Philipps-Universität Marburg **Sommer-Semester 2014**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, D. Lellek

Übungen zu Dynamische Systeme
1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 *(Definition dynamischer Systeme)* (4)
Es sei $\varphi(t;x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein dynamisches System. Untersuche, für welche Werte von $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$ auch

$$\tilde{\varphi}(t;x) := \varphi(\alpha t + \beta; x), \quad \hat{\varphi}(t;x) := \varphi(t^\gamma; x)$$

stets dynamische Systeme sind.

Aufgabe 2 *(Periodische Punkte von dynamischen Systemen)* (3)
Es sei $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein dynamisches System und $\mathcal{B}(x)$ die Trajektorie eines Startpunktes $x \in \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x_0 := \varphi(t_0;x) \in \mathcal{B}(x)$ heißt *periodischer Punkt*, wenn ein $\tau \neq 0$ existiert, so dass

$$\varphi(t_0 + \tau; x) = \varphi(t_0; x) = x_0$$

gilt. Das kleinste positive τ, das dieser Bedingung genügt, heißt dann *Periode* des Punktes x_0. Zeige: Hat $x_0 \in \mathcal{B}(x)$ die Periode $\hat{\tau}$, so sind alle $p \in \mathcal{B}(x)$ periodische Punkte mit Periode $\hat{\tau}$.

Aufgabe 3 *(Kontinuierliches Populationsmodell)* (3)
Ein kontinuierliches Wachstumsmodell für eine Population $x(t)$ mit begrenzten Ressourcen ist gegeben durch

$$x'(t) = ax(1-x), \quad x(0) = x_0 \geq 0$$

mit einem Parameter $a > 0$. Bestimme eine explizite Darstellung der Lösung und untersuche deren Monotonieverhalten und Konvergenz für $t \to \infty$ in Abhängigkeit vom Startwert x_0. Dazu nützlich ist vielleicht $\frac{d}{dx} \ln(1 - \frac{1}{x}) = -\frac{1}{x(1-x)}$.

Abgabe: 08.05.2014, vor der Vorlesung.