

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg



PROBLÈMES CLASSIQUES DE L'ANALYSE

Claude Portenier

Semestres d'été 2000, 2003 et 2006

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iii
BIBLIOGRAPHIE	vii
INTRODUCTION	ix
But	ix
Moyens	ix
Problèmes pour les périodes anciennes	ix
Sources	ix
QUELQUES DATES	xi
Babyloniens	xi
Égyptiens	xi
Grecs classiques	xi
Grecs et Romains	xi
Byzance	xii
Le monde arabe	xii
Le moyen âge en Occident	xiii
Traductions arabe-latin	xiii
Chronologie	xiii

TABLE DES MATIÈRES

1	LE NOMBRE π ET LES QUADRATURES	1
1.1	Babyloniens	2
1.2	Égyptiens	3
1.3	Thalès, Pythagore, Zénon	4
1.4	Quadrature du cercle	7
1.5	Eudoxe, Euclide	11
1.6	Le pentagone et la section d'or	16
1.7	Archimède et le cercle	19
1.8	La quadrature de la parabole : méthode géométrique	23
1.9	La quadrature de la parabole : méthode mécanique	27
1.10	La spirale d'Archimède	29
1.11	Appendice : Les coniques sous forme analytique	34
	La géométrie d'un segment de parabole	34
	Équation d'une conique	36
	Coniques centrées	39
	Coniques passant par l'origine	41
	La boule de glace	46
	Le foyer d'une conique	50
	La droite directrice	53
	L'ellipse ou la méthode du jardinier	55
2	L'UTILISATION DE L'INFINI ACTUEL	59
2.1	La transition	60
2.2	Le Merton College d'Oxford	62
2.3	Oresme	64
2.4	Le développement de l'algèbre symbolique	67
2.5	Les logarithmes de Neper	71
2.6	Les logarithmes de Bürgi et Briggs	78

2.7	Gerardus Mercator	80
	Les cartes conformes	80
	La conformité des fonctions holomorphes	81
	La projection de Mercator	82
3	LES INFINIMENT PETITS ET LA CRÉATION DE L'ANALYSE	87
3.1	Képler	88
3.2	Descartes et la méthode du cercle	90
3.3	Cavalieri	93
3.4	Fermat	97
	La recherche des maxima et minima	97
	La tangente à une courbe	99
	La quadrature des paraboles à puissance entière	100
	Démonstration des inégalité de Fermat-Roberval	105
	Pascal	106
	La quadrature des hyperboles et paraboles généralisées	107
3.5	Saint-Vincent	112
3.6	Wallis	114
3.7	Roberval	120
3.8	Les règles de Hudde et Sluze	125
3.9	Barrow	128
4	NEWTON	133
4.1	La série géométrique et les logarithmes	134
4.2	La série du binôme	137
	L'interpolation	138
	L'algorithme de Viète	142
	La généralisation de l'algorithme de Viète	145
4.3	La résolution des équations par la méthode des approximations	

TABLE DES MATIÈRES

	successives	146
4.4	Le calcul des fluxions	151
4.5	Le théorème fondamental	156
4.6	Règle de substitution	157
4.7	Le développement en série du sinus	162
4.8	Les équations différentielles	164
4.9	Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force centrale	169
4.10	Deuxième loi de Kepler	173
4.11	Première loi de Kepler	174
5	LA CONSÉCRATION DES INFINIMENT PETITS	179
5.1	Christiaan Huyghens	180
5.2	Gottfried Wilhelm von Leibniz	181
	La chaînette	181
5.3	Jacques (Jakob) Bernoulli	182
5.4	Guillaume-François-Antoine l'Hospital, marquis de Saint-Mesme	183
5.5	Jean (Johann) Bernoulli	184
5.6	Daniel Bernoulli	185
5.7	Euler	186
5.8	Jean d'Alembert	187
5.9	Joseph Louis Lagrange	188
5.10	Antoine-Laurent Lavoisier	189
5.11	Pierre-Simon de Laplace	190
5.12	Joseph Fourier	191
5.13	Carl Friedrich Gauß	192
5.14	Bernard Bolzano	193
5.15	Augustin-Louis Cauchy	194
5.16	Bernhard Riemann	195

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Archimedes, *Werke*, übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Arthur Czwalina, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1972.
- [2] U. Bottazzini, *The Higher Calculus, A History of real and complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin, 1986.
- [3] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. 4 à 7, Masson, Paris, 1981.
- [4] C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, New York, London, Sydney, 1968.
- [5] J.L. Coolidge, *The mathematics of great Amateurs*, reprint Dover, New York, 1963.
- [6] J.-P. Delahaye, *Le fascinant nombre π* , Pour la science, Diffusion Belin, Paris, 1997.
- [7] R. Descartes, *La Géométrie*, Nouvelle édition, Hermann, Paris, 1886.
- [8] C.H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin, 1979.
- [9] Euclide, *Les quinze Livres des Eléments géométriques, plus les Données*, traduit par D. Henrion, Paris, 1632.
- [10] Euclide, Les oeuvres d'Euclide traduite littéralement par F. Peyrard, Paris 1819, nouveau tirage, Albert Blanchard, Paris 1993.
- [11] Euklid, *Die Elemente, Buch I-XIII*, nach Heibergs aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1980.
- [12] Euclid, *The thiteen books of Euclid's Elements*, translated by Sir Thomas L. Heath, Cambridge University Press, 1925, Dover, New York, 1956.
- [13] P. Eymard, J.-P. Lafon, *Autour du nombre π* , Actualités scientifiques et industrielles 1443, Hermann, Paris, 1999.
- [14] E. Brassine, *Précis des oeuvres mathématiques de P. Fermat et de l'arithmétique de Dio- phante*, Imprimerie de Jean-Matthieu Douladoure, Toulouse, 1853.
- [15] *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, Tome premier, Oeuvres mathématiques diverses - Observations sur Diophante, Gauthier-Villars, Paris, 1891.
- [16] *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, Tome deuxième, Correspondance, Gauthier-Villars, Paris 1894.

BIBLIOGRAPHIE

- [17] *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, Tome troisième, Traductions par M. Paul Tannery, Gauthier-Villars, Paris 1896.
- [18] *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, Tome quatrième, Compléments par M. Charles Henry, Gauthier-Villars, Paris 1912.
- [19] *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, Suppléments aux tomes I-IV, Documents inédits publiées avec notices sur les nouveaux manuscrits par M. C. de Waard, Gauthier-Villars, Paris 1922.
- [20] K. von Fritz, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, Ann. Math. 46 (1945), p. 242 - 264.
- [21] E.W. Hobson, *John Napier and the invention of Logarithms*, Cambridge University Press, 1914.
- [22] W.B. Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements*, D. Reidel Publishing Company, 1975.
- [23] M.S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.
- [24] *Napier Tercentenary Memorial Volume*, edited by C.G. Knott, Longmans, London, 1915.
- [25] M. le Chevalier Newton, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, De Bure, Paris, 1740.
- [26] Gilles Personne de Roberval, *Divers ouvrages de M. de Roberval*, Académie royale des sciences, Paris, 1693.
- [27] Werner Schaal, *Kepler Chilias Logarithmorum*, in "Keplers Logarithmen und andere Marburger Frühdrucke", Schriften der Universitätsbibliothek Marburg Nr. 123, p. 83-101, Marburg, 2005.
- [28] D.J. Struik, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvard University Press, 1969.
- [29] Paul Tannery, *La géométrie grecque, Comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*, Gauthier-Villars, Paris, 1887.
- [30] —, *Zénon d'Élée et M. Georges Cantor*, Revue philosophique, 1884.

INTRODUCTION

But

Comprendre les idées, surtout leurs développement. Ce développement dépend pour beaucoup

des moyens de transmission (notations et supports physiques),
des techniques de communication (concepts et langage),
des a priori philosophiques et religieux.

Moyens

J'utiliserai les expressions et les notations modernes pour évoquer ces époques éloignées. Je ne serai donc pas toujours respectueux de la complexité réelle des faits et des idées.

Attention aux anachronismes

Problèmes pour les périodes anciennes

Les textes sont fragmentaires, transmis indirectement. On constate même, par comparaison de différentes sources, que certains textes ont été mal compris, on trouve aussi des contradictions et des falsifications.

Sources

A part les livres et articles cités en cours de texte, j'ai énormément profité du livre de Charles Henry Edwards, Jr. [8].

Version du 8 juin 2000

QUELQUES DATES

Voici quelques dates qui permettent de situer le développement des mathématiques, essentiellement de l'analyse qui est mon sujet, mais sans vouloir être complet. J'en profite également pour donner quelques compléments que je n'ai pas pu intégrer dans les chapitres qui suivent.

Babyloniens

Tablettes –1800 - –1600

Égyptiens

Papyrus de Rhind –1600

Copie d'un texte écrit entre –2000 et –1800 .

Grecs classiques

–650 - –200

Grecs et Romains

–200 - –476

Déclins et disparition de la tradition grecque. La compréhension des textes, très complexes du fait de l'expression purement verbales des relations entre nombres ou grandeurs géométriques, nécessitaient une relation maître à élève pour pouvoir être effectivement transmise à la génération suivante. Les changements politiques et sociaux liés aux guerres et à l'extension de l'empire romain, puis à l'apparition du christianisme, ont supprimés les conditions intellectuelles et les larges subsides royales favorables au développement de la science grecque.

Apollonius de Perga : – 262 ? - – 190 ?

Hipparque de Rhodes : – 190 ? - – 120 ?

QUELQUES DATES

Héron d'Alexandrie : 10 ? - 75 ?

Ptolémée d'Alexandrie : 85 ? - 165 ?

Pappus : 290 ? - 350 ?

Diophante : 200 ? - 284 ?

Byzance

Choisie comme capitale de l'empire romain par Constantin 1^{er}, elle devient

Constantinople en 330

Partage de l'empire romain 395

Maintien de la tradition grecque jusqu'en 529, date à laquelle l'empereur Justinien, à l'instigation des chrétiens, ferme les écoles de philosophies, dont l'enseignement est soi-disant païen ! L'académie de Platon a donc existé pendant 9 siècles.

L'école byzantine est connue pour ses disputes théologiques, à caractère formel et oiseux, et par ses excès de subtilité.

Constantinople devient la capitale de l'empire ottoman sous le nom d'

Istanbul en 1453

Le monde arabe

La tradition grecque survécût à Alexandrie et est reprise par les musulmans à partir de 641. Ils mélangent les acquis accessibles grecs avec les traditions babylonienne et hindoue. Il est probable que la plus grande partie de la fameuse bibliothèque d'Alexandrie ait été détruite par les chrétiens 100 à 200 ans auparavant, le reste ainsi que les bâtiments universitaires par les arabes suite à une révolte quelques années après la prise d'Alexandrie. Entre 800 et 1000 ils traduisent (en arabe) les oeuvres d'Euclide, Archimède, Apollonius et Ptolémée.

C'est à

al-Khwārizmī : 780 ? - 850 ?

et à son livre d'arithmétique que l'on doit l'établissement de la numération en base 10, la notation positionnelle et l'introduction du 0, découvertes faites par les Hindous. Son deuxième livre "Al-jabr wa'l muqabalah" nous a fourni le terme "algèbre". Remarquons que "al-jabr" réfère à l'opération

$$a - c = b \implies a = b + c,$$

tandis que "muqabalah" à

$$a + c = b + c \implies a = b.$$

La science mathématique arabe a atteint son apogé pendant le 11^e siècle.

Ibn Al-Haytham, dit aussi **Alhazen** : 965 - 1039

a écrit un influent traité d'optique géométrique et calculé certains volumes, nécessitant la somme des n premiers cubes et quatrièmes puissances.

Le moyen âge en Occident

Après la prise de Rome par les Goths en 476 ap. J.-C. le développement scientifique s'arrête définitivement. Pendant les 7 siècles à venir, ce qui reste de l'empire romain, en fait l'église catholique, a été occupée à civiliser les tribus barbares n'ayant même pas une langue écrite. Son intérêt pour la science, dite païenne, n'était du reste pas des plus développés.

Boèce : 480 - 525

a écrit 4 textes élémentaires : arithmétique, géométrie, astronomie, musique. Son *Arithmétique* est un résumé de *Introduction arithmeticae* de

Nicomaque de Gêrase : 60 ? - 120 ?)

lui-même un texte très élémentaire puisque l'auteur s'était senti obligé d'y introduire la table de multiplication 10×10 . La *Géométrie* de Boèce n'est qu'une liste des propositions élémentaires des quatre premiers livres d'Euclide, sans démonstrations.

Le niveau de l'enseignement scolaire déclina jusqu'à l'époque de Gerbert d'Aurillac (938 ? - 1003), qui devint pape sous le nom de Sylvestre II (999). Il voyagea en Espagne et prit un peu connaissance des mathématiques et de la science arabe. Il est bon de remarquer que le théorème de Pythagore était oublié depuis longtemps.

Avec la chute de Tolède (1085) et de la Sicile (1091), les occidentaux ont de nouveau accès aux textes des grecs classiques, mais en arabe.

Traductions arabe-latin

Adélarde de Bath : 1070 ? - 1150

traduit les Eléments d'Euclide en 1142 , tandis que

Robert de Chester

en fait de même en 1145 de l'Algèbre de al-Khwārizmī.

Gérard de Crémone : 1114 - 1187

fit de meilleures traductions des Eléments d'Euclide et de certaines oeuvres d'Archimède.

Chronologie

Tablettes : – 1800 - – 1600

Papyrus de Rhind : – 1600

Thalès de Milet : – 624 - – 547 ?

Pythagore de Samos : – 569 ? - – 475 ?

Anaxagore de Clazomène : – 499 - – 428

Zénon d'Élée : – 490 ? - – 425 ?

Socrate : – 470 ? - – 399 ?

QUELQUES DATES

Hippocrate de Chio : – 470 ? - – 410 ?

Hippasus de Metapontum : – 5^e siècle

Hippias d’Elis : – 460 ? - – 400 ?

Démocrite d’Abdère : – 460 ? - – 370 ?

Platon : – 428 - – 348

Eudoxe de Cnide : – 408 ? - – 355 ?

Dinostrate : – 390 ? - – 320 ?

Aristote : – 384 - – 322

Aristée le vieux : – 370 ? - – 300 ?

Euclide d’Alexandrie : – 325 ? - – 265 ?

Eratosthène de Cyrène : – 276 - – 194

Archimède de Syracuse : 287 - – 212

Apollonius de Perga : – 262 ? - – 190 ?

Hipparque de Rhodes : – 190 ? - – 120 ?

Héron d’Alexandrie : 10 ? - 75 ?

Nicomaque de Gêrase : 60 ? - 120 ?

Ptolémée d’Alexandrie : 85 ? - 165 ?

Pappus : 290 ? - 350 ?

Diophante : 200 ? - 284 ?

Boèce : 480 - 525

al-Khwārizmī : 780 ? - 850 ?

Ibn Al-Haytham, dit aussi Alhazen : 965 - 1039

Adélarde de Bath : 1070 ? - 1150

Robert de Chester

Gérard de Crémone : 1114 - 1187

Léonard de Pise, dit Fibonacci : 1170 - 1250

Jordanus Nemorarius : 1225 - 1260

Roger Bacon : 1214 - 1294

Thomas Bradwardine (Doctor profundus) : 1290 ? - 1349

Richard Swineshead (Suiseth) (le Calculateur) : 1350 ?

Nicolas Oresme : 1323 - 1382 ,

Hans Müller, dit Regiomontanus : 1436 - 1476

Hans Widman : 1462 - 1498

Lucas Pacioli : 1450 ? - 1510 ?

Johannes Gensfleisch, dit Gutenberg : 1400 ? - 1468

Robert Recorde : 1510 ? - 1558

Christoph Rudolff : 1499 - 1545

Adam Riese : 1489 - 1559

Michael Stifel, dit Stiffelius : 1486 - 1567

Niccolo Fontana, dit Tartaglia : 1500 - 1557

Girolamo Cardano : 1501 - 1576

Gerhard Kremer, dit Gerardus Mercator : 1512 - 1594

Ludovico Ferraro, dit Ferrari : 1522 - 1565

Raphaël Bombelli : 1526 - 1572

Simon Stevin : 1548 - 1620

François Viète : 1540 - 1603

Georg Joachim Rheticus : 1514 - 1576

Bartholomeo Pitiscus : 1561 - 1613

John Napier, dit Neper : 1550 - 1617

Jost Bürgi : 1552 - 1632

Henry Briggs : 1561 - 1630

Galileo Galilée : 1564 - 1642

Johannes Kepler : 1571 - 1630

Marin Mersenne : 1588 - 1648

Gérard Desargues : 1593 - 1662

René Descartes : 1596 - 1650

Pierre de Fermat : 1601 - 1665

Bonaventura Cavalieri : 1598 - 1647

QUELQUES DATES

Gilles Personne de Roberval : 1602 - 1675

Grégoire de Saint-Vincent : 1584 - 1667

Johann van Waveren Hudde : 1628 - 1704

René François Walter de Sluze : 1622 - 1685

Isaac Barrow : 1630 - 1677

Isaac Newton : 1643 - 1727

Nicolaus Mercator : 1620 - 1687

Christiaan Huyghens : 1629 - 1695

Gottfried Wilhelm von Leibniz : 1646 - 1716

Jacques (Jakob) Bernoulli : 1654 - 1705

Guillaume-François-Antoine l'Hospital, marquis de Saint-Mesme : 1661 - 1704

Jean (Johann) Bernoulli : 1667 - 1748

Daniel Bernoulli : 1700 - 1782

Leonhard Euler : 1707 - 1783

Jean d'Alembert : 1717 - 1783

Joseph Louis Lagrange : 1736 - 1813

Antoine-Laurent Lavoisier : 1743 - 1794

Pierre-Simon de Laplace : 1749 - 1827

Joseph Fourier : 1768 - 1830

Carl Friedrich Gauß : 1777 - 1855

Bernard Bolzano : 1781 - 1848

Augustin-Louis Cauchy : 1789 - 1857

Bernhard Riemann : 1826 - 1866

Richard Dedekind : 1831 - 1916