Philipps-Universität Marburg **Sommer-Semester 2014**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, D. Lellek

Übungen zu Dynamische Systeme
3. Aufgabenblatt

Aufgabe 8 *(Wronski-Determinante)* (4)
Betrachte die beiden Vektoren

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Diese erfüllen ein lineares homogenes System von Differentialgleichungen, $y'(t) = A(t)y(t)$, $A(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(i) Berechne die Wronski-Determinante $W(t) = \det(y_1(t), y_2(t))$.

(ii) In der Vorlesung wurde gezeigt (vgl. (2.2.4)), dass die Wronski-Determinante nicht verschwindet, wenn $A(t)$ stetig ist. Was kann man hier, unter Berücksichtigung von (i), über die Stetigkeit von $A(t)$ aussagen?

(iii) Bestimme die Einträge von $A(t)$ und überprüfe daran die Behauptung aus (ii).

Aufgabe 9 *(Fundamentalsysteme)* (4)
Es sei $U(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in [t_0, t_e],$$

mit stetiger Systemmatrix $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeige, dass eine stetig differenzierbare Matrix $V(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$x'(t) = -A(t)^T x(t), \quad t \in [t_0, t_e],$$

ist, wenn eine konstante reguläre Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit $V(t)^T U(t) = C$ für alle $t \in [t_0, t_e]$.

Aufgabe 10 *(Fundamentalsysteme, die zweite)* (3)

Es sei $U(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in [t_0, t_e],$$

und $Y(t;s) := U(t)U(s)^{-1}$, $s, t \in [t_0, t_e]$. Zeige:

(i) Es gilt $Y(t;s) \cdot Y(s;r) = Y(t;r)$ für alle $r, s, t \in [t_0, t_e]$.

(ii) $Y(t;s)$ ist regulär mit $Y(t;s)^{-1} = Y(s;t)$ für alle $s, t \in [t_0, t_e]$.

Folgere daraus, dass im Fall einer konstanten Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für das Matrix-Exponential e^{tA} gilt:

$$\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}.$$

Aufgabe 11 *(Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten)* (4)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -7 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit den Methoden aus der Vorlesung die explizite Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = Ay(t)$, $y(0) = (1,1,2)^\top$ und überprüfe diese durch Einsetzen in die Gleichung.

Abgabe: 10.06.2014, vor der Vorlesung.