

Chapitre 1

LE NOMBRE π

ET LES QUADRATURES

Pour l'histoire de π je ne peut que conseiller le livre de Jean-Paul Delahaye [6] et celui de Pierre Eymard et Jean-Pierre Lafon [13].

Version du 1 juin 2006

1.1 Babyloniens

On trouve les approximations

$$\pi \approx 3 \quad \text{et} \quad \pi \approx 3 + \frac{1}{8} = \frac{25}{8} = 3.125 .$$

Cette dernière valeur provient d'une tablette babylonienne vieille de 4000 ans, i.e. datant de -2000 , et découverte en 1936. Les Babyloniens semblent avoir comparé le périmètre d'un hexagone à celui du cercle dans lequel il est inscrit. Ils ont obtenus la valeur, probablement par une mesure approchée et exprimée dans le système de numération en base 60, valant

$$57 \cdot 60^{-1} + 36 \cdot 60^{-2} = \frac{57 \cdot 60 + 36}{3600} = \frac{24}{25} ,$$

donc

$$\frac{6}{2\pi} \approx \frac{24}{25} ,$$

i.e.

$$\pi \approx \frac{25}{8} .$$

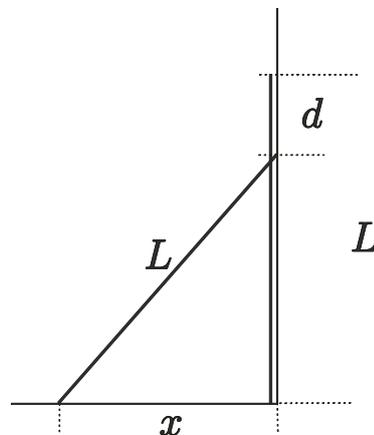
Ils étaient en outre capables de résoudre deux équations à deux inconnues, l'une étant quadratique. Leurs calculs étaient numériquement très précis. Par exemple ils ont obtenus

$$\sqrt{2} \approx 1 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3} = 1.4142129\overline{62} .$$

Remarquons que

$$\sqrt{2} = 1.41421356\dots$$

Ils connaissaient le théorème de Pythagore et pouvaient résoudre le problème suivant :



Si la partie supérieure d'une échelle de longueur L placée contre un mur est descendue de la distance d , à quelle distance se trouve le pied de cette échelle ?

1.2 Égyptiens

Papyrus de Rhind, découvert en 1855 et conservé au British Museum, contient le texte, recopié vers l'an -1650 , d'un manuel de problèmes datant probablement de 1800 avant notre ère. Il contient l'approximation

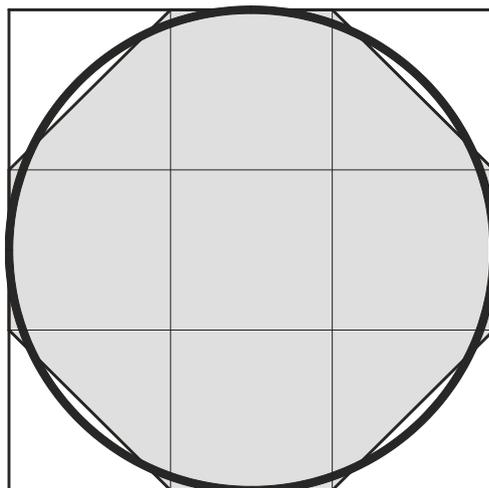
$$\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1604\dots$$

La méthode indiquée pour calculer la surface S d'un disque de diamètre D s'exprime par la formule

$$S = \left(D - \frac{D}{9}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2.$$

On parle de la *diminution d'un neuvième*.

On ne sait pas comment les Égyptiens ont trouvé cette formule, mais le problème 48 du papyrus de Rhind suggère une solution. On considère un octogone irrégulier et un cercle inscrits dans un carré de côté 9.



La surface de l'octogone est

$$7 \cdot 3^2 = 63,$$

mais comme elle est manifestement plus petite que celle du cercle, il est raisonnable de l'estimer à 64. Cela simplifie aussi les calculs! On obtient donc la valeur approchée

$$\pi \approx \frac{64}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \left(\frac{16}{9}\right)^2.$$

REMARQUE Il est bon de remarquer que les Égyptiens, au contraire de Babyloniens, connaissaient l'égalité des rapports

$$\frac{\text{périmètre}}{\text{diamètre}} = \frac{\text{surface}}{\text{carré du rayon}}.$$

1.3 Thalès, Pythagore, Zénon

Thalès de Milet : – 624? - – 547?

C'est le premier être humain à qui on a attribué la démonstration d'un résultat mathématique. On lui attribue les résultats suivants :

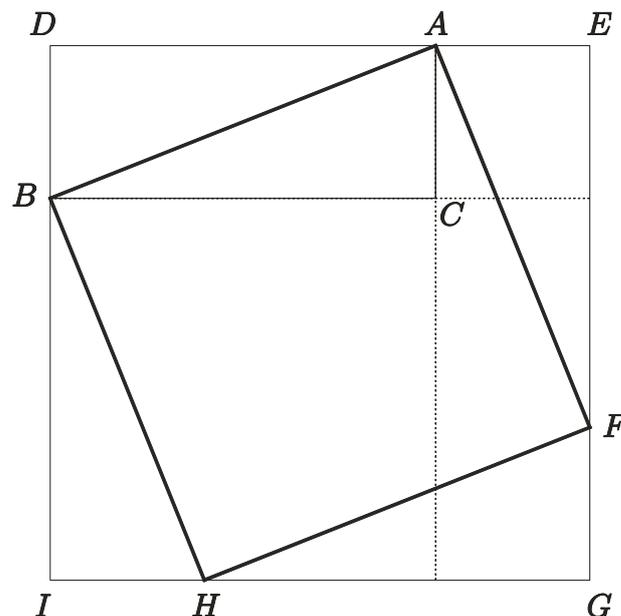
THEOREME

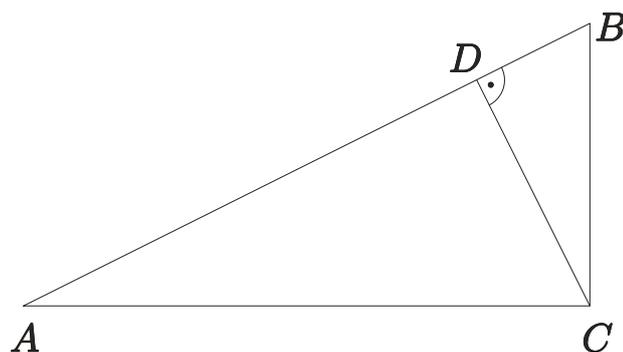
- (i) *Tout diamètre divise un cercle en deux parties égales.*
- (ii) *Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.*
- (iii) *Si deux lignes se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux.*
- (iv) *Un triangle est déterminé lorsque sa base et les angles à la base sont donnés.*
- (v) *Les côtés des triangles équiangles sont proportionnels.*
- (vi) *L'angle sous-tendu par le diamètre d'un cercle en un point quelconque de la circonférence est un angle droit.*

Pythagore de Samos : – 569? - – 475?

Il étudie cette science sans représentation concrète, seulement à l'aide de la logique pure.

EXERCICE 1 Rappelons que Pythagore a certainement démontré son théorème sur les triangles rectangles en utilisant l'une ou l'autre des figures suivantes :





REMARQUE Les Pythagoriciens connaissaient la formule

$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2 ,$$

fournissant des triple de Pythagore si m est impair.

”Tout est nombre” , mais attention un nombre pour les Pythagoriciens est un nombre entier positif. Remarquons qu’il n’est pas possible de comparer une longueur à une surface, par contre on peut comparer deux longueurs à deux surfaces. Ils ont certainement pensés que deux grandeurs pratiques (ou géométriques) A et B sont toujours commensurables, donc qu’il existe une grandeur unité suffisamment petite U telle que l’on ait $A = a \cdot U$ et $B = b \cdot U$, où a, b sont des nombres entiers positifs.

Ils considèrent donc des paires (a, b) de nombres entiers positifs et non comme nous le ferions le nombre rationnel $\frac{a}{b}$.

DEFINITION Deux paires (a, b) et (c, d) sont dites être dans la même *proportion* , nous dirions *équivalentes* , s’il existe des nombres entiers positifs p, q, m, n tels que

$$a = mp \quad , \quad b = mq$$

et

$$c = np \quad , \quad d = nq .$$

EXERCICE 2 Montrer que (a, b) et (c, d) sont dans la même proportion si, et seulement si, on a

$$ad = bc ,$$

i.e. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Zénon d’Élée : – 490 ? - – 425 ?

Les Pythagoriciens considéraient l’univers comme constitué d’un côté par un fluide continu et infini, qu’ils ne distinguaient pas de l’espace, de l’autre par des points matériels qui formaient la substance des corps. Ils ne distinguaient pas ce point matériel du point géométrique ; l’un et l’autre était reconnu comme indivisible et, en même temps, la divisibilité infinie des grandeurs était admise sans réserve. C’est cette conception insoutenable qui fut attaquée par Zénon à

l'aide de ces célèbres paradoxes. Cf. Paul Tannery, [29], p. 124 à 125 et [30], ainsi que Carl B. Boyer [4], p. 81 à 84 .

EXERCICE 3 Soient $0 < a < b < c$. On dit que b est une moyenne de a et c si

$$\left\{ \frac{b-a}{c-b}, \frac{b-a}{c-a}, \frac{c-a}{c-b} \right\} \cap \left\{ \frac{a}{a}, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b} \right\} \neq \emptyset .$$

Y a-t-il d'autres possibilités? Les Pythagoriciens ont introduits dix moyennes à l'aide de ce principe. Lesquelles? Cf. C.B. Boyer, p. 61.

1.4 Quadrature du cercle

C'est le problème de construire un carré ayant la même aire qu'un cercle donné, en n'utilisant que la règle et le compas, posé par

Anaxagore de Clazomène : – 499 - – 428

Cela revient à construire $\sqrt{\pi}$ avec la règle et le compas. Un autre problème célèbre est celui de la *rectification du cercle*, i.e. la construction d'un segment ayant la même longueur que le périmètre du cercle, donc à construire π avec la règle et le compas. Comme il est possible de multiplier des longueurs et d'extraire des racines carrées avec la règle et le compas, ces deux problèmes sont équivalents.

Dans les deux cas π serait algébrique. Mais il a fallu attendre 1882 pour que Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939) montre que π est transcendant, et prouve ainsi que la quadrature et la rectification du cercle sont impossibles.

Hippocrate de Chio : – 470? - – 410?

qu'il ne faut pas confondre avec le médecin Hippocrate de Cos, connaissait (vers –430) le

THEOREME *Le rapport de la surface de deux cercles est égal au rapport du carré de leurs diamètres.*

S'il en a fait une démonstration, il a certainement inscrit des polygones réguliers semblables dans les deux cercles et utilisé un principe d'exhaustion intuitif en augmentant le nombre de leurs côtés. Mais cette démonstration ne peut pas avoir été rigoureuse, puisque la théorie des proportions n'était établie que pour des grandeurs commensurables.

REMARQUE Rappelons que la découverte de l'incommensurabilité de certaines grandeurs, attribuée à

Hippasus de Metapontum : – 5^e siècle ,

date de la seconde moitié de ce siècle. Pour plus de détails il est très intéressant de consulter l'article de Kurt von Fritz [20] et de démontrer les résultats du paragraphe 1.6.

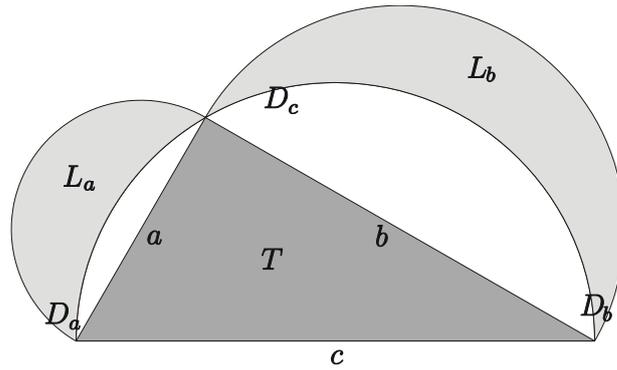
Plus généralement Hippocrate utilise le principe suivant :

LEMME *Si deux segments de cercle sont semblables, alors les rapports de leurs surfaces et du carré de leurs cordes sont égaux.*

Rappelons que l'angle sous lequel on voit une sécante depuis le centre du cercle est le double de celui sous lequel on voit la même sécante depuis un point sur la circonférence de ce cercle et du même côté que le centre (cf. Livre III des Éléments d'Euclide [10], proposition XX) et que deux segments sont semblables si les angles au centre sont identiques (cf. ibidem, définition 11).

Utilisant ce résultat, Hippocrate a alors réussi à quarrer des figures ayant des bords composés d'arc de cercle et qu'on appelle *lunules* . Léonard de Vinci en a construit plus d'une centaine. Par exemple

PROPOSITION *La lunule*



est quarrable.

Les demi-cercles D_a , D_b et D_c sont évidemment semblables, donc

$$\frac{D_a}{D_c} = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \frac{D_b}{D_c} = \frac{b^2}{c^2} .$$

D'autre part

$$L_a + L_b + D_c = D_a + D_b + T ,$$

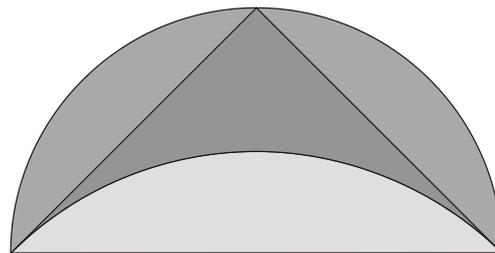
d'où l'on tire

$$L_a + L_b = \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} - 1 \right) \cdot D_c + T = T$$

par les théorèmes de Thalès et Pythagore. Ainsi la surface des deux lunules est égale à celle du triangle et celle-ci se ramène avec la règle et le compas à celle d'un carré. □

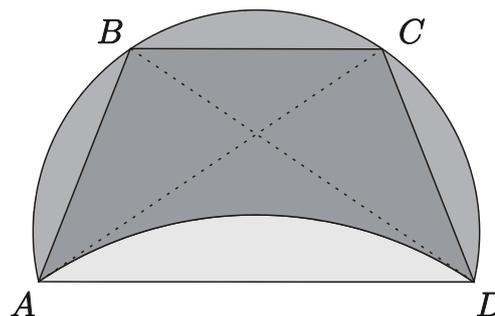
EXERCICE On peut aussi quarrer les lunules suivantes :

(a)



Le plus grand de deux cercles est un demi-cercle, le plus petit est tangent aux côtés du triangle rectangle isocèle.

(b)

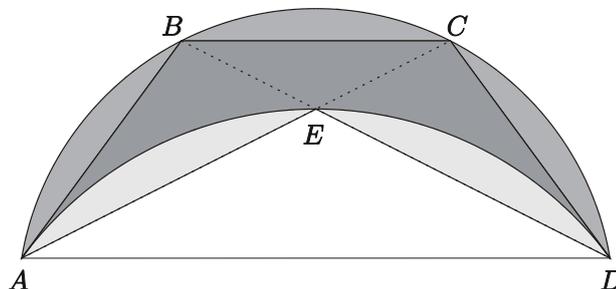


Le quadrilatère inscrit dans le grand cercle satisfait aux égalités suivantes :

$$AB = BC = CD \quad \text{et} \quad AD^2 = 3 \cdot AB^2 .$$

Le cercle du bas est tangent aux diagonales.

(c)



Le polygone satisfait aux égalités suivantes :

$$AB = BC = CD \quad \text{et} \quad 2 \cdot AE^2 = 3 \cdot AB^2 .$$

Le cercle du bas est tangent aux côtés.

Hippias d'Elis : - 460 ? - - 400 ?

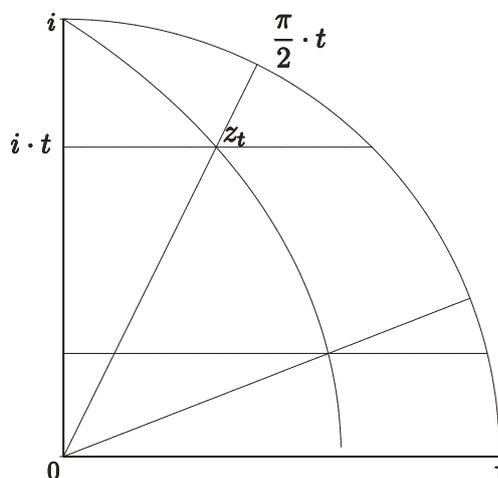
est resté dans l'histoire de mathématiques pour sa découverte de la *trisectrice* ou *quadratrice* .

DEFINITION C'est l'ensemble des points z_t de \mathbb{C} , pour $t \in]0, 1]$, tels que $z_1 = i$, que $\frac{z_t}{|z_t|}$ et $\text{Im } z_t$ se déplacent à vitesse constante et que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \text{Im } z_t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{z_t}{|z_t|} = 1 .$$

Le point z_t est donc l'intersection des droites $\mathbb{R} + i \cdot t$ et $e^{i \frac{\pi}{2} \cdot t} \cdot \mathbb{R}$. En subdivisant l'intervalle $i \cdot [0, 1]$ et l'arc de cercle dans le premier quadrant en 2^n parties égales, ceci est possible avec la règle et le compas, on construit immédiatement un ensemble dense de points de cette courbe.

Par définition le point sur la trisectrice à la hauteur t détermine un angle égal à $\frac{\pi}{2} \cdot t$; en particulier si l'angle $\frac{\pi}{2} \cdot t$ est donné, alors en subdivisant le segment de hauteur t en trois, ceci est possible avec la règle et le compas grâce au théorème de Thalès, on obtient la trisection de cet angle.



Déterminons z_t . On a

$$x_t + i \cdot t = z_t = e^{i\frac{\pi}{2} \cdot t} \cdot r_t ,$$

et par suite

$$x_t = r_t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \quad , \quad t = r_t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \quad ,$$

donc

$$r_t = \frac{t}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)}$$

et

$$x_t = t \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \quad ,$$

d'où

$$z_t = t \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + i \cdot t .$$

Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x_t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = \frac{2}{\pi} \quad ,$$

Dinostrate : - 390 ? - 320 ?

a crû résoudre le problème de la quadrature du cercle, mais il faut passer à la limite et ceci ne peut pas se faire avec une règle et un compas !

1.5 Eudoxe, Euclide

Eudoxe de Cnide : – 408 ? - – 355 ?

Euclide d'Alexandrie : – 325 ? - – 265 ?

La crise provoquée par la découverte de grandeurs (géométriques) incommensurables a été résolue par Eudoxe. Il a étendu la définition "être dans la même raison" donnée par les Pythagoriciens de la manière suivante :

DEFINITION Il considère des grandeurs géométriques a, b, c, d et il dit qu'elles sont dans la même *raison* ou sont *proportionnelles*, la première à la deuxième et la troisième à la quatrième (cf. livre V des *Éléments* d'Euclide [10], définitions 6 et 7), si, pour tout nombres entiers strictement positifs m, n , on a

$$na < mb \quad \text{et} \quad nc < md$$

ou bien

$$na = mb \quad \text{et} \quad nc = md$$

ou bien

$$na > mb \quad \text{et} \quad nc > md .$$

Il dit aussi qu'une *raison* (ou *rapport*) est une certaine manière d'être de deux grandeurs suivant la quantité (ibidem, définition 3). Nous écrirons $(a, b) \equiv (c, d)$. C'est évidemment une relation d'équivalence (cf. exercice ci-dessous) et une classe d'équivalence correspond à sa notion de raison !

Indirectement il suppose que a et b possède un rapport l'une par rapport à l'autre (cf. ibidem, définition 5), c'est-à-dire que l'une de ces grandeurs est capable en étant multipliée (par un nombre entier) de surpasser l'autre. Nous disons maintenant que c'est l'*axiome d'Archimède*, car Archimède est le premier à l'avoir formuler comme tel.

Montrons sur deux exemples la manière précise, transmise par Euclide, avec laquelle Eudoxe a formulé sa théorie des proportions.

PROPOSITION

(i)

$$(a, b) \equiv (c, b) \quad \text{entraîne} \quad a = c .$$

(ii)

$$(a, b) \equiv (c, d) \quad \text{entraîne} \quad ad = bc .$$

Démonstration de (i) Si l'on a $a < c$, alors il existe un entier strictement positif n tel que

$$n(c - a) > b .$$

Soit alors m le plus petit entier strictement positif tel que $mb > na$, donc tel que

$$mb > na \geq (m-1)b.$$

En additionnant il vient

$$nc > mb,$$

mais comme $na < mb$, ceci contredit $(a, b) \equiv (c, b)$. On montre de même que $a > c$ conduit à une contradiction.

Démonstration de (ii) On voit immédiatement que

$$(a, b) \equiv (ad, bd)$$

et

$$(c, d) \equiv (bc, bd),$$

donc

$$(ad, bd) \equiv (bc, bd),$$

puis

$$ad = bc$$

par (i). □

EXERCICE

- (a) Montrer que \equiv est une relation d'équivalence.
 (b) Quel est le lien entre les raisons d'Eudoxe et nos nombres réels? Préciser les structures qui entrent en jeu. Associer une coupure de Dedekind à la raison $[(a, b)]$ (cf. Analyse 4.7) et montrer que cette application est injective. Est-elle surjective?
 (c) Montrer que $(a, b) \equiv (c, d)$ est équivalente à l'une des deux conditions suivantes :

- (i) Pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$na < mb \iff nc < md$$

et

$$na = mb \iff nc = md$$

et

$$na > mb \iff nc > md.$$

Utiliser les règles de Morgan (cf. Analyse, exercice 1.4.2.vi).

- (ii) Pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$na < mb \iff nc < md.$$

Appliquer judicieusement l'axiome d'Archimède, en n'oubliant pas la contraposi-
 tion!

- (iii) Méthode d'Eudoxe dite de la *double réduction à l'absurde* pour prouver une égalité :
 On a $(a, b) \not\equiv (c, d)$ si, et seulement si, il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que l'on ait

$$na < mb \quad \text{et} \quad nc > md$$

ou bien

$$na > mb \quad \text{et} \quad nc < md .$$

Il faut à nouveau utiliser l'axiome d'Archimède.

Nous allons maintenant démontrer le théorème d'Hippocrate à l'aide de la *méthode d'exhaustion* . Cette méthode a été développée, probablement par Eudoxe, à la place d'une notion de limite impossible pour les Grecs d'être formulée à cause de leur peur de l'infini !

THEOREME (Euclide X.1) *Soit $\varepsilon > 0$ donné. Si $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que*

$$M_{k+1} \leq \frac{1}{2} \cdot M_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} ,$$

alors il existe n tel que $M_n \leq \varepsilon$.

Soit N tel que $N \cdot \varepsilon \geq M_0$. Montrons que $(N - k) \cdot \varepsilon \geq M_k$ pour tout $k = 0, \dots, N - 1$.

Cette assertion est vraie pour $k = 0$. Etant vraie pour k et si $k + 1 \leq N - 1$, i.e. $N - k \geq 2$, on a $\varepsilon \leq \frac{(N-k) \cdot \varepsilon}{2}$; il vient alors

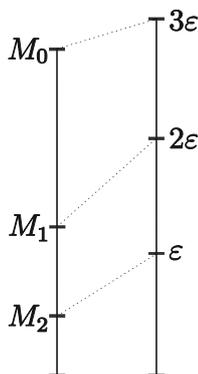
$$\begin{aligned} (N - k - 1) \cdot \varepsilon &= (N - k) \cdot \varepsilon - \varepsilon \geq (N - k) \cdot \varepsilon - \frac{N - k}{2} \cdot \varepsilon = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (N - k) \cdot \varepsilon \geq \frac{1}{2} \cdot M_k \geq M_{k+1} . \end{aligned}$$

Notre assertion est donc vraie pour $k = N - 1$, donc $M_{N-1} \leq \varepsilon$. □

REMARQUE 1 La formulation originale d'Euclide doit être interprétée avec des inégalités strictes ; la traduction française de D. Henrion de 1632 est la suivante :

Etant proposées deux grandeurs inégales, si de la plus grande l'on retranche plus de la moitié, et du reste encore plus de la moitié, et qu'en continuant cela se fasse toujours ainsi, il demeurera en fin une grandeur plus petite que la moindre des deux proposées.

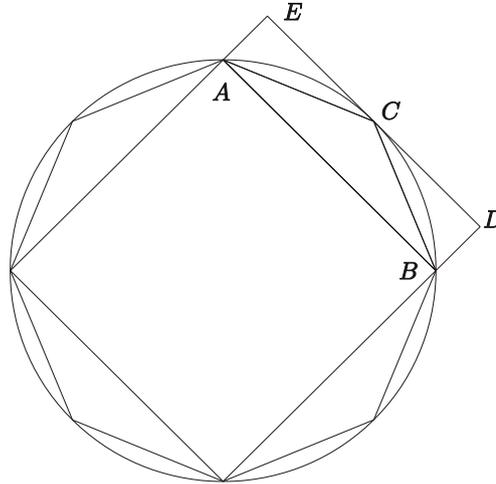
Soient M_0 la plus grande des grandeurs proposées, ε la plus petite et N tel que $N \cdot \varepsilon \geq M_0$. Euclide argumente à l'aide d'une récurrence intuitive effectuée sur deux pas. Plus précisément soient d'une part M_1, \dots, M_{N-1} , ce que l'on obtient en retranchant successivement plus de la moitié du reste, et d'autre part $(N - 1) \cdot \varepsilon, \dots, \varepsilon$. Si $(N - k) \cdot \varepsilon \geq M_k$, puisqu'on retranche plus de la moitié à M_k et ε à $(N - k) \cdot \varepsilon$ qui est moins que la moitié, $\varepsilon \leq \frac{(N-k) \cdot \varepsilon}{2}$ est équivalent à $k \leq N - 2$, on obtient $(N - k - 1) \cdot \varepsilon \geq M_{k+1}$. En particulier pour $k = N - 2$, il vient $\varepsilon \geq M_{N-1}$. Comme soutien est ajouté une figure analogue à la suivante :



COROLLAIRE *Etant donnés un cercle et $\varepsilon > 0$, il existe un polygone P régulier inscrit dans C tel que*

$$\text{Surf}(C) - \text{Surf}(P) < \varepsilon .$$

On commence avec un carré P_0 inscrit et on double successivement le nombre des côtés. Le polygone P_k a donc 2^{k+2} côtés.



On a

$$2 \cdot \text{Surf}(\triangle [A, B, C]) = \text{Surf}(\square [A, B, D, E]) \geq \text{Surf}(\circ [A, B, C]) \geq \text{Surf}(\triangle [A, B, C]) ,$$

ce qui montre qu'à chaque étape on enlève plus de la moitié de la surface qui restait, d'où le résultat par la méthode d'exhaustion.

Plus précisément posons

$$M_k := \text{Surf}(C) - \text{Surf}(P_k) .$$

Nous allons montrer que

$$M_k - M_{k+1} \geq \frac{1}{2} \cdot M_k ,$$

i.e. $M_{k+1} \leq \frac{1}{2} \cdot M_k$.

On a

$$\begin{aligned} M_k - M_{k+1} &= \text{Surf}(P_{k+1}) - \text{Surf}(P_k) = \\ &= 2^{k+2} \cdot \text{Surf}(\triangle [A, B, C]) \geq \frac{1}{2} \cdot 2^{k+2} \cdot \text{Surf}(\circ [A, B, C]) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [\text{Surf}(C) - \text{Surf}(P_k)] = \frac{1}{2} \cdot M_k , \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. _____ □

THEOREME (Euclide XII.2) *Si C_1 et C_2 sont des cercles de rayon r_1 et r_2 , alors*

$$(\text{Surf}(C_1), \text{Surf}(C_2)) = (r_1^2, r_2^2) .$$

Nous utiliserons le fait que si P_1 est un polygone inscrit dans C_1 et si P_2 est un polygone similaire inscrit dans C_2 , alors

$$(\text{Surf}(P_1), \text{Surf}(P_2)) = (r_1^2, r_2^2) . \tag{*}$$

Il suffit de décomposer les polygones en triangles, chacun de ces triangles ayant pour base l'un des côtés de ces polygones et pour sommet opposé le centre du cercle. Les triangles correspondants étant similaires on obtient immédiatement le résultat.

Démontrons maintenant le théorème à l'aide de la double réduction à l'absurde. Par symétrie nous pouvons supposer qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$n \cdot \text{Surf}(C_1) > m \cdot \text{Surf}(C_2) \quad \text{et} \quad n \cdot r_1^2 < m \cdot r_2^2 .$$

Par la méthode d'exhaustion il existe un polygone P_1 inscrit dans C_1 tel que

$$\text{Surf}(C_1) - \text{Surf}(P_1) < \varepsilon := \text{Surf}(C_1) - \frac{m}{n} \cdot \text{Surf}(C_2) ,$$

i.e.

$$n \cdot \text{Surf}(P_1) > m \cdot \text{Surf}(C_2) .$$

Soit P_2 un polygone similaire à P_1 inscrit dans C_2 . Mais comme $n \cdot r_1^2 < m \cdot r_2^2$ est équivalent à $n \cdot \text{Surf}(P_1) < m \cdot \text{Surf}(P_2)$ par (*), on en déduit

$$m \cdot \text{Surf}(C_2) < m \cdot \text{Surf}(P_2) ,$$

donc $\text{Surf}(C_2) < \text{Surf}(P_2)$, ce qui est absurde. _____ \square

REMARQUE 2 Dans le livre XII d'Euclide on trouve le volume d'un cône P de hauteur h et à base polygonale (une pyramide) ou circulaire B :

$$\text{Vol}(P) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \text{Surf}(B) .$$

Ce résultat est dû, d'après Archimède, à

Démocrite d'Abdère : - 460 ? - - 370 ? ,

mais il a été démontré la première fois par Eudoxe. Le dernier résultat du livre XII est le suivant : Si deux sphères S_1 et S_2 sont de rayon r_1 et r_2 respectivement, alors

$$(\text{Vol}(S_1), \text{Vol}(S_2)) = (r_1^3, r_2^3) .$$

On en déduit que le volume d'une sphère est proportionnel au cube du rayon. Mais c'est seulement Archimède qui montra que la constante de proportionnalité est

$$\frac{4\pi}{3} .$$

1.6 Le pentagone et la section d'or

Comme corollaire de la méthode d'exhaustion on a le critère d'incommensurabilité suivant :

THEOREME (Euclide X.2) *Si de deux grandeurs proposées on retranche toujours la plus petite de la plus grande, sans que le reste mesure la grandeur précédente, alors ces grandeurs sont incommensurables.*

Plus précisément soient a, b des grandeurs géométriques avec $a > b > 0$. Posons $x_0 := a$ et $x_1 := b$. Soit α_k l'unique entier strictement positif tel que

$$\alpha_k \cdot x_k \leq x_{k-1} < (\alpha_k + 1) \cdot x_k .$$

En posant

$$x_{k+1} := x_{k-1} - \alpha_k \cdot x_k ,$$

l'hypothèse signifie que l'on a $x_k > 0$ pour tout k .

Si a et b sont commensurables, il existe un $\varepsilon > 0$ et des entiers positifs m, n tels que $a = m \cdot \varepsilon$ et $b = n \cdot \varepsilon$. Par récurrence il est clair que chaque x_k est un multiple strictement positif de ε . En outre il vient

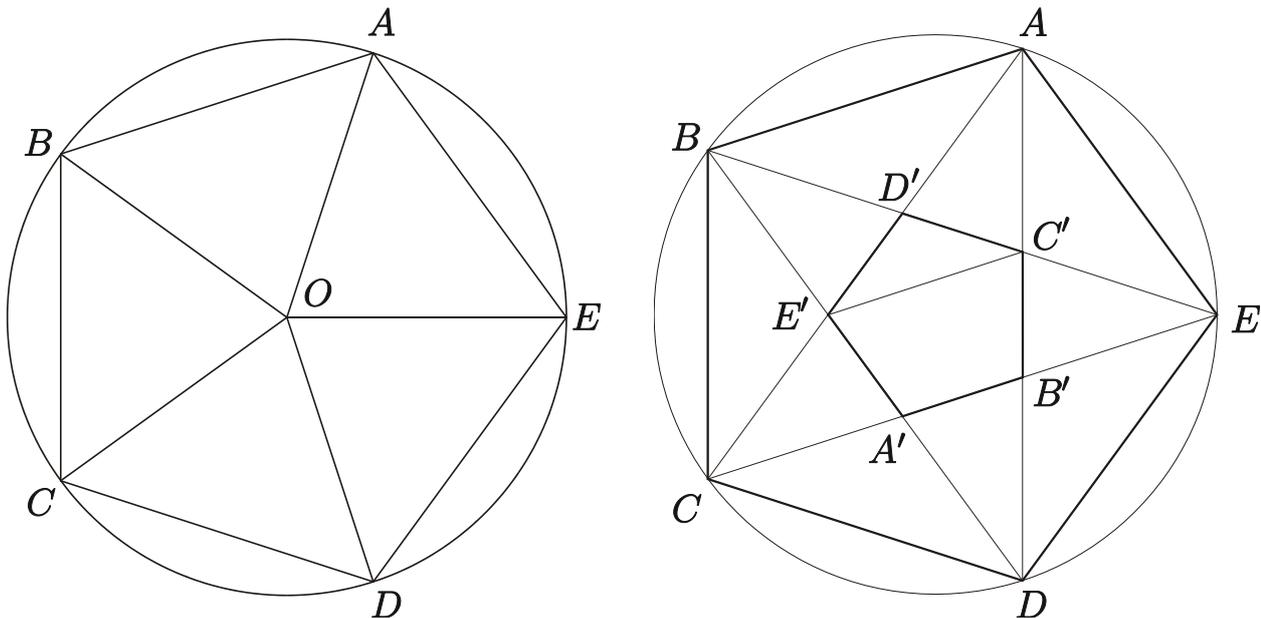
$$x_{k+1} < \frac{1}{2} \cdot x_{k-1} ,$$

car

$$x_{k-1} - 2 \cdot x_{k+1} = 2 \cdot \alpha_k \cdot x_k - x_{k-1} \geq (\alpha_k + 1) \cdot x_k - x_{k-1} > 0 .$$

D'après le principe d'exhaustion (théorème 1.5), il existe un entier positif n tel que $0 < x_{2n} < \varepsilon$, ce qui est impossible puisque x_{2n} est multiple strictement positif de ε . □

COROLLAIRE *Les diagonales d'un pentagone ABCDE définissent un nouveau pentagone A'B'C'D'E'*



et on a les formules

$$AC - AB = C'E' \quad \text{et} \quad AB - C'E' = A'B' .$$

En particulier les deux grandeurs AC et AB sont incommensurables. Plus précisément le rapport de la diagonale d'un pentagone à son côté satisfait à

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC - AB} ,$$

donc est égal au nombre d'or, i.e.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} .$$

Voici une démonstration moderne de ces faits. Le pentagone étant défini comme un polygone inscrit dans un cercle de centre O et ayant ses cinq côtés égaux, les triangles $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, etc... sont égaux, donc

$$\angle AOB = \angle BOC = \dots = \frac{2\pi}{5} .$$

Ce pentagone est donc invariant par toute rotation de centre O et d'angle un multiple de $\frac{2\pi}{5}$. Il en est de même de toutes les droites et de tous les points que l'on peut construire, en particulier du polygone $A'B'C'D'E'$. Puisqu'une rotation est orthogonale, donc conserve le produit scalaire et en particulier les distances et les angles, les sommets de ce polygone se trouvent sur un cercle et $A'B' = B'C' = \dots$; c'est donc un pentagone. En outre

$$\angle ABC = \angle BCD = \dots ,$$

et en considérant les triangles AEB , BEC et CED , on obtient $5 \cdot \angle ABC = 3\pi$, donc

$$\angle ABC = \frac{3\pi}{5} .$$

On a également

$$\angle BAC = \angle CBD = \dots \quad \text{et} \quad \angle BCA = \angle CDB = \dots ,$$

mais comme le triangle ABC est isocèle, ces angles sont égaux. On en déduit que

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot (\pi - \angle ABC) = \frac{\pi}{5} .$$

En outre

$$\angle DBE = \angle ECA = \dots$$

et

$$\angle DBE = \frac{3\pi}{5} - 2 \cdot \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} .$$

Il est alors clair que

$$\angle BE'A = \pi - 3 \cdot \frac{\pi}{5} = 2 \cdot \frac{\pi}{5} = \angle ABE' .$$

Ceci montre que le triangle BAE' est isocèle, donc que $AB = AE'$, et par suite

$$AC - AB = AC - AE' = CE' = AC' = C'E' ,$$

puisque le triangle $AC'E'$ est aussi isocèle : en effet

$$\angle AE'C' = \frac{1}{2} \cdot (\pi - \angle E'D'C') = \frac{1}{2} \cdot (\pi - \angle AD'B) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} = \angle E'AC' .$$

Puisque $BD'A$ est aussi isocèle et égal à $AC'E$, on a

$$AB - C'E' = AB - AD' = D'E' = A'B' .$$

Finalement, les triangles ABC et $AD'B$ sont semblables, donc

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD'} = \frac{AB}{CE'} = \frac{AB}{AC - AB} .$$

On vérifie immédiatement que

$$AB > C'E' > A'B' .$$

Ainsi en alternant

diagonal – côté et côté – diagonal du pentagone plus petit,

on peut appliquer le théorème, ce qui montre que AC et AB sont incommensurables. — □

REMARQUE En général on définit la *nombre d'or* Φ comme le rapport du plus grand des côtés d'un rectangle a au plus petit b lorsque le plus grand est au plus petit comme la somme est au plus grand, i.e.

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{1}{\Phi} .$$

On a donc $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ et par suite

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =: 1.618\ 033\ 988\ 749\ \dots .$$

Il est aussi définit par la condition du corollaire

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \frac{1}{\Phi - 1} .$$

On dit aussi qu'un point M divise un segment AB en *extrême et moyenne raison* si

$$\Phi = \frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{AB - AM} .$$

La formule $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ montre que la représentation en fraction continuée de Φ est

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} .$$

Puisque $\Phi^2 = 1 + \Phi$, donc $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$, on a en outre

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}} .$$

1.7 Archimède et le cercle

Archimède de Syracuse : –287 - –212

L'égalité des rapports

$$\frac{\text{périmètre}}{\text{diamètre}} = \frac{\text{surface}}{\text{carré du rayon}}$$

a été démontré la première fois par Archimède dans son livre "Kreismessung" [1]. Il prouve tout d'abord la

PROPOSITION (I) *Si C est un cercle de rayon r et de périmètre L , on a*

$$\text{Surf}(C) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot L .$$

Le résultat en découle immédiatement

$$\frac{L}{2r} = \frac{\text{Surf}(C)}{r^2} .$$

Pour démontrer (*), il étend la méthode d'exhaustion à celle dite de *compression*, en considérant des polygones circonscrits en plus des polygones inscrits.

Tout d'abord si $\text{Surf}(C) > \frac{1}{2} \cdot r \cdot L$, par la méthode d'exhaustion il existe un polygone régulier à n côtés P inscrit dans C tel que

$$\text{Surf}(C) - \text{Surf}(P) < \varepsilon := \text{Surf}(C) - \frac{1}{2} \cdot r \cdot L .$$

On a donc

$$\text{Surf}(P) > \frac{1}{2} \cdot r \cdot L .$$

Si s_n est la longueur de l'un des côtés de P et h_n la hauteur du triangle isocèle, dont le sommet opposé à ce côté est le centre du cercle, on a

$$n \cdot s_n < L \quad \text{et} \quad h_n < r .$$

On en déduit que

$$\text{Surf}(P) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s_n \cdot h_n < \frac{1}{2} \cdot r \cdot L ,$$

ce qui est absurde.

Si maintenant $\text{Surf}(C) < \frac{1}{2} \cdot r \cdot L$, par l'extension de la méthode d'exhaustion, il existe un polygone régulier à n côtés Q circonscrit à C tel que

$$\text{Surf}(Q) - \text{Surf}(C) < \varepsilon := \frac{1}{2} \cdot r \cdot L - \text{Surf}(C) .$$

On a donc

$$\text{Surf}(Q) < \frac{1}{2} \cdot r \cdot L .$$

Si t_n est la longueur de l'un des côtés de Q , la hauteur du triangle isocèle, dont le sommet opposé à ce côté est le centre du cercle, est r et on a

$$n \cdot t_n > L .$$

On en déduit que

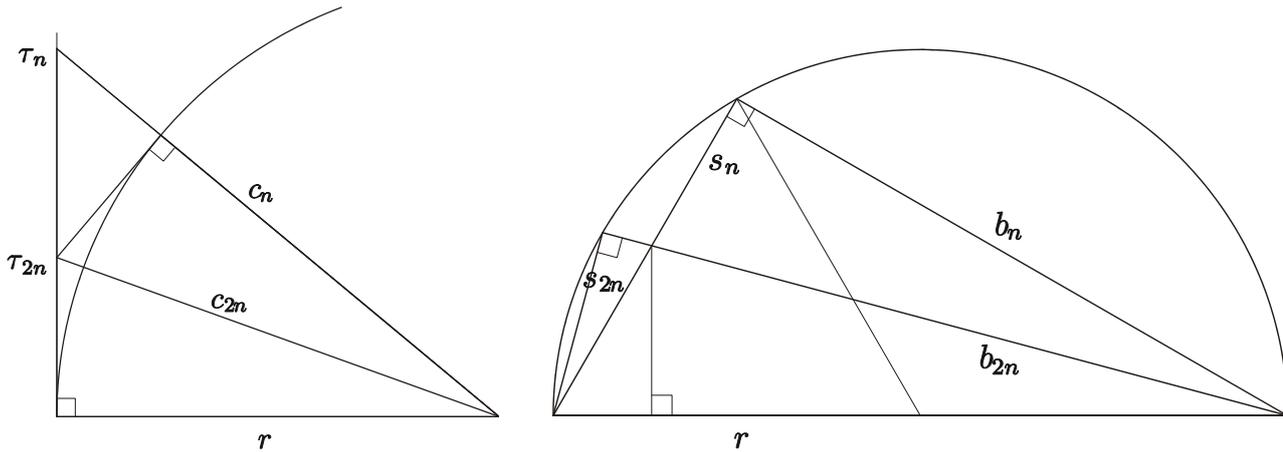
$$\text{Surf}(Q) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot t_n \cdot r > \frac{1}{2} \cdot r \cdot L ,$$

ce qui est aussi absurde. □

THEOREME (III) *On a*

$$3.1408 \dots = \frac{223}{71} = 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.1429 \dots$$

Archimède procède par doublement successif du nombre des côtés de deux hexagones, l'un inscrit, l'autre circonscrit, en utilisant deux récurrences doubles. Il les obtient par des considérations de triangles semblables et le théorème de Pythagore dans les figures suivantes. Nous désignerons par τ_n le *demi-côté* du polygone régulier circonscrit à n côtés et par s_n le *côté* du polygone régulier inscrit à n côtés.



On a

$$\frac{r}{\tau_{2n}} = \frac{c_n}{\tau_n} + \frac{r}{\tau_n} \quad \text{et} \quad \frac{c_{2n}^2}{\tau_{2n}^2} = \frac{r^2}{\tau_n^2} + 1 , \tag{*}$$

ainsi que

$$\frac{b_{2n}}{s_{2n}} = \frac{b_n}{s_n} + \frac{2r}{s_n} \quad \text{et} \quad \frac{(2r)^2}{s_{2n}^2} = \frac{b_n^2}{s_n^2} + 1 \tag{**}$$

Pour faire ses calculs Archimède commence par l'approximation

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} ;$$

en effet

$$\frac{265^2}{153^2} = \frac{3 \cdot 265^2}{3 \cdot 153^2} = \frac{3 \cdot 70225}{70227} < 3 < \frac{3 \cdot 1825201}{1825200} = \frac{3 \cdot 1351^2}{3 \cdot 780^2} = \frac{1351^2}{780^2} .$$

Il minore les s_n en arrondissant vers le bas et majore les τ_n en arrondissant vers le haut.

On montre facilement que

$$\frac{r^2}{\tau_6^2} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{c_6}{\tau_6} = 2 ,$$

ainsi que

$$\frac{b_0^2}{s_0^2} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{2r}{s_0} = 2 .$$

En utilisant les relations (*) et (**), Archimède montre finalement que

$$\frac{r}{\tau_{96}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153} \quad \text{et} \quad \frac{2r}{s_{96}} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66} ,$$

d'où il en déduit immédiatement

$$3 + \frac{10}{71} < 96 \cdot \frac{66}{2017\frac{1}{4}} < \frac{L}{2r} < 96 \cdot \frac{153}{4673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{1}{7} ,$$

ce qu'il voulait démontrer. □

EXERCICE 1 Montrer que l'on a les formules de récurrence

$$s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}} \quad \text{et} \quad t_{2n} = \frac{2 \cdot t_n}{2 + \sqrt{4 + t_n^2}} .$$

On a immédiatement

$$s_6 = 1 \quad \text{et} \quad t_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} .$$

En définissant les fonctions

$$f(x) = \frac{x}{2 + \sqrt{4 - x}} \quad \text{et} \quad g(y) = \frac{2y}{2 + \sqrt{4 + y^2}} ,$$

on obtient successivement

$$s_{12}^2 = f(1) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} ,$$

$$s_{24}^2 = f\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{26 + 15\sqrt{3}}} = \frac{2}{8 + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\sqrt{3} + 5\sqrt{2}} ,$$

$$s_{48}^2 = f\left(\frac{2}{8 + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\sqrt{3} + 5\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{16 + 8\sqrt{3} + 6\sqrt{2}\sqrt{3} + 10\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{(424 + 244\sqrt{3} + 173\sqrt{2}\sqrt{3} + 299\sqrt{2})}}$$

et

$$t_{12} = g\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$$

$$t_{24} = g\left(\frac{2}{2 + \sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2} + 4)} = \frac{2}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$t_{48} = g\left(\frac{2}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right) = \frac{2}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{(8 + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\sqrt{3} + 5\sqrt{2})}}$$

Comme

$$48 \cdot s_{96} < \pi < 48 \cdot t_{96} ,$$

on obtient numériquement

$$3.141031951\dots < \pi < 3.1427146\dots$$

EXERCICE 2 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$ avec $b \leq a$, on a

$$\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}) .$$

En particulier

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)$$

et

$$\sqrt{26 + 15\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (3\sqrt{3} + 5) ,$$

mais aussi

$$\sqrt{1 + \cos t} + \sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + |\sin t|} \quad \text{pour tout } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

Il est aussi utile d'écrire cette égalité sous la forme

$$\sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$. En particulier on a

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

et

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} .$$

Finalement pour tout $u, v \in \mathbb{R}_+$ avec $u^2 - v = w^2$, on a

$$\sqrt{u + \sqrt{v}} = \sqrt{\frac{u+w}{2}} + \sqrt{\frac{u-w}{2}} .$$

REMARQUE Dans le Livre X des Eléments d'Euclide, cf. 55 - 58, on trouve la formule suivante, évidemment exprimée dans le langage géométrique :

$$\sqrt{\sqrt{p} + \sqrt{q}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{p} + \sqrt{p-q})} + \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{p-q})} .$$

1.8 La quadrature de la parabole : méthode géométrique

Rappelons que les Grecs ont définis la parabole comme une section conique, le plan d'intersection étant parallèle à l'une des génératrices du cône. Les résultats suivants étaient connus bien avant Archimède et se trouvent dans les traités sur les coniques de

Aristée le vieux : -370 ? - -300 ?

et d'Euclide.

Soit AB la base d'un segment de parabole.

(a) La droite T parallèle à AB coupant encore la parabole et la plus éloigné de AB est tangente à la parabole en un point P , dit le *sommet* du segment. La distance h entre ces deux droites s'appelle la *hauteur* du segment.

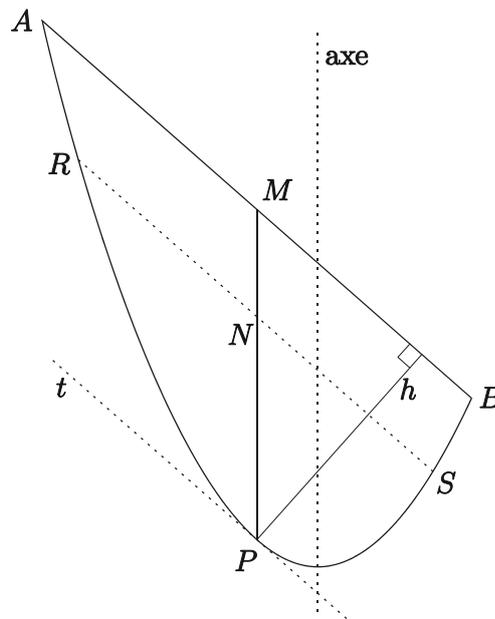
(b) La parallèle à l'axe de la parabole passant par P coupe toute corde RS parallèle à la base en son milieu N .

(c) Si M désigne le milieu de AB , on a

$$\frac{PN}{PM} = \frac{NR^2}{MA^2},$$

i.e. dans le système de coordonnées obliques dont le premier axe est T et le second la droite PM , l'équation de la parabole est

$$y = \frac{PM}{MA^2} \cdot x^2.$$



Archimède montre dans son livre "Die Quadratur der Parabel" dans [1], § 21 à 24, p. 171 et ss., que

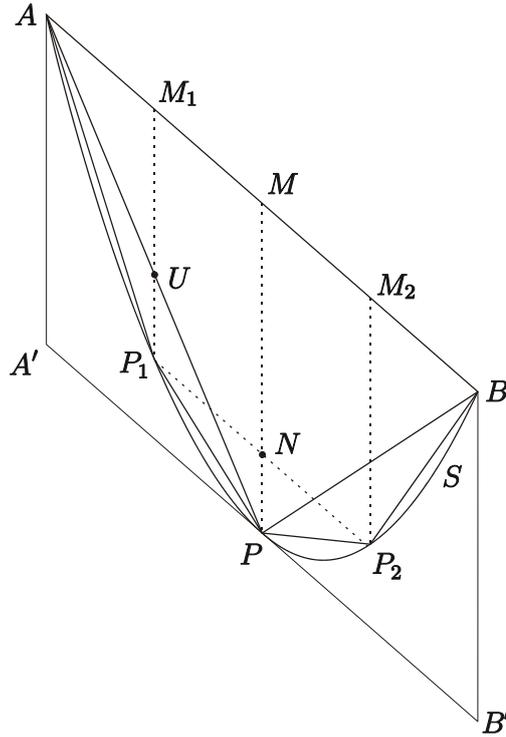
THEOREME La surface S du segment de parabole ABP est égale à $\frac{4}{3}$ de celle du triangle

ABP .

Considérons le parallélogramme construit sur la base AB et dont les côtés AA' et BB' sont parallèles à MP , donc à l'axe de la parabole. On a évidemment

$$\text{Surf}(ABB'A') \geq S \geq \text{Surf}(ABP) = \frac{1}{2} \cdot \text{Surf}(ABB'A') \geq \frac{1}{2} \cdot S .$$

Soient P_1 et P_2 les sommets des segments de parabole définis par les cordes AP et PB . Les parallèles P_1M_1 et P_2M_2 à PM coupent respectivement AM et MB en leur milieu M_1 et M_2 .



Si S_1 désigne la surface du segment de parabole AP_1P , comme ci-dessus on obtient

$$S_1 \geq \text{Surf}(APP_1) \geq \frac{1}{2} \cdot S_1 .$$

Il en est de même pour le segment de parabole BP_2P et le triangle BPP_2 . On procède successivement de la même manière. A chaque étape on enlève donc plus de la moitié de la surface restante. Par le principe d'exhaustion, après un nombre fini de subdivisions le polygone inscrit dans le segment de parabole est tel que la surface restante soit aussi petite que l'on veut.

Déterminons maintenant la surface de ce polygone. Utilisant (c) on obtient

$$\frac{PN}{PM} = \frac{NP_1^2}{MA^2} = \frac{MM_1^2}{4MM_1^2} = \frac{1}{4} ,$$

donc $PM = 4 \cdot PN$ et par suite $P_1M_1 = NM = PM - PN = 3 \cdot PN$, puis

$$PM = \frac{4}{3} \cdot P_1M_1 .$$

Mais $PM = 2 \cdot UM_1$ par le théorème de Thalès, donc $UM_1 = \frac{2}{3} \cdot P_1M_1$. Ainsi $P_1U = P_1M_1 - UM_1 = \frac{1}{3} \cdot P_1M_1$, donc

$$UM_1 = 2 \cdot P_1U .$$

On en déduit

$$\text{Surf}(AM_1U) = 2 \cdot \text{Surf}(AUP_1)$$

et

$$\text{Surf}(UM_1P) = 2 \cdot \text{Surf}(P_1UP) .$$

Mais

$$\begin{aligned} \text{Surf}(AM_1U) + \text{Surf}(UM_1P) &= \text{Surf}(AM_1P) = \text{Surf}(M_1MP) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{Surf}(AMP) = \frac{1}{4} \cdot \text{Surf}(ABP) , \end{aligned}$$

donc

$$\text{Surf}(APP_1) = \text{Surf}(AUP_1) + \text{Surf}(P_1UP) = \frac{1}{8} \cdot \text{Surf}(ABP) .$$

De la même manière il vient

$$\text{Surf}(BPP_2) = \frac{1}{8} \cdot \text{Surf}(ABP) ,$$

et par suite

$$\text{Surf}(APP_1) + \text{Surf}(BPP_2) = \frac{1}{4} \cdot \text{Surf}(ABP) .$$

Ainsi à chaque étape on ajoute $\frac{1}{4}$ de la surface ajoutée précédemment. Après k étapes la surface du polygone est

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} \cdot \text{Surf}(ABP) \leq S .$$

Archimède argumente alors de la manière suivante : on a

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^j} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{j-1}} ,$$

donc

$$\frac{4}{3} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{4^{j-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j}$$

et par suite

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}} = \frac{4}{3} .$$

Si maintenant $S > \frac{4}{3} \cdot \text{Surf}(ABP)$, nous avons vu par le principe d'exhaustion qu'il existe un polygone inscrit tel que

$$S - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} \cdot \text{Surf}(ABP) < S - \frac{4}{3} \cdot \text{Surf}(ABP) .$$

On a donc

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} > \frac{4}{3} ,$$

ce qui est absurde.

Finalement si $S < \frac{4}{3} \cdot \text{Surf}(ABP)$, Archimède choisit un polygone inscrit tel que

$$\frac{1}{4^{k-1}} \cdot \text{Surf}(ABP) < \frac{4}{3} \cdot \text{Surf}(ABP) - S .$$

Mais comme

$$\frac{4}{3} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}} < \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} + \frac{1}{4^{k-1}} ,$$

on obtient

$$\left(\frac{4}{3} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} \right) \cdot \text{Surf}(ABP) < \frac{1}{4^{k-1}} \cdot \text{Surf}(ABP) < \frac{4}{3} \cdot \text{Surf}(ABP) - S ,$$

donc

$$S < \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} \cdot \text{Surf}(ABP) ,$$

ce qui est aussi absurde. _____ \square

REMARQUE 1 Grâce à la notion de convergence nous pouvons plus simplement écrire

$$\frac{4}{3} = \lim_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j}$$

et

$$S = \lim_k \left(\text{Surf}(ABP) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j} \cdot \text{Surf}(ABP) = \frac{4}{3} \cdot \text{Surf}(ABP) .$$

REMARQUE 2 L'argument d'Archimède se généralise, pour tout $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-r} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} r^j + r^n \right) &= \frac{1}{1-r} + \frac{r}{1-r} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} r^{j-1} + \frac{r}{1-r} \cdot r^{n-1} = \\ &= \frac{1}{1-r} + \frac{r}{1-r} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-2} r^j + r^{n-1} \right) = \frac{1}{1-r} + \frac{r}{1-r} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} r^j , \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} r^j + \frac{r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} ,$$

c'est la formule d'Archimède pour $r = \frac{1}{4}$, qui donne la somme de la suite géométrique

$$\sum_{j=0}^{n-1} r^j = \frac{1-r^n}{1-r} !$$

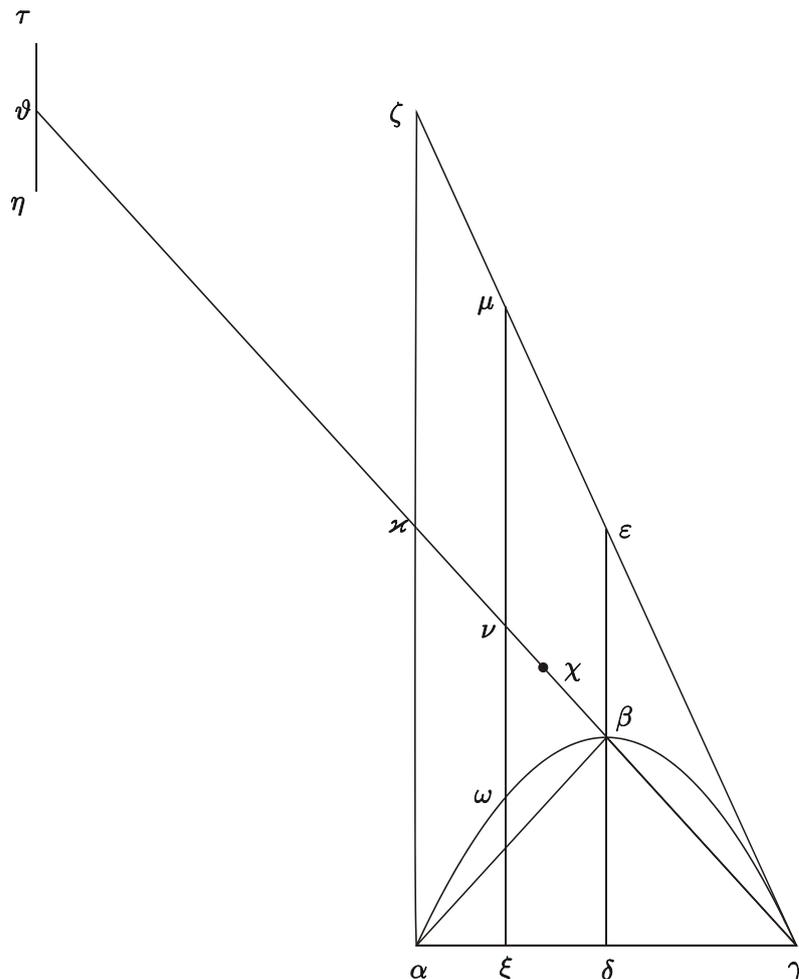
1.9 La quadrature de la parabole : méthode mécanique

Archimède écrivant à

Eratosthène de Cyrène : -276 - -194

(cf. "Eine neue Schrift des Archimedes" dans [1], p. 379 et ss.) lui communique une nouvelle méthode permettant de s'assurer de la validité de nouveaux résultats, mais qu'il ne considère pas comme une vraie démonstration (ibidem, p. 386).

Il considère un segment de parabole comme dans la figure ci-dessous. On a $\alpha\delta = \delta\gamma$ et les droites $\alpha\zeta$ et $\xi\mu$ sont parallèles à l'axe $\delta\varepsilon$ de la parabole. Le point ξ est quelconque sur $\alpha\gamma$. La droite $\gamma\zeta$ est tangente à la parabole en γ , donc $\delta\beta = \beta\varepsilon$ (cf. "Die Quadratur der Parabel" dans [1], § 2, p. 154). Sous forme moderne, remarquer que si $y = x^2$ est l'équation de la parabole, celle de la tangente en $\delta\gamma$ est $y = 2 \cdot \delta\gamma \cdot x - \delta\gamma^2$, donc $\delta\beta = \delta\gamma^2 = \beta\varepsilon$. Il considère en outre la droite $\gamma\vartheta$ telle $\varkappa\gamma = \varkappa\vartheta$ comme la fléau d'une balance et le théorème de Thalès montre que $\xi\nu = \nu\mu$ et $\alpha\varkappa = \varkappa\zeta$.



D'après "Die Quadratur der Parabel" dans [1], § 5, p. 156, on a

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\xi} = \frac{\xi\mu}{\xi\omega} .$$

A nouveau sous forme moderne, si x est l'abscisse de ξ , on peut écrire

$$\frac{\xi\mu}{\xi\omega} = \frac{-(2 \cdot \delta\gamma \cdot x - \delta\gamma^2) + \delta\gamma^2}{\delta\gamma^2 - x^2} = \frac{2 \cdot \delta\gamma \cdot (\delta\gamma - x)}{(\delta\gamma - x)(\delta\gamma + x)} = \frac{2 \cdot \delta\gamma}{\alpha\delta + x} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\xi} .$$

Il vient alors

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\xi} = \frac{\varkappa\gamma}{\varkappa\nu} ,$$

donc

$$\frac{\varkappa\vartheta}{\varkappa\nu} = \frac{\varkappa\gamma}{\varkappa\nu} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\xi} = \frac{\xi\mu}{\xi\omega} .$$

En choisissant $\tau\eta := \xi\omega$, on en déduit que les segments de droite $\tau\eta$ et $\xi\mu$ sont en équilibre par rapport à \varkappa , i.e. \varkappa est le centre de gravité de ces deux segments de droites. Par conséquent le triangle $\alpha\gamma\zeta$ est en équilibre par rapport à \varkappa avec les sections du segment de parabole transportées en ϑ , ce qui montre que le triangle $\alpha\gamma\zeta$ est en équilibre avec le segment de parabole transporté de telle manière que son centre de gravité soit en ϑ .

Le point χ , choisi sur la droite $\gamma\varkappa$ de telle sorte que $\varkappa\gamma = 3 \cdot \varkappa\chi$, est le centre de gravité du triangle $\alpha\gamma\zeta$. Si S désigne la surface du segment de parabole, on a alors

$$\frac{\text{Surf}(\Delta\alpha\gamma\zeta)}{S} = \frac{\varkappa\vartheta}{\varkappa\chi} = \frac{\varkappa\gamma}{\varkappa\chi} = \frac{3 \cdot \varkappa\chi}{\varkappa\chi} = 3 ,$$

mais $\text{Surf}(\Delta\alpha\gamma\zeta) = \frac{1}{2} \cdot \alpha\zeta \cdot \alpha\gamma = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \delta\beta \cdot \alpha\gamma = 4 \cdot \text{Surf}(\Delta\alpha\gamma\beta)$, donc

$$S = \frac{1}{3} \cdot \text{Surf}(\Delta\alpha\gamma\zeta) = \frac{4}{3} \cdot \text{Surf}(\Delta\alpha\gamma\beta) .$$

□

1.10 La spirale d'Archimède

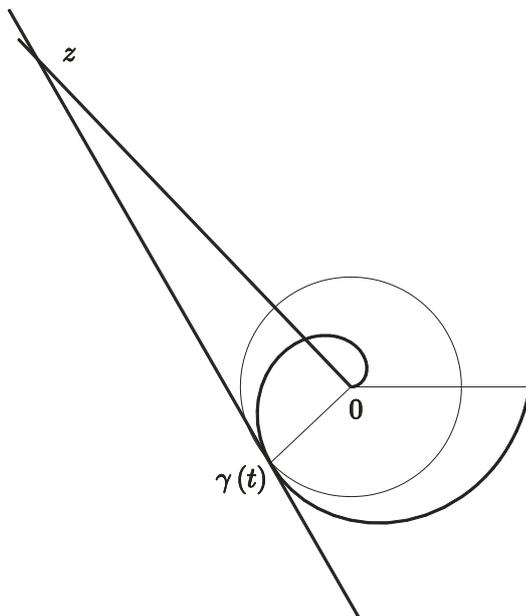
Les résultats qui suivent sont tirés du livre d'Archimède "Über Spiralen" dans [1], p. 1 et ss..

DEFINITION La *spirale d'Archimède* est la courbe décrite par un point se déplaçant à partir de l'origine à vitesse constante sur un rayon qui tourne lui-aussi à vitesse constante.

Cette définition se trouve à la fin du § 11 de son livre. En termes modernes c'est la courbe paramétrée

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto a \cdot t \cdot e^{ib \cdot t} .$$

EXERCICE (§ 20) Etant donné $t \in \mathbb{R}_+$, calculer à l'aide des nombres complexes l'intersection z de la tangente à cette spirale au point $\gamma(t)$ avec la perpendiculaire en 0 à $\gamma(t)$. Que peut-on dire de $|z|$?



Le but de ce paragraphe est de reproduire la méthode d'Archimède pour calculer la surface délimitée par deux rayons et la spirale. Il commence par démontrer certaines formules sur des sommes liées à une progression arithmétique de grandeurs géométriques.

LEMME (§ 10) Soit n un entier strictement positif. On a

$$n^3 + n^2 + \sum_{k=1}^n k = 3 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 .$$

Je reproduis sous forme moderne exactement sa démonstration, écrite dans le cas $n = 8$.

Tout d'abord on a

$$\begin{aligned}
 n^3 + n^2 + \sum_{k=1}^n k &= n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+n-k)^2 + n^2 + \sum_{k=1}^n k = \\
 &= n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} [k^2 + 2k \cdot (n-k) + (n-k)^2] + n^2 + \sum_{k=1}^n k = \\
 &= n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 + n^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (n-k) + \sum_{k=1}^n k = \\
 &= 2 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (n-k) + \sum_{k=1}^n k .
 \end{aligned}$$

Pour traiter le terme $2 \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (n-k) + \sum_{k=1}^{n-1} k$, Archimède constate tout d'abord que

$$n^2 = n + \sum_{k=1}^{n-1} n = n + \sum_{k=1}^{n-1} [k + (n-k)] = n + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k , \quad (*)$$

puis en sommant il obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n j^2 &= \sum_{j=1}^n \left(j + 2 \cdot \sum_{k=1}^{j-1} k \right) = \sum_{j=1}^n j + 2 \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{j-1} k = \\
 &= \sum_{k=1}^n k + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n k = \sum_{k=1}^n k + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (n-k) ,
 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

COROLLAIRE On a

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 < n^3 < 3 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 .$$

La seconde inégalité est immédiate. Quant à la première il suffit de constater, en utilisant (*), que

$$3 \cdot n^2 = n^2 + 2 \cdot n + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k > n^2 + \sum_{k=1}^n k ,$$

donc que

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 3 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \cdot n^2 = n^3 + n^2 + \sum_{k=1}^n k - 3 \cdot n^2 < n^3$$

à l'aide du lemme. □

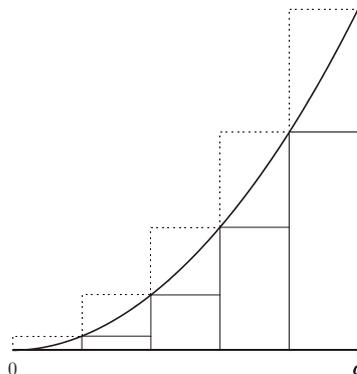
REMARQUE Cette inégalité peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{3} \cdot n^3 < \sum_{k=1}^n k^2 < \frac{1}{3} \cdot (n+1)^3 .$$

On en déduit facilement la formule

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot a^3 .$$

En effet en considérant la subdivision $(k \cdot \frac{a}{n})_{k=0, \dots, n}$ de $[0, a]$, les approximations de $\int_0^a x^2 dx$ par en bas et par en haut sont respectivement



$$\begin{aligned} \frac{a^3}{3} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 &< \left(\frac{a}{n}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(k \cdot \frac{a}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n}\right) < \\ &< \sum_{k=1}^n \left(\left(k \cdot \frac{a}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)^3 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 < \frac{a^3}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 , \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Revenons à la quadrature d'un segment de spirale. Archimède considère la progression arithmétique $a, a + b, \dots, a + n \cdot b$ avec $n = 6$ et compare trois rapports, que nous écrivons sous forme de fractions.

PROPOSITION (§ 11) *On a*

$$\frac{\sum_{k=1}^n (a + n \cdot b)^2}{\sum_{k=1}^n (a + k \cdot b)^2} < \frac{(a + n \cdot b)^2}{a \cdot (a + n \cdot b) + \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot b^2} < \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (a + n \cdot b)^2}{\sum_{k=0}^{n-1} (a + k \cdot b)^2} .$$

Pour simplifier posons $r := \frac{b}{a}$. Il nous suffit de montrer que

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n (1 + k \cdot r)^2} < \frac{1}{1 + n \cdot r + \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot r^2} < \frac{n}{\sum_{k=0}^{n-1} (1 + k \cdot r)^2} ,$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + k \cdot r)^2 < n \cdot \left(1 + n \cdot r + \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot r^2\right) < \sum_{k=1}^n (1 + k \cdot r)^2 .$$

Grâce au corollaire on a tout d'abord

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + k \cdot r)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (1 + 2 \cdot k \cdot r + k^2 \cdot r^2) =$$

$$\begin{aligned}
 &= n + \left(\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} (n - k - 1) \right) \cdot r + \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \cdot r^2 < \\
 &< n + n^2 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot n^3 \cdot r^2 = n \cdot \left(1 + n \cdot r + \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot r^2 \right) ,
 \end{aligned}$$

puis

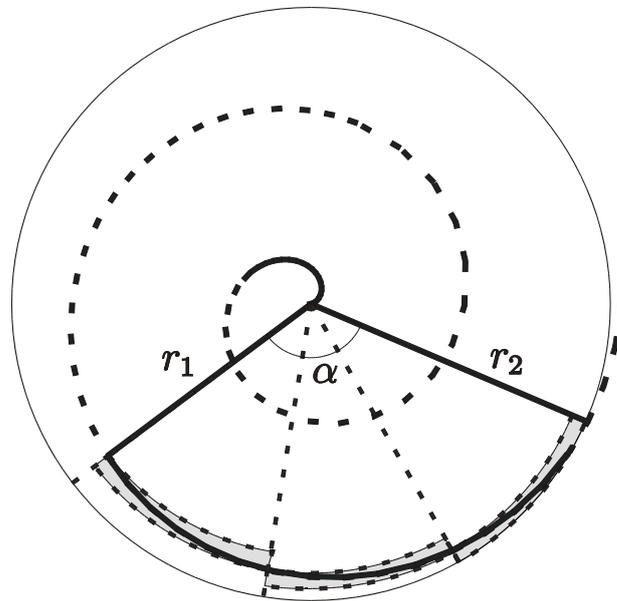
$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^n (1 + k \cdot r)^2 = \sum_{k=1}^n (1 + 2 \cdot k \cdot r + k^2 \cdot r^2) = \\
 &= n + \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n - k + 1) \right) \cdot r + \sum_{k=1}^n k^2 \cdot r^2 > \\
 &> n + n^2 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot n^3 \cdot r^2 = n \cdot \left(1 + n \cdot r + \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot r^2 \right) ,
 \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. _____ □

THEOREME (§ 26) *Le rapport de la surface S d'un segment de spirale délimité par deux rayons de longueur $r_1 < r_2$ respectivement et ayant un angle au centre α à celle Σ d'un secteur circulaire de rayon r_2 et de même angle au centre est comme*

$$r_1 \cdot r_2 + \frac{1}{3} \cdot (r_2 - r_1)^2 \quad \text{à} \quad r_2^2 .$$

Subdivisons le segment de parabole en n segments ayant le même angle au centre $\frac{\alpha}{n}$.



Posons $a := r_1$ et $b := \frac{r_2 - r_1}{n}$. En inscrivant et circonscrivant des secteurs circulaires leurs rayons sont respectivement

$$r_1 = a, a + b, \dots, a + (n - 1) \cdot b = r_2 - b$$

et

$$r_1 = a + b, a + 2 \cdot b, \dots, a + n \cdot b = r_2 .$$

Le rapport de la surface du secteur de rayon $a + k \cdot b$ à celle du secteur ayant même angle au centre et de rayon r_2 étant $\frac{(a+k \cdot b)^2}{r_2^2}$, le rapport des surfaces S_1 et S_2 des secteurs inscrits et circonscrits à Σ est donc

$$\frac{S_1}{\Sigma} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a + k \cdot b)^2}{n \cdot r_2^2} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (a + k \cdot b)^2}{\sum_{k=0}^{n-1} (a + n \cdot b)^2}$$

et

$$\frac{S_2}{\Sigma} = \sum_{k=1}^n \frac{(a + k \cdot b)^2}{n \cdot r_2^2} = \frac{\sum_{k=1}^n (a + k \cdot b)^2}{\sum_{k=1}^n (a + n \cdot b)^2};$$

d'après la proposition on obtient

$$\frac{S_1}{\Sigma} > \frac{a \cdot (a + n \cdot b) + \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot b^2}{(a + n \cdot b)^2} > \frac{S_2}{\Sigma}.$$

Comme toujours par la méthode d'exhaustion (§ 21 et 22) et la double réduction à l'absurde Archimède en déduit que

$$\frac{S}{\Sigma} = \frac{a \cdot (a + n \cdot b) + \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot b^2}{(a + n \cdot b)^2} = \frac{r_1 \cdot r_2 + \frac{1}{3} \cdot (r_2 - r_1)^2}{r_2^2}.$$

□

REMARQUE 1 Si α est l'angle au centre mesuré en radians, alors

$$S = \frac{\alpha}{2} \cdot \left[r_1 \cdot r_2 + \frac{1}{3} \cdot (r_2 - r_1)^2 \right].$$

1.11 Appendice : Les coniques sous forme analytique

Nous allons résoudre les différents problèmes, liés aux coniques et en particulier à la parabole, que nous avons rencontrés dans le paragraphe précédent. Nous utiliserons les méthodes les plus élémentaires du cours d'Analyse et d'Algèbre linéaire, en restant le plus près possible de l'intuition géométrique, mais sans l'utiliser !

La géométrie d'un segment de parabole

Démontrons tout d'abord les assertions 1.8, (a)-(c) de manière analytique. Nous pouvons admettre, en faisant un changement de variable, que l'équation de la parabole C est

$$y = a \cdot x^2 ,$$

avec $a > 0$, et que celle de la droite D est

$$y = b \cdot x + c .$$

Remarquons que D définit une corde de C si $D \cap C \neq \emptyset$, i.e. s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec

$$(x, y) \in D \cap C ,$$

c'est-à-dire

$$y = a \cdot x^2 \quad \text{et} \quad y = b \cdot x + c ,$$

ou encore

$$a \cdot x^2 - b \cdot x - c = 0 .$$

Mais la condition d'existence d'une solution de cette équation du second degré est

$$b^2 + 4ac \geq 0 ,$$

i.e.

$$c \geq -\frac{b^2}{4a} .$$

Considérons une droite D_t parallèle à D , dont l'équation est

$$y = b \cdot x + t$$

avec $t \leq c$. Sa distance à D est celle du point $(0, t)$ à D . Tout point de D est de la forme $(x, b \cdot x + c)$ et la distance au carré de $(0, t)$ à ce point est

$$x^2 + (b \cdot x + c - t)^2 .$$

Le minimum, nous avons affaire à une parabole, est atteint au point x tel que

$$2x + 2(b \cdot x + c - t) \cdot b = 0 ,$$

i.e.

$$x = \frac{b \cdot (t - c)}{b^2 + 1} .$$

Le carré de la distance est donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{b \cdot (t - c)}{b^2 + 1} \right)^2 + \left(b \cdot \frac{b \cdot (t - c)}{b^2 + 1} + c - t \right)^2 &= (c - t)^2 \cdot \left[\frac{b^2}{(b^2 + 1)^2} + \left(\frac{b^2}{b^2 + 1} - 1 \right)^2 \right] = \\ &= \frac{(c - t)^2}{b^2 + 1} . \end{aligned}$$

La corde T se trouvant à la plus grande distance de D est donc celle pour laquelle $t = -\frac{b^2}{4a}$, puisque on a $c \geq t \geq -\frac{b^2}{4a}$, donc $0 \leq c - t \leq c + \frac{b^2}{4a}$. Posons

$$\Delta_t := b^2 + 4at .$$

La hauteur h du segment de parabole est donc

$$h = \sqrt{\frac{\left(c + \frac{b^2}{4a}\right)^2}{b^2 + 1}} = \frac{\Delta_c}{4a \cdot \sqrt{b^2 + 1}} .$$

Calculons maintenant les points d'intersection de D_t avec C . Cela revient à résoudre

$$a \cdot x^2 - b \cdot x - t = 0 .$$

On obtient

$$R = \left(\frac{1}{2a} \cdot (b - \sqrt{\Delta_t}), \frac{b}{2a} \cdot (b - \sqrt{\Delta_t}) + t \right)$$

et

$$S = \left(\frac{1}{2a} \cdot (b + \sqrt{\Delta_t}), \frac{b}{2a} \cdot (b + \sqrt{\Delta_t}) + t \right) .$$

Comme $\Delta_{-\frac{b^2}{4a}} = 0$, la corde T coupe C en un seul point

$$P = \left(\frac{b}{2a}, \frac{b^2}{4a} \right) .$$

C'est le sommet du segment. La pente de la tangente en ce point est

$$2a \cdot \frac{b}{2a} = b ;$$

cette tangente coïncide donc avec T . Ceci finit de prouver (a).

Comme

$$N = \left(\frac{b}{2a}, \frac{b^2}{2a} + t \right) ,$$

il vient

$$PN = \frac{b^2}{2a} + t - \frac{b^2}{4a} = \frac{b^2}{4a} + t ,$$

$$NR^2 = \frac{b}{2a} \cdot \Delta_t + \frac{b^2}{4a^2} \cdot \Delta_t = NS^2 ,$$

ce qui prouve (b), et par suite

$$\frac{PN}{PM} = \frac{\frac{b^2}{4a} + t}{\frac{b^2}{4a} + c} = \frac{\Delta_t}{\Delta_c} = \frac{\left(\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) \cdot \Delta_t}{\left(\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) \cdot \Delta_c} = \frac{NR^2}{MA^2} ,$$

donc (c).

Finalement calculons la surface S du segment de parabole. On a

$$\begin{aligned} S &= \int_{A_1}^{B_1} (b \cdot x + c - a \cdot x^2) dx = \left. \frac{b}{2} \cdot x^2 + c \cdot x - \frac{a}{3} \cdot x^3 \right|_{A_1}^{B_1} = \\ &= -\frac{x}{3} \cdot \left(a \cdot x^2 - b \cdot x - c - \frac{b}{2} \cdot x - 2c \right) \Big|_{A_1}^{B_1} = \frac{x}{6} \cdot (b \cdot x + 4c) \Big|_{A_1}^{B_1} = \\ &= \frac{b}{6} \cdot (B_1^2 - A_1^2) + \frac{2c}{3} \cdot (B_1 - A_1) = (B_1 - A_1) \cdot \left[\frac{b}{6} \cdot (B_1 + A_1) + \frac{2c}{3} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{\Delta_c}}{a} \cdot \left[\frac{b}{6} \cdot \frac{b}{a} + \frac{2c}{3} \right] = \frac{\sqrt{\Delta_c}}{6a^2} \cdot [b^2 + 4ac] = \frac{\Delta_c^{\frac{3}{2}}}{6a^2} . \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot \text{Surf}(\triangle ABP) &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot BA = \frac{4}{6} \cdot \frac{\Delta_c}{4a \cdot \sqrt{b^2 + 1}} \cdot \sqrt{(A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2} = \\ &= \frac{\Delta_c}{6a \cdot \sqrt{b^2 + 1}} \cdot \sqrt{\frac{\Delta_c}{a^2} + \frac{b^2 \cdot \Delta_c}{a^2}} = \frac{\Delta_c^{\frac{3}{2}}}{6a^2} , \end{aligned}$$

ce qu'Archimède a démontré!

Équation d'une conique

Nous allons déterminer l'équation d'une conique $C := Q \cap H$ intersection dans \mathbb{R}^3 d'un cône Q d'axe vertical et à base circulaire avec un plan H , en choisissant un système de coordonnées adéquat dans H .

Soit $(e_j)_{j=1,2,3}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Rappelons tout d'abord que si $r \in \mathbb{R}_+^*$ est le rayon du cône à la hauteur 1, on a

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2 \cdot x_3^2\} ;$$

l'équation de Q est donc

$$(x \mid Qx) = 0$$

avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$$

et où $(\cdot \mid \cdot)$ désigne le produit scalaire habituel sur \mathbb{R}^3 . Remarquons que Q est diagonale, donc symétrique.

Le plan H est donné par

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b\} ;$$

son équation est donc

$$(x \mid a) = b$$

avec

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R} .$$

Nous pouvons supposer, en remplaçant au besoin a par $\pm \frac{a}{|a|}$ et b par $\pm \frac{b}{|a|}$, que $|a| = 1$ et $b \geq 0$, puis que $a_3 \geq 0$, en remplaçant au besoin x_1 par $-x_1$ et x_3 par $-x_3$ et finalement que $a_1 \leq 0$ en remplaçant au besoin x_1 par $-x_1$ et x_2 par $-x_2$. L'orientation de notre système de coordonnées n'a donc pas été changée.

Soit donc

$$a \in \mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+) \quad , \quad a_1 \leq 0 \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}_+ .$$

On a

$$(a|Qa) = a_1^2 + a_2^2 - r^2 \cdot a_3^2 = 1 - a_3^2 - r^2 \cdot a_3^2 ,$$

et en définissant l'*excentricité* $e \in \mathbb{R}_+$ par

$$e^2 := (1 - a_3^2)(1 + r^2) = 1 + r^2 - a_3^2 - r^2 \cdot a_3^2 ,$$

il vient

$$(a|Qa) = e^2 - r^2 .$$

Il est aussi utile de définir

$$p := r \cdot b .$$

Soit H_0 le sous-espace vectoriel parallèle à H . Son équation est

$$(a|x) = 0 .$$

Nous allons donner l'équation de la conique $C := Q \cap H$ en utilisant une base $(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2)$ de \mathbb{R}^3 telle que $\epsilon_0 \in H$ et $\epsilon_1, \epsilon_2 \in H_0$, i.e. tels que $\epsilon_0 + \epsilon_j \in H$ pour $j = 1, 2$. Cela signifie que

$$(\epsilon_0|a) = b \quad , \quad (\epsilon_1|a) = 0 \quad \text{et} \quad (\epsilon_2|a) = 0 .$$

Puisque tout point de H s'écrit sous la forme

$$\sum_{j=0}^2 y_j \cdot \epsilon_j \quad \text{avec} \quad y_0 := 1 \quad \text{et} \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R} ,$$

l'équation de C est

$$0 = \left(\sum_{k=0}^2 y_k \cdot \epsilon_k \left| Q \left(\sum_{l=0}^2 y_l \cdot \epsilon_l \right) \right. \right) = \sum_{k,l=0}^2 (\epsilon_k | Q \epsilon_l) \cdot y_k \cdot y_l$$

ou bien

$$\begin{aligned} & (\epsilon_1 | Q \epsilon_1) \cdot y_1^2 + 2(\epsilon_1 | Q \epsilon_2) \cdot y_1 \cdot y_2 + (\epsilon_2 | Q \epsilon_2) \cdot y_2^2 \\ & + 2(\epsilon_0 | Q \epsilon_1) \cdot y_1 + 2(\epsilon_0 | Q \epsilon_2) \cdot y_2 + (\epsilon_0 | Q \epsilon_0) = 0 . \end{aligned} \quad (*)$$

C'est l'équation de second degré à deux variables

$$(\tilde{y} | M \tilde{y}) = A \cdot y_1^2 + 2B \cdot y_1 \cdot y_2 + C \cdot y_2^2 + 2D \cdot y_1 + 2E \cdot y_2 + F = 0$$

la plus générale, puisque l'on peut toujours supposer que la matrice $M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ est symétrique en remplaçant M par $\frac{1}{2} \cdot (M + M^\top)$:

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

EXERCICE Démontrer que toute matrice symétrique $M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ est de la forme

$$((\epsilon_k | Q \epsilon_l))_{k,l=0,1,2}$$

ci-dessus pour certains vecteurs $(\epsilon_j)_{j=0,1,2} \subset \mathbb{R}^3$ et une certaine matrice symétrique $Q \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.

Nous allons maintenant simplifier l'équation (*) en choisissant les vecteurs $\epsilon_1, \epsilon_2 \in H_0$ orthonormés, i.e. $|\epsilon_1| = |\epsilon_2| = 1$ et $(\epsilon_1 | \epsilon_2) = 0$, et guidé par l'intuition géométrique, nous prendrons

$$\epsilon_1 \in H_0 \cap (\mathbb{R} \cdot a + \mathbb{R} \cdot e_3),$$

donc de la forme $\epsilon_1 = \alpha \cdot a + \beta \cdot e_3$, tel que

$$1 = |\epsilon_1|^2 = (\alpha \cdot a + \beta \cdot e_3 | \alpha \cdot a + \beta \cdot e_3) = \alpha^2 + 2\alpha \cdot \beta \cdot a_3 + \beta^2$$

et $0 = (\epsilon_1 | a) = \alpha + \beta \cdot a_3$. Ainsi

$$1 = \beta^2 \cdot a_3^2 - 2\beta^2 \cdot a_3^2 + \beta^2 = \beta^2 \cdot (1 - a_3^2)$$

Attention ! Ceci n'est possible que si $1 - a_3^2 \neq 0$, i.e. $a \neq e_3$.

Cas $a \neq e_3$ Soit

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - a_3^2}} \quad \text{et} \quad \alpha = -\frac{a_3}{\sqrt{1 - a_3^2}},$$

donc

$$\epsilon_1 = -\frac{a_3}{\sqrt{1 - a_3^2}} \cdot a + \frac{1}{\sqrt{1 - a_3^2}} \cdot e_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - a_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} -a_3 \cdot a_1 \\ -a_3 \cdot a_2 \\ 1 - a_3^2 \end{pmatrix}$$

et par exemple

$$\epsilon_2 := \frac{1}{\sqrt{1 - a_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$0 = (\epsilon_1 | \epsilon_2) = \alpha \cdot (a | \epsilon_2) + \beta \cdot (e_3 | \epsilon_2) = \beta \cdot (e_3 | \epsilon_2),$$

donc $\epsilon_2 \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, ainsi que

$$(\epsilon_1 | Q \epsilon_1) = \frac{1}{1 - a_3^2} \cdot (a_3^2 \cdot a_1^2 + a_3^2 \cdot a_2^2 - r^2 \cdot (1 - a_3^2)^2) = a_3^2 - r^2 \cdot (1 - a_3^2) = 1 - e^2,$$

$$(\epsilon_2 | Q \epsilon_2) = (\epsilon_2 | \epsilon_2) = 1 \quad \text{et} \quad (\epsilon_1 | Q \epsilon_2) = (\epsilon_1 | \epsilon_2) = 0,$$

L'équation (*) prend donc la forme

$$(1 - e^2) \cdot y_1^2 + y_2^2 + 2(\epsilon_0 | Q \epsilon_1) \cdot y_1 + 2(\epsilon_0 | Q \epsilon_2) \cdot y_2 + (\epsilon_0 | Q \epsilon_0) = 0. \quad (**)$$

Cas $a = e_3$ Il suffit de prendre

$$\epsilon_1 := e_1 \quad \text{et} \quad \epsilon_2 := e_2.$$

On a évidemment

$$(\epsilon_1 | Q \epsilon_1) = (\epsilon_2 | Q \epsilon_2) = 1 \quad \text{et} \quad (\epsilon_1 | Q \epsilon_2) = (\epsilon_1 | \epsilon_2) = 0.$$

L'équation est donc aussi de la forme (**) avec $e = 0$!

Coniques centrées

Choisissons maintenant ϵ_0 tel que

$$Q\epsilon_0 = \lambda \cdot a \quad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}^* ,$$

i.e. $\epsilon_0 = \lambda \cdot Q^{-1}a$ avec

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} \end{pmatrix} .$$

Ce choix est naturel car pour $j = 1, 2$ nous voulons avoir

$$(\epsilon_j | Q\epsilon_0) = \lambda \cdot (\epsilon_j | a) = 0 .$$

Pour que $\epsilon_0 \in H$, il suffit que l'on ait

$$b = (\epsilon_0 | a) = \lambda \cdot \left(Q^{-1}a \middle| a \right) ,$$

i.e.

$$\lambda = \frac{b}{\left(a \middle| Q^{-1}a \right)} ,$$

pour autant que

$$0 \neq \left(a \middle| Q^{-1}a \right) = a_1^2 + a_2^2 - \frac{a_3^2}{r^2} = \frac{1}{r^2} \cdot [r^2 - r^2 a_3^2 - a_3^2] = \frac{e^2 - 1}{r^2} ,$$

c'est-à-dire

$$e \neq 1 \quad , \text{ i.e. } a_3^2 \neq \frac{r^2}{1 + r^2} .$$

Supposons donc que $e \neq 1$. On a alors

$$(\epsilon_0 | Q\epsilon_0) = \lambda^2 \cdot \left(Q^{-1}a \middle| Q \left(Q^{-1}a \right) \right) = \frac{b^2}{\left(a \middle| Q^{-1}a \right)} = \frac{p^2}{e^2 - 1} ,$$

et par suite

$$(\epsilon_k | Q\epsilon_l) = 0 \quad \text{pour tout } k, l = 0, 1, 2 \text{ tels que } k \neq l$$

puisque Q est symétrique et $(\epsilon_1 | Q\epsilon_2) = 0$.

L'équation (**) de C se met donc finalement sous la forme

$$(1 - e^2) \cdot y_1^2 + y_2^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}$$

ou encore

$$\frac{y_1^2}{\left(\frac{p}{1 - e^2} \right)^2} + \frac{y_2^2}{\frac{p^2}{1 - e^2}} = 1 .$$

On introduit en général les grandeurs

$$A := \frac{p}{|1 - e^2|} \quad \text{et} \quad B := \frac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}} .$$

REMARQUE Les paramétrages cartésiens canoniques sont

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} A \cdot \cos t \\ B \cdot \sin t \end{pmatrix} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

pour l'ellipse et

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \pm A \cdot \cosh t \\ B \cdot \sinh t \end{pmatrix} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

pour les deux branches de l'hyperbole contenue respectivement dans $\mathbb{R}_\pm \times \mathbb{R}$.

Soit $(y_1, y_2) \in C$. Dans le cas de l'ellipse, on a $\frac{y_1^2}{A^2} \leq 1$; il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $y_1 = A \cdot \cos t$. La relation

$$\frac{y_2^2}{B^2} = 1 - \frac{y_1^2}{A^2} = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t,$$

montre que $y_2 = B \cdot \sin t$ en changeant au besoin le signe de t , ce qui est possible puisque \cos est une fonction paire. Dans le cas de l'hyperbole, on a $\frac{y_1^2}{A^2} \geq 1$; il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $y_1 = A \cdot \cosh t$. La relation

$$\frac{y_2^2}{B^2} = 1 + \frac{y_1^2}{A^2} = 1 + \cosh^2 t = \sinh^2 t,$$

montre que $y_2 = B \cdot \sinh t$ en changeant au besoin le signe de t , ce qui est possible puisque \cosh est une fonction paire. □

Coniques passant par l'origine

Pour inclure le cas de la parabole

$$e = 1 \quad , \text{ i.e. } \quad a_3^2 = \frac{r^2}{1 + r^2},$$

ou encore $\left(a \left| \begin{smallmatrix} -1 \\ Qa \end{smallmatrix} \right. \right) = 0$, c'est-à-dire $(\epsilon_2 | Q\epsilon_2) = 0$, nous ne pouvons pas choisir ϵ_0 comme ci-dessus.

Nous allons choisir

$$\epsilon_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in C_+ := \{x \in C \mid x_3 \geq 0\}$$

le plus près possible de 0, i.e. $|\epsilon_0|$ minimal sous les conditions

$$(\epsilon_0 | a) = b \quad \text{et} \quad (\epsilon_0 | Q\epsilon_0) = 0.$$

Utilisant la dernière condition $u_1^2 + u_2^2 = r^2 \cdot u_3^2$, cela revient à minimiser u_3 sous ces conditions.

Cas $b = 0$ On a $0 \in C_+$, donc $\epsilon_0 = 0$. Réciproquement si $u_3 = 0$, alors $\epsilon_0 = 0$, donc $b = 0$. Dans ce cas l'équation (**) de C se réduit à

$$(1 - e^2) \cdot y_1^2 + y_2^2 = 0,$$

donc

$$C = \{(0, 0)\} \quad \text{si } e < 1$$

et

$$y_2 = \pm \sqrt{e^2 - 1} \cdot y_1 \quad \text{si } e \geq 1.$$

C'est une hyperbole dégénérée. Si $e = 1$, l'équation de C est $y_2 = 0$. C'est une parabole dégénérée représentant le passage de b par 0 : la parabole est ouverte vers le haut si $b > 0$ et ouverte vers le bas si $b < 0$.

Cas $b > 0$ Remarquons que $C_+ \neq \emptyset$, puisque les points

$$\begin{pmatrix} \pm \frac{r \cdot b \cdot a_2}{a_3 \cdot \sqrt{1-a_3^2}} \\ \mp \frac{r \cdot b \cdot a_1}{a_3 \cdot \sqrt{1-a_3^2}} \\ \frac{b}{a_3} \end{pmatrix} \text{ si } a_3 \neq 0, 1, \quad \begin{pmatrix} b \cdot a_1 \\ b \cdot a_2 \\ \frac{b}{r} \end{pmatrix} \text{ si } a_3 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} r \cdot b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \text{ si } a_3 = 1$$

appartiennent à C_+ . En outre $C_+ \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$. La recherche de ϵ_0 revient donc à minimiser la fonction

$$f : x \longrightarrow x_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

sous la condition $x \in C_+$, i.e.

$$F(x) := \begin{pmatrix} (x|a) - b \\ (x|Qx) \end{pmatrix} = 0.$$

Un tel point $\epsilon_0 \in C_+$ existe par compacité, en considérant l'intersection de C_+ avec une boule fermée de rayon assez grand.

Par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (Analyse, théorème 11.17) il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} e_3 &= \text{grad } f(\epsilon_0) = DF(\epsilon_0)^\top \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{1}{2}\mu \end{pmatrix} = \\ &= (a \quad 2 \cdot Q\epsilon_0) \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{1}{2}\mu \end{pmatrix} = \lambda \cdot a + \mu \cdot Q\epsilon_0, \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda \cdot a + \mu \cdot Q\epsilon_0 = e_3, \quad (*)$$

ainsi que

$$(\epsilon_0|a) = b \quad \text{et} \quad (\epsilon_0|Q\epsilon_0) = 0. \quad (**)$$

On en déduit

$$\lambda \cdot b \underset{(**)_1}{=} (\epsilon_0|\lambda \cdot a) \underset{(*)}{=} (\epsilon_0|e_3 - \mu \cdot Q\epsilon_0) \underset{(**)_2}{=} (\epsilon_0|e_3) = u_3,$$

donc $\lambda \neq 0$, puisque $u_3 \neq 0$, ainsi que

$$u_1^2 + u_2^2 \underset{(**)_2}{=} r^2 \cdot u_3^2 = \lambda^2 \cdot r^2 \cdot b^2.$$

Grâce à (*) il vient

$$\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot u_1 = 0, \quad \lambda \cdot a_2 + \mu \cdot u_2 = 0,$$

donc

$$\lambda^2 \cdot (1 - a_3^2) = \lambda^2 \cdot (a_1^2 + a_2^2) = \mu^2 \cdot (u_1^2 + u_2^2) \underset{(**)_2}{=} r^2 \cdot \mu^2 \cdot u_3^2 = r^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot b^2$$

et par suite

$$\mu = \pm \frac{\sqrt{1-a_3^2}}{r \cdot b} = \pm \frac{\sqrt{1-a_3^2}}{p}.$$

A nouveau par (\otimes) il vient finalement

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda \cdot a_3 - \mu \cdot r^2 \cdot u_3 = \left(\frac{a_3}{b} - \mu \cdot r^2 \right) \cdot u_3 = \left(\frac{a_3}{b} \mp \frac{\sqrt{1-a_3^2}}{b} \cdot r \right) \cdot u_3 = \\ &= \frac{1}{b} \cdot \left(a_3 \mp r \cdot \sqrt{1-a_3^2} \right) \cdot u_3 , \end{aligned}$$

donc

$$u_3 = \frac{b}{a_3 \mp r \cdot \sqrt{1-a_3^2}}$$

Puisque u_3 doit être minimal, on a nécessairement

$$u_3 = \frac{b}{a_3 + r \cdot \sqrt{1-a_3^2}} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{\sqrt{1-a_3^2}}{p} .$$

Sous-cas $a \neq e_3$ On a $a_3 \neq 1$, donc $\mu \neq 0$ et par conséquent

$$u_1 = \frac{\lambda}{-\mu} \cdot a_1 = \frac{u_3}{b} \cdot \frac{p}{\sqrt{1-a_3^2}} \cdot a_1 = \frac{p \cdot a_1}{(a_3 + r \cdot \sqrt{1-a_3^2}) \cdot \sqrt{1-a_3^2}} ,$$

ainsi que

$$u_2 = \frac{p \cdot a_2}{(a_3 + r \cdot \sqrt{1-a_3^2}) \cdot \sqrt{1-a_3^2}} .$$

On a donc

$$\epsilon_0 = \frac{1}{(a_3 + r \cdot \sqrt{1-a_3^2}) \cdot \sqrt{1-a_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot a_1 \\ p \cdot a_2 \\ b \cdot \sqrt{1-a_3^2} \end{pmatrix} .$$

Mais puisque

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{1-a_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} -a_3 \cdot a_1 \\ -a_3 \cdot a_2 \\ 1 - a_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{1-a_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

on obtient

$$\begin{aligned} (\epsilon_0 | Q \epsilon_1) &= \frac{1}{\sqrt{1-a_3^2}} \cdot [-a_3 \cdot a_1 \cdot u_1 - a_3 \cdot a_2 \cdot u_2 - r^2 \cdot (1-a_3^2) \cdot u_3] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-a_3^2}} \cdot \left[a_3 \cdot \frac{r^2 \cdot u_3^2}{b - a_3 \cdot u_3} \cdot (1-a_3^2) + r^2 \cdot (1-a_3^2) \cdot u_3 \right] = \\ &= -r^2 \cdot \sqrt{1-a_3^2} \cdot \frac{a_3 \cdot u_3^2 + b \cdot u_3 - a_3 \cdot u_3^2}{b - a_3 \cdot u_3} = -r^2 \cdot \sqrt{1-a_3^2} \cdot \frac{b}{\frac{b}{u_3} - a_3} = \\ &= -r^2 \cdot \sqrt{1-a_3^2} \cdot \frac{b}{a_3 + r \cdot \sqrt{1-a_3^2} - a_3} = -p . \end{aligned}$$

et

$$(\epsilon_0 | Q \epsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{1-a_3^2}} \cdot [a_2 \cdot u_1 - a_1 \cdot u_2] = 0 ,$$

Sous-cas $a = e_3$ On a $a_3 = 1$, donc $\mu = 0$ et $u_3 = b$. Nous pouvons ainsi choisir u_1 et u_2 sous la seule condition $(\otimes\otimes)_2$, par exemple $u_1 = -r \cdot b = -p$ et $u_2 = 0$. Ainsi

$$\epsilon_0 = \begin{pmatrix} -p \\ 0 \\ b \end{pmatrix} .$$

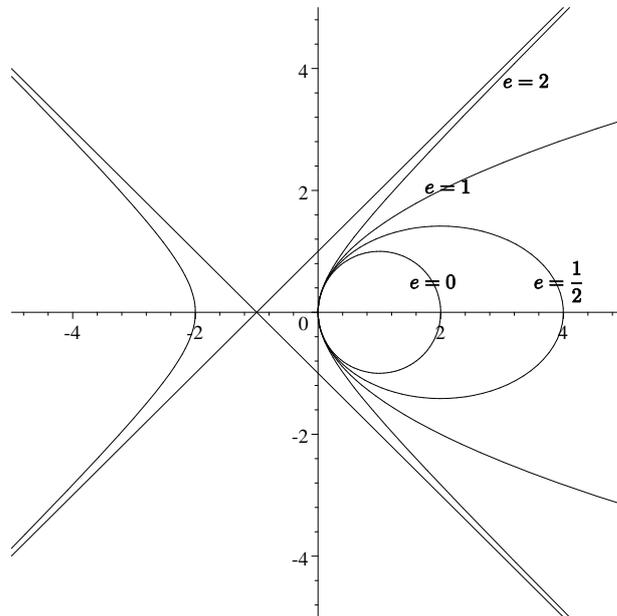
C'est la limite $a_3 \rightarrow 1$ du cas précédent, puisque $a_1 = -\sqrt{1 - a_3^2}$ ($a_1 \leq 0$!) lorsque $a_2 = 0$.

On a donc $e = 0$, $\epsilon_1 = e_1$ et $\epsilon_2 = e_2$, donc

$$(\epsilon_0 | Q\epsilon_1) = u_1 = -p \quad \text{et} \quad (\epsilon_0 | Q\epsilon_2) = u_2 = 0 .$$

Dans tous les cas l'équation $(**)$ de C se met sous la forme

$$(1 - e^2) \cdot y_1^2 + y_2^2 = 2p \cdot y_1 .$$



$$(1 - e^2) \cdot y_1^2 + y_2^2 = 2 \cdot y_1$$

C est ainsi respectivement une *ellipse* , une *parabole* et une *hyperbole* , si $p \neq 0$ et respectivement

$$\begin{array}{ll} e < 1 & a_3^2 > \frac{r^2}{1+r^2} \\ e = 1 & \text{i.e.} \quad a_3^2 = \frac{r^2}{1+r^2} \\ e > 1 & a_3^2 < \frac{r^2}{1+r^2} \end{array} .$$

Rappelons que si $p = 0$, i.e. $b = 0$, l'ellipse est réduite à $\{(0,0)\}$, la parabole et l'hyperbole sont dégénérées en les droites

$$y_2 = 0 \quad \text{et respectivement} \quad y_2 = \pm \frac{y_1}{\sqrt{e^2 - 1}} .$$

REMARQUE Puisque l'équation peut s'écrire sous la forme

$$|y|^2 - e^2 \cdot y_1^2 = (1 - e^2) \cdot y_1^2 + y_2^2 = 2p \cdot y_1$$

ou bien

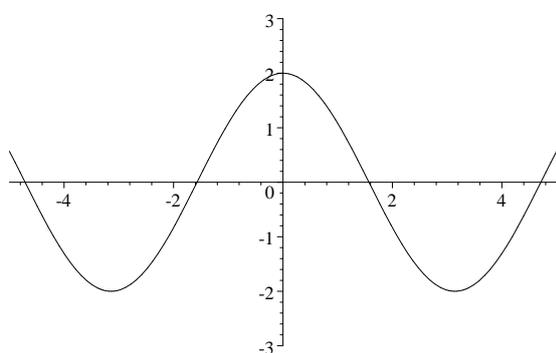
$$|y| \cdot \left(1 - e^2 \cdot \left(\frac{y_1}{|y|} \right)^2 \right) = 2p \cdot \frac{y_1}{|y|} ,$$

on obtient un paramétrage en coordonnées polaires

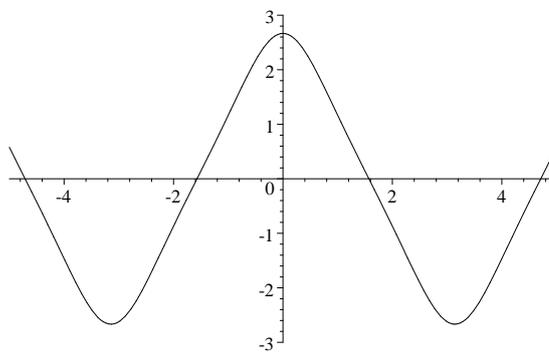
$$r = \frac{2p \cdot \cos \theta}{1 - e^2 \cdot \cos^2 \theta} .$$

En effet il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{y_1}{|y|} = \cos \theta$ et que r comme ci-dessus soit strictement positif. Mais dans quel intervalle faut-il choisir θ ? Cela revient à discuter la fonction $\theta \mapsto \frac{2p \cdot \cos \theta}{1 - e^2 \cdot \cos^2 \theta}$.

Si $e < 1$, il suffit de prendre $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

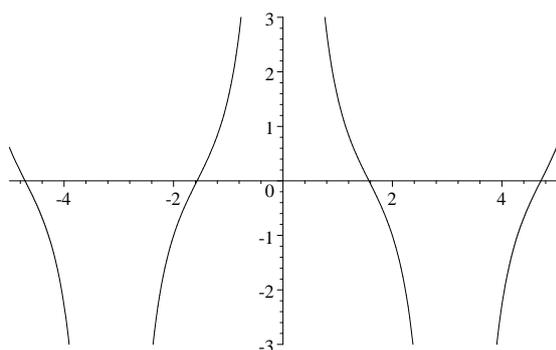


$e = 0$ et $p = 1$

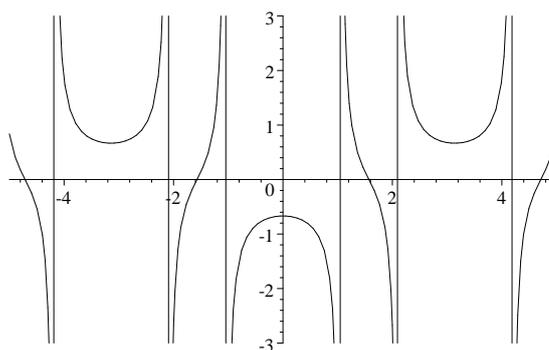


$e = \frac{1}{2}$ et $p = 1$

Si $e \geq 1$, le graphe de cette fonction est de la forme



$e = 1$ et $p = 1$
 $\theta \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$



$e = 2$ et $p = 1$
 $\theta \notin \pm \frac{\pi}{3} + \pi \cdot \mathbb{Z}$

Il faut tout d'abord exclure les points $\pm \arccos \frac{1}{e} + \pi \cdot \mathbb{Z}$, à moins d'accepter le passage par l'infini. Si $e > 1$ et si l'on veut en outre paramétrer les deux branches de l'hyperbole à l'aide d'un intervalle, il est nécessaire que r prenne des valeurs négatives. Il suffit donc de prendre $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{ \pm \arccos \frac{1}{e} \right\}$.

La boule de glace

Rappelons qu'un vecteur normal à une surface continûment dérivable définie par une équation $F(x) = 0$ en un point non-critique ξ est $\text{grad } F(\xi) \neq 0$. En outre deux surfaces sont tangentes en un point si les vecteurs normaux en ce point sont colinéaires. Finalement deux vecteurs $s, t \in \mathbb{R}^n$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$|(s|t)| = |s| \cdot |t| \quad , \text{ i.e. } (s|t)^2 - |s|^2 \cdot |t|^2 = 0 ;$$

en outre

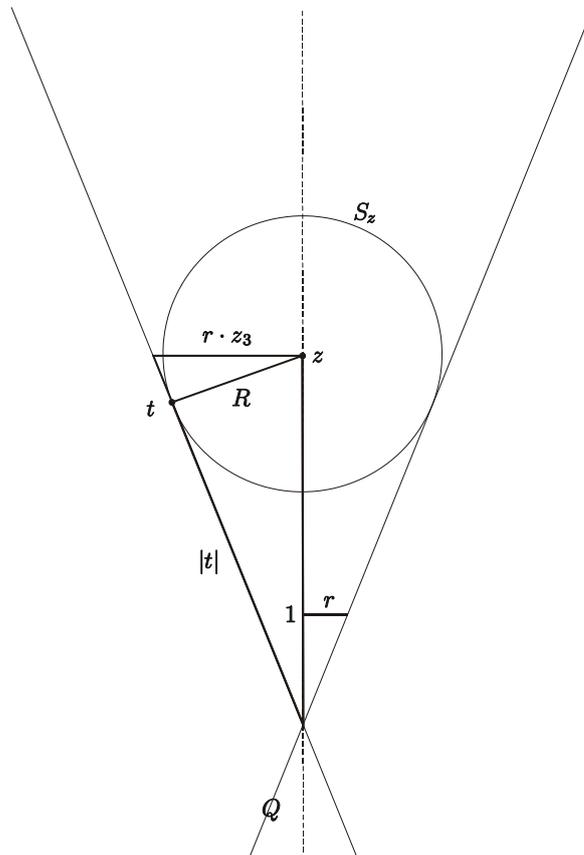
$$\text{grad}(a|\diamond)(\xi) = a \quad \text{et} \quad \text{grad}(\diamond|Q\diamond)(\xi) = 2Q\xi .$$

Nous voulons résoudre le problème suivant. Déterminer le centre z d'une sphère S_z , de rayon $R > 0$ donné, contenue dans

$$Q_{\leq,+} := \{(\diamond|Q\diamond) \leq 0 \text{ et } \diamond_3 \geq 0\}$$

et telle que $|z|$ soit minimal.

(1) Ce problème est grâce à notre intuition géométrique très simple.



Le centre z doit se trouver sur l'axe du cône, i.e. $z_1 = z_2 = 0$ et $z_3 > 0$, et si $t \in S_z$ est un point de tangence à Q , le théorème de Pythagore et la similitude des deux triangles rectangles nous permet d'écrire

$$z_3^2 = |t|^2 + R^2 \quad \text{et} \quad \frac{|t|}{z_3} = \frac{R}{r \cdot z_3} ,$$

donc

$$z_3^2 = \frac{R^2}{r^2} + R^2 \quad , \text{ i.e. } \quad z_3 = \frac{\sqrt{r^2 + 1}}{r} \cdot R .$$

(2) Mais si l'on veut procéder de manière purement analytique, sans intuitions géométrique, la situation se complique généreusement ! En contre-partie nous résoudrons d'autres problèmes.

Il nous faut tout d'abord exprimer la condition $S_z \subset Q_{\leq,+}$ sous la forme $z \in Q_{\leq,+}$ et $d(z, Q_+) \geq R$.

En effet pour tout $x \in S_z$, la droite passant par z et x coupe le cône convexe $Q_{\leq,+}$ (la fonction $(\diamond|Q\diamond)$ est convexe !) en un segment dont les extrémités sont dans Q_+ ; puisque $|x - z| \leq d(z, Q_+)$, on en déduit que x appartient à ce segment.

Nous définirons $\rho \in \mathbb{R}_+$ par $\rho^2 := z_1^2 + z_2^2$ pour simplifier les expressions. Par exemple

$$(z|Qz) = \rho^2 - r^2 \cdot z_3^2 = -(r \cdot z_3 - \rho) \cdot (r \cdot z_3 + \rho) .$$

Si $z \in Q_{<,+}$, on a $z_3 > 0$, puisque $0 > (z|Qz) = \rho^2 - \frac{1}{r^2} \cdot z_3^2$ entraîne $z_3 \neq 0$ et

$$0 < r \cdot z_3 - \rho \leq r \cdot z_3 + \rho .$$

(3) Pour tout $z \in Q_{\leq,+}$, calculons

$$d(z, Q_+) = \inf \{ |x - z|^2 \mid (x|Qx) = 0 \text{ et } x_3 \geq 0 \} .$$

Si $z \in Q_+$, on a $d(z, Q_+) = 0$. Nous pouvons donc supposer que $z \in Q_{<,+}$ et montrons qu'il existe un point $t \in Q_+$ en lequel $x \mapsto |x - z| : Q \rightarrow \mathbb{R}$ atteint son minimum absolu. Par compacité de $Q_+ \cap B_{|z|}(z)$ et puisque pour tout $x \in Q_+ \setminus B_{|z|}(z)$, on a $|x - z| > |z| = |0 - z|$, il existe un tel $t \in B_{|z|}(z)$.

On a $t \neq 0$; en effet remarquons tout d'abord qu'il existe $y \in Q_+$ tel que $(y|z) > 0$, par exemple

$$y = z_1 \cdot e_1 + z_2 \cdot e_2 + \frac{\rho}{r} \cdot e_3 \quad , \text{ si } \quad z_1 \cdot e_1 + z_2 \cdot e_2 \neq 0$$

ou

$$y = e_1 + \frac{1}{r} \cdot e_3 \quad , \text{ si } \quad z_1 \cdot e_1 + z_2 \cdot e_2 = 0 .$$

Il nous suffit maintenant de prouver qu'il existe un $x \in Q_+$ tel que $|x - z| < |z| = |0 - z|$. Mais dans le cas contraire, pour tout $x \in Q_+$, on aurait

$$|x - z| \geq |z| \quad , \text{ i.e. } \quad |x|^2 \geq 2(x|z) ,$$

et par suite

$$\lambda^2 \cdot |y|^2 \geq 2\lambda \cdot (y|z) > 0 \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}_+^* ,$$

donc $\lambda \cdot |y|^2 \geq 2(y|z) > 0$, ce qui est absurde.

Par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (Analyse, théorème 11.17) et puisque $t \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$2 \cdot (t - z) = \text{grad } |\diamond - z|^2(t) = \lambda \cdot \text{grad } (\diamond|Q\diamond)(t) = 2\lambda \cdot Qt ,$$

i.e.

$$t - z = \lambda \cdot Qt .$$

Par les remarques ci-dessus, cela signifie que t est un point de tangence à Q de la sphère de rayon $|t - z|$ et de centre z .

(4) En excluant les cas $\lambda \in \frac{1}{\text{sp}Q} = \{1, -\frac{1}{r^2}\}$, on a

$$t = (\text{Id} - \lambda \cdot Q)^{-1} z ,$$

où

$$\text{Id} - \lambda \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 + r^2 \cdot \lambda \end{pmatrix} .$$

Ainsi

$$t - z = \lambda \cdot Qt = \lambda \cdot Q (\text{Id} - \lambda \cdot Q)^{-1} z$$

et, puisque ces matrices sont diagonales (donc symétriques), il vient

$$\begin{aligned} |t - z|^2 &= \lambda^2 \cdot (z | Q^2 (\text{Id} - \lambda \cdot Q)^{-2} z) = \\ &= \lambda^2 \cdot \left(z \left| \begin{pmatrix} (1 - \lambda)^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \lambda)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^4 \cdot (1 + r^2 \cdot \lambda)^{-2} \end{pmatrix} z \right. \right) = \\ &= \lambda^2 \cdot \left[(1 - \lambda)^{-2} \cdot \rho^2 + r^4 \cdot (1 + r^2 \cdot \lambda)^{-2} \cdot z_3^2 \right] . \end{aligned}$$

Il nous reste à déterminer λ . Mais

$$\begin{aligned} 0 &= (t | Qt) = (z | Q (\text{Id} - \lambda \cdot Q)^{-2} z) = \\ &= \left(z \left| \begin{pmatrix} (1 - \lambda)^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \lambda)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \cdot (1 + r^2 \cdot \lambda)^{-2} \end{pmatrix} z \right. \right) = \\ &= (1 - \lambda)^{-2} \cdot \rho^2 - r^2 \cdot (1 + r^2 \cdot \lambda)^{-2} \cdot z_3^2 . \end{aligned}$$

Ainsi

$$|t - z|^2 = \frac{\lambda^2 \cdot r^2 \cdot (r^2 + 1)}{(1 + r^2 \cdot \lambda)^2} \cdot z_3^2 = \frac{r^2 \cdot (r^2 + 1)}{\left(\frac{1}{\lambda} + r^2\right)^2} \cdot z_3^2 .$$

et

$$(1 + r^2 \cdot \lambda)^2 \cdot \rho^2 - r^2 \cdot (1 - \lambda)^2 \cdot z_3^2 = 0 .$$

(5) Cette équation quadratique en λ se met sous la forme

$$r^2 \cdot (r^2 \cdot \rho^2 - z_3^2) \cdot \lambda^2 + 2r^2 \cdot (\rho^2 + z_3^2) \cdot \lambda + \rho^2 - r^2 \cdot z_3^2 = 0 .$$

(a) Si $r^2 \cdot \rho^2 - z_3^2 = 0$, i.e. $z_3 = r \cdot \rho$, alors

$$\lambda = \frac{r^2 \cdot z_3^2 - \rho^2}{2r^2 \cdot (\rho^2 + z_3^2)} = \frac{r^4 \cdot \rho^2 - \rho^2}{2r^2 \cdot (\rho^2 + r^2 \cdot \rho^2)} = \frac{r^4 - 1}{2r^2 \cdot (r^2 + 1)} = \frac{r^2 - 1}{2r^2} ,$$

donc

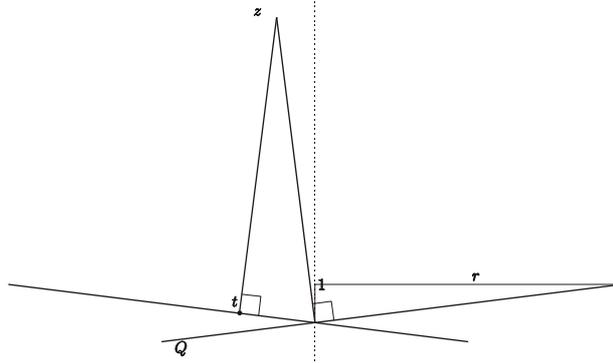
$$|t - z|^2 = \frac{r^2 \cdot (r^2 + 1)}{\left(\frac{2r^2}{r^2 - 1} + r^2\right)^2} \cdot z_3^2 = \frac{r^2 \cdot (r^2 + 1) \cdot (r^2 - 1)^2}{r^4 \cdot (r^2 + 1)^2} \cdot z_3^2 = \frac{(r^2 - 1)^2}{r^2 \cdot (r^2 + 1)} \cdot z_3^2 .$$

Ainsi

$$d(z, Q) = \frac{r^2 - 1}{r \cdot \sqrt{r^2 + 1}} \cdot z_3 ,$$

car $0 < r \cdot z_3 - \rho = (r^2 - 1) \cdot \rho$.

Ce cas correspond à la situation géométrique suivante où z est orthogonal à l'une des génératrices de Q_+ :



(b) Si $r^2 \cdot \rho^2 - z_3^2 \neq 0$, alors les solutions sont

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \frac{-r^2 \cdot (\rho^2 + z_3^2) \pm \sqrt{r^4 \cdot (\rho^2 + z_3^2)^2 - r^2 \cdot (r^2 \cdot \rho^2 - z_3^2) \cdot (\rho^2 - r^2 \cdot z_3^2)}}{r^2 \cdot (r^2 \cdot \rho^2 - z_3^2)} = \\ &= \frac{-r \cdot (\rho^2 + z_3^2) \pm (r^2 + 1) \cdot \rho \cdot z_3}{r \cdot (r \cdot \rho - z_3) \cdot (r \cdot \rho + z_3)} = -\frac{(\rho \mp r \cdot z_3) \cdot (r \cdot \rho \mp z_3)}{r \cdot (r \cdot \rho - z_3) \cdot (r \cdot \rho + z_3)} = -\frac{\rho \mp r \cdot z_3}{r \cdot (r \cdot \rho \pm z_3)} , \end{aligned}$$

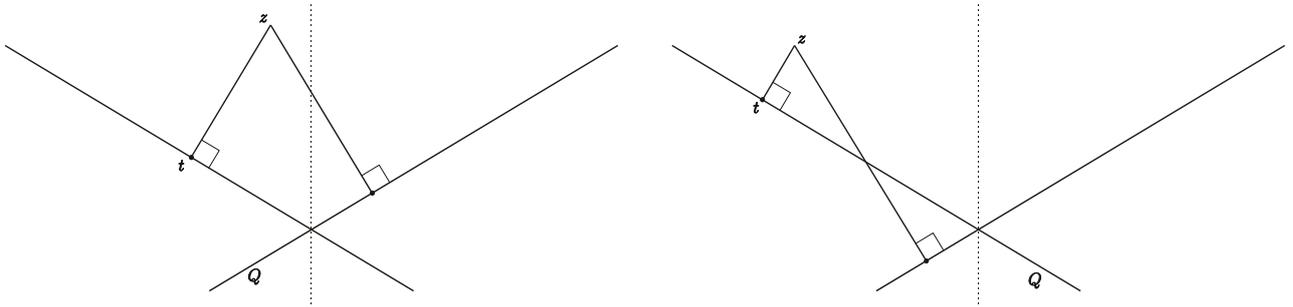
donc

$$\begin{aligned} |t - z|^2 &= \frac{r^2 \cdot (r^2 + 1)}{\left(-\frac{r \cdot (r \cdot \rho \pm z_3)}{\rho \mp r \cdot z_3} + r^2\right)^2} \cdot z_3^2 = \frac{r^2 \cdot (r^2 + 1) \cdot (\rho \mp r \cdot z_3)^2}{(-r \cdot (r \cdot \rho \pm z_3) + r^2 \cdot (\rho \mp r \cdot z_3))^2} \cdot z_3^2 = \\ &= \frac{r^2 \cdot (r^2 + 1) \cdot (r \cdot z_3 \pm \rho)^2}{(\mp r \cdot z_3 \mp r^3 \cdot z_3)^2} \cdot z_3^2 = \frac{(r \cdot z_3 \pm \rho)^2}{1 + r^2} . \end{aligned}$$

Ainsi

$$d(z, Q) = \frac{r \cdot z_3 - \rho}{\sqrt{r^2 + 1}} .$$

Dans ce cas il y a deux minima locaux dans Q , mais peut-être un seul dans Q_+ :



(6) Il nous reste à étudier les cas $\lambda \in \{1, -\frac{1}{r^2}\}$.

(a) Si $\lambda = -\frac{1}{r^2}$, alors

$$z = \left(\text{Id} + \frac{1}{r^2} \cdot Q\right) t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 2 \cdot t_1 \\ 2 \cdot t_2 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

i.e. $z_3 = 0$, ce qui est exclu.

(b) Si $\lambda = 1$, alors

$$z = (\text{Id} - Q)t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 + 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (r^2 + 1) \cdot t_3 \end{pmatrix} .$$

En particulier $z_1 = z_2 = 0$. Remarquer que seuls t_3 et $t_1^2 + t_2^2$ sont univoquement déterminés, puisque

$$0 = (t|Qt) = t_1^2 + t_2^2 - r^2 \cdot t_3^2 = t_1^2 + t_2^2 - \frac{r^2 \cdot z_3^2}{(r^2 + 1)^2} .$$

Il vient alors

$$|t - z|^2 = |Qt|^2 = t_1^2 + t_2^2 + r^4 \cdot t_3^2 = \left(\frac{r^2}{(r^2 + 1)^2} + \frac{r^4}{(r^2 + 1)^2} \right) \cdot z_3^2 = \frac{r^2}{r^2 + 1} \cdot z_3^2 ,$$

donc

$$d(z, Q) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}} \cdot z_3 .$$

(7) Dans tous les cas on a

$$d(z, Q) = \frac{r \cdot z_3 - \rho}{\sqrt{r^2 + 1}} .$$

(8) Notre problème initial revient donc, R étant donné, à minimiser $|z|^2$ sous la condition $d(z, Q) \geq R$, i.e.

$$\frac{r \cdot z_3 - \rho}{\sqrt{r^2 + 1}} \geq R$$

ou bien

$$0 \leq \rho \leq r \cdot z_3 - \sqrt{r^2 + 1} \cdot R .$$

Il est évident que $|z|^2$ est minimal si $0 = \rho = r \cdot z_3 - \sqrt{r^2 + 1} \cdot R$, i.e. z se trouve sur l'axe du cône, $z_1 = z_2 = 0$, et

$$z_3 = \frac{\sqrt{r^2 + 1}}{r} \cdot R ,$$

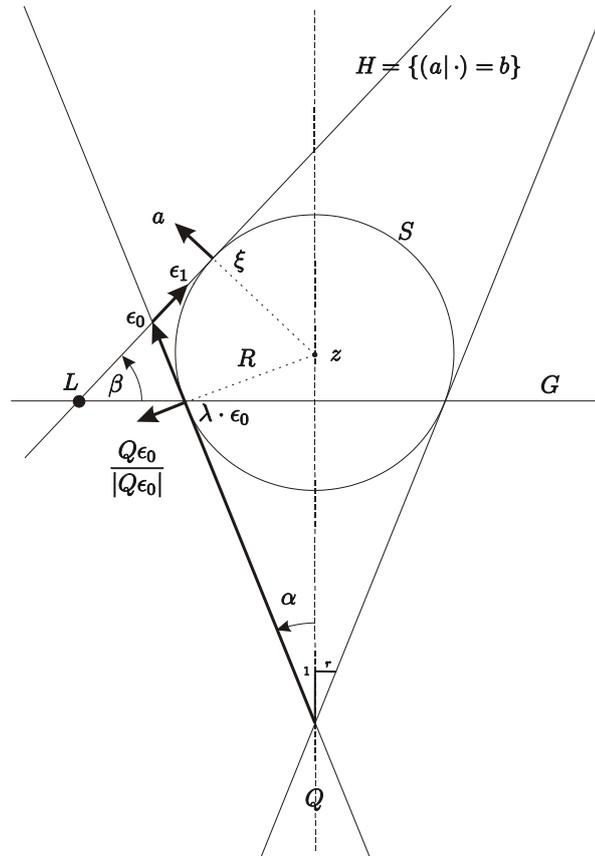
comme nous l'avons déjà démontré de manière géométrique en (1).

Le foyer d'une conique

Le foyer d'une section conique est introduit de la manière suivante. Soit S une sphère de centre $z = z_3 \cdot e_3$ avec $z_3 \in \mathbb{R}_+^*$ et tangente au cône Q suivant un cercle horizontal intersection d'un plan G avec Q . Nous allons déterminer les sphères de ce type qui sont en plus tangentes en ξ avec le plan $H = \{(a|\cdot) = b\}$. On dit que ξ est un *foyer* de la conique C .

Nous choisirons ϵ_0 comme dans le paragraphe "Coniques passant par l'origine" et soit R le rayon de cette sphère. Nous pouvons raisonner dans le plan (ϵ_0, ϵ_1) et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \cdot \epsilon_0$

soit un point de tangence de S avec Q .



On a les équations

$$(\xi|a) = b \quad , \quad \xi = z + R \cdot a \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \epsilon_0 = z + R \cdot \frac{Q\epsilon_0}{|Q\epsilon_0|} \quad ,$$

donc

$$b = (\xi|a) = (z + R \cdot a|a) = (z|a) + R \quad , \text{i.e.} \quad R = b - a_3 \cdot z_3 \quad ,$$

et

$$0 = \lambda \cdot (\epsilon_0|Q\epsilon_0) = \left(z + R \cdot \frac{Q\epsilon_0}{|Q\epsilon_0|} \middle| Q\epsilon_0 \right) = (z|Q\epsilon_0) + R \cdot |Q\epsilon_0| \quad .$$

Mais comme $u_1^2 + u_2^2 = r^2 \cdot u_3^2$ par $(\otimes\otimes)_2$, on a $|Q\epsilon_0|^2 = u_1^2 + u_2^2 + r^4 \cdot u_3^2 = r^2 \cdot (r^2 + 1) \cdot u_3^2$ et on obtient

$$r^2 \cdot u_3 \cdot z_3 = (b - a_3 \cdot z_3) \cdot r \sqrt{r^2 + 1} \cdot u_3 \quad ,$$

donc

$$z_3 = \frac{\sqrt{r^2 + 1} \cdot b}{r + \sqrt{r^2 + 1} \cdot a_3}$$

et

$$R = b - \frac{\sqrt{r^2 + 1} \cdot b \cdot a_3}{r + \sqrt{r^2 + 1} \cdot a_3} = \frac{r \cdot b}{r + \sqrt{r^2 + 1} \cdot a_3} \quad .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\xi = z + R \cdot a &= \frac{b}{r + \sqrt{r^2 + 1} \cdot a_3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{r^2 + 1} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{r + \sqrt{r^2 + 1} \cdot a_3} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot a_1 \\ p \cdot a_2 \\ b \cdot (\sqrt{r^2 + 1} + r \cdot a_3) \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Cas $a \neq e_3$ En utilisant les égalités remarquables

$$\begin{aligned}\left(a_3 + r \cdot \sqrt{1 - a_3^2} \right) \cdot \left(a_3 - r \cdot \sqrt{1 - a_3^2} \right) &= a_3^2 - r^2 \cdot (1 - a_3^2) = \\ &= 1 - e^2 = \\ &= (r^2 + 1) \cdot a_3^2 - r^2 = \left(\sqrt{r^2 + 1} \cdot a_3 + r \right) \cdot \left(\sqrt{r^2 + 1} \cdot a_3 - r \right) ,\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}\xi - \epsilon_0 &= \frac{1}{r + \sqrt{r^2 + 1} \cdot a_3} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot a_1 \\ p \cdot a_2 \\ b \cdot (\sqrt{r^2 + 1} + r \cdot a_3) \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{\left(a_3 + r \cdot \sqrt{1 - a_3^2} \right) \cdot \sqrt{1 - a_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot a_1 \\ p \cdot a_2 \\ b \cdot \sqrt{1 - a_3^2} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{r^2 + 1} \cdot a_3 - r}{1 - e^2} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot a_1 \\ p \cdot a_2 \\ b \cdot (\sqrt{r^2 + 1} + r \cdot a_3) \end{pmatrix} - \frac{a_3 - r \cdot \sqrt{1 - a_3^2}}{(1 - e^2) \cdot \sqrt{1 - a_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot a_1 \\ p \cdot a_2 \\ b \cdot \sqrt{1 - a_3^2} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{p}{1 - e^2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 + 1} \cdot a_3 - \frac{a_3}{\sqrt{1 - a_3^2}} \\ \frac{a_2}{\sqrt{1 - a_3^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{b}{1 - e^2} \cdot \left(\left(\sqrt{r^2 + 1} \cdot a_3 - r \right) \cdot \left(\sqrt{r^2 + 1} + r \cdot a_3 \right) - \left(a_3 - r \cdot \sqrt{1 - a_3^2} \right) \right) \cdot e_3 = \\ &= \frac{p}{1 + e} \cdot \epsilon_1 ,\end{aligned}$$

puisque $e = \sqrt{r^2 + 1} \cdot \sqrt{1 - a_3^2}$.

Cas $a = e_3$ On a

$$\xi - \epsilon_0 = \frac{1}{r + \sqrt{r^2 + 1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \cdot (\sqrt{r^2 + 1} + r) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -p \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = p \cdot e_1 = \frac{p}{1 + e} \cdot \epsilon_1 ,$$

puisque $e = 0$!

Nous avons donc montré dans les deux cas que

$$\xi = \epsilon_0 + \frac{p}{1 + e} \cdot \epsilon_1 ,$$

donc que le foyer d'une section coniques d'équation

$$(1 - e^2) \cdot y_1^2 + y_2^2 = 2p \cdot y_1$$

est en

$$\left(\frac{p}{1+e}, 0 \right) .$$

L'axe des y_1 est dit *focal* .

Remarquons que

$$\left(\frac{p}{1+e}, p \right) \in C_+ .$$

EXERCICE Discuter le cas où l'on remplace la deuxième équation $\xi = z + R \cdot a$ par $\xi = z - R \cdot a$. Montrer en particulier que s'il existe une solution, on a nécessairement $e < 1$! Une ellipse possède donc deux foyers ; le second est en

$$\left(\frac{p}{1-e}, 0 \right) .$$

La droite directrice

Soient α le demi-angle d'ouverture du cône et β l'angle entre le plan H et le plan G contenant le cercle de contact entre la sphère et le cône. On a

$$\cos \alpha = \frac{u_3}{|\epsilon_0|} = \frac{u_3}{\sqrt{1+r^2} \cdot u_3} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$$

et

$$\sin \beta = \frac{1 - a_3^2}{\sqrt{1 - a_3^2}} = \sqrt{1 - a_3^2} ,$$

donc

$$e = \sqrt{1+r^2} \cdot \sqrt{1 - a_3^2} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} .$$

La droite L intersection des plans H et G est dite la *directrice* de la conique.

L'équation de L est

$$y_1 = d(0, L) .$$

Pour tout $y = (y_1, y_2) \in C$, i.e. $(1 - e^2) \cdot y_1^2 + y_2^2 = 2p \cdot y_1$, on a

$$\begin{aligned} |y - \xi|^2 &= \left(y_1 - \frac{p}{1+e} \right)^2 + y_2^2 = y_1^2 + y_2^2 - \frac{2p}{1+e} \cdot y_1 + \frac{p^2}{(1+e)^2} = \\ &= e^2 \cdot y_1^2 + 2p \cdot y_1 - \frac{2p}{1+e} \cdot y_1 + \frac{p^2}{(1+e)^2} = \\ &= e^2 \cdot y_1^2 + \frac{2pe}{1+e} \cdot y_1 + \frac{p^2}{(1+e)^2} = \left(e \cdot y_1 + \frac{p}{1+e} \right)^2 , \end{aligned}$$

donc

$$d(y, \xi) = e \cdot y_1 + \frac{p}{1+e},$$

et

$$\begin{aligned} d(0, L) &= d(\epsilon_0, L) = \frac{1}{\sin \beta} \cdot \text{pr}_3(\epsilon_0 - \lambda \cdot \epsilon_0) = \frac{1}{\sin \beta} \cdot \text{pr}_3\left(\epsilon_0 - z - R \cdot \frac{Q\epsilon_0}{|Q\epsilon_0|}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-a_3^2}} \cdot \left(u_3 - z_3 - (b - a_3 \cdot z_3) \cdot \frac{-r}{\sqrt{r^2+1}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-a_3^2}} \cdot \left(\frac{b}{a_3 + r \cdot \sqrt{1-a_3^2}} - \frac{\sqrt{r^2+1} \cdot b}{r + \sqrt{r^2+1} \cdot a_3} + \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} \cdot \left(b - \frac{\sqrt{r^2+1} \cdot b \cdot a_3}{r + \sqrt{r^2+1} \cdot a_3}\right)\right) = \\ &= \frac{b}{(1-e^2) \cdot \sqrt{1-a_3^2}} \cdot \left(a_3 - r \cdot \sqrt{1-a_3^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{r^2+1} \cdot (\sqrt{r^2+1} \cdot a_3 - r) + \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}} \cdot (\sqrt{r^2+1} \cdot a_3 - r)\right) \\ &= \frac{b}{(1-e^2) \cdot \sqrt{r^2+1} \cdot \sqrt{1-a_3^2}} \cdot \left(-r \cdot \sqrt{r^2+1} \cdot \sqrt{1-a_3^2} + r\right) = \\ &= \frac{p \cdot (1-e)}{(1-e^2) \cdot e} = \frac{p}{e \cdot (e+1)}; \end{aligned}$$

ainsi

$$d(y, L) = y_1 + d(0, L) = y_1 + \frac{p}{e \cdot (e+1)},$$

et finalement

$$d(y, \xi) = e \cdot d(y, L),$$

i.e. le rapport de la distance d'un point sur la section conique au foyer à celle de ce point à la droite directrice est constant et égal à l'excentricité.

REMARQUE En mettant le foyer à l'origine l'équation de la conique C prend la forme

$$(1-e^2) \cdot \left(y_1 + \frac{p}{1+e}\right)^2 + y_2^2 = 2p \cdot \left(y_1 + \frac{p}{1+e}\right),$$

i.e.

$$|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 = e^2 \cdot y_1^2 + [2p - 2p \cdot (1-e)] \cdot y_1 + \frac{2p^2}{1+e} - \frac{(1-e^2) \cdot p^2}{(1+e)^2} = (e \cdot y_1 + p)^2$$

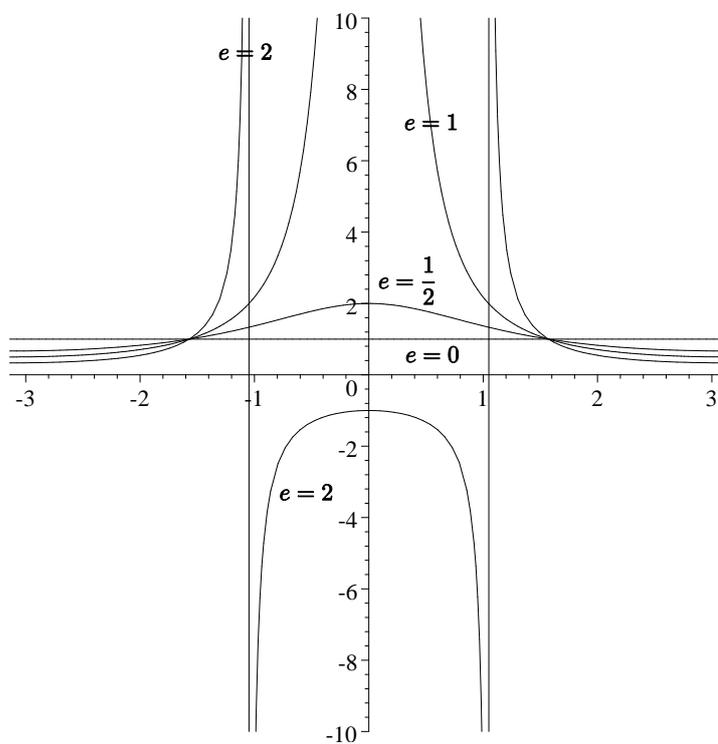
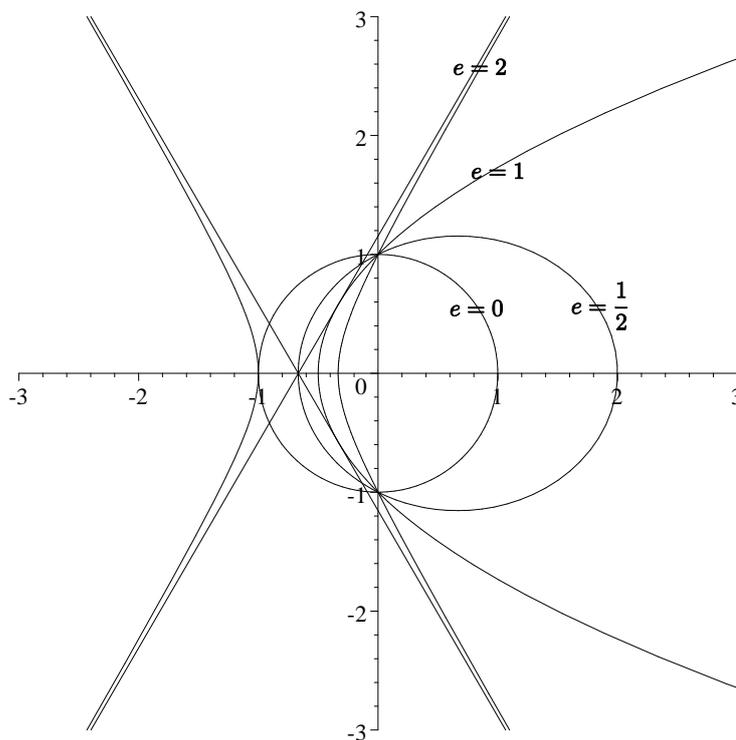
ou encore

$$\left(e \cdot \frac{y_1}{|y|} + \frac{p}{|y|}\right)^2 = 1.$$

On obtient donc un paramétrage en coordonnées polaires

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \theta}$$

et il suffit de prendre $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{\pm \arccos \frac{1}{e}\}$ en acceptant que r prenne des valeurs négatives .



L'ellipse ou la méthode du jardinier

Soient $A, B \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B \leq A$. L'équation de l'ellipse centrée en $(0, 0)$ de demi grand

axe A et de demi petit axe B est

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 .$$

L'excentricité est

$$e = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} \in [0, 1[$$

et on a $p = \frac{B^2}{A}$ (cf. "Coniques centrées"). Rappelons que

$$A = \frac{p}{1 - e^2} .$$

Le foyer (cf. "Le foyer d'une conique") se trouve donc sur l'axe des x en

$$F_- := -A + \frac{p}{1 + e} = -\frac{p}{1 - e^2} + \frac{p}{1 + e} = -\frac{p \cdot e}{1 - e^2} = -A \cdot e .$$

L'autre (cf. exercice ci-dessus) se trouve en

$$F_+ := -A + \frac{p}{1 - e} = -\frac{p}{1 - e^2} + \frac{p}{1 - e} = \frac{p \cdot e}{1 - e^2} = A \cdot e .$$

Les foyers de l'ellipse sont caractéristiques pour la construction de l'ellipse par la méthode du jardinier : c'est le lieu des points $P = (x, y)$ tels que

$$d(F_+, P) + d(P, F_-) \text{ soit constante.}$$

En effet comme

$$d(F_+, (A, 0)) + d((A, 0), F_-) = (A - A \cdot e) + (A + A \cdot e) = 2A ,$$

on obtient comme équation

$$\sqrt{(x - A \cdot e)^2 + y^2} + \sqrt{(x + A \cdot e)^2 + y^2} = 2A ,$$

qui est successivement équivalente à

$$(x - A \cdot e)^2 + y^2 = 4A^2 - 4A \cdot \sqrt{(x + A \cdot e)^2 + y^2} + (x + A \cdot e)^2 + y^2 ,$$

$$\sqrt{(x + A \cdot e)^2 + y^2} = A + e \cdot x ,$$

$$(x + A \cdot e)^2 + y^2 = (A + e \cdot x)^2 ,$$

$$x^2 + A^2 \cdot e^2 + y^2 = A^2 + e^2 \cdot x^2 ,$$

$$x^2 + A^2 - B^2 + y^2 = A^2 + x^2 - \frac{B^2}{A^2} \cdot x^2$$

et finalement à

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 .$$

La corde que le jardinier doit utiliser est donc de longueur $L := 2A$, qui est celle du grand axe. La distance entre les foyers est $\varkappa := 2A \cdot e$.

Nous allons maintenant décrire une ellipse, dont l'un des foyers est en $(0, 0)$, l'autre en $\varkappa \cdot e^{i\alpha}$ et la longueur du grand axe $2A > \varkappa$, en utilisant les coordonnées polaires de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \cong \mathbb{C}^*$.

Pour que $r \cdot e^{i\theta}$ appartienne à l'ellipse, il faut et il suffit que

$$2A = r + |r \cdot e^{i\theta} - \varkappa \cdot e^{i\alpha}| = r + |r \cdot e^{i(\theta-\alpha)} - \varkappa| =$$

$$= r + \sqrt{(r \cdot \cos(\theta - \alpha) - \varkappa)^2 + r^2 \cdot \sin^2(\theta - \alpha)},$$

donc que

$$4A^2 - 4A \cdot r + r^2 = (2A - r)^2 = r^2 - 2r \cdot \varkappa \cdot \cos(\theta - \alpha) + \varkappa^2,$$

i.e.

$$2r \cdot (2A - \varkappa \cdot \cos(\theta - \alpha)) = 4A^2 - \varkappa^2$$

ou

$$r = \frac{4A^2 - \varkappa^2}{2(2A - \varkappa \cdot \cos(\theta - \alpha))} = \frac{A(1 - e^2)}{1 - e \cdot \cos(\theta - \alpha)} = \frac{\frac{B^2}{A}}{1 - e \cdot \cos(\theta - \alpha)}.$$

On retrouve l'équation déduit dans la remarque ci-dessus, à la rotaion α près.