Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Modellbildung

und

Differentialgleichungen

Claude Portenier

Propädeutikum

November-Dezember 2006

Fassung vom 18. Dezember 2006

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel 1

DIFFERENTIAL-

UND

INTEGRALRECHNUNG

1.1 Modelbidung des Wurfes

Wirft man einen Ball, nicht senkrecht, so beschreibt dieser Ball eine Kurve in einer senkrechten Ebene, die wir mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ darstellen werden. Die x-Achse zeigt in Wurfrichtung. Präziser zur Zeit t befindet sich dieser Ball im Punkte $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, d.h. mit der horizontalen Koordinate $f_1(t)$ und der vertikalen $f_2(t)$. Damit wird die Bahn des Balles durch die vektorwertige Funktion

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : t \longmapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

beschrieben. Der Anfang der Zeitmessung wurde zur Wurfzeit gelegt.

Für $h \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ist

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \begin{pmatrix} \frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h} \\ \frac{f_2(t+h)-f_2(t)}{h} \end{pmatrix}$$

der Vektor Mittlergeschwindigkeit des Balles zwischen t und $t+h$. Falls

$$f'(t) := \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} := \begin{pmatrix} \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h} \\ \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f_2(t+h)-f_2(t)}{h} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix}$$

existiert, man sagt f sei in t *differenzierbar* , so heißt $f'(t)$ die *momentane Geschwindigkeit* zur Zeit t des Balles. Man sagt auch, daß die neue Funktion

$$f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} : t \longmapsto f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die (erste) Ableitung von f ist. Die Beschleunigung, die dieser Ball im Laufe des Fluges erfährt, ist die momentane Variationsrate der Geschwindigkeit, also die Ableitung der Geschwindigkeit oder die zweite Ableitung der Bahnfunktion :

$$f'' := (f')' \ .$$

Newton hat eine solche Situation allgemein mit seinem Gesetz modelliert : zu jeder Zeit $t \in [0, \infty[$ ist

$$m \cdot f''(t) = F(t) \ ,$$

wobei m die Masse des Balles und $F(t)$ der Kraftvektor, der zur Zeit t auf diesen Ball wirkt. Die einzige vorhandene Kraft beim Wurf, wenn wir den Luftwiderstand vernachlässigen, ist die Erdanziehungskraft und wir können annehmen, daß sie konstant gleich

$$m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

ist, wobei g die Erdanziehungsbeschleunigung ist. Damit ist der Wurf durch die folgende vektorwertige Differentialgleichung modelliert :

$$f''(t) = \begin{pmatrix} f_1''(t) \\ f_2''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty[$$

oder durch die zwei Differentialgleichungen

$$f_1''(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_2''(t) = -g \qquad \text{für alle } t \in [0, \infty[\ .$$

Vergessen wir aber nicht, daß zur Wurfzeit die Position und die Wurfgeschwindigkeit gegeben sind. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß

$$f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f'(0) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

für gegebene Wurfgeschwindigkeitskoordinaten $v_1 > 0$ (da nicht senkrecht und x-Achse in Wurfrichtung) und $v_2 \in \mathbb{R}$.

1.2 Differentialrechnung

SATZ *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen auf J . Dann gilt*

(i) ***Summenregel***
$$(f + g)' = f' + g'$$

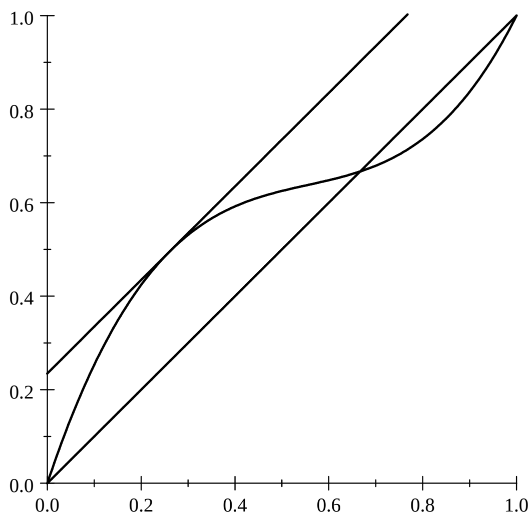
(ii) ***Produktregel***
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

(iii) ***Quotientenregel***
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \text{auf } J \smallsetminus \{g = 0\}$$

(iv) Ist I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $h(I) \subset J$, so gilt die ***Kettenregel***
$$(f \circ h)' = f' \circ h \cdot h' \ .$$

BEMERKUNG Die Verkettung $f \circ h$ von f mit h ist durch
$$(f \circ h)(s) := f(h(s)) \quad \text{für alle } s \in I$$
definiert.

HAUPTSATZ (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $]a, b[$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $\xi \in \,]a, b[$ mit*
$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) \ .$$



DEFINITION Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $G : J \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von g falls $G' = g$ gilt.

KOROLLAR *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$.*

(i) Ist $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und gilt $f' = 0$, so ist f konstant.

(ii) Ist $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $G_1, G_2 : J \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von g , so ist $G_1 - G_2$ eine konstante Funktion.

Insbesondere kennt man eine Stammfunktion G von g , so sind alle andere Stammfunktionen von g der Gestalt $G + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beweis von (i). Sei $\tau \in J$ fest gewählt. Für alle $t \in J$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein ξ_t zwischen τ und t , so daß

$$f(t) - f(\tau) = f'(\xi_t) \cdot (t - \tau) = 0 ,$$

d.h. $f(t) = f(\tau)$. Dies zeigt, daß f konstant ist.

Beweis von (ii). In der Tat folgt

$$(G_1 - G_2)' = G_1' - G_2' = g - g = 0 ,$$

also ist $G_1 - G_2$ nach (i) konstant. □

BEISPIEL 1 Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Stammfunktionen von

$$\mathrm{id}^n : x \longmapsto x^n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist

$$\frac{1}{n+1} \cdot \mathrm{id}^{n+1} \quad .$$

BEISPIEL 2 Stammfunktionen von

$$\cos \quad \text{bzw.} \quad \sin$$

sind

$$\sin \quad \text{bzw.} \quad -\cos \ .$$

BEISPIEL 3 Eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{\cos^2} : \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist

$$\tan := \frac{\sin}{\cos} \ .$$

Ist jede Stammfunktion von $\frac{1}{\cos^2}$ der Gestalt $\tan + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$?

BEISPIEL 4 Wir werden den natürlichen Logarithmus ln als die Stammfunktion von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}^{-1}$, die in 1 verschwindet, definieren. Existiert so eine Funktion ?

1.3 Das Riemannsche Integral

DEFINITION 1 Eine *Unterteilung* von $[a, b]$ ist eine Folge $U := (x_j)_{j=0,\ldots,m}$ in $[a, b]$ mit

$$a = x_0 < x_1 < .. < x_m = b \ .$$

SATZ *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für alle Folgen $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Unterteilungen $U_k = (x_{k,j})_{j=0,\ldots,m_k}$ von $[a, b]$ mit*

$$\lim_k \left(\max_{j=0}^{m_k-1} |x_{k,j+1} - x_{k,j}| \right) = 0$$

und Zahlen $(y_{k,j})_{j=0,\ldots,m_k-1}$ mit $y_{k,j} \in [x_{k,j}, x_{k,j+1}]$ existiert der Limes

$$\lim_k \sum_{j=0}^{m_k-1} f(y_{k,j}) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j})$$

und alle diese Zahlen sind gleich.

DEFINITION 2 Man definiert das Integral von f durch

$$\int_a^b f = \lim_k \sum_{j=0}^{m_k-1} f(y_{k,j}) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j})$$

für irgendeine Folge von Unterteilungen $(x_{k,j})_{j=0,\ldots,m_k}$ von $[a, b]$ mit

$$\lim_k \left(\max_{j=0}^{m_k-1} |x_{k,j+1} - x_{k,j}| \right) = 0$$

und Zahlen $(y_{k,j})_{j=0,\ldots,m_k-1}$ mit $y_{k,j} \in [x_{k,j}, x_{k,j+1}]$.

SATZ *Für alle stetigen Funktionen $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

(i)

$$\int_a^b (\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \int_a^b f \ .$$

(ii)

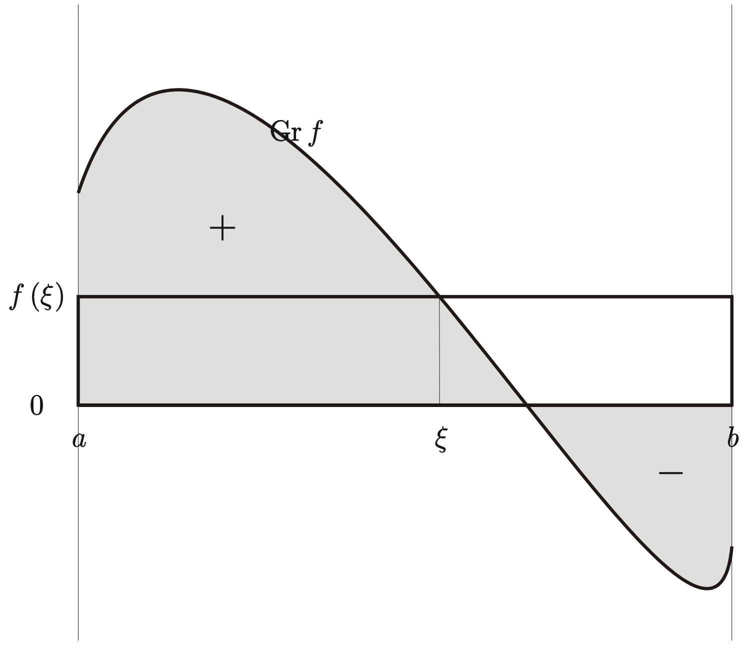
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \ .$$

(iii)

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \leqslant \int_a^b g \ .$$

HAUPTSATZ (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b-a) \quad .$$



Das Integral $\int_a^b f$ entspricht die graue Fläche (mit Vorzeichen) und stimmt mit der Fläche des Rechtecks mit Höhe $f(\xi)$ überein.

1.4 Unbestimmte Integrale

DEFINITION 1 Man setzt

$$\int_a^a f = 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f := -\int_b^a f \quad \text{falls } b < a \ .$$

LEMMA *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*

Für alle $a, b, c \in J$ gilt

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \ .$$

DEFINITION 2 Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $\tau \in J$ und $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion

$$\int_\tau^\diamond g : J \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \int_\tau^t g$$

heißt das *unbestimmte Integral* von g , welches in τ verschwindet.

HAUPTSATZ (Existenz einer Stammfunktion) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $\tau \in J$ und $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion $G := \int_\tau^\diamond g$ eine Stammfunktion von g , d.h. G ist differenzierbar mit $G' = g$.*

Präziser : G ist die einzige Lösung des Anfangswertproblems

$$f' = g \quad \text{und} \quad f(\tau) = 0 \ ,$$

und alle Stammfunktionen von g sind der Gestalt $G + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Um die Ableitung von G in $t \in J$ zu berechnen, bilden wir für $h \neq 0$ das Differentialquotient

$$\frac{G(t+h) - G(t)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left(\int_\tau^{t+h} g - \int_\tau^t g \right) = \frac{1}{h} \cdot \left(\int_t^\tau g + \int_\tau^{t+h} g \right) = \frac{1}{h} \cdot \int_t^{t+h} g \ .$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein ξ_h zwischen t und $t+h$, so daß

$$\int_t^{t+h} g = g(\xi_h) \cdot (t + h - h) = g(\xi_h) \cdot h \ .$$

Daraus folgt

$$\frac{G(t+h) - G(t)}{h} = g(\xi_h)$$

und da ξ_h gegen t konvergiert, wenn h gegen 0 strebt, konvergiert $g(\xi_h)$ gegen $g(t)$ wegen der Stetigkeit von g . Somit konvergiert $\frac{G(t+h)-G(t)}{h}$ gegen $g(t)$, d.h. $G'(t) = g(t)$, was zu beweisen war. $\square$

DEFINITION 3 Die natürliche Logarithmusfunktion ist die Stammfunktion von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}^{-1}$, die in 1 verschwindet, d.h. das natürliche Logarithmus von $x \in \mathbb{R}_+^*$ wird durch

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}$$

definiert.

SATZ *Die Logarithmusfunktion*

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist bijektive, d.h. für jedes $y \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}_+^*$ mit $\ln x = y$, differenzierbar und es gilt die ***Funktionalgleichung des Logarithmus***

$$\ln (x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

Nach der Kettenregel ist die Ableitung der Funktion

$$F : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \ln (x \cdot y)$$

gegeben durch

$$F'(y) = \frac{1}{x \cdot y} \cdot x = \frac{1}{y} \ .$$

Damit ist F eine Stammfunktion von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}^{-1}$. Nach Korollar 1.1.ii gilt also

$$F = \ln + c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R} \ .$$

Aber

$$\ln x = F(1) = \ln 1 + c = c$$

und somit erhalten wir

$$\ln (x \cdot y) = F(y) = \ln y + c = \ln x + \ln y \ .$$

□

BEISPIEL Eine Stammfunktion von $\tan := \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist

$$-\ln \circ \cos = \ln \circ \frac{1}{\cos} \ .$$

In der Tat folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$[-\ln \circ \cos]' = -\left(\frac{1}{\mathrm{id}} \circ \cos\right) \cdot (-\sin) = \frac{\sin}{\cos} \ .$$

□

Aufgabe Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von tan . Achtung ! Ist $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}\right)$ ein Intervall ?

1.5 Der Fundamentalsatz

HAUPTSATZ *Seien $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f . Dann gilt*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \ .$$

Da $\int_a^\diamond f$ eine Stammfunktion von f ist, existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß $F = \int_a^\diamond f + c$. Daraus folgt

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f + c\right) - \left(\int_a^a f + c\right) = \int_a^b f + c - 0 - c = \int_a^b f \ !$$

$\square$

DEFINITION Mit

$$[F]_a^b := F(b) - F(a)$$

gilt also

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

In vielen Situationen hängt die Funktion noch von Parametern ab. In diesem Fall ist es nützlich die Variable bzgl. der man integriert zu kennzeichnen. Man schreibt dann

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_{x=a}^b \ .$$

BEISPIEL 1 Für alle $s \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ mit $a \leqslant b$ gilt

$$\int_a^b x^s dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_a^b & \text{falls } s \neq -1 \\ [\ln x]_a^b & \text{falls } s = -1 \end{cases} \ .$$

BEISPIEL 2 Seien $\omega \in \mathbb{R}$, J ein Intervall in $\mathbb{R} \smallsetminus \left(\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{\omega} \cdot \mathbb{Z}\right)$ und $\tau \in J$. Nach Beispiel 1.3 gilt

$$\int_\tau^t 2\omega \cdot \tan(\omega \cdot s)\ ds = -2 \cdot [\ln \circ \cos(\omega \cdot s)]_\tau^t = -2 \cdot [\ln(\cos(\omega \cdot t)) - \ln(\cos(\omega \cdot \tau))] =$$

$$= -2 \cdot \ln\left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{\cos(\omega \cdot \tau)}\right) = \ln\left(\frac{\cos^2(\omega \cdot \tau)}{\cos^2(\omega \cdot t)}\right) \ .$$

1.6 Die Lösung des Wurfmodells

Wir haben die zwei Differentialgleichungen

$$f_1''(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_2''(t) = -g \qquad \text{für alle } t \in [0, \infty[\ ,$$

und die Anfangsbedingungen

$$f_1(0) = 0 \quad , \quad f_2(0) = 0 \quad , \quad f_1'(0) = v_1 > 0 \quad \text{und} \quad f_2'(0) = v_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Mit Hilfe des Fundamentalsatzes gilt zuerst

$$0 = \int_0^t (f_1')'(s)\ ds = \Big[f_1'\Big]_0^t = f_1'(t) - f_1'(0) = f_1'(t) - v_1 \ ,$$

d.h.

$$f_1'(t) = v_1 \quad \text{für alle } t \in [0, \infty[\ .$$

Weiter gilt

$$v_1 \cdot t = v_1 \cdot t - 0 = \Big[v_1 \cdot \mathrm{id}\Big]_0^t = \int_0^t v_1\, ds =$$

$$= \int_0^t f_1'(s)\ ds = \Big[f_1\Big]_0^t = f_1(t) - f_1(0) = f_1(t) \ ,$$

d.h.

$$f_1(t) = v_1 \cdot t \ .$$

Analog bekommt man

$$-g \cdot t = -g \cdot t - 0 = \Big[-g \cdot \mathrm{id}\Big]_0^t = \int_0^t (-g)\ ds =$$

$$= \int_0^t (f_2')'(s)\ ds = \Big[f_2'\Big]_0^t = f_2'(t) - f_2'(0) = f_2'(t) - v_2 \ ,$$

d.h.

$$f_2'(t) = -g \cdot t + v_2 \ .$$

Damit ergibt sich

$$-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_2 \cdot t = \Big[-\frac{1}{2} \cdot g \cdot \mathrm{id}^2 + v_2 \cdot \mathrm{id}\Big]_0^t = \int_0^t (-g \cdot s + v_2)\ ds =$$

$$= \int_0^t f_2'(s)\ ds = \Big[f_2\Big]_0^t = f_2(t) - f_2(0) = f_2(t) \ ,$$

d.h.

$$f_2(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_2 \cdot t \ .$$

Wir haben also gezeigt, daß die Bahn des Balles durch

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} v_1 \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_2 \cdot t \end{pmatrix} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

beschrieben ist. Wir bestimmen jetzt die Gleichung der Bahnkurve, d.h. wir suchen eine Funktion $g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt

$$\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_2 \cdot t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in [0, \infty[\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [0, \infty[\text{ und } y = g(x) \right\} .$$

Für ein Punkt $\begin{pmatrix} v_1 \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_2 \cdot t \end{pmatrix}$ auf der Bahn muß gelten

$$x = v_1 \cdot t \geqslant 0 \qquad \text{und} \qquad y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_2 \cdot t \ ,$$

also $t = \frac{x}{v_1}$ und

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_1} \right)^2 + v_2 \cdot \frac{x}{v_1} = -\frac{g}{2v_1^2} \cdot x^2 + \frac{v_2}{v_1} \cdot x \ .$$

Umgekehrt ein Punkt der Gestalt $\begin{pmatrix} x \\ -\frac{g}{2v_1^2} \cdot x^2 + \frac{v_2}{v_1} \cdot x \end{pmatrix}$ für $x \in [0, \infty[$ ist auch auf der Bahn.

Kapitel 2

DIE EXPONENTIALFUNKTION

UND IHRE

DIFFERENTIALGLEICHUNG

2.1 Definition der Exponentialfunktion

DEFINITION 1 Die Umkehrfunktion

$$\exp := \overset{-1}{\ln} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

des natürlichen Logarithmus ln heißt *Exponentialfunktion* .

Für $x \in \mathbb{R}_+^*$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$s = \ln x \quad \Longleftrightarrow \quad \exp(s) = x \ ,$$

d.h.

$$\exp \circ \ln = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*} \quad \text{und} \quad \ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \ .$$

HAUPTSATZ *Die Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

ist bijektive, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}_+^*$ existiert genau ein $s \in \mathbb{R}$ mit $x = \exp(s)$, differenzierbar. Es gelten die ***Funktionalgleichung der Exponentialfunktion***

$$\exp(s+t) = \exp(s) \cdot \exp(t) \quad \textit{für alle } s,t \in \mathbb{R}$$

und die ***Differentialgleichung der Exponentialfunktion***

$$\exp' = \exp \ .$$

Definiert man $x := \exp(s)$ und $y := \exp(t)$, so folgt $s = \ln x$ und $t = \ln y$. Benutzt man die Funktionalgleichung des Logarithmus, so bekommt man

$$s + t = \ln x + \ln y = \ln(x \cdot y) \ ,$$

d.h.

$$\exp(s+t) = x \cdot y = \exp(s) \cdot \exp(t) \ .$$

Mit Hilfe der Kettenregel folgt

$$1 = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}})' = (\ln \circ \exp)' = (\ln' \circ \exp) \cdot \exp' = \left(\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}} \circ \exp \right) \cdot \exp' = \frac{1}{\exp} \cdot \exp'$$

und somit

$$\exp' = \exp \ .$$

□

DEFINITION 2 Sei $e := \exp(1)$ die Eulersche Zahl.

Dann gilt

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p} = e^{\frac{p}{q}} \quad \text{für alle } p \in \mathbb{N} \text{ und } q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ .$$

In der Tat

$$\left(\exp\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = \underbrace{\exp\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \cdots \cdot \exp\left(\frac{p}{q}\right)}_{q\text{-mal}} = \exp\left(\underbrace{\frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}}_{q\text{-mal}}\right) =$$

$$= \exp(p) = \exp\left(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p\text{-mal}}\right) = \underbrace{\exp(1) \cdot \cdots \cdot \exp(1)}_{p\text{-mal}} = e^p \ .$$

Allgemeiner, da exp stetig ist, schreibt man

$$\exp(t) = e^t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \ .$$

SATZ (Partielle Integration) *Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $F, G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f bzw. g . Dann gilt*

$$\int_a^b f \cdot G = [F \cdot G]_a^b - \int_a^b F \cdot g \ .$$

BEISPIEL 1 Für alle $c \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b e^{c \cdot x}\, dx = \begin{cases} \left[\frac{e^{c\cdot x}}{c}\right]_a^b & \text{falls} \quad c \neq 0 \\ b - a & \qquad\quad\ \ c = 0 \end{cases} \ .$$

BEISPIEL 2 Für alle $c \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b x \cdot e^{c \cdot x}\, dx = \begin{cases} \left[x \cdot \frac{e^{c\cdot x}}{c}\right]_a^b - \left[\frac{e^{c\cdot x}}{c^2}\right]_a^b & \text{falls} \quad c \neq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2) & \qquad\quad\ \ c = 0 \end{cases} \ .$$

Im Falle $c = 0$ ist es einfach :

$$\int_a^b x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2} \cdot \left(b^2 - a^2\right) \ .$$

Falls $c \neq 0$ bekommt man durch partielle Integration

$$\int_a^b x \cdot e^{c\cdot x}\, dx = \left[x \cdot \frac{e^{c\cdot x}}{c}\right]_a^b - \int_a^b \frac{e^{c\cdot x}}{c}\, dx = \left[x \cdot \frac{e^{c\cdot x}}{c}\right]_a^b - \left[\frac{e^{c\cdot x}}{c^2}\right]_a^b \ .$$

□

BEISPIEL 3 Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^t \cos^2 x\, dx = \int_0^t \cos x \cdot \cos x\, dx = [\sin x \cdot \cos x]_0^t - \int_0^t \sin x \cdot (-\sin x)\ dx =$$

$$= \sin t \cdot \cos t + \int_0^t \left(1 - \cos^2 x\right)\ dx = \sin t \cdot \cos t + t - \int_0^t \cos^2 x\, dx\ ,$$

und somit

$$2 \cdot \int_0^t \cos^2 x\, dx = \sin t \cdot \cos t + t\ ,$$

d.h.

$$\int_0^t \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} \cdot (\sin t \cdot \cos t + t)\ .$$

2.2 Die lineare homogene Differentialgleichung

HAUPTSATZ *Seien $c, \tau, \eta \in \mathbb{R}$.*

Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$f' = c \cdot f$$

und

$$f(\tau) = \eta$$

ist. Diese Lösung ist

$$f = \eta \cdot e^{c\cdot(\diamond - \tau)} \ .$$

Zuerst ist $f := \eta \cdot e^{c\cdot(\diamond-\tau)}$ eine Lösung, da nach der Kettenregel gilt

$$f' = \eta \cdot e^{c\cdot(\diamond-\tau)} \cdot (c \cdot (\diamond - \tau))' = \eta \cdot e^{c\cdot(\diamond-\tau)} \cdot c = c \cdot f \ .$$

Sei jetzt f eine beliebige Lösung des Anfangswertproblems. Sie ist zwar unbekannt, aber vorhanden ! Mit dem Ansatz $f = g \cdot e^{c\cdot(\diamond-\tau)}$ probiert man dieses Problem auf ein einfacheres Problem zurückzuführen. Eigentlich wollen wir zeigen, daß $g = \eta$ ist. Der Ansatz bedeutet, daß g durch

$$g := f \cdot e^{-c\cdot(\diamond-\tau)}$$

definiert ist. Es folgt mit der Produkt- und Kettenregel

$$g' = f' \cdot e^{-c\cdot(\diamond-\tau)} + f \cdot e^{-c\cdot(\diamond-\tau)} \cdot (-c \cdot (\diamond - \tau))' = (f' - c \cdot f) \cdot e^{-c\cdot(\diamond-\tau)} = 0 \ .$$

Somit ist g gleich einer Konstante a , aber

$$a = g(\tau) = f(\tau) \cdot e^{-c\cdot(\diamond-\tau)} = \eta \cdot e^0 = \eta \ ,$$

was zu beweisen war. □

2.3 Kohlenstoff C^{14} Datierung

Der Zerfall eines radioaktiven Materials mit Masse (oder Konzentration) $m(t)$ zur Zeit t wird durch

$$m' = -\lambda \cdot m$$

beschrieben, wobei λ die Zerfallskonstante ist. Ist M die Masse zur Zeit 0 , so gilt

$$m(t) = M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \ .$$

Ist τ die *Halbwertzeit* , so ist per Definition

$$\frac{1}{2} \cdot M = M \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \ ,$$

d.h.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \ .$$

Daraus folgt

$$m(t) = M \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau} \cdot t} \ .$$

Z.B. für C^{14} gilt $\tau \simeq 5730$ Jahre, also

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \simeq 1.21 \cdot 10^{-4} \text{ Jahre}^{-1} \ .$$

BEISPIEL 1 Ist $M = 1$, so folgt

$$m\left(3 \cdot 10^4\right) \simeq e^{-1.21 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^4} = e^{-3 \cdot 1.21} \simeq 0.0265 \ .$$

Das Verhältnis V vom radioaktiven C^{14} zum nicht radioaktiven C^{12} ist in erster Approximation bis 1950 konstant geblieben. Dieses Verhältnis ist auch bei lebenden Organismen das gleiche durch das Aufnehmen aus der Luft. Nach dem Absterben zerfällt der enthaltene Kohlenstoff C^{14} und das Verhältnis $v(T)$ zum C^{12} nach T Jahren ist durch

$$v(T) = V \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau} \cdot T}$$

gegeben. Mißt man $v(T)$, so erhält man

$$T = \frac{\tau}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{V}{v(T)}\right) \simeq 8267 \cdot \ln\left(\frac{V}{v(T)}\right) \text{ Jahre} \ .$$

BEISPIEL 2 Mißt man ein Verhältnis von 0.00239 , so folgt

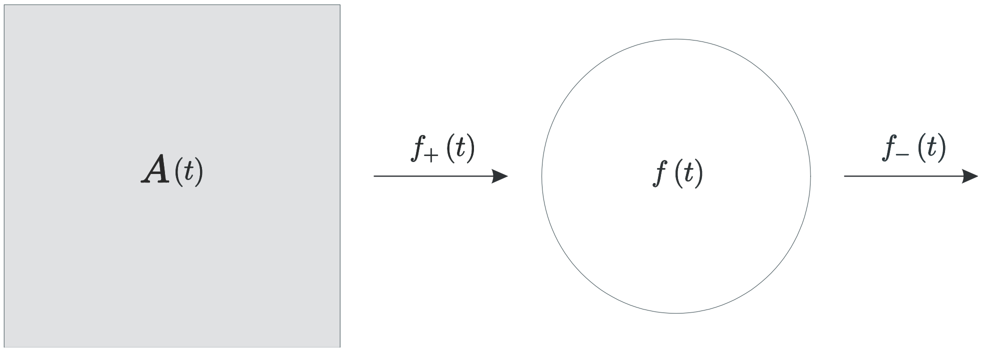
$$T = 8267 \cdot \ln\left(\frac{1}{0.0239}\right) \simeq 30867 \ .$$

Kapitel 3

ZWEIKASTEN MODELLE

3.1 Beschreibung des Modells

Ein Organismus (oder ein einzelnes Organ) nehme von außen (durch die Umwelt oder von einem anderen Organ) Chemikalien auf und scheidet gleichzeitig einen Teil davon wieder aus.



Die Menge oder besser die Konzentration, d.h. die Menge pro Volumeneinheit ($\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} = \mathrm{mg} \cdot \mathrm{cm}^{-3} = \mathrm{mg} \cdot \mathrm{ml}^{-1}$), im Organismus im Laufe der Zeit wird durch eine Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f(t)$$

beschrieben. Zur Zeit t ergibt sie sich als Differenz der Aufnahme $f_+(t)$ und der Ausscheidung $f_-(t)$:

$$f(t) = f_+(t) - f_-(t) \ .$$

Zur Zeit 0 sei die Konzentration $f_0 := f(0)$ bekannt, sowie im Laufe der Zeit die äußere Konzentration

$$A : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto A(t) \ .$$

Für nicht zu hohe Konzentrationen sind zu jeder Zeit t folgende Hypothesen plausibel. Dabei seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ bekannte Konstanten.

(a) Die momentane Änderungsrate von f_+ ist proportional zur Konzentration A :

$$f_+'(t) = \alpha \cdot A(t) \ .$$

(b) Die momentane Änderungsrate von f_- ist proportional zu f :

$$f_-'(t) = \beta \cdot f(t) \ .$$

Da $f'(t) = f_+'(t) - f_-'(t)$, folgt aus (a) und (b), daß dieses zweikasten Modell mathematisch durch das Anfangswertproblem

$$f'(t) = -\beta \cdot f(t) + \alpha \cdot A(t) \qquad (*)$$

und

$$f(0) = f_0 \qquad (**)$$

beschrieben ist. Die Einheit von α und β ist s^{-1} .

Es ist zwar eine lineare Differentialgleichung, aber sie ist nicht homogen.

3.2 Die lineare inhomogene Differentialgleichung

HAUPTSATZ *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $d : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktionen, $\tau \in J$ und $c, \eta \in \mathbb{R}$.*

Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$, die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$f' = c \cdot f + d$$

und

$$f(\tau) = \eta$$

ist. Diese Lösung ist

$$f = \eta \cdot e^{c\cdot(\diamond - \tau)} + e^{c\cdot\diamond} \cdot \int_\tau^\diamond e^{-c\cdot s} \cdot d(s)\ ds\ .$$

Die angegebene Funktion ist eine Lösung, da

$$f' = \eta \cdot c \cdot e^{c\cdot(\diamond-\tau)} + c \cdot e^{c\cdot\diamond} \cdot \int_\tau^\diamond e^{-c\cdot s} \cdot d(s)\ ds + e^{c\cdot\diamond} \cdot e^{-c\cdot\diamond} \cdot d = c \cdot f + d\ .$$

Umgekehrt ist f eine Lösung des Anfagswertproblems, gehen wir analog zum Beweis für die lineare homogene Differentialgleichung (vgl. Hauptsatz 2.2) mit Hilfe des Ansatzes $f = g \cdot e^{c\cdot(\diamond-\tau)}$ vor. Dies nennt man die *Methode der Variation der Konstanten* . Damit ist g durch

$$g := e^{-c\cdot(\diamond-\tau)} \cdot f$$

definiert. Wir erhalten die Differentialgleichung

$$g' = -c \cdot e^{-c\cdot(\diamond-\tau)} \cdot f + e^{-c\cdot(\diamond-\tau)} \cdot f' = e^{-c\cdot(\diamond-\tau)} \cdot d$$

und

$$g(\tau) = g(\tau) \cdot e^{-c\cdot(\tau-\tau)} = f(\tau) = \eta\ .$$

Es folgt für alle $t \in J$

$$g(t) - \eta = g(t) - g(\tau) = \int_\tau^t g' = \int_\tau^t e^{-c\cdot(\diamond-\tau)} \cdot d = \int_\tau^t e^{-c\cdot(s-\tau)} \cdot d(s)\ ds =$$

$$= e^{c\cdot\tau} \cdot \int_\tau^t e^{-c\cdot s} \cdot d(s)\ ds\ ,$$

also

$$g = \eta + e^{c\cdot\tau} \cdot \int_\tau^t e^{-c\cdot s} \cdot d(s)\ ds\ ,$$

und somit

$$f(t) = \eta \cdot e^{c\cdot(t-\tau)} + e^{c\cdot(t-\tau)} \cdot e^{c\cdot\tau} \cdot \int_\tau^t e^{-c\cdot s} \cdot d(s)\ ds =$$

$$= \eta \cdot e^{c\cdot(t-\tau)} + e^{c\cdot t} \cdot \int_\tau^t e^{-c\cdot s} \cdot d(s)\ ds\ .$$

$\square$

KOROLLAR *Die Lösung des Anfangswertproblems 3.1,* $(*)$ *und* $(**)$ *, ist*

$$f(t) = \left(f_0 + \alpha \cdot \int_0^t e^{\beta \cdot s} \cdot A(s)\, ds \right) \cdot e^{-\beta \cdot t} \ .$$

3.3 Umweltprobleme

Erstes Beispiel

Nehmen wir zuerst an, daß $A = b \in \mathbb{R}_+$ konstant ist. Dies kann man bei Umweltprobleme, z.B. Vergiftungen, benutzen. In diesem Fall gilt

$$\int_0^t e^{\beta \cdot s} \cdot A(s)\, ds = b \cdot \int_0^t e^{\beta \cdot s}\, ds = b \cdot \left[\frac{e^{\beta \cdot s}}{\beta}\right]_0^t = \frac{b}{\beta} \cdot \left[e^{\beta \cdot t} - 1\right] \ ,$$

und somit

$$f(t) = \left(f_0 + \frac{\alpha \cdot b}{\beta} \cdot \left[e^{\beta \cdot t} - 1\right]\right) \cdot e^{-\beta \cdot t} = \left(f_0 - \frac{\alpha \cdot b}{\beta}\right) \cdot e^{-\beta \cdot t} + \frac{\alpha \cdot b}{\beta} \ .$$

Da $\beta > 0$ ist, hat man $\lim_{t \to \infty} e^{-\beta \cdot t} = 0$, also ist $\lim_{t \to \infty} f(t) = \frac{\alpha \cdot b}{\beta}$.

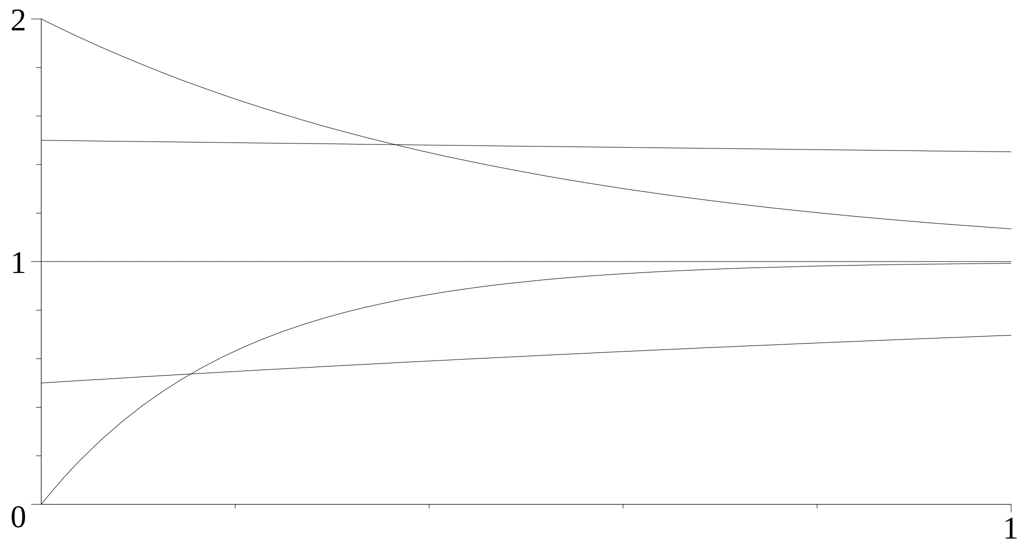
Wir erhalten also ein dynamisches Gleichgewicht $\frac{\alpha \cdot b}{\beta}$, das proportional zur äußeren Konzentration b und umgekehrt proportional zur relativen Abbaugeschwindigkeit β ist. Wie aus der Interpretation zu vermuten ist, ist der Gleichgewichtszustand $\frac{\alpha \cdot b}{\beta}$ selbst auch eine (konstante) Lösung von 3.1, $(*)$ und $(**)$.

Durch geschickte Wahl der Konzentrationseinheit kann man annehmen, daß $\frac{\alpha \cdot b}{\beta} = 1$ ist. Die Zeitentwicklung der Konzentration des Schadstoffes in unserem Körper hat dann die Form

$$f(t) = (f_0 - 1) \cdot e^{-\beta \cdot t} + 1 \ .$$

Die nächste Tabelle gibt die Werte an, die benutzt wurden um einige dieser Funktionen darzustellen.

f_0	0	0.5	1	1.5	2
β	5	1	?	0.1	2



Zweites Beispiel

Wie ist es wenn A linear zuwächst ? Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $A(t) = a \cdot t + b$. In diesem Fall gilt

$$\int_0^t e^{\beta \cdot s} \cdot A(s)\, ds = \int_0^t e^{\beta \cdot s} \cdot (a \cdot s + b)\, ds = a \cdot \left[s \cdot \frac{e^{\beta \cdot s}}{\beta} \right]_0^t - a \cdot \left[\frac{e^{\beta \cdot s}}{\beta^2} \right]_0^t + b \cdot \left[\frac{e^{\beta \cdot s}}{\beta} \right]_0^t =$$

$$= \frac{a}{\beta} \cdot t \cdot e^{\beta \cdot t} - \frac{a}{\beta^2} \cdot \left[e^{\beta \cdot t} - 1 \right] + \frac{b}{\beta} \cdot \left(e^{\beta \cdot t} - 1 \right) = \left[\frac{a}{\beta} \cdot t - \frac{a}{\beta^2} + \frac{b}{\beta} \right] \cdot e^{\beta \cdot t} + \frac{a}{\beta^2} - \frac{b}{\beta},$$

und somit

$$f(t) = \left(f_0 + \alpha \cdot \left\{ \left[\frac{a}{\beta} \cdot t - \frac{a}{\beta^2} + \frac{b}{\beta} \right] \cdot e^{\beta \cdot t} + \frac{a}{\beta^2} - \frac{b}{\beta} \right\} \right) \cdot e^{-\beta \cdot t} =$$

$$= \left[f_0 - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(b - \frac{a}{\beta} \right) \right] \cdot e^{-\beta \cdot t} + \frac{\alpha \cdot a}{\beta} \cdot t + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(b - \frac{a}{\beta} \right) .$$

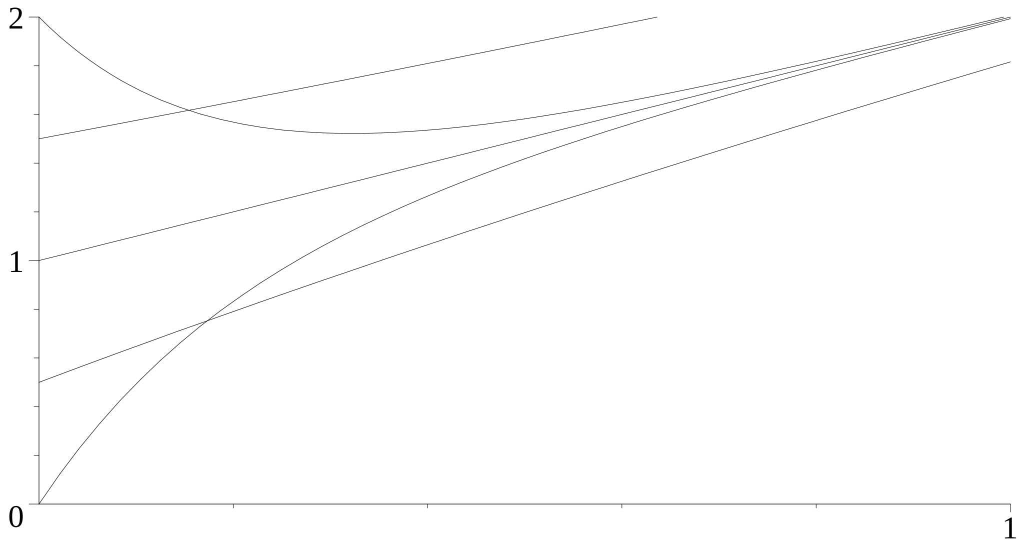
Da $\beta > 0$ ist, hat man $\lim_{t \to \infty} e^{-\beta \cdot t} = 0$, also ist die Halbgerade Graph der (affinen) linearen Funktion

$$t \longmapsto \frac{\alpha \cdot a}{\beta} \cdot t + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(b - \frac{a}{\beta} \right) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Asymptote zum Graph von f .

Durch geschickte Wahl der Einheiten (Zeit und Konzentration) kann man annehmen, daß gilt $\frac{\alpha \cdot a}{\beta} = 1$ und $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(b - \frac{a}{\beta} \right) = 1$. Die Zeitentwicklung hat nun die Form

$$f(t) = (f_0 - 1) \cdot e^{-\beta \cdot t} + t + 1 .$$



Folgende Werte wurden benutzt

f_0	0	0.5	1	1.5	2
β	5	1	?	0.5	5

3.4 Medikamententherapie

Wir wollen jetzt die Konzentration einer Chemikalie im Blut nach einer Injektion in einem Muskel untersuchen.

Anfangstherapie

Sei A_a die Konzentration dieser Chemikalie im Muskel kurz nach der Injektion. Wie oben können wir annehmen, daß die momentane Änderungsrate von A proportional zu A ist und daß die Chemikalie direkt und vollständig in die Blutbahn gelangt. Damit ist A Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$A'(t) = -\alpha \cdot A(t) \quad \text{und} \quad A(0) = A_a \ .$$

Dieses Problem können wir mit Hauptsatz 2.2 sofort lösen. Es gilt

$$A(t) = A_a \cdot e^{-\alpha \cdot t} \ .$$

Da es noch keine Chemikalie im Blut zur Zeit 0 gab, bleibt jetzt das inhomogene Anfangswertproblem

$$f'(t) = -\beta \cdot f(t) + \alpha \cdot A_a \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

und

$$f(0) = 0$$

zu lösen.

Nach Korollar 3.2 ist die einzige Lösung f_a dieses Problems gegeben durch

$$f_a(t) = \left(\alpha \cdot \int_0^t A_a \cdot e^{-\alpha \cdot s} \cdot e^{\beta \cdot s} \, ds \right) \cdot e^{-\beta \cdot t} = \left[\frac{\alpha \cdot A_a}{\beta - \alpha} \cdot e^{(\beta - \alpha) \cdot s} \right]_0^t \cdot e^{-\beta \cdot t} =$$

$$= \frac{\alpha \cdot A_a}{\beta - \alpha} \cdot \left[e^{(\beta - \alpha) \cdot t} - 1 \right] \cdot e^{-\beta \cdot t} = \frac{\alpha \cdot A_a}{\alpha - \beta} \cdot \left(e^{-\beta \cdot t} - e^{-\alpha \cdot t} \right) \ .$$

Wird das Maximum in m_a angenommen, so ist m_a Lösung von

$$-\beta \cdot e^{-\beta \cdot t} + \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = 0 \ ,$$

oder $e^{(\alpha - \beta) \cdot t} = \frac{\alpha}{\beta}$, d.h.

$$m_a = \frac{\ln \frac{\alpha}{\beta}}{\alpha - \beta} > 0 \ .$$

Diese Zeit m_a ist unabhängig von A_a ! Es gilt

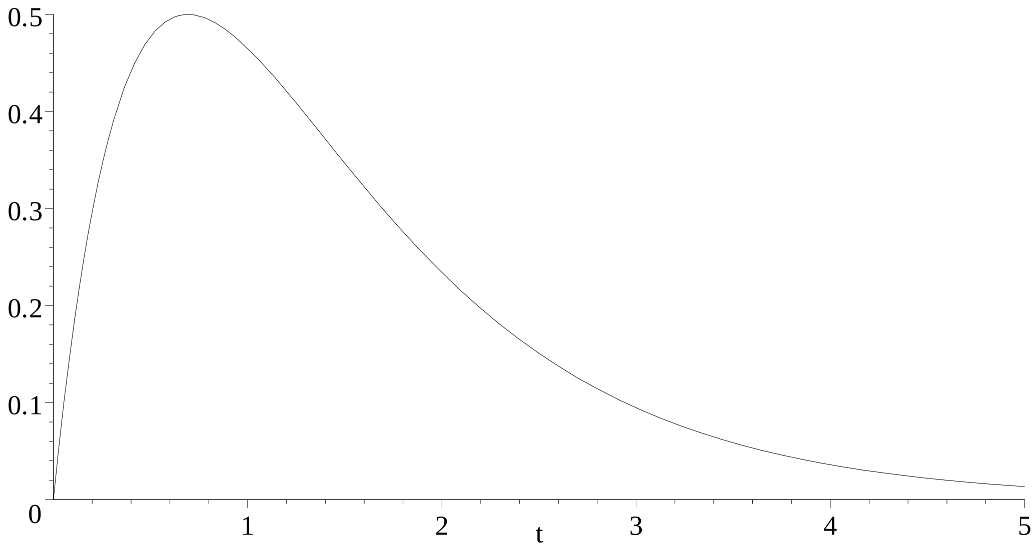
$$e^{-\beta \cdot m_a} - e^{-\alpha \cdot m_a} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot e^{-\alpha \cdot m_a} - e^{-\alpha \cdot m_a} = \frac{\alpha - \beta}{\beta} \cdot e^{-\alpha \cdot \frac{\ln \frac{\alpha}{\beta}}{\alpha - \beta}} =$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\beta - \alpha}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}} \ ,$$

also

$$f_a(m_a) = \frac{\alpha \cdot A_a}{\alpha - \beta} \cdot \left(e^{-\beta \cdot m_a} - e^{-\alpha \cdot m_a} \right) = A_a \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}} \ .$$

Die folgende Graphik wurde mit $A_a = 1$, $\alpha = 2$ und $\beta = 1$ angefertigt.



Mit den obigen Konstanten folgt $m_a = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2 = 0.69$ und $f_a(m_a) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Nachfolgetherapie

Wir nehmen jetzt an, daß ein Rest Chemikalie mit Konzentration R zur Zeit τ im Blut vorhanden war und zu dieser Zeit mit einer Anfangskonzentration A_n gespritzt wird. Damit ist A Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$A'(t) = -\alpha \cdot A(t) \quad \text{und} \quad A(\tau) = A_n \ ,$$

d.h.

$$A(t) = A_n \cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)} \ .$$

Das Modell ist also durch das inhomogene Anfangswertproblem

$$f'(t) = -\beta \cdot f(t) + \alpha \cdot A_n \cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}$$

und

$$f(\tau) = R$$

beschrieben.

Nach Hauptsatz 3.2 rechnen wir zuerst

$$\int_\tau^t e^{\beta\cdot s} \cdot \alpha \cdot A_n \cdot e^{-\alpha\cdot(s-\tau)}\, ds = \alpha \cdot A_n \cdot e^{\alpha\cdot\tau} \cdot \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)\cdot s}}{\beta-\alpha}\right]_\tau^t =$$

$$= \frac{\alpha \cdot A_n}{\beta-\alpha} \cdot e^{\alpha\cdot\tau} \cdot \left[e^{(\beta-\alpha)\cdot t} - e^{(\beta-\alpha)\cdot\tau}\right] \ .$$

Die einzige Lösung f_n dieses Problems ist also durch

$$f_n(t) = R \cdot e^{-\beta\cdot(t-\tau)} + e^{-\beta\cdot t} \cdot \int_\tau^t e^{\beta\cdot s} \cdot \alpha \cdot A_n \cdot e^{-\alpha\cdot(s-\tau)}\, ds =$$

$$= R \cdot e^{-\beta\cdot(t-\tau)} + \frac{\alpha \cdot A_n}{\beta-\alpha} \cdot e^{\alpha\cdot\tau} \cdot e^{-\beta\cdot t} \cdot \left[e^{(\beta-\alpha)\cdot t} - e^{(\beta-\alpha)\cdot\tau}\right] =$$

$$= R \cdot e^{-\beta\cdot(t-\tau)} + \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta} \cdot \left[e^{-\beta\cdot(t-\tau)} - e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\right] =$$

$$= \left(R + \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta}\right) \cdot e^{-\beta\cdot(t-\tau)} - \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta} \cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}$$

gegeben.

Hier wird das Maximum von f_n in m_n Lösung von

$$-\beta \cdot \left(R + \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta}\right) \cdot e^{-\beta\cdot(t-\tau)} + \alpha \cdot \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta} \cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)} = 0$$

angenommen. Diese Gleichung kann man folgendermaßen umformen :

$$\alpha \cdot \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta} \cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)} \cdot e^{\beta\cdot(t-\tau)} = \beta \cdot \left(R + \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta}\right)$$

$$e^{(\beta-\alpha)\cdot(t-\tau)} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{R \cdot (\alpha - \beta)}{\alpha \cdot A_n}\right) \ ,$$

d.h.

$$m_n = \tau + \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot \ln\left[\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(1 + \frac{R \cdot (\alpha - \beta)}{\alpha \cdot A_n}\right)^{-1}\right] \ .$$

Da

$$\left(R + \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta}\right) \cdot e^{-\beta\cdot(m_n-\tau)} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta} \cdot e^{-\alpha\cdot(m_n-\tau)} \ ,$$

folgt

$$f_n(m_n) = \left(R + \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta}\right) \cdot e^{-\beta\cdot(m_n-\tau)} - \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta} \cdot e^{-\alpha\cdot(m_n-\tau)} =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta} \cdot e^{-\alpha\cdot(m_n-\tau)} - \frac{\alpha \cdot A_n}{\alpha - \beta} \cdot e^{-\alpha\cdot(m_n-\tau)} =$$

$$= \frac{\alpha \cdot A_n}{\beta - \alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \cdot e^{-\alpha\cdot(m_n-\tau)} = \frac{\alpha \cdot A_n}{\beta} \cdot e^{-\alpha\cdot(m_n-\tau)} \ .$$

Aber

$$e^{-\alpha\cdot(m_n-\tau)} = \exp\left(-\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \cdot \ln\left[\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(1 + \frac{R \cdot (\alpha - \beta)}{\alpha \cdot A_n}\right)^{-1}\right]\right) =$$

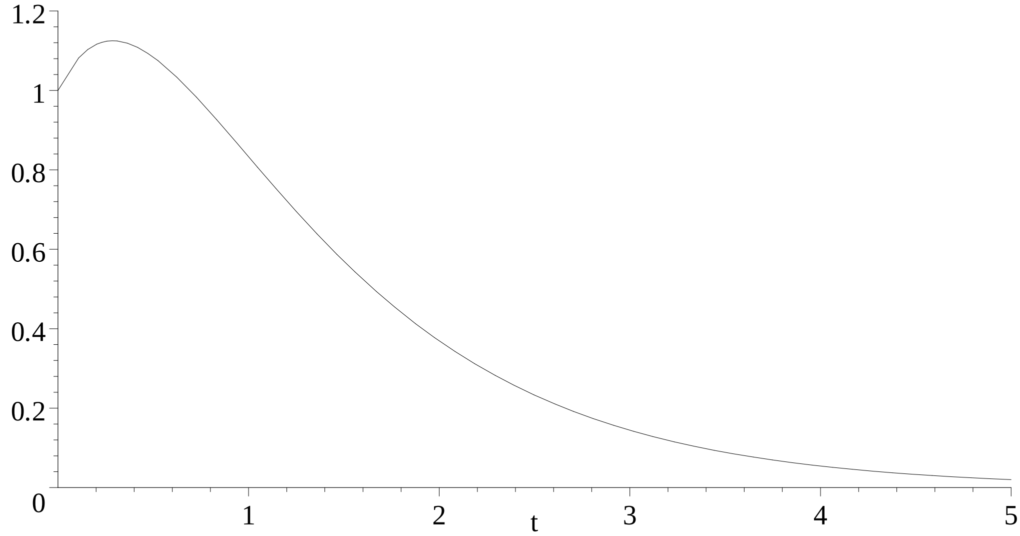
$$= \left[\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(1 + \frac{R \cdot (\alpha - \beta)}{\alpha \cdot A_n}\right)^{-1}\right]^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}$$

und wir bekommen schließlich

$$f_n(m_n) = \frac{\alpha \cdot A_n}{\beta} \cdot \left[\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(1 + \frac{R \cdot (\alpha - \beta)}{\alpha \cdot A_n}\right)^{-1}\right]^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} =$$

$$= A_n \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{R \cdot (\alpha - \beta)}{\alpha \cdot A_n}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \ .$$

Die folgende Graphik wurde mit $\tau = 0$, $A_n = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ und $R = 1$ angefertigt.



Mit den obigen Konstanten ist $m_n = -\ln \frac{4}{3} \simeq -0.29$ und $f_n(m_n) = \frac{9}{8} = 1.125$.

3.5 Optimale Therapie

In welchen gleichmäßigen Abständen, bis auf den ersten, und welche Mengen eines Medikamentes muß man intramuskulär spritzen, damit die Konzentration eines Medikamentes im Blut seine Wirkungsschwelle S_m übersteigt, aber seine Nebenwirkungsschwelle S_M höchstens erreicht?

In unserem Modell wird die Konzentration des Medikamentes im Blut des Patienten durch die Funktion f_a in 3.4, Anfangstherapie beschrieben. Die Konstanten α und β werden in einem Experiment zuerst bestimmt. Man kann folgende Werte

$$\alpha = 0.7 \quad , \quad \beta = 0.4 \quad , \quad S_M = 2.3 \quad \text{und} \quad S_m = 1.4$$

benutzen.

Erste Spritze

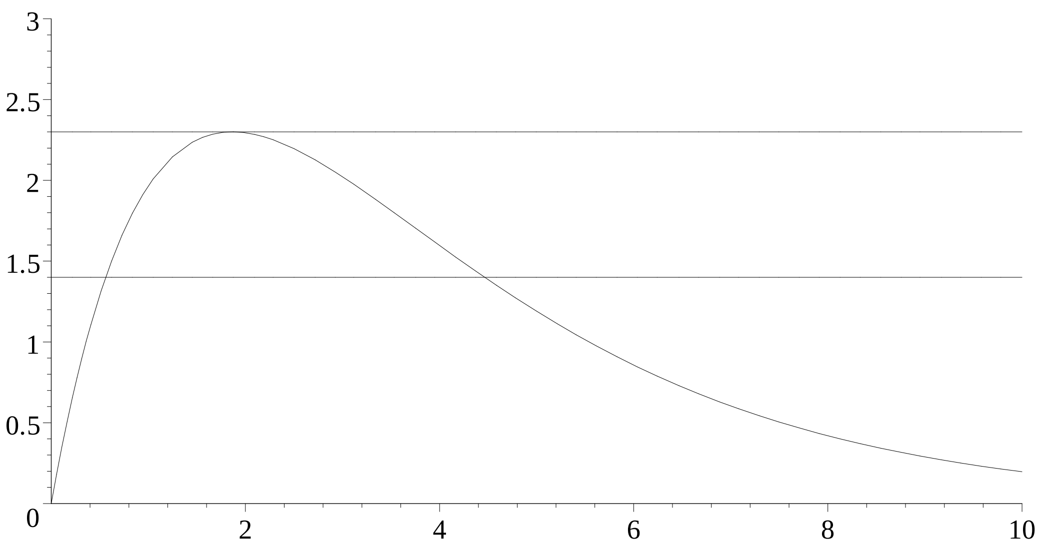
Die höchste Konzentration im Blut ist $f_a(m_a)$ und sollte S_M nicht übersteigen. Es genügt, die Konzentration A_a des Medikamentes im Muskel zur Zeit 0 , entspechend die Größe der Spritze, so zu wählen, daß

$$S_M = f_a(m_a) = A_a \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}$$

gilt, d.h.

$$A_a = S_M \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \quad .$$

Mit den obigen Konstanten folgt $m_a = 1.87$ und $A_a = 4.85$.



Endwirkung der ersten Spritze

Ab dem Zeitpunkt m_a fällt die Konzentration im Blut und sollte größer als S_m bleiben. Sei $t_m \geqslant m_a$ die Zeit mit

$$f_a(t_m) = S_m \ ,$$

d.h. t_m ist Lösung der sogenannten tranzendenten Gleichung

$$\frac{\alpha \cdot A_a}{\beta - \alpha} \cdot \left(e^{-\alpha \cdot t_m} - e^{-\beta \cdot t_m}\right) = S_m \ .$$

Man kann sie leider nur approximativ mit Hilfe des Newton-Verfahrens lösen.

Seien

$$g(t) = f_a(t) - S_m$$

und

$$h(t) = t - \frac{g(t)}{g'(t)} \ .$$

Das Newton-Verfahren besteht ausgehend von einem Startwert t_0 , die sukzessiven Approximationen t_k für einige k zu berechnen : es gilt

$$t_{k+1} = h(t_k) \ .$$

Für $t_0 = 0, 2, 4, 6$ bekommt man

0	2	4	6
0.412 34	13.110	4.455 2	4.139 7
0.547 44	−45.005	4.465 4	4.459 5
0.560 47	−43.576	4.465 4	4.465 4
0.560 59	−42.147	4.465 4	4.465 4
0.560 59	−40.719	4.465 4	4.465 4

.

Der gesucht Wert ist also $t_m = 4.47$. Die zweite Spritze muß also um diese Zeit verabreicht werden.

Zweite Spritze

Wie groß muß die zweite Spritze sein ?

Jetzt wird die Konzentration des Medikamentes im Blut des Patienten durch die Funktion f_n in 3.4, Nachfolgetherapie mit $\tau = t_m$ und $R = S_m$ beschrieben. Die einzige Lösung f_n des Anfangswertproblems

$$f'(t) = -\beta \cdot f(t) + \alpha \cdot A_a \cdot e^{-\alpha \cdot (t - t_m)} \quad \text{und} \quad f(t_m) = S_m$$

ist also durch

$$f_n(t) = \left(S_m - \frac{\alpha \cdot A_n}{\beta - \alpha}\right) \cdot e^{-\beta \cdot (t - t_m)} + \frac{\alpha \cdot A_n}{\beta - \alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot (t - t_m)}$$

gegeben und es gilt

$$m_n = t_m + \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \ln\left[\frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(1 - \frac{S_m \cdot (\beta - \alpha)}{\alpha \cdot A_n}\right)\right] \ ,$$

sowie

$$f_n(m_n) = \frac{\alpha \cdot A_n}{\beta} \cdot \left[\frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(1 - \frac{S_m \cdot (\beta - \alpha)}{\alpha \cdot A_n}\right)\right]^{\frac{\alpha}{\alpha - \beta}} \ .$$

Es gilt $m_n = 5.78$.

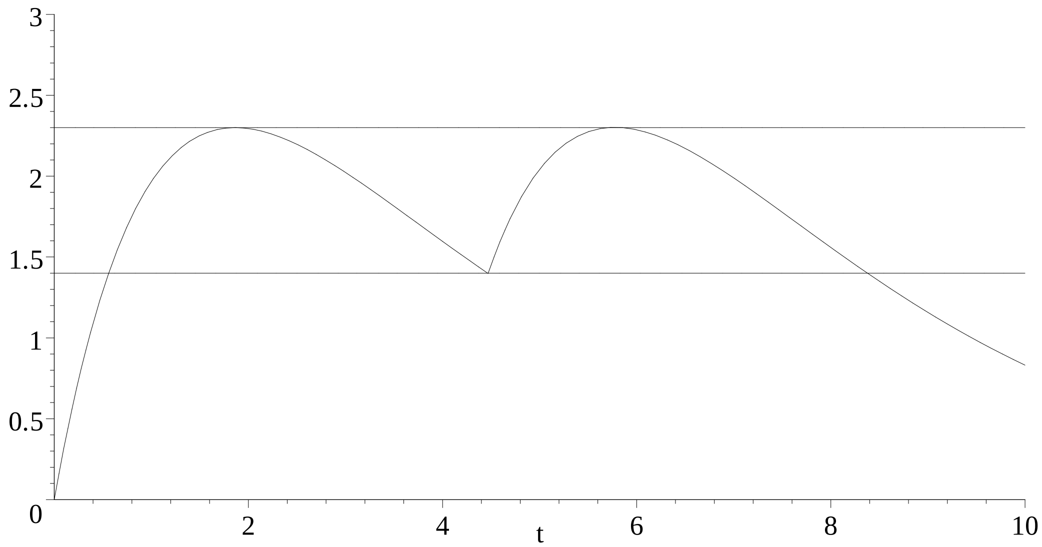
Die benötigte Anfangskonzentation A_n im Blut wird in diesem Fall durch

$$f_n(m_n) = S_M$$

bestimmt, d.h.

$$\frac{\alpha \cdot A_n}{\beta} \cdot \left[\frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(1 - \frac{S_m \cdot (\beta - \alpha)}{\alpha \cdot A_n}\right)\right]^{\frac{\alpha}{\alpha - \beta}} = S_M \; .$$

Mit Hilfe des Newtons-Verfahrens bekommt man $A_n = 3.28$.



Dritte Spritze

Um die Zeit-Abstände für die nachfolgenden Spritzen zu bestimmen, müssen wir die Gleichung

$$f_n(t) = S_m$$

lösen. Seien

$$g_n(t) = f_n(t) - S_m$$

und

$$h_n(t) = t - \frac{g_n(t)}{g_n'(t)} \; .$$

Mit dem Newton-Verfahren bekommen wir

$$\begin{array}{c} 6 \\ 12.931 \\ 2.659\,9 \\ 3.516\,8 \\ 4.112\,3 \\ 4.402\,7 \\ 4.467\,1 \\ 4.470\,0 \\ 4.470\,0 \\ 4.47 \\ 4.47 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} 10 \\ 8.004\,8 \\ 8.370\,6 \\ 8.378\,0 \\ 8.378\,0 \\ 8.378\,0 \\ 8.378\,0 \\ 8.378\,0 \\ 8.378\,0 \\ 8.378\,0 \\ 8.378\,0 \end{array} \quad ,$$

d.h. die dritte Spritze muß nach 8.38 Zeiteinheiten verabreicht werden, also 3.91 Zeiteinheiten nach der zweiten Spritze.

FRAGE Was kann man festellen ? Z.B. die Graphen von f_a und f_n sind deckungsgleich, oder

$$4.47 - 0.56 = 3.91\ !$$

Wie hätte man anders vorgehen können ? Eindeutigkeitssatz !