Philipps-Universität Marburg **Sommer-Semester 2014**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, D. Lellek

Übungen zu Dynamische Systeme
2. Aufgabenblatt

Aufgabe 4 *(Fixpunkte)* (3)
Betrachte die Iterationen bzw. die entsprechenden zeitdiskreten dynamischen Systeme $x_{k+1} = F_i(x_k)$, $i = 1, 2, 3$, $k \in \mathbb{N}_0$, mit

$$F_1(x) := x - x^3, \quad F_2(x) := x + x^3, \quad F_3(x) := x + x^2.$$

Alle Iterationen besitzen offensichtlich den Fix-/Gleichgewichtspunkt $\hat{x} = 0$. Untersuche, ob $\hat{x}$ jeweils ein attraktiver bzw. abstoßender Fixpunkt ist. Wir nennen hier einen Fixpunkt *abstoßend*, falls $|F_i(x) - \hat{x}| > |x - \hat{x}|$ für alle x in einer Umgebung $K_\varepsilon(\hat{x})$, $\varepsilon > 0$ des Fixpunkts.

Aufgabe 5 *(Nicht-autonome Differentialgleichungen)* (3)
Für nicht-autonome Differentialgleichungen muss die Beschreibung als dynamisches System modifiziert werden, da die Lösung auch vom Anfangszeitpunkt abhängt.
Die Rechenregeln für das erweiterte System $\Phi : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind dann

$$\begin{aligned} \Phi(t; t, x) &= x \quad \forall t \in \mathbb{T},\, x \in \mathbb{R}^n, && (1) \\ \Phi(t + s; t_0, x) &= \Phi(t + s; t, \Phi(t; t_0, x)) \ \forall t, s, t_0 \in \mathbb{T},\, x \in \mathbb{R}^n. && (2) \end{aligned}$$

Allerdings ist dieses System äquivalent zu einem dynamischen System im Sinn der Vorlesung. Zeige mit (1) und (2), dass das durch

$$\hat{\varphi}(s; y) := \begin{pmatrix} \Phi(s + t; t, x) \\ s + t \end{pmatrix}, \text{ wobei } \quad y := \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix},$$

definierte System die Eigenschaften von Definition 1.2.1 besitzt.

Aufgabe 6 *(Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf)* (4)
Betrachte das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [t_0, t_e]$, $y(t_0) = x$, in der Integralform

$$y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds =: (F(y))(t), \quad t \in [t_0, t_e].$$

Ist f dabei leicht zu integrieren und ist F bezüglich einer gegebenen Norm $\|\cdot\|$ eine Kontraktion, so kann mit dem Beweisprinzip des Satzes von Picard-Lindelöf die Lösung y des Anfangswertproblems iterativ bestimmt werden. Das *Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahren* approximiert die Lösung y dabei gemäß der Vorschrift

$$y_0(t) := x, \quad y_{k+1}(t) := (F(y_k))(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y_k(s))\, ds, \quad k \geq 0,$$

mit $y = \lim_{k\to\infty} y_k$. Betrachte hierzu das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{y_2}{t} \\ \frac{y_1}{2t} \end{pmatrix}, \quad y(4) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [4, 6].$$

(i) Zeige, dass F bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ eine Kontraktion auf $(\mathcal{C}[t_0, t_e])^2$ ist.

(ii) Bestimme die Lösung y des Anfangswertproblems mit dem Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahren.

Aufgabe 7 *(Lipschitz-Bedingungen)* (4)

Gegeben sei folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_1(t) + y_2(t) \\ -y_1(t) - 4y_2(t) \end{pmatrix}.$$

(i) Zeige, dass das System eine einseitige Lipschitz-Bedingung erfüllt.

(ii) Seien x und y zwei Lösungen der Gleichung, die sich zum Startzeitpunkt $t_0 = 0$ um maximal 10^{-3} in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm unterscheiden. Bestimme eine obere Schranke für $\|x(10) - y(10)\|_\infty$. Vergleiche die Abschätzung mit der Schranke, die man erhält, wenn man die gewöhnliche Lipschitz-Stetigkeit zugrunde legt.

Abgabe: 22.05.2014, vor der Vorlesung.