdot \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\diamond - k)^2} \right)'' = \frac{1}{6} \cdot \pi^2 \cdot (-2) \cdot (\pi \cdot \sin^{-3} \pi \diamond \cdot \cos \pi \diamond)' = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \pi^3 \cdot (-3\pi \cdot \sin^{-4} \pi \diamond \cdot \cos^2 \pi \diamond - \pi \cdot \sin^{-3} \pi \diamond \cdot \sin \pi \diamond) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi^4 \cdot \frac{3 \cdot (1 - \sin^2 \pi \diamond) + \sin^2 \pi \diamond}{\sin^4 \pi \diamond} = \frac{1}{3} \cdot \pi^4 \cdot \frac{3 - 2 \cdot \sin^2 \pi \diamond}{\sin^4 \pi \diamond}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\rho = 1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \pi \diamond.$$

Une ondelette-père  $\omega$  est alors donnée en prenant  $\gamma := e^{2\pi i \diamond}$  par

$$\mathcal{F}\omega = \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \pi \diamond \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{sinc}^2 \pi \diamond.$$

Nous savons que  $\omega \in V_0$  : c'est donc une fonction continue affine par morceaux sur les intervalles de la subdivision  $(k)_{k \in \mathbb{Z}}$ . On a

$$\omega(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} p(l) \cdot v_l(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} p(l) \cdot \delta_{1, k-l} = p(k-1) =$$

<sup>3</sup> H. Cartan, Théorie élémentaire des fonction analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Paris, 1961.

$$= \int_0^1 e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot (k-1)} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \pi \lambda\right)^{-\frac{1}{2}} d\lambda .$$

On peut vérifier que

$$|\omega(k)| \leqslant cst \cdot (2 + \sqrt{3})^{-|k|} .$$

### 5.3 Construction de la mère des ondelettes

Soit  $(V_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  une analyse multi-échelles. Pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ , il existe d'après le théorème de la projection un sous-espace vectoriel fermé  $W_l$  de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  tel que

$$V_{l+1} = V_l \overset{2}{\bigoplus} W_l .$$

Les propriétés d'une analyse multi-échelles se traduisent par le

**LEMME** *La famille  $(W_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  satisfait aux propriétés suivantes :*

(i)

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \overset{2}{\bigoplus}_{l \in \mathbb{Z}} W_l .$$

(ii) *Pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ , on a  $f \in W_l$  si, et seulement si,  $S_{\frac{1}{2}} f \in W_{l+1}$ .*

(iii) *Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et  $f \in W_0$ , on a  $f_k \in W_0$ .*

*En outre pour que  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  soit une ondelette-mère adaptée à  $(V_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ , il faut et il suffit que  $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base hilbertienne de  $W_0$ .*

**Démonstration de (i)** Il est tout d'abord clair que les  $W_l$  sont deux à deux orthogonaux. On a alors  $V_l = \overset{2}{\bigoplus}_{j < l} W_j$ , car si  $f \in V_l$  est orthogonal à tous les  $W_j$  pour  $j < l$ , on a  $f \in V_j$ , donc  $f \in \bigcap_{j < l} V_j = \{0\}$ . L'assertion en découle puisque  $\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} V_l$  est dense dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ .

**Démonstration de (ii)** Il suffit de remarquer que  $f \in V_l$  et  $f \perp V_{l-1}$  est équivalent à  $f(2 \cdot \diamond) \in V_{l+1}$  et  $f(2 \cdot \diamond) \perp V_l$ .

**Démonstration de (iii)** Si  $f \in W_0$ , on a  $f \in V_1$  et  $f \perp V_0$ , donc  $f_k \in V_1$  et  $f_k \perp V_0$ , car  $V_1$  est stable par les  $\frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}$ -translations, donc  $V_1$  et  $V_0$  sont stables par les  $\mathbb{Z}$ -translations (cf. remarque 5.1.5).

Finalement, la condition est nécessaire comme nous l'avons vu à la remarque 5.1.1. Réciproquement, on a  $\zeta_{k,j} = S_{\frac{1}{2^j}} \zeta_k$ , et  $\left( S_{\frac{1}{2^j}} \zeta_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $W_j$  par (ii), donc  $(\zeta_{k,j})_{k,j \in \mathbb{Z}}$  en est une de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ .  $\square$

**PROPOSITION** *Soit  $(V_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  une analyse multi-échelles et  $\omega$  une ondelette-père.*

(i) *En posant*

$$A := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Psi S_2 \omega \in \mathbf{L}_{loc,p}^2(\mathbb{R}) ,$$

*on a*

$$|A|^2 + \left| A_{\frac{1}{2}} \right|^2 = 1 ,$$

et la bijection  $\Psi S_2 : V_1 \longrightarrow \mathbf{L}_{loc,p}^2(\mathbb{R})$  applique  $W_0$  sur le sous-espace vectoriel des  $\eta \in \mathbf{L}_{loc,p}^2(\mathbb{R})$  satisfaisant à

$$\overline{A} \cdot \eta + \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \eta_{\frac{1}{2}} = 0 . \quad (*)$$

(ii) L'application

$$\Theta : W_0 \longrightarrow \mathbf{L}_{loc,p,\frac{1}{2}}^2(\mathbb{R}) : g \longmapsto e^{2\pi i \cdot \diamond} \cdot \left( A_{\frac{1}{2}} \cdot \Psi S_2 g - A \cdot (\Psi S_2 g)_{\frac{1}{2}} \right)$$

est bijective, son application réciproque est

$$\Theta^{-1} : \xi \longmapsto S_{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{F}} \left( e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \xi \cdot \mathcal{F}\omega \right) ,$$

$$|\Theta g|^2 = |\Psi g|^2 + \left| (\Psi g)_{\frac{1}{2}} \right|^2 , \quad (**)$$

et

$$1_{[0,\frac{1}{2}[} \cdot \Theta : W_0 \longrightarrow \mathbf{L}^2 \left( \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \right) : g \longmapsto 1_{[0,\frac{1}{2}[} \cdot \Theta g$$

est une isométrie.

**Démonstration de (i)** Pour tout  $f, g \in V_1$ , grâce à la formule 5.2.(3) appliquée à  $\omega$  et en tenant compte du corollaire 5.2, on a

$$\begin{aligned} \overline{\Psi S_2 f} \cdot \Psi S_2 g &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_k (\overline{\mathcal{F} S_2 f} \cdot \mathcal{F} S_2 g) = \sqrt{2} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_k S_{\frac{1}{2}} (\overline{\mathcal{F} f} \cdot \mathcal{F} g) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_{\frac{1}{2}} T_{2k} (\overline{\mathcal{F} f} \cdot \mathcal{F} g) , \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left( \overline{\Psi S_2 f} \cdot \Psi S_2 g + (\overline{\Psi S_2 f} \cdot \Psi S_2 g)_{\frac{1}{2}} \right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_{\frac{1}{2}} T_{2k} (\overline{\mathcal{F} f} \cdot \mathcal{F} g) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_{\frac{1}{2}} S_{\frac{1}{2}} T_{2k} (\overline{\mathcal{F} f} \cdot \mathcal{F} g) = \\ &= S_{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_{2k} (\overline{\mathcal{F} f} \cdot \mathcal{F} g) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_{2k+1} (\overline{\mathcal{F} f} \cdot \mathcal{F} g) \right) = S_{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\overline{\mathcal{F} f} \cdot \mathcal{F} g)_k , \end{aligned}$$

i.e.

$$\overline{\Psi S_2 f} \cdot \Psi S_2 g + (\overline{\Psi S_2 f} \cdot \Psi S_2 g)_{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot S_{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\overline{\mathcal{F} f} \cdot \mathcal{F} g)_k . \quad (***)$$

En particulier

$$|A|^2 + \left| A_{\frac{1}{2}} \right|^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S_{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}\omega|_k^2 = 1 .$$

D'autre part pour tout  $g \in V_1$ , on a  $g \in W_0$  si, et seulement si,  $g \perp \omega_k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , puisque  $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_0$ , ce qui est équivalent à

$$\overline{A} \cdot \Psi S_2 g + \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot (\Psi S_2 g)_{\frac{1}{2}} = 0$$

par la formule (\*\*\*) ci-dessus et le lemme 5.2.(iii), d'où le résultat.

**Démonstration de (ii)** Pour presque tous les  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les vecteurs

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) \\ A_{\frac{1}{2}}(\lambda) \end{pmatrix}, e^{-2\pi i \cdot \lambda} \cdot \begin{pmatrix} \overline{A_{\frac{1}{2}}}(\lambda) \\ -\overline{A}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

sont de norme 1 et orthogonaux. Ainsi, pour qu'une fonction  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfasse à (\*), il faut et il suffit qu'il existe une (unique) fonction  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  avec

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \xi \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot \begin{pmatrix} \overline{A_{\frac{1}{2}}} \\ -\overline{A} \end{pmatrix}.$$

Si  $\eta$  est périodique, on a alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta_{\frac{1}{2}} \\ \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \eta_{\frac{1}{2}} \\ \eta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \left( \xi \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot \begin{pmatrix} \overline{A_{\frac{1}{2}}} \\ -\overline{A} \end{pmatrix} \right)_{\frac{1}{2}} = \\ &= \xi_{\frac{1}{2}} \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot e^{\pi i \cdot \diamond} \cdot \begin{pmatrix} \overline{A_1} \\ -\overline{A_{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} = \xi_{\frac{1}{2}} \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot \begin{pmatrix} -\overline{A} \\ \overline{A_{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

puisque  $A$  est périodique, donc  $\xi = \xi_{\frac{1}{2}}$  par l'unicité. En outre

$$\xi = \xi \cdot \left( \overline{A} \cdot A + \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot A_{\frac{1}{2}} \right) = e^{2\pi i \cdot \diamond} \cdot \left( A_{\frac{1}{2}} \cdot \eta - A \cdot \eta_{\frac{1}{2}} \right),$$

et

$$|\xi|^2 = |\eta|^2 + \left| \eta_{\frac{1}{2}} \right|^2.$$

Réciproquement, si  $\xi$  est de période  $\frac{1}{2}$ , il est clair que la fonction

$$\eta := e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \xi$$

est périodique et satisfait à (\*). Ceci finit de prouver que  $\Theta$  est une bijection. Finalement,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |\xi|^2 = \int_0^{\frac{1}{2}} |\eta|^2 + \left| \eta_{\frac{1}{2}} \right|^2 = \int_0^1 |\eta|^2$$

montre que  $\Theta$  est une isométrie. Son application réciproque est alors donnée par

$$\Theta^{-1}\xi = (\Psi S_2)^{-1} \eta = S_{\frac{1}{2}} \Psi^{-1} \eta = S_{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{F}}(\eta \cdot \mathcal{F}\omega) = S_{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{F}}\left(e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \xi \cdot \mathcal{F}\omega\right)$$

par la formule 5.2.(2).  $\square$

**COROLLAIRE** Soit  $\zeta \in V_1$  et posons

$$B := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Psi S_2 \zeta \in \mathbf{L}_{loc,p}^2(\mathbb{R}).$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)  $\zeta$  est une ondelette-mère adaptée à l'analyse multi-échelles  $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ .

(ii) On a

$$|B|^2 + \left| B_{\frac{1}{2}} \right|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \overline{A} \cdot B + \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot B_{\frac{1}{2}} = 0 .$$

(iii) Il existe une unique fonction  $\vartheta \in \mathbf{L}_{p, \frac{1}{2}}^{\infty}(\mathbb{R})$  avec  $|\vartheta| = 1$  telle que

$$\zeta = \sqrt{2} \cdot S_{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{F}} \left( e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \vartheta \cdot \mathcal{F}\omega \right) = T_{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{F}} \left( \overline{A_{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\diamond}{2} \right) \cdot \vartheta \left( \frac{\diamond}{2} \right) \cdot \mathcal{F}\omega \left( \frac{\diamond}{2} \right) \right) ,$$

ou bien

$$\mathcal{F}\zeta = e^{-\pi i \cdot \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\diamond}{2} \right) \cdot \vartheta \left( \frac{\diamond}{2} \right) \cdot \mathcal{F}\omega \left( \frac{\diamond}{2} \right) ,$$

ou encore

$$B = e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \vartheta .$$

Le lemme 5.2, (ii) et (iii) , montre puisque  $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une suite orthonormée orthogonale à  $V_0$  , que (i) entraîne (ii), car

$$|B|^2 + \left| B_{\frac{1}{2}} \right|^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S_{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}\zeta|_k^2 = 1$$

et

$$\overline{A} \cdot B + \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot B_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S_{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\overline{\mathcal{F}\omega} \cdot \mathcal{F}\zeta)_k = 0 ,$$

d'après la formule (\*\*\*) ci-dessus.

La première formule de (ii) montre que  $\vartheta := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Theta \zeta \in \mathbf{L}_{loc, p, \frac{1}{2}}^2(\mathbb{R})$  satisfait à

$$|\vartheta|^2 = \frac{1}{2} \cdot \left( |\Psi S_2 \zeta|^2 + \left| (\Psi S_2 \zeta)_{\frac{1}{2}} \right|^2 \right) = |B|^2 + \left| B_{\frac{1}{2}} \right|^2 = 1$$

grâce à la formule (\*\*). La seconde formule de (ii) signifie que  $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Psi S_2 \zeta$  satisfait à la formule (\*), donc que  $\zeta \in W_0$  , puis que

$$\begin{aligned} \zeta &= \sqrt{2} \cdot \Theta^{-1} \vartheta = \sqrt{2} \cdot S_{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{F}} \left( e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \vartheta \cdot \mathcal{F}\omega \right) = \\ &= \widehat{\mathcal{F}} \left( e^{-\pi i \cdot \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\diamond}{2} \right) \cdot \vartheta \left( \frac{\diamond}{2} \right) \cdot \mathcal{F}\omega \left( \frac{\diamond}{2} \right) \right) = T_{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{F}} \left( \overline{A_{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\diamond}{2} \right) \cdot \vartheta \left( \frac{\diamond}{2} \right) \cdot \mathcal{F}\omega \left( \frac{\diamond}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

grâce aux formules du lemme 4.2.(ii).

Finalement, si  $\zeta$  est définie par (iii), on a

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Psi S_2 \zeta = \Psi S_2 \Theta^{-1} \vartheta = \Psi S_2 S_{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{F}} \left( e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \vartheta \cdot \mathcal{F}\omega \right) = \\ &= e^{-2\pi i \cdot \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \vartheta \end{aligned}$$

par la formule 5.2.(2). Mais comme

$$S_2 \zeta_k = S_2 T_k \zeta = T_{2k} S_2 \zeta ,$$

il vient

$$\Psi S_2 \zeta_k = \Psi T_{2k} S_2 \zeta = e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot 2k} \cdot \Psi S_2 \zeta = \sqrt{2} \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot 2k} \cdot B =$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{-2\pi i \diamond \cdot 2k} \cdot e^{-2\pi i \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \vartheta = \sqrt{2} \cdot e^{-2\pi i \diamond \cdot (2k+1)} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \vartheta ,$$

donc

$$\begin{aligned} \Theta \zeta_k &= e^{2\pi i \diamond} \cdot \left( A_{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-2\pi i \diamond \cdot (2k+1)} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \vartheta - A \cdot \left( \sqrt{2} \cdot e^{-2\pi i \diamond \cdot (2k+1)} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \vartheta \right)_{\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left( \left| A_{\frac{1}{2}} \right|^2 + |A|^2 \right) \cdot \vartheta \cdot e^{-2\pi i \diamond \cdot 2k} = \sqrt{2} \cdot \vartheta \cdot e^{-2\pi i \diamond \cdot 2k} , \end{aligned}$$

car  $\vartheta$  est  $\frac{1}{2}$ -périodique,  $A$  est 1-périodique et  $e^{-\pi i \cdot (2k+1)} = -1$ . Le résultat en découle, puisque

$$\left( \sqrt{2} \cdot \vartheta \cdot e^{-2\pi i \diamond \cdot 2k} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de  $\mathbf{L}^2 \left( \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \right)$ .  $\square$

**REMARQUE 1** La construction d'une ondelette-mère dépend essentiellement de  $\omega$ , donc de  $v$ , et par suite de  $\Phi$ . L'ondelette-mère canonique associée à ces données est obtenue en prenant  $\vartheta = 1$ , i.e.

$$\zeta := T_{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{F}} \left( \overline{A_{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\diamond}{2} \right) \cdot \mathcal{F}\omega \left( \frac{\diamond}{2} \right) \right) ,$$

ou bien

$$\mathcal{F}\zeta = e^{-\pi i \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\diamond}{2} \right) \cdot \mathcal{F}\omega \left( \frac{\diamond}{2} \right)$$

**REMARQUE 2** Les fonctions périodiques  $A$  et  $B$  sont univoquement caractérisées par

$$A \cdot \mathcal{F}\omega = \mathcal{F}\omega(2\diamond) \quad \text{et} \quad B \cdot \mathcal{F}\omega = \mathcal{F}\zeta(2\diamond) .$$

En effet

$$A \cdot \mathcal{F}\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Psi S_2 \omega \cdot \mathcal{F}\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathcal{F} S_2 \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{\frac{1}{2}} \mathcal{F}\omega = \mathcal{F}\omega(2\diamond)$$

et

$$B \cdot \mathcal{F}\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Psi S_2 \zeta \cdot \mathcal{F}\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathcal{F} S_2 \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{\frac{1}{2}} \mathcal{F}\zeta = \mathcal{F}\zeta(2\diamond) ,$$

grâce à la formule 5.2.(1).  $\square$

Nous utilisons les notations des exemples 5.1 et 5.2 correspondants.

**EXEMPLE 1** Rappelons que  $\omega = \text{sinc } \pi \diamond$  est l'ondelette-père canonique et que

$$\mathcal{F}\omega = 1_{\left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[} .$$

On a donc

$$A \cdot 1_{\left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[} = 1_{\left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[} (2\diamond) = 1_{\left[ -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[}$$

et par suite

$$A = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( 1_{[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[} \right)_k .$$

Ainsi

$$\overline{A}_{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{F}\omega = 1_{[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}[} + 1_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[} .$$

L'ondelette-mère canonique est alors

$$\begin{aligned} \zeta &= T_{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{F}} \left( 1_{[-1, -\frac{1}{2}[} + 1_{[\frac{1}{2}, 1[} \right) = \\ &= T_{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \cdot e^{-\pi i \cdot \frac{3}{2} \diamond} \cdot \text{sinc} \frac{\pi}{2} \diamond + \frac{1}{2} \cdot e^{\pi i \cdot \frac{3}{2} \diamond} \cdot \text{sinc} \frac{\pi}{2} \diamond \right) = \\ &= \cos \frac{3\pi}{2} \left( \diamond - \frac{1}{2} \right) \cdot \text{sinc} \frac{\pi}{2} \left( \diamond - \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \text{sinc} 2\pi \left( \diamond - \frac{1}{2} \right) - \text{sinc} \pi \left( \diamond - \frac{1}{2} \right) . \end{aligned}$$

**EXEMPLE 2** La fonction  $\omega = 1_{[0,1[}$  est l'ondelette-père canonique et  $\mathcal{F}1_{[0,1[} = e^{-\pi i \diamond} \cdot \text{sinc} \pi \diamond$ . On a donc

$$A \cdot e^{-\pi i \diamond} \cdot \text{sinc} \pi \diamond = e^{-2\pi i \diamond} \cdot \text{sinc} 2\pi \diamond = e^{-2\pi i \diamond} \cdot \cos \pi \diamond \cdot \text{sinc} \pi \diamond$$

et par suite

$$A = e^{-\pi i \diamond} \cdot \cos \pi \diamond .$$

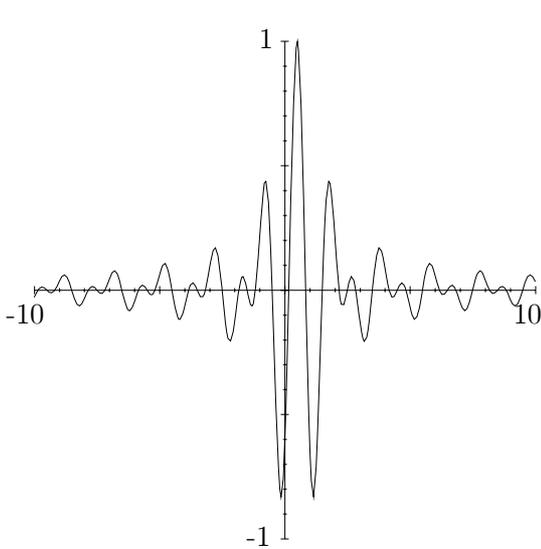
Ainsi

$$\overline{A}_{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{F}\omega = e^{\pi i \cdot (\diamond - \frac{1}{2})} \cdot \cos \pi \left( \diamond - \frac{1}{2} \right) \cdot e^{-\pi i \diamond} \cdot \text{sinc} \pi \diamond = -i \cdot \sin \pi \diamond \cdot \text{sinc} \pi \diamond$$

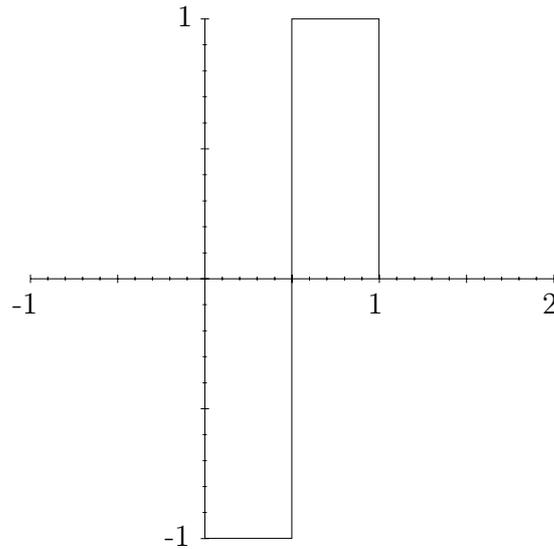
et l'ondelette-mère canonique est

$$\begin{aligned} \zeta &= T_{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{F}} \left( -i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \diamond \cdot \text{sinc} \frac{\pi}{2} \diamond \right) = T_{\frac{1}{2}} \mathcal{F} \left( \frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2} i \diamond} - e^{-\frac{\pi}{2} i \diamond}) \cdot \text{sinc} \frac{\pi}{2} \diamond \right) = \\ &= T_{\frac{1}{2}} \left( 1_{[0, \frac{1}{2}[} - 1_{[-\frac{1}{2}, 0[} \right) = -1_{[0, \frac{1}{2}[} + 1_{[\frac{1}{2}, 1[} . \end{aligned}$$

Elle est régulière d'ordre 0 et engendre la base hilbertienne classique de Haar.



Ondelette-mère sinc



Ondelette-mère spline de degré 0

**EXEMPLE 3** L'ondelette-père  $\omega$  que nous avons choisie est définie par

$$\mathcal{F}\omega = \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \pi \diamond\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sinc}^2 \pi \diamond .$$

On a donc

$$A \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \pi \diamond\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sinc}^2 \pi \diamond = \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 2\pi \diamond\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sinc}^2 2\pi \diamond$$

et par suite

$$A = \left(\frac{1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \pi \diamond}{1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 2\pi \diamond}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos^2 \pi \diamond .$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \mathcal{F}\omega &= \left(\frac{1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \pi \left(\diamond - \frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 2\pi \left(\diamond - \frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos^2 \pi \left(\diamond - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \pi \diamond\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sinc}^2 \pi \diamond = \\ &= \left(\frac{1 - \frac{2}{3} \cdot \cos^2 \pi \diamond}{\left(1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 2\pi \diamond\right) \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \pi \diamond\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin^2 \pi \diamond \cdot \operatorname{sinc}^2 \pi \diamond \end{aligned}$$

Une ondelette-mère  $\zeta$  est alors définie par

$$\mathcal{F}\zeta = e^{-\pi i \diamond} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} \diamond \cdot \left(\frac{1 - \frac{2}{3} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2} \diamond}{\left(1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \pi \diamond\right) \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} \diamond\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{2} \diamond .$$

Elle est régulière d'ordre 1 .

**REMARQUE 3** Les bases hilbertiennes  $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $V_0$  et  $(e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot k})_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathbf{L}^2([0, 1[)$  se correspondant par  $\Psi$ , il existe une suite  $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$  telle que

$$A = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot k} ,$$

i.e.

$$\frac{1}{2} \cdot \omega\left(\frac{\diamond}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \cdot \omega_k .$$

On a donc

$$a(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (\omega_k | \omega\left(\frac{\diamond}{2}\right)) = \frac{1}{2} \cdot \int \bar{\omega}(t-k) \cdot \omega\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ (\mathcal{F}\omega_k | \mathcal{F}\omega(2\diamond)) = \int e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot k} \cdot \overline{\mathcal{F}\omega}(\lambda) \cdot \mathcal{F}\omega(2\lambda) d\lambda \end{cases} .$$

De même soit  $b \in \ell^2(\mathbb{Z})$  telle que

$$B = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b(k) \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot k} ,$$

i.e.

$$\zeta = 2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} b(k) \cdot \omega_k(2\diamond) .$$

On a alors le

**THEOREME** La fonction  $\zeta$  est une ondelette-mère si, et seulement si, il existe  $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on ait

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{c}(k-l) \cdot c(l) = \delta_{0,k} \quad \text{et} \quad c(2k+1) = 0 ,$$

ainsi que

$$b(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \cdot \bar{a}(l) \cdot c(l+k-1) .$$

L'ondelette-mère canonique est définie par

$$b(k) = (-1)^{1-k} \cdot \bar{a}(1-k) ,$$

i.e.

$$\zeta = 2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \cdot \bar{a}(k) \cdot \omega_{1-k}(2\diamond) .$$

En effet, en écrivant  $\vartheta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot k}$ , les conditions sur  $c$  expriment celles auxquelles  $\vartheta$  doit satisfaire. En effet  $|\vartheta| = 1$  est équivalent à

$$1 = \overline{\sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot k}} \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} c(l) \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{c}(l-k) \cdot c(l) \right) \cdot e^{-2\pi i \cdot \diamond \cdot k} ,$$

donc à

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{c}(l-k) \cdot c(l) = \delta_{0,k} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} .$$

D'autre par  $\vartheta$  est  $\frac{1}{2}$ -périodique si, et seulement si,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \cdot c(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \cdot e^{-2\pi i (\diamond - \frac{1}{2}) \cdot k} = \vartheta \left( \diamond - \frac{1}{2} \right) = \vartheta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond k} ,$$

i.e. si  $c(2k+1) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

En outre

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond k} &= B = e^{-2\pi i \diamond} \cdot \overline{A_{\frac{1}{2}}} \cdot \vartheta = \\ &= e^{-2\pi i \diamond} \cdot \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{a(l)} \cdot e^{2\pi i (\diamond - \frac{1}{2}) \cdot l} \right) \cdot \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond k} \right) = \\ &= \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \cdot \overline{a(l)} \cdot e^{2\pi i \diamond l} \right) \cdot \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \cdot e^{-2\pi i \diamond (k+1)} \right) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \cdot \overline{a(l)} \cdot c(l+k-1) \right) \cdot e^{-2\pi i \diamond k} , \end{aligned}$$

d'où le résultat par comparaison.

L'ondelette-mère canonique est définie par  $\vartheta = 1$ , i.e.  $c = \delta_{0, \diamond}$ .  $\square$

Revenons aux exemples précédent.

**EXEMPLE 4** Si  $\omega = \text{sinc } \pi \diamond$ , on a

$$\begin{aligned} a(k) &= \int e^{2\pi i \lambda \cdot k} \cdot 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}(\lambda) \cdot 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}(2\lambda) \, d\lambda = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} e^{2\pi i \lambda \cdot k} \, d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i \cdot k} \cdot (e^{\frac{\pi}{2} i \cdot k} - e^{-\frac{\pi}{2} i \cdot k}) = \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\pi k} = \begin{cases} \frac{(-1)^l}{\pi(2l+1)} & \text{si } k = 2l+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \end{aligned}$$

L'ondelette-mère canonique s'écrit donc

$$\zeta = 2 \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^{2l+1} \frac{(-1)^l}{\pi(2l+1)} \cdot \text{sinc } \pi(2 \diamond + 2l) = 2 \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^l}{\pi(2l-1)} \cdot \text{sinc } \pi(2 \diamond - 2l) ,$$

mais nous savons que cette fonction est égale à

$$\cos \frac{3\pi}{2} \left( \diamond - \frac{1}{2} \right) \cdot \text{sinc } \frac{\pi}{2} \left( \diamond - \frac{1}{2} \right) .$$

**EXEMPLE 5** Si  $\omega = 1_{[0,1[}$ , on a

$$a(k) = \frac{1}{2} \cdot \int 1_{[0,1[}(t-k) \cdot 1_{[0,1[}\left(\frac{t}{2}\right) \, dt = \frac{1}{2} \cdot \int 1_{[k, k+1[}(t) \cdot 1_{[0,2[}(t) \, dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

L'ondelette-mère canonique s'écrit donc

$$\zeta = ((1_{[0,1[}]_1 - 1_{[0,1[}]) (2\diamond) = -1_{[0,\frac{1}{2}[} + 1_{[\frac{1}{2},1[} .$$

**EXEMPLE 6** Pour calculer l'ondelette mère canonique, elle est continue affine par morceaux sur les intervalles de la subdivision  $(\frac{k}{2})_{k \in \mathbb{Z}}$ , on détermine la suite des valeurs de  $\omega$  sur  $\mathbb{Z}$ , puis les suites  $a$  et  $b$  des coefficients de Fourier de  $A$  et  $B$  respectivement. Les valeurs de  $\zeta$  sur  $\frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}$  sont alors données par

$$\begin{aligned} \zeta\left(\frac{l}{2}\right) &= 2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} b(k) \cdot \omega(l-k) = 2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-k} \cdot \bar{a}(1-k) \cdot \omega(l-k) = \\ &= 2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \cdot \bar{a}(k) \cdot \omega(k+l-1) \end{aligned}$$

Rappelons (cf. exemple 5.2.3) que

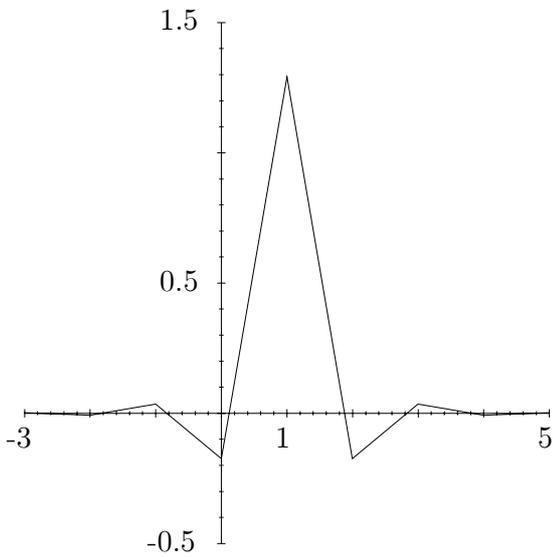
$$\omega(k) = p(k-1) = \int_0^1 e^{2\pi i \lambda \cdot (k-1)} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \pi \lambda\right)^{-\frac{1}{2}} d\lambda .$$

D'autre part

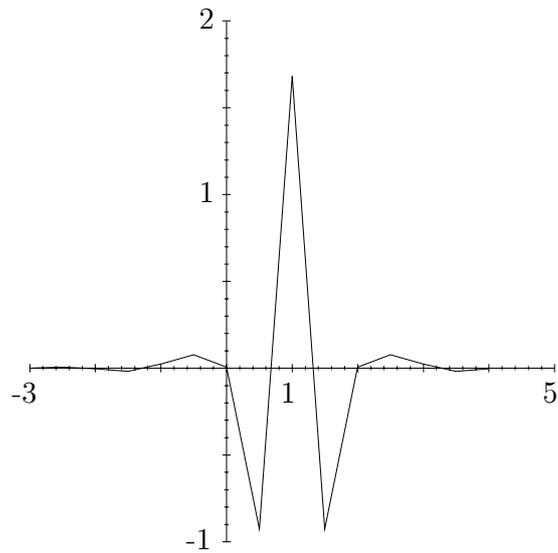
$$a(k) = \int_0^1 e^{2\pi i \lambda k} \cdot \left(\frac{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \pi \lambda}{1 - \frac{2}{3} \sin^2 2\pi \lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \pi \lambda d\lambda$$

$$\omega : \begin{pmatrix} -4 & -4.4592 \times 10^{-4} \\ -3 & 1.8479 \times 10^{-3} \\ -2 & -7.8744 \times 10^{-3} \\ -1 & .03521 \\ 0 & -.17466 \\ 1 & 1.2917 \\ 2 & -.17466 \\ 3 & .03521 \\ 4 & -7.8744 \times 10^{-3} \end{pmatrix} , \quad a : \begin{pmatrix} -4 & .012 \\ -3 & -3.6731 \times 10^{-2} \\ -2 & -4.8862 \times 10^{-2} \\ -1 & .28093 \\ 0 & .57816 \\ 1 & .28093 \\ 2 & -4.8862 \times 10^{-2} \\ 3 & -3.6731 \times 10^{-2} \\ 4 & .012 \end{pmatrix}$$

$$\zeta : \begin{pmatrix} -4 & -3.4669 \times 10^{-5} \\ -\frac{7}{2} & 1.2678 \times 10^{-4} \\ -3 & -5.8165 \times 10^{-4} \\ -\frac{5}{2} & 4.4308 \times 10^{-3} \\ -2 & -5.0839 \times 10^{-3} \\ -\frac{3}{2} & -1.9055 \times 10^{-2} \\ -1 & .02354 \\ -\frac{1}{2} & 7.7392 \times 10^{-2} \\ 0 & 4.9775 \times 10^{-3} \\ \frac{1}{2} & -.92716 \\ 1 & 1.6819 \\ \frac{3}{2} & -.92716 \\ 2 & 4.9775 \times 10^{-3} \\ \frac{5}{2} & 7.7392 \times 10^{-2} \\ 3 & .02354 \\ \frac{7}{2} & -1.9055 \times 10^{-2} \\ 4 & -5.0839 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$



Ondelette-père spline de degré 1



Ondelette-mère spline de degré 1

# Chapitre 6

## Polynômes trigonométriques et symboles de Legendre

Version du 26 avril 1999

## 6.1 Formules trigonométriques

**LEMME** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \cdot kx} = \frac{e^{2\pi i \cdot nx} - 1}{e^{2\pi i \cdot x} - 1}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot e^{2\pi i \cdot kx} = \frac{(n-1) \cdot e^{2\pi i \cdot (n+1)x} - n \cdot e^{2\pi i \cdot nx} + e^{2\pi i \cdot x}}{(e^{2\pi i \cdot x} - 1)^2}.$$

Remarquons que la fonction

$$x \longmapsto \frac{e^{2\pi i \cdot nx} - 1}{e^{2\pi i \cdot x} - 1}$$

se prolonge par continuité en 0 par  $n$  (règle de l'Hospital). Elle est évidemment indéfiniment dérivable et les dérivées se prolongent aussi par continuité en 0. On a

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot e^{2\pi i \cdot kx} &= \left( \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \cdot kx} \right)' = \left( \frac{e^{2\pi i \cdot nx} - 1}{e^{2\pi i \cdot x} - 1} \right)' = \\ &= \frac{2\pi i \cdot n \cdot e^{2\pi i \cdot nx} \cdot (e^{2\pi i \cdot x} - 1) - (e^{2\pi i \cdot nx} - 1) \cdot 2\pi i \cdot e^{2\pi i \cdot x}}{(e^{2\pi i \cdot x} - 1)^2} = \\ &= 2\pi i \cdot \frac{(n-1) \cdot e^{2\pi i \cdot (n+1)x} - n \cdot e^{2\pi i \cdot nx} + e^{2\pi i \cdot x}}{(e^{2\pi i \cdot x} - 1)^2}, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot e^{2\pi i \cdot kx} = \frac{(n-1) \cdot e^{2\pi i \cdot (n+1)x} - n \cdot e^{2\pi i \cdot nx} + e^{2\pi i \cdot x}}{(e^{2\pi i \cdot x} - 1)^2}. \quad \square$$

**PROPOSITION** On a les formules trigonométriques

$$\frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot \cos(2\pi \cdot kx) = \frac{\sin^2 \pi nx}{2 \cdot \sin^2 \pi x}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot \sin(2\pi \cdot kx) = \frac{n \cdot \sin 2\pi x - \sin(2\pi \cdot nx)}{4 \cdot \sin^2 \pi x}.$$

En effet

$$\begin{aligned} & \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot e^{2\pi i \cdot kx} = \\ &= \frac{n}{2} + n \cdot \left( \frac{e^{2\pi i \cdot nx} - 1}{e^{2\pi i \cdot x} - 1} - 1 \right) - \frac{(n-1) \cdot e^{2\pi i \cdot (n+1)x} - n \cdot e^{2\pi i \cdot nx} + e^{2\pi i \cdot x}}{(e^{2\pi i \cdot x} - 1)^2} = \\ &= \frac{\frac{n}{2} \cdot (e^{2\pi i \cdot x} - 1)^2 + n \cdot (e^{2\pi i \cdot nx} - e^{2\pi i \cdot x})(e^{2\pi i \cdot x} - 1) - (n-1) \cdot e^{2\pi i \cdot (n+1)x} + n \cdot e^{2\pi i \cdot nx} - e^{2\pi i \cdot x}}{(e^{2\pi i \cdot x} - 1)^2} = \\ &= \frac{e^{2\pi i \cdot (n+1)x} - \frac{n}{2} \cdot e^{2\pi i \cdot 2x} - e^{2\pi i \cdot x} + \frac{n}{2}}{(e^{2\pi i \cdot x} - 1)^2} = \frac{e^{2\pi i \cdot nx} - \frac{n}{2} \cdot e^{2\pi i \cdot x} - 1 + \frac{n}{2} \cdot e^{-2\pi i \cdot x}}{(e^{\pi i \cdot x} - e^{-\pi i \cdot x})^2} = \\ &= \frac{1 - e^{2\pi i \cdot nx} + i \cdot n \cdot \sin 2\pi x}{4 \cdot \sin^2 \pi x}, \end{aligned}$$

et il suffit de remarquer que  $1 - \cos(2\pi \cdot nx) = 2 \cdot \sin^2 \pi nx$ .  $\square$

## 6.2 Formule de Jackson

**DEFINITION** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\eta = (\eta_l)_{l=0, \dots, n-1} \subset \mathbb{C}$ . On dit que

$$f_\eta(x) := \sum_{l=0}^{n-1} \eta_l \cdot \frac{\sin^2 \pi n \cdot \left(\frac{l}{n} - x\right)}{n^2 \cdot \sin^2 \pi \cdot \left(\frac{l}{n} - x\right)}$$

est la *fonction de Jackson*<sup>4</sup> associée à  $\eta$ .

**PROPOSITION (Formules de Jackson)** La fonction de Jackson est une fonction trigonométrique qui interpole les valeurs  $(\eta_l)_{l=0, \dots, n-1}$  aux points  $\left(\frac{l}{n}\right)_{l=0, \dots, n-1}$  et on a

$$\begin{aligned} f_\eta(x) &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \eta_l + \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \left( \sum_{l=0}^{n-1} \eta_l \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{kl}{n} \right) \cos 2\pi \cdot kx \\ &\quad + \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \left( \sum_{l=0}^{n-1} \eta_l \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{kl}{n} \right) \sin 2\pi \cdot kx, \end{aligned}$$

ainsi que

$$f_{(1)}(x) = 1.$$

En effet, pour tout  $k, l = 0, \dots, n-1$ , on a  $\sin \pi n \cdot \left(\frac{l}{n} - \frac{k}{n}\right) = 0$ , donc

$$\frac{\sin^2 \pi n \cdot \left(\frac{l}{n} - \frac{k}{n}\right)}{n^2 \cdot \sin^2 \pi \cdot \left(\frac{l}{n} - \frac{k}{n}\right)} = \delta_{k,l},$$

et par suite

$$f_\eta\left(\frac{l}{n}\right) = \eta_l.$$

Utilisant la première formule trigonométrique du numéro précédent, on a

$$\begin{aligned} f_\eta(x) &= \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \eta_l \cdot \left[ \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot \cos \left( 2\pi \cdot k \left( \frac{l}{n} - x \right) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \eta_l + \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \left( \sum_{l=0}^{n-1} \eta_l \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{kl}{n} \right) \cos 2\pi \cdot kx \\ &\quad + \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \left( \sum_{l=0}^{n-1} \eta_l \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{kl}{n} \right) \sin 2\pi \cdot kx. \end{aligned}$$

<sup>4</sup> D. Jackson, A formula of trigonometric interpolation, Rend. Circ. Mat. Palermo, 37 (1913), p. 371-375.

Pour le cas particulier  $\eta_l = 1$  pour tout  $l = 0, \dots, n-1$ , on a

$$f_{(1)}(x) = 1 + \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \left( \sum_{l=0}^{n-1} \cos 2\pi \cdot \frac{kl}{n} \right) \cos 2\pi \cdot kx$$

$$+ \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \left( \sum_{l=0}^{n-1} \sin 2\pi \cdot \frac{kl}{n} \right) \sin 2\pi \cdot kx = 1,$$

puisque

$$\sum_{l=0}^{n-1} e^{2\pi i \cdot \frac{kl}{n}} = \frac{e^{2\pi i \cdot n \cdot \frac{k}{n}} - 1}{e^{2\pi i \cdot \frac{k}{n}} - 1} = 0. \quad \square$$

## 6.3 Sommes de Gauss

Soit  $p$  un nombre premier impair, i.e.  $> 2$ , et considérons le groupe commutatif multiplicatif  $\mathbb{F}_p^*$  des éléments inversibles du corps fini  $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . On vérifie immédiatement que le sous-ensemble  $\mathbb{F}_p^{*2} := \{g^2 \mid g \in \mathbb{F}_p^*\}$  des carrés des éléments de  $\mathbb{F}_p^*$  est un sous-groupe. Puisque  $\mathbb{F}_p^*$  est cyclique d'ordre  $p-1$ , on voit que  $\mathbb{F}_p^{*2}$  est d'indice 2, donc que

$$\mathbb{F}_p^*/\mathbb{F}_p^{*2} \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \approx \{\pm 1\}.$$

L'homomorphisme canonique  $\chi : \mathbb{F}_p^* \longrightarrow \{\pm 1\}$  est donc un caractère.

**DEFINITION 1** On dit que l'application multiplicative unifière

$$\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p^* \xrightarrow{\chi} \{\pm 1\} : k \longmapsto \left(\frac{k}{p}\right),$$

est le *symbole de Legendre* et que  $k$  est un *résidu quadratique mod  $p$*  si  $\left(\frac{k}{p}\right) = 1$ , i.e. si  $k$  est égal à un carré mod  $p$ .

En particulier on a

$$\left(\frac{1}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{kl}{p}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{l}{p}\right) \quad \text{pour tout } k, l \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z},$$

et si  $kl \equiv 1 \pmod{p}$ , alors

$$\left(\frac{k}{p}\right) = \left(\frac{l}{p}\right),$$

car

$$\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{l}{p}\right) = \left(\frac{kl}{p}\right) = \left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$

En outre

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) = 0,$$

car il y a autant de résidus quadratiques que de résidus non-quadratiques.

**LEMME (Critère d'Euler)** On a

$$\left(\frac{k}{p}\right) \equiv k^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

En particulier

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

En effet si  $g$  est un générateur de  $\mathbb{F}_p^*$ , dans  $\mathbb{F}_p$  on a

$$0 = 1 - g^{p-1} = 1 - \left(g^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 = \left(1 + g^{\frac{p-1}{2}}\right) \left(1 - g^{\frac{p-1}{2}}\right),$$

donc  $g^{\frac{p-1}{2}} = -1$ , puisque  $g^{\frac{p-1}{2}} \neq 1$ . En outre  $\chi(g) = -1 = \chi(-1)$  et si  $r \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$  est un représentant de  $g$ , alors

$$r^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

et il vient

$$\left(\frac{r^j}{p}\right) = \chi(g^j) = (-1)^j \equiv \left(r^{\frac{p-1}{2}}\right)^j \equiv (r^j)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

pour tout  $j = 1, \dots, p-1$ .  $\square$

**REMARQUE 1** On peut montrer que

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Remarquons que cette formule a un sens : puisque  $p \in \{1, 3, 5, 7\} \pmod{8}$ , on vérifie facilement que  $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .

**DEFINITION 2** Pour tout  $k = 1, \dots, p-1$ , on dit que

$$\tau(k) := \sum_{l=1}^{p-1} \left(\frac{l}{p}\right) \cdot e^{2\pi i \cdot \frac{kl}{p}}$$

est une *somme de Gauss*.

**PROPOSITION** On a

$$\tau(k) = \left(\frac{k}{p}\right) \cdot \tau(1)$$

et

$$\tau(1)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p.$$

En effet si  $\tilde{k}k \equiv 1 \pmod{p}$ , alors

$$\tau(k) = \sum_{l=1}^{p-1} \left(\frac{\tilde{k}}{p}\right) \left(\frac{kl}{p}\right) \cdot e^{2\pi i \cdot \frac{kl}{p}} = \left(\frac{k}{p}\right) \cdot \sum_{l=1}^{p-1} \left(\frac{l}{p}\right) \cdot e^{2\pi i \cdot \frac{l}{p}} = \left(\frac{k}{p}\right) \cdot \tau(1),$$

puisque l'application  $l \mapsto kl$  induit une permutation de  $\mathbb{F}_p^*$ . En outre

$$\tau(1)^2 = \sum_{k,l=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \left(\frac{l}{p}\right) \cdot e^{2\pi i \cdot \frac{k+l}{p}} = \sum_{k,m=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \left(\frac{km}{p}\right) \cdot e^{2\pi i \cdot \frac{k+km}{p}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,m=1}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right) \cdot \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k^2}{p}\right) e^{2\pi i \cdot \frac{k+km}{p}} = \sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right) \cdot \sum_{k=1}^{p-1} \left(e^{2\pi i \cdot \frac{1+m}{p}}\right)^k = \\
&= \sum_{m=1}^{p-2} \left(\frac{m}{p}\right) \cdot \frac{\left(e^{2\pi i \cdot \frac{1+m}{p}}\right)^p - e^{2\pi i \cdot \frac{1+m}{p}}}{e^{2\pi i \cdot \frac{1+m}{p}} - 1} + \left(\frac{p-1}{p}\right) \cdot (p-1) = \\
&= \left(\frac{p-1}{p}\right) + \left(\frac{p-1}{p}\right) \cdot (p-1) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p. \quad \square
\end{aligned}$$

**REMARQUE 2** Pour tout  $l = 1, \dots, p-1$ , on a

$$\left(\frac{l}{p}\right) \left(\frac{p-l}{p}\right) = \left(\frac{-l^2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{l^2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

donc

$$\begin{aligned}
\tau(1) &= \sum_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{l}{p}\right) \cdot \left(e^{2\pi i \cdot \frac{l}{p}} + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot e^{-2\pi i \cdot \frac{l}{p}}\right) = \\
&= \begin{cases} 2 \cdot \sum_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{l}{p}\right) \cos\left(2\pi \cdot \frac{l}{p}\right) & \frac{p-1}{2} \text{ est pair} \\ 2i \cdot \sum_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{l}{p}\right) \sin\left(2\pi \cdot \frac{l}{p}\right) & \frac{p-1}{2} \text{ est impair} \end{cases}.
\end{aligned}$$

**REMARQUE 3** Il semble que l'on ait

$$\operatorname{Re} \tau(1) \quad , \quad \operatorname{Im} \tau(1) \geq 0 ,$$

donc que

$$\tau(1) = \begin{cases} \sqrt{p} & \frac{p-1}{2} \text{ est pair} \\ i \cdot \sqrt{p} & \frac{p-1}{2} \text{ est impair} \end{cases}.$$

## 6.4 Polynômes trigonométriques de Bernstein

Soit  $p$  un nombre premier impair tel que  $\frac{p-1}{2}$  soit pair. Appliquons la première formule de Jackson avec

$$\eta_0 = 0 \quad \text{et} \quad \eta_l = \left(\frac{l}{p}\right) \quad \text{pour } l = 1, \dots, p-1.$$

Utilisant les propriétés des sommes de Gauss, on a

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \sum_{l=0}^{p-1} \left(\frac{l}{p}\right) \cdot \frac{\sin^2 \pi p \cdot \left(\frac{l}{p} - x\right)}{p^2 \cdot \sin^2 \pi \cdot \left(\frac{l}{p} - x\right)} = \\ &= \frac{1}{p} \cdot \sum_{l=1}^{p-1} \left(\frac{l}{p}\right) + \frac{2}{p^2} \cdot \sum_{k=1}^{p-1} (p-k) \left( \sum_{l=0}^{p-1} \left(\frac{l}{p}\right) \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{kl}{p} \right) \cos 2\pi \cdot kx \\ &\quad + \frac{2}{p^2} \cdot \sum_{k=1}^{p-1} (p-k) \left( \sum_{l=0}^{p-1} \left(\frac{l}{p}\right) \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{kl}{p} \right) \sin 2\pi \cdot kx = \\ &= \frac{2}{p^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum_{k=1}^{p-1} (p-k) \cdot \left(\frac{k}{p}\right) \cdot \cos 2\pi \cdot kx. \end{aligned}$$

**DEFINITION** On dit que  $f_p$  est le *polynôme trigonométrique de Bernstein* <sup>5</sup>.

**PROPOSITION** On a  $|f_p| \leq 1$  et

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}f_p(z)| = \frac{p-1}{\sqrt{p}}.$$

En effet

$$\begin{aligned} |f_p| &\leq \left| \sum_{l=1}^{p-1} \left(\frac{l}{p}\right) \cdot \frac{\sin^2 \pi p \cdot \left(\frac{l}{p} - x\right)}{p^2 \cdot \sin^2 \pi \cdot \left(\frac{l}{p} - x\right)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^{p-1} \frac{\sin^2 \pi p \cdot \left(\frac{l}{p} - x\right)}{p^2 \cdot \sin^2 \pi \cdot \left(\frac{l}{p} - x\right)} \leq \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\sin^2 \pi p \cdot \left(\frac{l}{p} - x\right)}{p^2 \cdot \sin^2 \pi \cdot \left(\frac{l}{p} - x\right)} = f_{(1)} = 1, \end{aligned}$$

<sup>5</sup> S. Bernstein, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, C.R. Acad. Sci., Juin 1914, p. 1661-1663.

par la seconde formule de Jackson. D'autre part

$$\mathcal{F}f_p(z) = \begin{cases} \frac{p-|z|}{p^{\frac{3}{2}}} \cdot \binom{|z|}{p} & z = \pm 1, \dots, \pm(p-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

donc

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}f_p(z)| = \frac{2}{p^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum_{l=1}^{p-1} (p-l) = \frac{2}{p^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(p-1)p}{2} = \frac{p-1}{\sqrt{p}}. \quad \square$$

**REMARQUE (Conjecture de Bernstein)** Pour tout polynôme trigonométrique de la forme  $f = \sum_{l=-p+1}^{p-1} c_l \cdot e^{2\pi i \cdot l \cdot \text{id}}$  avec  $|f| \leq 1$ , on a

$$\sum_{l=-p+1}^{p-1} |c_l| \leq \frac{p-1}{\sqrt{p}}.$$

On a toujours

$$\sum_{l=-p+1}^{p-1} |c_l| \leq \sqrt{2p-1}.$$

En effet

$$\sum_{l=-p+1}^{p-1} |c_l| \leq \sqrt{2p-1} \cdot \left( \sum_{l=-p+1}^{p-1} |c_l|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2p-1} \cdot \int_0^1 |f|^2 \leq \sqrt{2p-1}. \quad \square$$

## 6.5 La fonction de Carleman

**LEMME** Si  $f$  est une fonction à variation bornée sur  $[0, 1]$ , alors

$$|\mathcal{F}f(z)| \leq \frac{\text{Var}(f)}{2\pi} \cdot \frac{1}{|z|} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{Z}^* .$$

En particulier on a  $\mathcal{F}f \in \ell^p(\mathbb{Z})$  pour tout  $p \in ]1, \infty[$ .

On a en effet

$$\int_0^1 e^{-2\pi i \cdot z x} \cdot f(x) dx = -\frac{e^{-2\pi i \cdot z x}}{2\pi i \cdot z} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i \cdot z x}}{2\pi i \cdot z} df(x) ,$$

d'où le résultat.  $\square$

**THEOREME** Il existe une fonction continue périodique  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\mathcal{F}f \notin \ell^p(\mathbb{Z}) \quad \text{pour tout } p \in [1, 2[ .$$

Soit  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une suite de nombres premiers impairs croissante telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on ait

$$\frac{p_k - 1}{2} \quad \text{pair,}$$

$$p_k \geq e^k \tag{*}$$

et

$$p_k \geq 4 \cdot p_{k-1}^2 . \tag{**}$$

Pour tout  $n, k \in \mathbb{N}^*$  avec  $k > n$ , on alors

$$\sum_{|z| \leq p_n - 1} |\mathcal{F}f_{p_k}(z)| \leq 1 , \tag{***}$$

car

$$\sum_{|z| \leq p_n - 1} |\mathcal{F}f_{p_k}(z)| = 2 \cdot \sum_{l=1}^{p_n - 1} \frac{p_k - l}{p_k^{\frac{3}{2}}} \leq 2 \cdot \frac{(p_n - 1) p_k}{p_k^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2p_n}{\sqrt{p_k}} \leq 1$$

par (\*\*).

On pose

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot f_{p_k} .$$

Puisque  $|f_{p_k}| \leq 1$ , cette série converge normalement, donc définit une fonction continue périodique sur  $\mathbb{R}$ . On a

$$\mathcal{F}f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*, p_k \geq |z|} \frac{1}{k^2} \cdot \mathcal{F}f_{p_k}(z)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{|z| \leq p_{n-1}} |\mathcal{F}f(z)| &\geq \sum_{p_{n-1} \leq |z| \leq p_n-1} |\mathcal{F}f(z)| = \sum_{p_{n-1} \leq |z| \leq p_n-1} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}^*, p_k \geq |z|} \frac{1}{k^2} \cdot \mathcal{F}f_{p_k}(z) \right| = \\ &= \sum_{p_{n-1} \leq |z| \leq p_n-1} \left| \frac{\mathcal{F}f_{p_n}(z)}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathcal{F}f_{p_k}(z) \right| \geq \\ &\geq \sum_{p_{n-1} \leq |z| \leq p_n-1} \left( \left| \frac{\mathcal{F}f_{p_n}(z)}{n^2} \right| - \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \mathcal{F}f_{p_k}(z) \right| \right) \geq \\ &\geq \sum_{p_{n-1} \leq |z| \leq p_n-1} \left| \frac{\mathcal{F}f_{p_n}(z)}{n^2} \right| - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{p_{n-1} \leq |z| \leq p_n-1} |\mathcal{F}f_{p_k}(z)| = \\ &= \sum_{|z| \leq p_{n-1}} \left| \frac{\mathcal{F}f_{p_n}(z)}{n^2} \right| - \sum_{|z| \leq p_{n-1}-1} \left| \frac{\mathcal{F}f_{p_n}(z)}{n^2} \right| - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{p_{n-1} \leq |z| \leq p_n-1} |\mathcal{F}f_{p_k}(z)| \geq \\ &\geq \frac{p_n-1}{n^2 \cdot \sqrt{p_n}} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq \frac{\sqrt{p_n}}{\ln^2 p_n} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \end{aligned}$$

l'avant dernière inégalité par (\*\*\*) . Ainsi

$$\sum_{|z| \leq p_{n-1}} |\mathcal{F}f(z)| \geq \frac{\sqrt{p_n}}{2 \cdot \ln^2 p_n}$$

pour  $n$  assez grand. Si pour un  $p \in [1, 2[$  on avait  $\mathcal{F}f \in \ell^p(\mathbb{Z})$ , on obtiendrait

$$\sum_{|z| \leq p_{n-1}} |\mathcal{F}f(z)| \leq \left( \sum_{|z| \leq p_{n-1}} |\mathcal{F}f(z)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot (2p_n - 1)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\mathcal{F}f\|_p \cdot 2^{1-\frac{1}{p}} \cdot p_n^{1-\frac{1}{p}},$$

donc

$$0 < \|\mathcal{F}f\|_p^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{p}-2} \leq \ln^2 p_n \cdot p_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}},$$

ce qui est absurde puisque  $1 - \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$ .  $\square$