**Fachbereich Mathematik und Informatik**
**Philipps-Universität Marburg**

# Übungen zur Vorlesung

# KLASSISCHE PROBLEME DER ANALYSIS

## Prof. Dr. C. Portenier

unter Mitarbeit von

**Daniel Soll**

Marburg, Sommersemester 2006

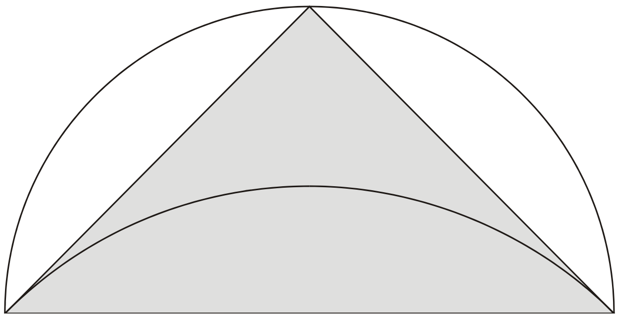
Fassung vom 26. Juni 2006

# Klassische Probleme der Analysis

## Blatt 1

### Tutorium am Donnerstag, den 27. April 2006

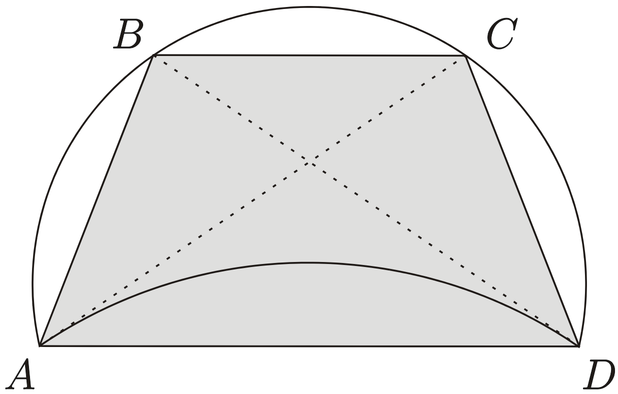
**Aufgabe 1 (Mondsicheln)** Quadrieren Sie die folgende Mondsichel, d.h. stellen Sie ihre Fläche als die Fläche einer mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Figur dar. In der folgenden Abbildung ist der äußere Kreisbogen ein Halbkreis und das Dreieck gleichschenklig. (6)



Ein anderes Beispiel. Das im großen Kreis eingeschriebene Viereck hat folgende Eigenschaften :

$$AB = BC = CD \quad \text{und} \quad AD^2 = 3 \cdot AB^2 \ .$$

Der untere Kreisbogen ist tangential zu den Diagonalen.




**Aufgabe 2 (Euklid, X. Buch, Satz 2)** Seien $a > b > 0$ . Setze $x_0 = a$ und $x_1 = b$ . (3)
Wann immer für $k \geqslant 1$ gilt, dass $x_k > 0$ , sei $\alpha_k$ die eindeutig bestimmte positive natürliche Zahl mit $\alpha_k \cdot x_k \leqslant x_{k-1} < (\alpha_k + 1) \cdot x_k$ , und setze

$$x_{k+1} := x_{k-1} - \alpha_k \cdot x_k \ .$$

Zeigen sie: wenn die Folge $(x_k)$ unendlich ist, sind $a$ und $b$ inkommensurabel.

Dabei heißen die Zahlen $a, b$ *kommensurabel* , wenn es $\varepsilon > 0$ und natürliche Zahlen

$m, n$ gibt, so dass

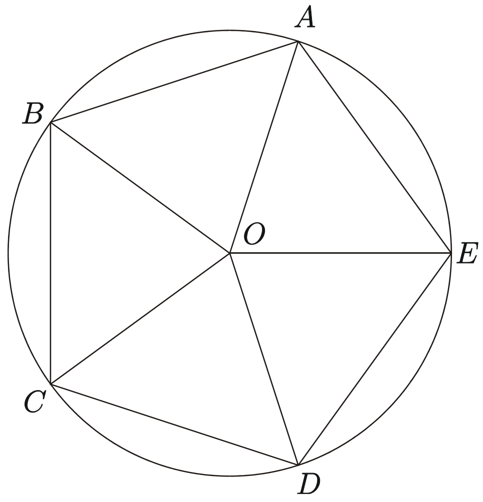
$$a = n \cdot \varepsilon \quad \text{und} \quad b = m \cdot \varepsilon \ .$$

**Aufgabe 3 (Seite und Diagonale des Pentagons sind inkommensurabel)** (4)

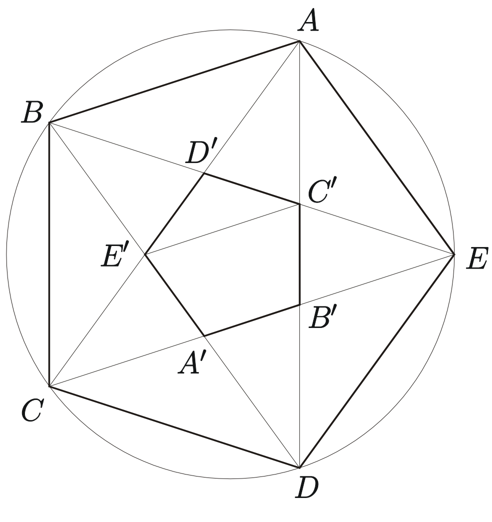
Ein geschlossener Polygonzug von fünf gleichlangen Seiten, der in einen Kreis eingezeichnet ist, heißt ein Pentagon. Zeigen Sie: die Längen einer Seite und einer Diagonale eines Pentagons sind inkommensurabel.

Hinweis:

(a) Zeigen sie, dass ein Pentagon gleichschenklige Dreiecke mit dem Öffnungswinkel $\frac{2\pi}{5}$ definiert. Betrachten Sie dazu die folgende Abbildung:




(b) Betrachten Sie die folgende Abbildung:




Zeigen Sie, dass die Diagonalen $AC, BD, \ldots$ gleichlang sind, und dass der Polygonzug $A'B'C'D'E'$ ein Pentagon ist.

(c) Zeigen Sie durch Betrachtung der sich ergebenden Dreiecke die folgendenen Formeln:

$$AC - AB = C'E' \quad \text{und} \quad AB - C'E' = D'E' \ ,$$

um das Kriterium aus Aufgabe 2 anzuwenden.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2006

# Klassische Probleme der Analysis

## Blatt 2

## Tutorium am Donnerstag, den 4. Mai 2006

**Aufgabe 4 (Verhältnisse und reelle Zahlen)** Seien $(a, b)$ und $(c, d)$ Paare positiver (geometrischer) Größen. Diese Paare stehen in demselben Verhältnis im Sinne von Eudoxus, wir schreiben $(a, b) \equiv (c, d)$ , falls für alle $m, n \in \mathbb{N}^*$ gilt: (7)

$$na > mb \quad \text{und} \quad nc < md$$

oder

$$na = mb \quad \text{und} \quad nc = md$$

oder

$$na < mb \quad \text{und} \quad nc < md \ .$$

(a) Zeigen Sie, daß $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist. Eudoxus sagt, daß eine Äquivalenzklasse $[(a, b)]$ ein *Verhältnis* ist.

(b) Versuchen Sie, die Verbindungen zwischen den Verhältnissen von Eudoxus und den heutigen reellen Zahlen zu präzisieren. Ordnen Sie auf geeignete Weise einem Verhältnis $[(a, b)]$ einen Dedekind'schen Schnitt zu (vgl. Analysis, Kapitel 4.7). Zeigen Sie, dass dadurch eine injektive Abbildung auf den Äquivalenzklassen von Verhältnissen definiert ist. Ist diese Abbildung surjektiv ?

(c) Zeigen Sie : Die folgenden Bedingungen sind äquivalent :

(i) $(a, b) \equiv (c, d)$
(ii) Für alle $m, n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$na > mb \quad \Longleftrightarrow \quad nc > md$$

und

$$na = mb \quad \Longleftrightarrow \quad nc = md$$

und

$$na < mb \quad \Longleftrightarrow \quad nc < md \ .$$

Benutzen Sie die Regeln der Aussagenlogik (vgl. Analysis, Aufgabe 1.4.2.vi).
(iii) Für alle $m, n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$na > mb \quad \Longleftrightarrow \quad nc > md \ .$$

Wenden Sie das Axiom von Archimedes an und vergessen Sie nicht die Kontraposition !

(d) Die ***doppelte Reduktion zum Widerspruch*** von Eudoxus. Zeigen Sie : Die folgenden Bedingungen sind äquivalent :

(i) Es gilt $(a, b) \not\equiv (c, d)$ , d.h. die Paare stehen nicht im selben Verhältnis.

(ii) Es gibt $m, n \in \mathbb{N}^*$ , so daß

$$na > mb \quad \text{und} \quad nc < md$$

oder

$$na < mb \quad \text{und} \quad nc > md\ .$$

Benutzen Sie wiederum das Axiom von Archimedes.

**Aufgabe 5 (Archimedes' Kompressions-Methode)** Archimedes benutzte zur Approximation des Kreisumfangs die folgende Verbesserung der Ausschöpfungsmethode: In den Einheitskreis wird ein gleichseitiges Polygon mit $n$ Seiten eingezeichnet, dessen Seiten Sekanten der Kreislinie sind; ferner wird um den Einheitskreis ein gleichseitiges Polygon mit $n$ Seiten gezeichnet, dessen Seiten Tangenten der Kreislinie sind. In jedem Approximationsschritt wird die Seitenzahl der Polygone verdoppelt. (5)

(a) $s_n$ bezeichne die Seitenlänge der Seiten des inneren $n$-Ecks, $t_n$ die des äußeren $n$-Ecks. Zeigen Sie

$$s_n = 2\sin\frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad t_n = 2\tan\frac{\pi}{n}\ .$$

Hinweis: Die Polygone sind durch Dreiecke gegeben. Betrachten Sie die Winkelhalbierende dieser Dreiecke.

(b) Beweisen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen:

$$s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{2+\sqrt{4-s_n^2}} \quad \text{und} \quad t_{2n} = \frac{2t_n}{2+\sqrt{4+t_n^2}}\ .$$

Hinweis: Leiten Sie Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen den die Polygone definierenden Dreiecken her.

(c) Die Zahl $\pi$ ist das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser. Daher sind der halbe Umfang des inneren bzw. äußeren Polygons untere bzw. obere Schranken für $\pi$ , d.h.

$$\frac{n}{2}\cdot s_n < \pi < \frac{n}{2}\cdot t_n\ .$$

Ermitteln Sie den exakten Wert von $s_{10}$ und $t_{10}$ ; berechnen Sie mit den Rekursionsformeln aus (ii) die sukzessiven Kantenlängen für die nächsten 6 Rekursionsschritte (so dass am Ende $10\cdot 2^6 = 640$-Ecke betrachtet werden). Geben Sie mit Hilfe des Taschenrechners die obere bzw. untere Näherung von $\pi$ im letzten Schritt bis auf 8 Nachkommastellen an. Bis auf wieviele Dezimalen haben Sie $\pi$ bestimmt?

**Aufgabe 6 (Eine Formel zur Kompressionsmethode)** Betrachten Sie die Gleichungen (3)

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right) \quad \text{und} \quad \sqrt{26+15\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(3\sqrt{3}+5\right)\ .$$

Formulieren und beweisen sie eine allgemeine Gleichung, aus der diese Formeln folgen.

*Hinweis:* Setzen Sie $a = 3$ , $b = 2$ bzw. $a = 26$ , $b = 1$ und betrachten Sie die Terme $a+b$ , $a-b$ , $a^2-b^2$ .

# Klassische Probleme der Analysis

**Blatt 3**

**Tutorium am Donnerstag, den 11. Mai 2006**

**Aufgabe 7 (Kegelschnitte)** Seien $r \in \mathbb{R}_+^*$ , $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $b \in \mathbb{R}$ . (5)

(a) Zeigen Sie : Der Kegel

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2 \cdot x_3^2 \right\}$$

mit Radius $r$ an der Höhe 1 ist durch die Gleichung

$$(x|\, Qx) = 0 \quad \text{mit} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$$

gegeben.

Die Ebene

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b \right\}$$

ist durch die Gleichung

$$(a|\, x) = b$$

gegeben.

Durch Umbennenung und eine einfache orientierungstreue lineare Transformation in $\mathbb{R}^3$ kann man annehmen, daß

$$|a| = 1 \quad , \quad b \geqslant 0 \quad , \quad a_3 \geqslant 0 \quad \text{und} \quad a_1 \leqslant 0$$

gilt.

Der zu $H$ parallele Untervektorraum $H_0$ ist durch die Gleichung $(a|\, x) = 0$ definiert.

(b) Die Menge $C := Q \cap H$ heißt der durch $H$ und $Q$ definierte *Kegelschnitt* . Man definiert die *Exzentrizität* $e \in \mathbb{R}_+$ durch

$$e^2 := \left(1 - a_3^2\right) \cdot \left(1 + r^2\right) \ .$$

Es gilt

$$1 - e^2 = r^2 \cdot a_3^2 + a_3^2 - r^2 \ .$$

Ist $(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ mit $\epsilon_0 \in H$ und $\epsilon_1, \epsilon_2 \in H_0$ , geben Sie die Gleichung von $C$ in den Koordinaten $y_1, y_2$ des Koordinatensystems $\epsilon_0 + y_1\epsilon_1$ , $\epsilon_0 + y_2\epsilon_2$ an.

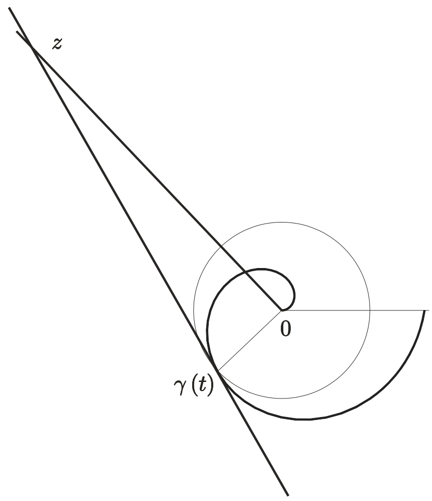
(c) Wählen Sie $\epsilon_1$ und $\epsilon_2$ geeignet um $C$ durch eine möglichst einfache Gleichung darstellen zu können, insbesondere daß $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$ gilt.

(d) Wie soll man $\epsilon_0$ wählen, so daß $C$ zentriert ist ?

**Aufgabe 8 (Zur Geometrie einer Spirale)** Sei $\gamma$ die durch die Funktion (4)

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto a \cdot t \cdot e^{ib \cdot t} \quad \text{mit } a, b > 0$$

definierte Kurve. Sei $t \in \mathbb{R}_+$ und $z$ der Schnittpunkt der Normalen in 0 zu der Verbindungsstrecke $[0, \gamma(t)]$ und der Tangente von $\gamma$ in $t$ , vgl. die untenstehende Abbildung. Bestimmen Sie mit Hilfe von Berechungen in $\mathbb{C}$ den Punkt $z$ . Was kann man über $|z|$ sagen ?




**Aufgabe 9 (Ein Lemma zur Quadratur einer Spirale)** Leiten Sie (mit Beweis) einen geschlossenen Ausdruck für die Summe (3)

$$\sum_{j=0}^{n} (a + j \cdot b)^2$$

her.

# Klassische Probleme der Analysis

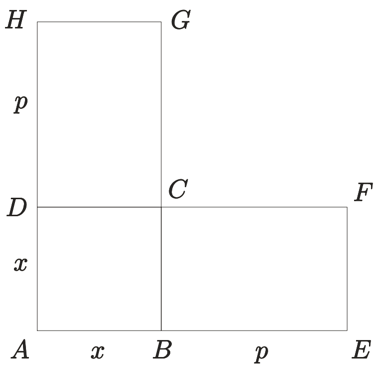
## Blatt 4

### Tutorium am Donnerstag, den 18. Mai 2006

**Aufgabe 10 (Al-Khwārizmī : 780 ? - 850 ?)** Lösen Sie die quadratische Gleichung (4)

$$x^2 + 2 \cdot p \cdot x = q \ ,$$

indem Sie die folgende Abbildung benutzen:




**Aufgabe 11 (Al-Haitham : 965 ? - 1039 ?)** Betrachten sie für $s, n \in \mathbb{N}$ die Gleichung (4)

$$(n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n} k^s = \sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + \sum_{l=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{l} k^s \right)$$

und die Abbildung

Dabei werden in der $x$-Achse die $k^s$ abgetragen und in der $y$-Achse $1$ .

(a) Berechnen Sie die Summe $\sum_{k=1}^{n} k^4$ geschickt.

(b) Erklären Sie, warum die Abbildung die Gleichung plausibel macht.

(c) Beweisen Sie die Gleichung ohne Induktion. Der Beweis soll die der Abbildung zugrundeliegende Idee wiederspiegeln.

**Aufgabe 12** Gegeben sei ein Kegel $Q := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x\,|Q_r x) \leqslant 0 \text{ und } x_3 \geqslant 0\}$ mit

$$Q_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \ .$$

Bearbeiten Sie die beiden folgenden Probleme zunächst intuitiv-geometrisch und anschliessend analytisch formal:

(a) Zunächst sei ein $z$ aus dem Inneren des Kegels gegeben, d.h. es gelte $(x\,|Q_r x) < 0$ . Bestimmen Sie ein (das?) $t$ auf der Kegeloberfläche, also $(t|Q_r t) = 0$ mit geringstem Abstand zu $z$ .

(b) Im zweiten Schritt sei eine Kugel mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $z$ so im Kegel enthalten, dass $|z|$ minimal ist. Gesucht sind hier die Koordinaten von $z$ .

# Klassische Probleme der Analysis

## Blatt 5

### Tutorium am Donnerstag, den 1. Juni 2006

**Aufgabe 13 (Das Cavalieri-Integral)** Axiomatisieren Sie die geometrische Anschauung von Cavalieri. (5)

**Aufgabe 14 (Cavalieris Methode)** Berechnen Sie analog zur Vorlesung (5)

$$\underset{A}{\overset{B}{S}} x^4 \quad \text{und} \quad \underset{A}{\overset{B}{S}} x^5 \ .$$

**Aufgabe 15 (Robervals Methode)**

(a) Seien $\xi \in \mathbb{R}$ , $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit (1)

$$x_k \leqslant \xi \leqslant y_k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} (y_k - x_k) = 0 \ .$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k = \xi \ .$$

(b) Beweisen Sie folgende Ungleichungen für $s \in \mathbb{N}^*$ und alle $n \in \mathbb{N}^*$ : (3)

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^s \leqslant \frac{n^{s+1}}{s+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^s \ .$$

(c) Zeigen Sie, dass gilt: (1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{k=1}^{n} k^s = \frac{1}{s+1} \ .$$

# Klassische Probleme der Analysis

## Blatt 6

### Tutorium am Donnerstag, den 8. Juni 2006

**Aufgabe 16 (Wallis' Interpolationsverfahren)** Definiere (12)

$$a_{p,q} := \left[\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx\right]^{-1} \quad \text{für alle} \quad p\,,\, q > 0\;.$$

(a) Die *Euler'sche Betafunktion* ist definiert als

$$B\left(u,v\right) := \int_0^1 t^{u-1}\left(1-t\right)^{v-1} dt \quad \text{für alle} \quad u\,,\, v > 0\;.$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$\frac{1}{a_{p,q}} = p \cdot B\left(p, q+1\right) \quad \text{für alle} \quad p\,,\, q > 0\;.$$

(b) Zeigen Sie: Es gilt

$$\Gamma\left(u\right)\Gamma\left(v\right) = 2 \cdot \Gamma\left(u+v\right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\varphi\right)^{2u-1}\left(\sin\varphi\right)^{2v-1} d\varphi \quad \text{für alle} \quad u\,,\, v > 0\;.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\Gamma\left(u\right)\Gamma\left(v\right)$ als ein Doppelintegral über dem rechten oberen Quadranten. Substituieren Sie so, dass im Integrand eine Exponentialfunktion von der Form $e^{-\left(s^2+t^2\right)}$ vorkommt. Wenden Sie dann Polarkoordinaten an.

(c) Folgern Sie aus der Formel in $(b)$: Es gilt

$$B\left(u,v\right) = \frac{\Gamma\left(u\right)\Gamma\left(v\right)}{\Gamma\left(u+v\right)} \quad \text{für alle} \quad u\,,\, v > 0\;.$$

Schließen Sie daraus, dass $a_{p,q} = a_{q,p}$ für alle $p\,,\, q > 0$ .

Hinweis: Benutzen Sie für den zweiten Teil die Funktionalgleichung der Gammafunktion:

$$\Gamma\left(u+1\right) = u \cdot \Gamma\left(u\right) \quad \text{für alle} \quad u > 0\;.$$

(d) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) und (c) die folgenden Rekursiongleichungen:

$$a_{p+1,q} = \frac{p+q+1}{p+1} \cdot a_{p,q} \quad \text{und} \quad a_{p+1,q+1} = a_{p+1,q} + a_{p,q+1} \quad \text{für alle} \quad p\,,\, q > 0\;.$$

Hinweis: Funktionalgleichung der Gammafunktion.

(e) Zeigen Sie mit der Definition, dass

$$a_{\frac{1}{2},1} = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi}\;,$$

und folgern Sie durch Induktion mit $(c)$ und $(d)$ , dass

$$a_{\frac{1}{2},n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{2j+1}{2j} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

und

$$a_{\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j}{2j-1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

(f) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$a_{\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} \leqslant a_{\frac{1}{2},n} \leqslant a_{\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}$$

und folgern Sie mit (e) die *Wallis'sche Produktformel*:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_k \prod_{j=1}^{k} \frac{4j^2}{4j^2-1} \ .$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

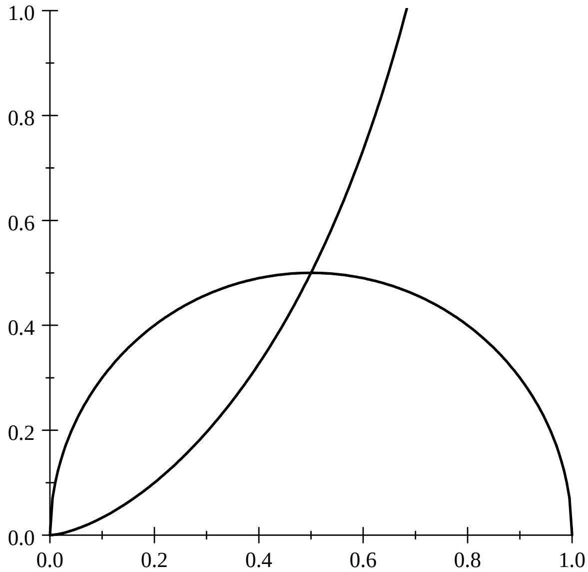
Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2006

# Klassische Probleme der Analysis

## Blatt 7

### Tutorium am Donnerstag, den 22. Juni 2006

**Aufgabe 17 (Das Cissoid)** Betrachten Sie die folgende Abbildung: (3)




Das *Cissoid* ist definiert als die Menge aller Punkte $(x, y) \in ]0, 1[\times]0, \infty[$ mit

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{z}\,, \quad \text{wobei} \quad (x, z) \quad \text{ein Punkt auf dem oberen Kreisbogen}$$

des Kreises mit Durchmesser 1 und Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Cissoid durch die folgende Gleichung gegeben ist:

$$y = x^{\frac{3}{2}} \cdot (1 - x)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

Folgern Sie, dass $(0, 0)$ ein Randpunkt des Cissoids ist und es die Asymptote

$$\left\{ (x, y) \in ]0, \infty[^2 \;\middle|\; x = 1 \right\}$$

besitzt.

**Aufgabe 18 (Wallis' Quadratur des Cissoids)** Gegenstand dieser Aufgabe ist die Quadratur der zwischen dem Cissoid, der $x$–Achse und der Vertikalen bei 0 und 1 eingeschlossenen Fläche. (6)

(a) Betrachten Sie das Integral

$$a_n := \int_0^1 x^{\frac{n}{2}} \cdot (1 - x)^{\frac{1}{2}}\, dx \quad \text{für alle} \quad n \geqslant 0 \ .$$

Drücken Sie $a_n$ durch die Betafunktion aus und beweisen Sie mit der Formel von Aufgabenblatt 9, dass

$$a_n = \frac{n}{n+3} \cdot a_{n-2} \quad \text{für alle} \quad n \geqslant 2 \ .$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$a_3 = \frac{1}{2} \cdot a_1 = \frac{\pi}{16} \ .$$

(c) Betrachten Sie das Integral

$$b_n := \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{n}{2}} \, dx \quad \text{für alle} \quad n \geqslant -1 \ .$$

Drücken Sie $b_n$ durch die Betafunktion aus und beweisen Sie mit der Formel von dem vorherigen Aufgabenblatt, dass

$$b_n = \frac{n}{n+5} \cdot b_{n-2} \quad \text{für alle} \quad n \geqslant 1 \ .$$

(d) Drücken Sie $b_{-1}$ durch $a_3$ aus.

(e) Berechnen Sie mit (d) die Fläche des Cissoids. Bestimmen Sie, um welchen ganzen Faktor die Cissoidfläche größer als die Fläche des definierenden Halbkreises ist.

**Aufgabe 19 (Die Vietasche Regel)** Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Vieta die Quadratwurzel der Zahl (3)

$$76\,287\,682\,055\,524 \ .$$

**Aufgabe 20 (Die Vieta-Newtonsche Regel)** Bestimmen Sie die ersten 6 Terme der Reihenentwicklung von (3)

$$\sqrt{1+x^2} \ .$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2006

# Klassische Probleme der Analysis

## Blatt 8

### Tutorium am Donnerstag, den 29. Juni 2006

**Aufgabe 21 (Descartes' Kreismethode)** Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$ . (8)

(a) Wann hat die Funktion $f - f(\xi)$ eine Nullstelle erster Ordnung in $\xi$ ? Geben Sie zwei Charakterisierungen an und beweisen Sie deren Äquivalenz.

(b) Wenn die Funktion $f$ differenzierbar ist, wann hat die Funktion $f - f(\xi)$ eine Nullstelle zweiter Ordnung in $\xi$ ? Geben Sie zwei Charakterisierungen an und beweisen Sie deren Äquivalenz.

(c) Sei ein Kreis $C$ in $\mathbb{R}^2$ gegeben, dessen Mittelpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist. Falls $C$ den Graphen von $f$ in $(\xi, f(\xi))$ und $(x, f(x))$ schneidet, gilt für den Radius $r$

$$(t-\xi)^2 + f(\xi)^2 = r^2 = (t-x)^2 + f(x)^2 \ .$$

Zeigen Sie: falls $f$ in $\xi$ differenzierbar ist, $f(\xi) \neq 0$ ist, und die Funktion

$$x \mapsto (t-x)^2 - (t-\xi)^2 + f(x)^2 - f(\xi)^2$$

in $\xi$ eine Nullstelle zweiter Ordnung hat, so gilt

$$f'(\xi) = \frac{t-\xi}{f(\xi)} \ .$$

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Descartes'schen Methode die Ableitung von

$$\mathrm{id}^{\frac{3}{2}} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$$

in allen Punkten, in denen die Methode anwendbar ist.

**Aufgabe 22 (Eine Anwendung der Kreismethode)** Bestimmen Sie mit Hilfe der Kreismethode von Descartes die Ableitung von $(m)$

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto e^x \ .$$

**Aufgabe 23 (Robervals Fehler)** Sei $E$ die Ellipse um $(0,0)$ mit den Halbradien $a, b > 0$ und den Brennpunkten $(\pm c, 0)$ . Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow E \subset \mathbb{R}^2$ eine surjektive differenzierbare Kurve, die lokal injektiv ist, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gibt es ein offenes Intervall $t \in I \subset \mathbb{R}$ , so dass $\gamma|_I$ injektiv ist. So ein $\gamma$ soll *Parametrisierung* von $E$ heißen. (8)

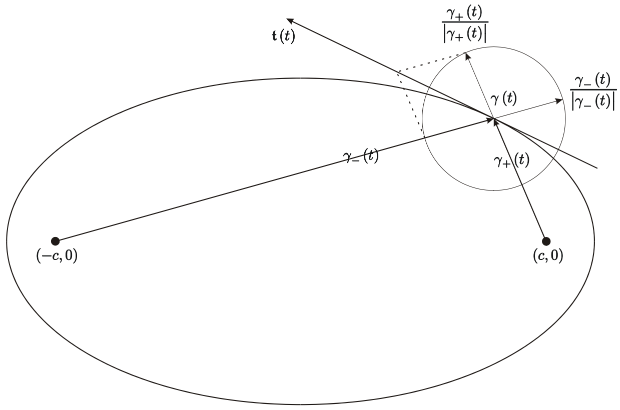
(a) Zeigen Sie: falls $\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar ist, so gilt

$$|\vartheta|' = \frac{\vartheta}{|\vartheta|} \bullet \vartheta' \ .$$

Hinweis: Es gilt $|\vartheta|^2 = \vartheta \bullet \vartheta$ ; leiten Sie beide Seiten dieser Gleichung ab.

(b) Schreibe

$$\gamma_{\pm} = \gamma - (\pm c, 0) \ .$$




Durch die normierten Vektoren von den Brennpunkten der Ellipse zu $\gamma(t)$ ist in diesem Punkt ein Koordinatensystem gegeben. Die Komponenten von Robervals Tangente $\mathfrak{t}(t)$ im Punkte $\gamma(t)$ sind gegeben als die Geschwindigkeit, mit der sich $\gamma$ in der jeweiligen Koordinatenrichtung bewegt. Drücken Sie die Koordinatenrichtungen und -geschwindigkeiten durch $\gamma_{\pm}$ aus und folgern Sie mit (a) :

$$\mathfrak{t} = \frac{\gamma_+ \bullet \gamma'}{\left|\gamma_+\right|^2} \cdot \gamma_+ + \frac{\gamma_- \bullet \gamma'}{\left|\gamma_-\right|^2} \cdot \gamma_- \ .$$

(c) Zeigen Sie, dass durch

$$\gamma(t) := (a \cos t, b \sin t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}$$

eine Parametrisierung der Ellipse gegeben ist.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\left|\gamma_{\pm}(t)\right|^2 = (a \mp c \cos t)^2 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R} \ ;$$

folgern Sie, dass

$$\left(\frac{\gamma_{\pm} \bullet \gamma'}{\left|\gamma_{\pm}\right|^2}\right)(t) = \frac{\pm c \sin t}{a \mp c \cos t} \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

Bestimmen Sie damit $\mathfrak{t}$ .

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\gamma' = \gamma'_{\pm}$ .

(e) Der tatsächliche Tangentialvektor an $\gamma(t)$ ist $\gamma'(t)$ . Wie korrekt ist Robervals Formel?

**Aufgabe 24 (Die Zwangsläufigkeit von Robervals Fehler)** Sei $\mathfrak{t} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein Vektor, und seien $\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \subset \mathbb{R}^2$ ein Erzeugendensystem von Einheitsvektoren. Zeigen Sie: falls (4)

$$\mathfrak{t} = (\mathfrak{t} \bullet \epsilon_1) \cdot \epsilon_1 + (\mathfrak{t} \bullet \epsilon_2) \cdot \epsilon_2 \ ,$$

so gilt $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$ . Folgern Sie: es gibt keine Parametrisierung $\gamma$ der Ellipse, für die Robervals Formel exakt ist.