

Dynamische Systeme

Bernhard Schmitt

Sommer 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Beispiele	1
1.2	Bezeichnungen	7
2	Gewöhnliche Differentialgleichungen	11
2.1	Grundlagen	11
2.2	Lineare Systeme von Differentialgleichungen	17
2.3	Konstante Koeffizienten, Matrix-Exponential	21
	Dynamik bei konstanten Koeffizienten	24
2.4	Nichtlineare Dynamik bei Gleichgewichtspunkten	31
	Lyapunov-Funktionen	34
2.5	Invariante Mengen	36
	Die Stabilität periodischer Lösungen	42
2.6	Verzweigungen	48

1 Einleitung

Die meisten Systeme der realen Welt ändern ihren Zustand mit der Zeit. Viele Naturwissenschaften (Wirtschaftswissenschaften, ..) untersuchen die Gesetze solcher Systeme mit dem Ziel, dafür (vereinfachte) mathematische Modelle herzuleiten. Zeitabhängige Modelle treten meist als Differentialgleichungen (bei kontinuierlicher Zeit) oder als Rekursionsvorschriften (diskrete Zeit) auf. Im Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen (Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden) läßt sich die Existenz von Lösungen solcher Modelle unter einfachen Annahmen beweisen. Die Angabe expliziter Lösungen ist aber nur in einfachen Ausnahmefällen möglich. Wenn man an speziellen Lösungen interessiert ist, d.h. an der Simulation des Modells, muss man daher Computer und numerische Verfahren einsetzen (\rightarrow Numerik von Differentialgleichungen). Oft ist man aber überhaupt nicht an einzelnen Lösungen interessiert, sondern an Aussagen über die Menge aller Lösungen, wie etwa das Verhalten bei langen Zeiträumen oder die Existenz von Gleichgewichten. Dies ist das Thema der *Dynamischen Systeme*. Es wird sich zeigen, dass man bei vielen Modellen kritische Punkte identifizieren kann, deren Analyse eine qualitative Aussage über das Verhalten *aller Lösungen* erlaubt. Teilweise läßt sich dadurch der *Phasenraum*, d.h. der Raum aller möglichen Zustände in verschiedene Bereiche zerlegen, in denen man das Verhalten der Lösungen vorhersagen kann, ohne diese im Einzelnen berechnen zu müssen.

Dadurch wird man in die Lage versetzt, die Systeme auf einer höheren Ebene zu diskutieren. Mathematische Modelle realistischer Systeme hängen immer auch von bestimmten Parametern ab, etwa Materialparametern (Physik), Re-/Produktionsraten (Biologie, Wirtschaft), Zinsniveaus (Finanzmathematik), etc. Bei vielen Systemen beobachtet man beim Überschreiten bestimmter Parameterwerte eine grundlegende Änderung der Lösungsstruktur (ein zu stark belasteter Stab *knickt*). Diesen Punkt nennt man eine *Verzweigung* oder *Bifurkation*. Durch Kenntnis der Verzweigungspunkte und weiterer Eigenschaften läßt sich daher das prinzipielle Verhalten eines Systems oder Modells weitgehend beschreiben.

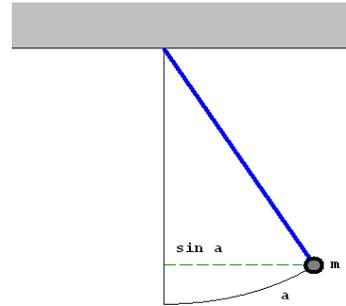
1.1 Beispiele

Bei dynamischen Systemen beobachtet man Größen aus einem Zustandsraum \mathcal{Z} (Phasenraum), welche sich in Abhängigkeit von einer Zeit t aus einer Zeitskala \mathbb{T} ändern (formale Definitionen folgen später). Ein wesentliche Präzisierung des Begriffs ist dabei, dass die Bewegung des Objekts (die *Bahn*), durch Anfangs- Zeitpunkt und -Zustand eindeutig festgelegt ist und sich Bahnstücke aneinanderkoppeln lassen. Ein grundlegendes Unterscheidungsmerkmal bei dynamischen Systemen ist die Struktur von Zustandsraum und Zeitskala, nämlich die Frage, ob sie ein Kontinuum (\mathbb{R}) darstellen oder diskret sind (\mathbb{N}, \mathbb{Z}). Daher werden zunächst 3 Beispiele behandelt, die sich in diesem Aspekt unterscheiden.

		Zustandsraum \mathcal{Z}	
		$\mathcal{Z} = \mathbb{R}^n$	$\mathcal{Z} = \mathbb{N}$
Zeit \mathbb{T}	Kontinuum $\mathbb{T} = \mathbb{R}$	Beisp. 1.1.1	
	diskret $\mathbb{T} = \mathbb{N}$	Beisp. 1.1.2	Beisp. 1.1.3

Dabei werden auch schon typische Fragestellungen und Analysemethoden angesprochen.

Beispiel 1.1.1 Lösungen von Differentialgleichungen (Dglen) stellen die wichtigste Klasse von dynamischen Systemen dar. Hier sind Zeit und Zustand natürlich kontinuierlich, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^n$. Als klassisches Beispiel wird das physikalische Pendel betrachtet. Auf eine an einer beweglichen, masselosen Stange der Länge ℓ hängende Masse m wirkt die Erdanziehung senkrecht nach unten mit der Kraft mg . Wenn die Stange um den Winkel a ausgelenkt ist, ist die Rückstellkraft nur proportional zu $\sin(a)$. Nach dem Newtonschen Gesetz ist dann bei fehlender Reibung die Beschleunigung der Masse entgegengesetzt zu dieser Kraft $mg \sin(a)$. In der realen Zeit τ gilt daher



$$m\ell \frac{d^2 a}{d\tau^2} = -mg \sin(a(\tau)).$$

Als Erstes erkennt man, dass das Modell überhaupt nicht von der Masse m abhängt. Der einzige, verbleibende Parameter $\omega^2 := g/\ell > 0$ bestimmt die Grundfrequenz der Pendelschwingung. Auch diesen Parameter kann man aber noch eliminieren durch Übergang zu einer natürlichen Zeitskala $t := \omega\tau$, indem man die Funktion $x(t) = a(t/\omega)$ betrachtet, also die Darstellung $a(\tau) = x(\omega\tau)$. Die Ableitungen von $x(t)$ werden mit x', x'' bezeichnet und nach der Kettenregel bekommt man mit $x''(t) = (d^2 a/d\tau^2)/\omega^2 = -\sin(x(t))$ eine Gleichung ganz ohne Parameter. Dieses Vorgehen ist eine Standardmaßnahme, um die Zahl der Modellparameter zu reduzieren. Wenn man beim Pendel aber noch eine Dämpfung (Luftwiderstand) berücksichtigt, die proportional zur Geschwindigkeit $da/d\tau$ ist, läßt sich der zugehörige Widerstands-Parameter nicht auch noch eliminieren. Man bekommt dann für $x(t)$ die folgende Differentialgleichung

$$x''(t) + \beta x'(t) + \sin(x(t)) = 0, \quad \beta \geq 0. \quad (1.1.1)$$

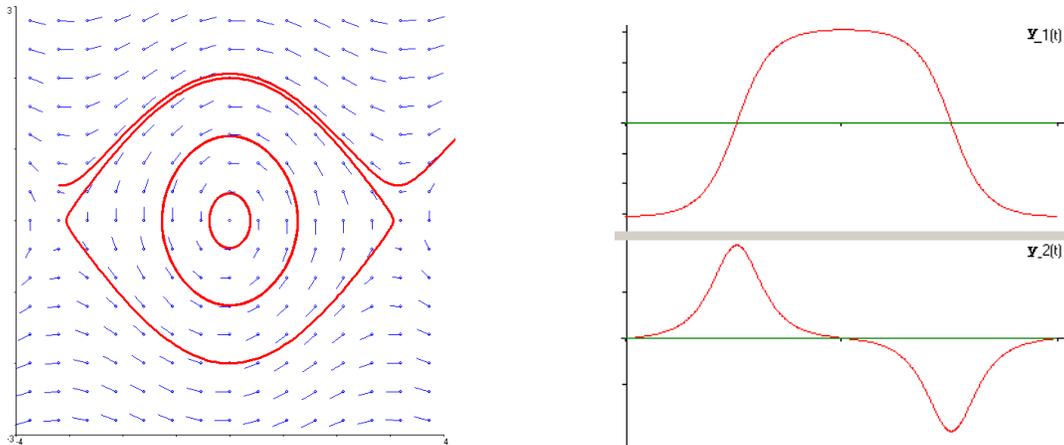
Diese nichtlineare Dgl zweiter Ordnung ist bekanntlich äquivalent zum System erster Ordnung

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\sin(y_1(t)) - \beta y_2(t) \end{pmatrix} =: f(y(t)) \quad \text{für } y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}. \quad (1.1.2)$$

Da die Ableitung f' der rechten Seite global existiert und beschränkt ist, existiert für jeden Anfangswert $y(0)$ genau eine Lösung der Dgl. Für kleine Auslenkungen $x = y_1 \cong 0$ kann der Sinus linear approximiert werden, $\sin(y_1) \cong y_1$, und führt auf die lineare Gleichung $x'' + \beta x' + x = 0$ (Schwingungsgleichung) mit konstanten Koeffizienten, die man explizit lösen kann. Ihre Eigenschaften wurden in der Analysis 2 ausführlich diskutiert.

Hier soll das nichtlineare Problem direkt anhand des Richtungsfelds der Dgl untersucht werden.

Die folgende Grafik links zeigt das ungedämpfte Feld zu $\beta = 0$ im Rechteck $[-4, 4] \times [-3, 3]$ mit einigen Bahnen $\{y(t) : 0 \leq t \leq 20\}$.



Das Richtungsfeld wird durch die blauen Fähnchen markiert, die an einem Punkt $y = (y_1, y_2)^T$ in Richtung des Feldes $f(y)$ zeigen. Wie ein Wind reißt das Feld eingebrachte Teilchen mit und erzeugt so die rot gezeigten Bahnen. Der Punkt $\hat{y} = 0 = (0, 0)^T$ ist ein *Gleichgewicht*, denn ein nicht ausgelenktes Pendel bleibt in Ruhe: $y(0) = \hat{y} \Rightarrow y(t) \equiv \hat{y} \forall t \in \mathbb{R}$. Bahnen in der Nähe dieses Gleichgewichts sehen aus wie Kreise und entsprechen tatsächlich harmonischen Schwingungen $\cong c(\cos t, \sin t)^T$ mit fester Periode 2π . Ein wesentlicher Unterschied zum linearen Fall ist aber, dass bei (1.1.1) beliebig lange Perioden erreicht werden können, wenn das Pendel fast bis zur Vertikalen hochschwingt. Dazu muss man sich in der obigen Skizze die Decke wegdenken und Schwingungen bis $x \cong \pi$ betrachten. Im Phasenraum gehört dazu die spindelförmige Bahn, rechts sind die beiden Komponentenfunktionen gezeigt. An der Abflachung erkennt man, dass das Pendel bei einer Auslenkung in die Vertikale nahe $\pm\pi$ fast zum Stillstand kommt. Diese vertikalen Auslenkungen (Phasenraumkoordinaten $(\pm\pi, 0)$) sind tatsächlich weitere Gleichgewichte, allerdings *instabil*. Die nicht-periodische Bahn, die das Diagramm verläßt, gehört zu einem Überschlag, bei dem der Winkel $x = y_1$ über π hinaus anwächst. Im Grenzfall zwischen diesen beiden Lösungen gibt es eine besondere Lösung (spitze Spindel), die man in der Realität aber nicht beobachten kann. Es handelt sich um die beiden Bahnen von dem Gleichgewicht $(-\pi, 0)$ zum anderen $(\pi, 0)$, bzw. umgekehrt, deren Laufzeit aber unendlich ist, für die zugehörigen Lösungen $y(t)$ gilt $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = (\pm\pi, 0)$.

Obwohl man die Pendelgleichung nicht explizit lösen kann, läßt sich die Gestalt der Bahnen einfach verifizieren. Denn beim ungedämpften Pendel bleibt folgende Funktion (die "Energie") unverändert

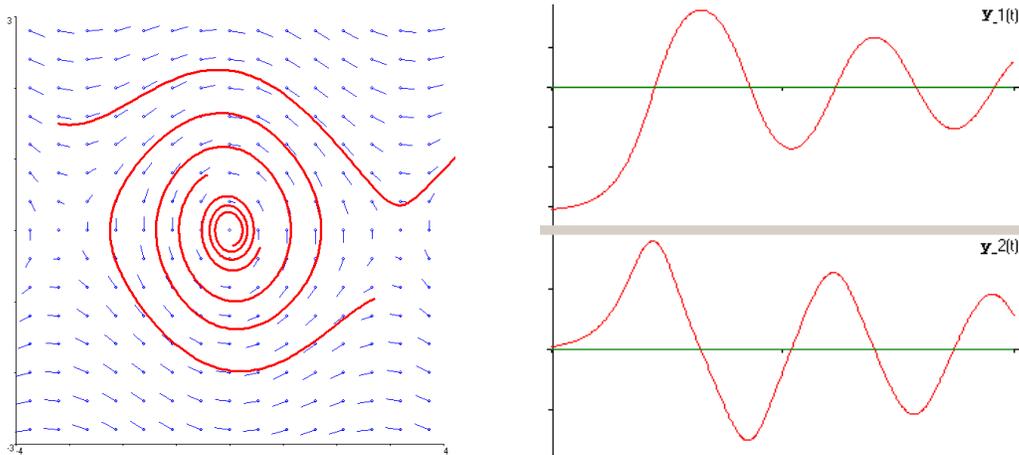
$$H(y) := \frac{1}{2}y_2^2 - \cos(y_1). \quad (1.1.3)$$

Denn auf jeder Lösung $y(t)$ von (1.1.2) gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(y(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y_2(t)^2 - \cos(y_1(t))\right) = y_2(t)y_2'(t) + \sin(y_1(t))y_1'(t) \\ &= -y_2(t)\sin(y_1(t)) + \sin(y_1(t))y_2(t) \equiv 0. \end{aligned}$$

Also ist $H(y(t)) \equiv H(y(0))$ konstant und die Lösungsbahnen des ungedämpften Pendels laufen auf den Höhenlinien der Funktion H .

Bei einer leichten Dämpfung $\beta = 0.1 > 0$ ändert sich die Situation wesentlich, die Bahnen laufen spiralförmig auf den Nullpunkt zu und gehören zu gedämpften Schwingungen.



Die Kurven rechts zeigen eine solche. Das gedämpfte Pendel kommt asymptotisch zur Ruhe in einem der Punkte $y^{(k)} = (2k\pi, 0)^T$, $k \in \mathbb{Z}$, welche *Gleichgewichtspunkte* des Systems darstellen mit $f(y^{(k)}) = 0$. Diese Gleichgewichte sind für $\beta > 0$ sogar *anziehend* (attraktiv), alle Bahnen aus einer Umgebung dieser Punkte laufen dorthin. Dies lässt sich auch mit Hilfe der Energiefunktion H bestätigen, jetzt gilt $\frac{d}{dt}H(y(t)) = -\beta y_2^2(t) < 0$, solange $y_2 \neq 0$ ist. Die hier angesprochenen Fragen und Begriffe werden in der Vorlesung eine zentrale Rolle spielen.

Beispiel 1.1.2 Bei diskreter Zeit $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ bekommt man eine wichtige Klasse von dynamischen Systemen dadurch, dass man zur Zeit $k \in \mathbb{N}$ den Folgezustand $x(k+1) \in \mathcal{Z}$ durch eine feste Vorschrift $F_k : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ aus dem aktuellen $x(k)$ bestimmt, $x(k+1) := F_k(x(k))$. Als Bahn $(x(k))_{k \geq 0}$ erhält man also einfach eine Folge $(x^{(k)})_{k \geq 0}$. Besonders einfach wird die Situation, wenn immer die gleiche Abbildung F verwendet wird. Die Folge wird dann also aus dem Startwert $x^{(0)}$ erzeugt durch die *Iteration*

$$x^{(k+1)} := F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.1.4)$$

Iterations-Folgen verwendet man zur numerischen Berechnung der Lösungen von Gleichungssystemen (vgl. Vorlesung *Numerische Basisverfahren*). Tatsächlich konvergiert die in (1.1.4) definierte Folge dann gegen einen Fixpunkt $z = F(z) \in \mathcal{Z}$, wenn die Abbildung F die Voraussetzungen des *Banachschen Fixpunktsatzes* erfüllt. Beim dynamischen System (1.1.4) sind die Gleichgewichte gerade die Fixpunkte von F . Bei nicht-kontraktiven Abbildungen kann das

Verhalten wesentlich komplizierter sein.

Ein bekanntes Beispiel erhält man mit der Funktion

$$F(x) := ax(1-x), \quad a > 0,$$

in $\mathcal{Z} = \mathbb{R}$. Sie gilt als diskretes Modell für das Wachstum einer Population mit beschränkten Ressourcen. Dabei bezeichnet $x^{(k)} \in [0, 1]$ in der k -ten Generation den Anteil an einer gedachten Maximalpopulation und im Übergang zur nächsten Generation

$$x^{(k+1)} = \underbrace{a(1-x^{(k)})}_r \cdot x^{(k)}$$

gibt der markierte Vorfaktor r den Zuwachs an. Für kleine $x^{(k)} \ll 1$ entspricht dieser i.w. dem Wert a , für $x^{(k)} \cong 1$ kann die Zahl der Überlebenden aber wegen Übervölkerung fast bis auf null einbrechen.

Die Funktion F hat die Fixpunkte 0 und $z = 1 - \frac{1}{a}$. Der zweite Fixpunkt ist positiv für $a > 1$. Wegen $F'(x) = a(1-2x)$ und $F'(0) = a$, $F'(1 - \frac{1}{a}) = 2 - a$ ist die Abbildung F kontraktiv in einer Umgebung von 0 für $a < 1$ und in einer Umgebung von $z = 1 - \frac{1}{a}$ für $1 < a < 3$. Mit Startwerten $x^{(0)} \in [0, 1]$ konvergiert die Folge (1.1.4) daher gegen null für $a < 1$ und gegen $z = 1 - \frac{1}{a}$ für $1 < a < 3$. Im ersten Fall $a < 1$ stirbt die Population daher aus, für $1 < a < 3$ stellt sich dagegen ein stabiles Gleichgewicht bei $z = 1 - \frac{1}{a} < 1$ ein.

Für $a > 3$ konvergiert die Folge aber nicht mehr. Dies sieht man am Beispiel mit $a = 3.2$ anhand der Folgenwerte

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^{(k)} =$	0.75	0.6	0.768	0.5701632	0.7842468	0.541452	0.7945015364	0.5224603

Offensichtlich ist das Verhalten dennoch überschaubar, die Folge wechselt zwischen 2 Häufungspunkten, gegen die die beiden Teilfolgen $(x^{(2k)})$, $(x^{(2k+1)})$ konvergieren. Dies läßt sich leicht bestätigen. Mit (1.1.4) bekommt man für aufeinanderfolgende Elemente der ersten *Teilfolge* den Zusammenhang

$$x^{(2k+2)} = F(x^{(2k+1)}) = F(F(x^{(2k)})), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

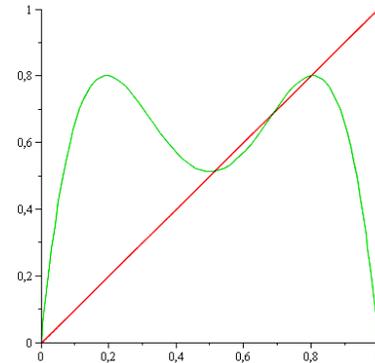
Dies ist eine neue Iteration nur für die Teilfolge mit der Abbildung

$$F^2(x) = F(F(x)) = a(ax(1-x)) \left(1 - (ax(1-x)) \right) = a^2x(1-x)(1-ax+ax^2).$$

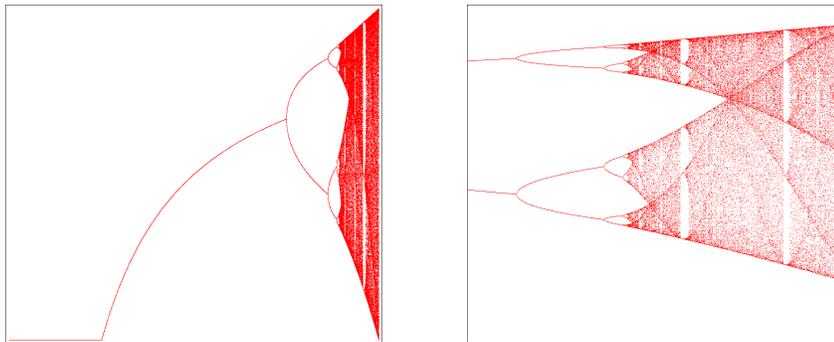
Diese iterierte Abbildung F^2 besitzt natürlich noch die alten Fixpunkte 0 und $1 - \frac{1}{a}$, aber auch noch zwei weitere, nämlich

$$z_{3,4} = \frac{1}{2a} (a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3}),$$

welche man auch in der Graphik erkennt. Man prüft nun leicht nach, dass F^2 für $a = 3.2$ nun in einer Umgebung dieser beiden neuen Werte kontraktiv ist und bestätigt damit die Konvergenz der beiden Teilfolgen.



Demnach wurde durch Vergrößerung des Parameters a bei Überschreiten des Werts 3 aus einer konvergenten Folge eine Folge, die in der Grenze in einen Zweier-Zyklus übergeht. Diese grundlegende Änderung des Verhaltens nennt man eine *Verzweigung* oder *Bifurkation*. Bei weiterer Vergrößerung von a kommt es nun zu weiteren Perioden-Verdopplungen, d.h. zu Folgen mit 4, 8, 16, ... Häufungspunkten, welche in immer kürzeren Abständen eintreten. Ab $a \cong 3.57$ gibt es aber keine Regelmäßigkeiten mehr, die Folgen bleiben zwar beschränkt, ihre Entwicklung hängt aber jetzt extrem empfindlich von dem Anfangswert $x^{(0)}$ ab. Diese Situation nennt man *Chaos*. Für $a > 4$ sind die Iterationsfolgen unbeschränkt für fast alle Startwerte. Die folgenden Graphiken zeigen das Verzweigungsdiagramm der Häufungspunkte (vertikale Achse) im Bereich $a \in [0, 4]$ (horizontale Achse) im linken Bild ganz und rechts den interessantesten Ausschnitt mit $a \in [3.4, 3.8]$.



Beispiel 1.1.3 Dieses ganz diskrete Beispiel ($\mathbb{T} = \mathbb{Z} = \mathbb{N}_0$) geht auf *Lothar Collatz* zurück und berechnet eine Folge natürlicher Zahlen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, iterativ aus dem Startwert $x_0 \in \mathbb{N}_0$ durch folgende Vorschrift:

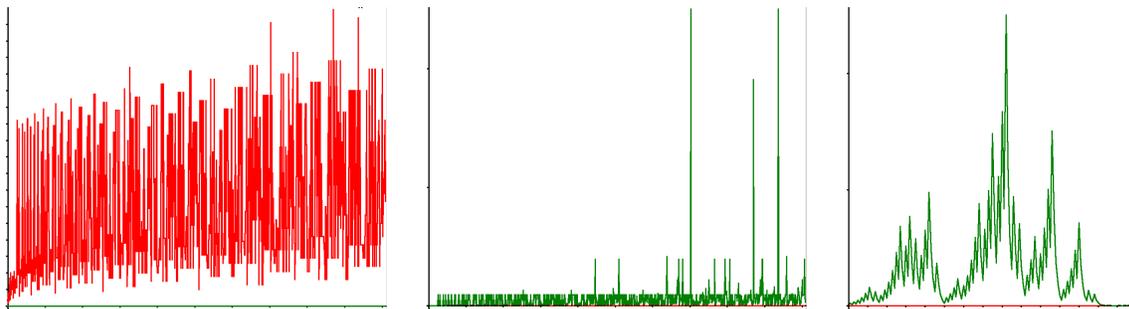
$$x_{k+1} = F(x_k) := \begin{cases} \frac{1}{2}x_k, & \text{wenn } x_k \text{ gerade,} \\ 3x_k + 1, & \text{wenn } x_k \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Die Vorschrift reduziert also in der Faktor-Zerlegung von x_k zunächst alle Zweierpotenzen und erzeugt dann, wenn sie auf eine ungerade Zahl trifft mit $x_{k+1} = 3x_k + 1$ sofort wieder eine gerade. Beispiele für solche Collatz-Folgen sind

1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Die erste Folge besteht einfach aus dem Dreier-Zyklus 4, 2, 1, während die nächste zunächst anwächst und dann aber im gleichen Zyklus endet. Auch mit anderen Startwerten $x_0 \in \mathbb{N}$ beobachtet man das Gleiche und daher stellte Collatz 1937 die Vermutung auf, dass *jede Folge in Eins endet* (bzw. in dem Zyklus 1, 4, 2). Diese Behauptung konnte jedoch trotz großen Interesses bis heute nicht bewiesen werden, denn die Folge verhält sich tatsächlich sehr irregulär. So kann weder ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Startwert x_0 und der Stoppzeit (wenn $x_m = 1$) oder dem Anwachsen der Folgeelemente hergestellt werden. Dies sieht man in den beiden ersten Graphiken weiter unten, die für die Startwerte $x_0 \leq 1000$ (horizontale Achse) links die Stoppzeit (maximal $m = 179$) zeigen, in der Mitte den Maximalwert der Folgeelemente (250504 bei $x_0 = 703$). Das rechte Diagramm zeigt die Werte der Folge x_k zu $x_0 = 703$ über $k \in \mathbb{N}_0$.



Zur Analyse der Collatz-Folge bieten sich vor allem diskrete Strukturen an wie etwa Graphen (\mathbb{N} ist die Knotenmenge, eine Kante zwischen j, k existiert, wenn $j = F(k)$). Daher werden solche Systeme in dieser Vorlesung nicht betrachtet.

1.2 Bezeichnungen

Ein Dynamisches System beschreiben das Verhalten einer beobachtbaren Größe in einem *Zustandsraum* \mathcal{Z} , der aber in dieser Vorlesung endlichdimensional sein wird, also i.w. $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^n$. In der Praxis sind diese Größen oft auf einen kleineren Definitionsbereich $D \subseteq \mathcal{Z}$ begrenzt. Dies läßt sich aber meist durch geeignete Ergänzungen auf den Fall $D = \mathcal{Z}$ zurückführen (s.u.), den wir im Folgenden betrachten. Das System wird dabei zu verschiedenen "Zeiten" $t \in \mathbb{T}$ betrachtet. Die Zeitachse \mathbb{T} ist dabei zunächst eine Halb-Gruppe $(\mathbb{T}, +)$, bei umkehrbaren (reversiblen) Systemen kann $(\mathbb{T}, +)$ auch eine Gruppe sein. Die wichtigsten Beispiele sind \mathbb{N}_0 bzw. \mathbb{Z} (diskretes DS) und $\mathbb{R}_{\geq} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ bzw. \mathbb{R} (kontinuierliches DS).

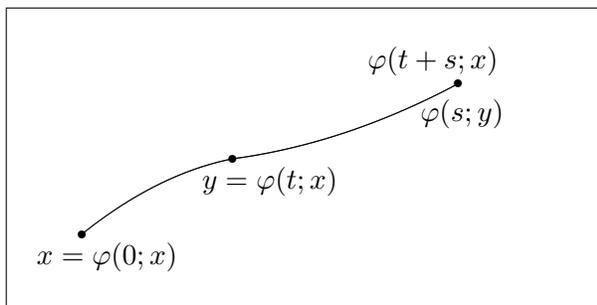
Definition 1.2.1 *Es sei \mathbb{T} eine Zeitachse. Die stetige Abbildung $\varphi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt dynamisches System, wenn gilt*

$$\varphi(0; x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2.1)$$

$$\varphi(t + s; x) = \varphi(s; \varphi(t; x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{T}, x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.2)$$

Die Menge $\mathcal{B}(x) := \{\varphi(t; x) : t \in \mathbb{T}\}$ heißt Bahn (Trajektorie, Orbit) eines Startpunktes $x \in \mathcal{Z}$.

Die Abbildung $t \mapsto \varphi(t; x)$ bezeichnet eine Kurve (Flusslinie), die zur Zeit 0 im Punkt x beginnt. Dies entspricht Bedingung (1.2.1). Die 2. Bedingung (1.2.2) besagt, dass die Kurve von 0 nach $t + s$ aus den beiden Teilstücken zwischen x und $\varphi(t; x) =: y$ sowie $\varphi(s; y)$ besteht.



Bemerkung: Die Flusslinien eines dynamischen Systems hängen insbesondere nicht vom Anfangszeitpunkt t_0 ab, sondern alleine vom Startpunkt und der Laufzeit $t - t_0$. Dies entspricht bei Differentialgleichungen der Situation von *autonomen* Problemen, vgl. Beisp. 1.2.3. Insbesondere hängt die Bahn $\mathcal{B}(x) = \{\varphi(t; x) : t \in \mathbb{T}\}$ nicht mehr vom Startzeitpunkt ab (bei einer Gruppe \mathbb{T}). Die gesamte Abbildung $\varphi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ beschreibt somit einen *Fluss*, der den Anfangswert x mit sich reißt. Dies kann man durch Einführung der Abbildungs-Schar $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Parameter $t \in \mathbb{T}$ für $\varphi^t(x) \equiv \varphi(t; x)$ betonen. Dann entsprechen die beiden Bedingungen aus Def. 1.2.1 den intuitiv eingängigen Rechenregeln

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= Id & \iff & \varphi(0; x) = x & \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \varphi^{t+s} &= \varphi^s \circ \varphi^t & \iff & \varphi(t+s; x) = \varphi(s; \varphi(t; x)) & \forall t, s \in \mathbb{T}, x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

die (nicht ohne Grund) denen der Exponentialfunktion entsprechen. Für $s = -t \in \mathbb{T}$ folgt aus (1.2.3) insbesondere auch, dass man den Fluss umkehren kann,

$$\varphi^{-t} = (\varphi^t)^{-1}. \quad (1.2.4)$$

Bemerkung: Eine wichtige Konsequenz aus der Kozyklen-Eigenschaft (1.2.3b) dynamischer Systeme ist, dass durch jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ *genau eine* Bahn geht, da Bahnen sich nicht kreuzen können. Denn, wenn sich Bahnen an einer Stelle $z \in \mathbb{R}^n$ überschneiden sollten, $\varphi(s_1; x) = z = \varphi(t_1; y)$, dann gilt wegen (1.2.3b) für $t \in \mathbb{T}$, dass

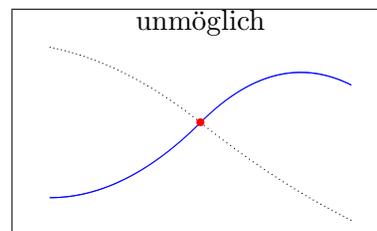
$$\varphi(t; x) = \varphi(t - s_1; \varphi(s_1; x)) = \varphi(t - s_1; z) = \varphi(t - s_1; \varphi(t_1; y)) = \varphi(t - s_1 + t_1; y)$$

und die beiden Lösungen unterscheiden sich nur in einer Verschiebung der Zeitachse, die im Zustandsraum aber nicht sichtbar ist.

Zur Illustration seien hier zwei typische Fälle angesprochen, welche später teilweise noch ausführlicher behandelt werden.

Beispiel 1.2.2 Es sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nichtlineare Abbildung. Diese erzeugt ein dynamisches System mit diskreter Zeit $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ durch die *Iteration*

$$\varphi(0; x) := x, \quad \varphi(t; x) := F^t(x) = F(F^{t-1}(x)), \quad t \in \mathbb{N}. \quad (1.2.5)$$



Dieses Beispiel ist eine der Motivationen für die Schreibweise φ^t . Die Umkehrregel (1.2.4) gilt aber nur, wenn F eine Bijektion ist und $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Beispiel 1.2.3 Den wichtigsten Fall dynamischer Systeme stellen die Anfangswertprobleme von Differentialgleichungen dar. Ein *autonomes* System wird beschrieben durch das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und definiert das dynamische System $\varphi(t; x) = y(t)$ durch die Lösung des Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(y(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = x,$$

mit Anfangswert $x \in \mathbb{R}^n$. Da mit einer Lösung $y(t)$ der autonomen Dgl auch $y(t - t_0)$ eine Lösung ist, kann man als Startzeitpunkt oBdA null wählen, wie in $y(0) = x$. Die Zeit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ist hier kontinuierlich und für endlich-dimensionale Zustandsräume \mathcal{Z} ist auch die Betrachtung negativer Zeiten sinnvoll. Denn die Funktion $v(t) = y(-t)$ erfüllt die Gleichung $v'(t) = -y'(-t) = -f(v(t))$.

Bemerkung: Ein allgemeines System von Differentialgleichungen $u'(t) = g(t, u(t))$ läßt sich in ein autonomes umformen, indem man die Zeit t als zusätzliche Unbekannte einführt. Das führt zum erweiterten, jetzt aber autonomen, Problem

$$y(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ t \end{pmatrix} : \quad y'(t) = \begin{pmatrix} g(y_{n+1}(t), u(t)) \\ 1 \end{pmatrix} =: f(y(t)).$$

Daher muss man das Richtungsfeld eines autonomen Problems im \mathbb{R}^n , das eines nicht-autonomen Problems aber im \mathbb{R}^{n+1} studieren.

Bemerkung: Zu einem kontinuierlichen dynamischen System $\varphi(t; x)$, $t \in \mathbb{R}$, kann man auf einfache Weise auch immer ein zeitdiskretes System mit $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ konstruieren, indem man die Lösung nur auf einem Zeitgitter $\{kT : k \in \mathbb{T}\}$, z.B. mit der Periode T betrachtet (Stroboskop-Abbildung). Die Funktion F in (1.2.5) ist dabei definiert durch

$$F(x) := \varphi(T; x).$$

Eine andere Möglichkeit ist die Betrachtung von φ nur an Zeitpunkten t_k , $k \in \mathbb{Z}$, wo eine bestimmte Eigenschaften erfüllt ist, etwa der Durchgang durch eine Hyperebene, $w^\top \varphi(t_k; x) = \gamma$ (*Poincaré-Schnitt*).

Von besonderem Interesse bei dynamischen Systemen sind ausgezeichnete Punkte des Phasenraums, die gleichzeitig triviale, einpunktige Bahnen $\mathcal{B}(x) = \{x\}$, also zeitkonstante Lösungen, darstellen. Dann interessiert man sich natürlich auch für die *Dynamik* in einer Umgebung dieser Punkte. Zur Beschreibung von Umgebungen benötigt man Normen. In der Vorlesung werden die *Hölder-Normen* zu $p \in [1, \infty]$ betrachtet,

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad (1.2.6)$$

welche hier schon im Komplexen definiert werden, da später komplexe Transformationen der Systeme betrachtet werden. Die wichtigsten Vertreter sind die Summennorm, $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$,

die Euklidnorm $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ und die Maximumnorm $\|x\|_\infty := \max_{j=1}^n |x_j|$. Oft spielt die tatsächlich verwendete Norm keine Rolle, dann wird kein Index angegeben. Einfache Umgebungen sind die *Kugeln*

$$K_r(x) := \{y \in \mathbb{C}^n : \|y - x\| \leq r\}. \quad (1.2.7)$$

Diese werden in folgender Definition verwendet.

Definition 1.2.4 *Ein Punkt $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt Gleichgewichtspunkt (Ruhepunkt, Äquilibrium) des dynamischen Systems φ , wenn $t \mapsto \varphi(t; \hat{x})$ konstant ist, also $\varphi(t; \hat{x}) \equiv \hat{x} \forall t \in \mathbb{T}$. Das Gleichgewicht \hat{x} heißt stabil, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass*

$$x \in K_\delta(\hat{x}) \Rightarrow \varphi(t, x) \in K_\varepsilon(\hat{x}) \forall t \geq 0.$$

Dieser Punkt \hat{x} heißt attraktiv, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert so, dass

$$x \in K_\varepsilon(\hat{x}) \Rightarrow \varphi(t; x) \rightarrow \hat{x} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Der Punkt \hat{x} heißt asymptotisch stabil, wenn er stabil und attraktiv ist. Ein Punkt heißt instabil, wenn er nicht stabil ist.

Bei der Iteration $x^{(k+1)} := F(x^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, vgl. Beisp. 1.2.2, sind gerade die *Fixpunkte* $\hat{x} = F(\hat{x})$ der Funktion F Gleichgewichte, bei autonomen Differentialgleichungen $y'(t) = f(y(t))$ wie in Beisp. 1.2.3 die *Nullstellen* von f mit $f(\hat{x}) = 0$. Die Charakterisierung der Stabilität von Gleichgewichtspunkten wird im Folgenden eine grundlegende Rolle spielen.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1 Grundlagen

Bei allgemeinen Systemen von Differentialgleichungen sucht man eine differenzierbare Lösungskurve $t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}^n$, welche eine Bedingung der Form

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_e]$$

erfüllt. Dabei ist $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine gegebene Funktion. Der Fall, dass diese Gleichung nicht eindeutig nach der Unbekannten y' aufgelöst werden kann, tritt in der Praxis öfter auf (z.B. rollendes Rad), ist aber kein Thema dieser Vorlesung. Hier werden nur explizite Systeme

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_e] \quad (2.1.1)$$

betrachtet mit einer stetigen Funktion $f(t, u)$ und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Bevor die Existenz von Lösungen betrachtet wird werden Bezeichnungen für verschiedene Spezialfälle eingeführt.

Definition 2.1.1 *Das Problem (2.1.1) heißt*

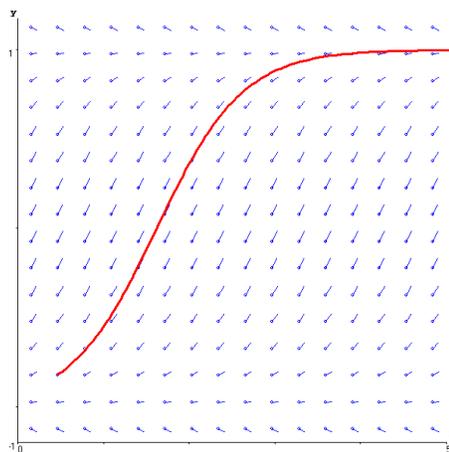
$$\left. \begin{array}{l} \text{autonom,} \\ \text{linear,} \\ \text{linear homogen,} \end{array} \right\} \text{ wenn } f(t, u) = \begin{cases} f(u) \\ A(t)u + g(t) \\ A(t)u \end{cases}$$

mit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Jeder dieser Spezialfälle besitzt wichtige Eigenschaften, welche später behandelt werden. Als primäre Aufgabe betrachtet man bei Differentialgleichungen das *Anfangswertproblem*, bei dem man eine Lösung von (2.1.1) sucht, die zu einem Anfangszeitpunkt t_0 von einem Anfangswert $x \in \mathbb{R}^n$ ausgeht,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_e], \quad y(t_0) = x. \quad (2.1.2)$$

Eine grundlegende Methode zur Untersuchung der Lösungen von Differentialgleichungen ist das *Richtungsfeld*. Bei einer Lösung $y : [t_0, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ beschreibt $y(t)$ eine Kurve im \mathbb{R}^n und $y'(t)$ den Tangentenvektor an diese Kurve im Punkt $y(t)$. Nach (2.1.1) ist bei einer Lösung die Tangentenrichtung v im Punkt $\bar{y} = y(\bar{t})$ aber gleichzeitig durch die Vorschrift $v = f(\bar{t}, \bar{y})$ gegeben. Daher kann man nun ohne Kenntnis einer Lösung an jeder Stelle (t, y) des Bereichs $[t_0, t_e] \times \mathbb{R}^n$ einen Richtungsvektor $v := f(t, y)$ anhängen (Fähnchen im Bild). Eine Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems (2.1.2) ist dadurch ausgezeichnet, dass sie im Punkt (t_0, x) beginnt und sich dann in das Richtungsfeld



einschmiegt, d.h. dass an jeder Stelle $(t, y(t))$ die Tangente genau in der Richtung $f(t, y(t))$ zeigt wie bei der roten Kurve. Das Diagramm zeigt das Beispiel der Dgl $y' = 1 - y^2 = f(y)$. Diese ist autonom und daher hängt das Richtungsfeld nicht von t ab. Dies erkennt man daran, dass alle Fähnchen mit gleichem y -Wert parallel sind. Bei autonomen Systemen betrachtet man das Richtungsfeld daher meist nur im \mathbb{R}^n , ohne t -Achse (vgl. Beisp.1.1.1).

Für eine stetige Funktion f existiert zu jedem Punkt (t_0, x) aus dem Definitionsbereich von f (mindestens) eine Lösung, die bis zum Rand des Definitionsbereichs verläuft (Satz von Peano). Eindeutigkeit auf abgeschlossenen Intervallen bekommt man, wenn man für f noch eine *Lipschitz-Bedingung* im zweiten Argument fordert.

Satz 2.1.2 (Picard-Lindelöf) *Die auf dem Streifen $[t_0, t_e] \times \mathbb{R}^n$ definierte stetige Funktion $f(t, u)$ erfülle dort eine Lipschitz-Bedingung*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, t_e], \quad (2.1.3)$$

mit einer Lipschitzkonstanten $L > 0$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (2.1.2) genau eine Lösung $y \in (C^1[t_0, t_e])^n$. Für diese gilt die Schranke

$$\|y(t) - x\| \leq \frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L} \max_{t_0 \leq s \leq t} \|f(s, x)\|, \quad t \in [t_0, t_e]. \quad (2.1.4)$$

Beweis Der Beweis verwendet den Banachschen Fixpunktsatz bei der zu (2.1.2) äquivalenten Integralgleichung

$$y(t) = x + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_e]. \quad (2.1.5)$$

Die rechte Seite stellt einen nichtlinearen Operator im Raum $B := (C[t_0, t_e])^n$ dar

$$F : B \rightarrow B, \quad u \mapsto (F(u))(t) = x + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

Es wird jetzt gezeigt, dass F in B versehen mit der gewichteten Norm

$$\|u\|_\ell := \max\{|u(t)|e^{-\ell(t-t_0)} : t \in [t_0, t_e]\}$$

für $\ell > L$ eine Kontraktion ist, B ist natürlich auch in dieser Norm ein Banachraum. Aufgrund der Lipschitzbedingung (2.1.3) sieht man für $u, v \in B$, dass

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_\ell &= \max_t e^{-\ell(t-t_0)} \left\| \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right\| \\ &\leq \max_t e^{-\ell(t-t_0)} \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \\ &\leq L \max_t e^{-\ell(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\ell(s-t_0)} \underbrace{\|u(s) - v(s)\|}_{\|u - v\|_\ell} e^{-\ell(s-t_0)} ds \\ &\leq L \max_t e^{-\ell(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\ell(s-t_0)} ds \|u - v\|_\ell \\ &= \frac{L}{\ell} (1 - e^{-\ell(t_e-t_0)}) \|u - v\|_\ell \leq \frac{L}{\ell} \|u - v\|_\ell. \end{aligned}$$

Für $L/\ell < 1$ ist die Abbildung F also kontrahierend im Banachraum B und besitzt somit einen eindeutigen Fixpunkt $y = F(y) \in B$. Da diese Funktion $y = y(t)$ stetig ist, ist es auch der Integrand $f(t, y(t))$ in (2.1.5) und dessen Stammfunktion somit sogar diffbar: $y(t) \in (C^1[t_0, t_e])^n$.

Zur Abschätzung der Differenz $y(t) - x$ betrachtet man wieder (2.1.5),

$$\begin{aligned} \|y(t) - x\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - f(s, x)) ds + \int_{t_0}^t f(s, x) ds \right\| \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|y(s) - x\| ds + \int_{t_0}^t \|f(s, x)\| ds. \end{aligned}$$

Die Schranke (2.1.4) folgt hieraus mit dem folgenden Gronwall-Lemma. ■

Bei der Untersuchung des Verlaufs von Lösungen wie im letzten Beweis kommt man oft auf Integral- oder Differential-*Ungleichungen*. Abschätzungen bekommt man dafür mit dem folgenden Lemma. In der Formulierung werden insbesondere auch fallende Lösungen berücksichtigt mit $\alpha < 0$.

Lemma 2.1.3 (Gronwall-Lemma) *Gegeben seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta, \gamma \geq 0$, und eine nichtnegative Funktion $u \in C[t_0, t_e]$.*

a) *Gilt für $\alpha \geq 0$ die Ungleichung*

$$u(t) \leq \gamma + \int_{t_0}^t (\alpha u(s) + \beta) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_e],$$

dann folgt für $t \in [t_0, t_e]$ die Abschätzung

$$u(t) \leq \begin{cases} e^{\alpha(t-t_0)} \left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha} \right) - \frac{\beta}{\alpha}, & \alpha \neq 0, \\ \gamma + \beta(t - t_0), & \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

b) *Ist u differenzierbar in $[t_0, t_e]$ und gilt $u(t_0) \leq \gamma$, sowie*

$$u'(t) \leq \alpha u(t) + \beta \quad \forall t \in [t_0, t_e],$$

dann folgt (2.1.6) für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis Der Fall $\alpha = 0$ ist trivial. Für $\alpha > 0$ und $\varepsilon > 0$ sei $v(t) := e^{\alpha(t-t_0)} \left(\varepsilon + \gamma + \frac{\beta}{\alpha} \right) - \frac{\beta}{\alpha}$. Diese Funktion erfüllt die Gleichung $v(t) = \varepsilon + \gamma + \int_{t_0}^t (\alpha v(s) + \beta) ds$. Durch Subtraktion folgt

$$u(t) - v(t) \leq -\varepsilon + \alpha \int_{t_0}^t (u(s) - v(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_e],$$

insbesondere auch $u(t_0) - v(t_0) \leq -\varepsilon < 0$. Da u, v stetig sind, ist die Differenz in einer Umgebung von t_0 negativ. Sei nun $t_1 > t_0$ der erste Punkt mit $u(t_1) = v(t_1)$. Dann folgt dort aber aus der Integral-Ungleichung ein Widerspruch, da

$$0 = u(t_1) - v(t_1) \leq -\varepsilon + \underbrace{\alpha \int_{t_0}^{t_1} (u(s) - v(s)) ds}_{< 0} < 0$$

ist. Somit gilt $u(t) \leq v(t)$ für $t \in [t_0, t_e]$ und alle $\varepsilon > 0$ und damit die Behauptung.

b) Für $\alpha \neq 0$ sei $v(t) := e^{-\alpha(t-t_0)}(u(t) + \beta/\alpha)$. Dafür gilt nach Voraussetzung

$$v'(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} \underbrace{(u'(t) - \alpha u(t) - \beta)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Also ist v nicht wachsend und mit $v(t) \leq v(t_0) = \gamma + \beta/\alpha$ folgt die Behauptung (2.1.6). ■

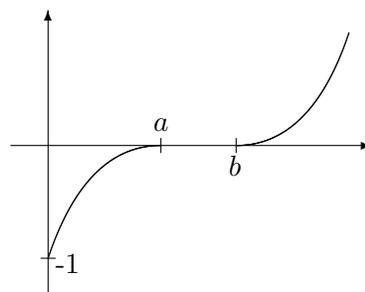
Beispiel 2.1.4 Als Beleg für die Notwendigkeit der Lipschitz-Bedingung (2.1.3) dient die Dgl

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|}.$$

Die rechte Seite $f(u) = \sqrt{|u|} \geq 0$ ist stetig, in null aber nicht Lipschitz-stetig. Der Punkt $\hat{y} = 0$ ist ein Gleichgewichtspunkt und daher ist $y(t) \equiv 0$ eine Lösung. Mit jedem $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ löst aber auch

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-a)^2, & x \leq a \\ 0, & a < x \leq b \\ \frac{1}{4}(x-b)^2, & b < x \end{cases} \quad (2.1.7)$$

die Differentialgleichung, denn für $x \leq a$ ist $y'(t) = \frac{1}{2}(a-x) = \sqrt{\frac{1}{4}(x-a)^2}$ und für $x > b$ gilt $y'(t) = \frac{1}{2}(x-b) = \sqrt{\frac{1}{4}(x-b)^2}$. Außerdem ist y' stetig. Mit einer Anfangsbedingung $y(0) = -1$ folgt zwar $a = 1$, aber (2.1.7) ist dann mit jedem $b \geq 1$ eine Lösung des Anfangswertproblems, diese also nicht eindeutig.



Bemerkung: Der Satz 2.1.2 ist auf sehr viele Differentialgleichungen zunächst nicht direkt anwendbar, etwa bei $y' = 1 + y^2 =: f(y)$, da die rechten Seiten keine globale Lipschitz-Bedingung erfüllen. Denn im speziellen Fall gilt $|f(u) - f(v)| = |u + v||u - v|$ und der Vorfaktor $|u + v|$ ist natürlich nicht auf ganz \mathbb{R} beschränkt. Ein einfacher Ausweg ist, dass man die Funktion $f(y)$ außerhalb eines beschränkten Bereichs modifiziert, etwa indem man sie konstant nach außen fortsetzt. Die so modifizierte Funktion \tilde{f} erfüllt natürlich eine globale Lipschitzbedingung und Satz 2.1.2 zeigt die Existenz einer Lösung $\tilde{y}(t)$ zu $\tilde{y}' = \tilde{f}(\tilde{y})$, $\tilde{y}(0) = x$. Mit Hilfe der Schranke (2.1.4) überprüft man, ob diese Lösung \tilde{y} den nicht-modifizierten Bereich überhaupt verlassen hat. Wenn das nicht der Fall ist, ist klar, dass \tilde{y} mit der eigentlichen Lösung y übereinstimmt. Die spezielle Lösung $y(t) = \tan(t)$ mit $\tan'(t) = 1 + \tan^2(t)$ ist unbeschränkt. Sie zeigt, dass diese Modifikationsmethode mglw. nur anwendbar ist bei hinreichend kleinen Intervallen $[t_0, t_e]$.

Ein Ziel der Vorlesung ist es, Aussagen über eine größere Gesamtheit von Lösungen (d.h. nicht nur für einzelne) zu treffen. Dazu ist es hilfreich, wenn man die Auswirkung von Änderungen der Anfangswerte abschätzen kann.

Satz 2.1.5 Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und erfülle die Lipschitz-Bedingung (2.1.3) mit $L \geq 0$. Dann gilt für je zwei Lösungen $z'(t) = f(t, z(t))$, $y'(t) = f(t, y(t))$ der Differentialgleichung die Ungleichung

$$\|z(t) - y(t)\| \leq e^{L(t-t_0)} \|z(t_0) - y(t_0)\|, \quad t \geq t_0.$$

Beweis Durch Subtraktion der Integralgleichungen (2.1.5) für z und y bekommt man

$$\begin{aligned} \|z(t) - y(t)\| &= \|z(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^t (f(s, z(s)) - f(s, y(s))) ds\| \\ &\leq \|z(t_0) - y(t_0)\| + L \int_{t_0}^t \|z(s) - y(s)\| ds. \end{aligned}$$

Für diese Ungleichung beweist Lemma 2.1.3 mit $u(t) := \|z(t) - y(t)\|$ die Behauptung. \blacksquare

Da nichttriviale Lipschitzkonstanten positiv sind, wächst der Vorfaktor im Satz 2.1.5 exponentiell mit der Zeit t an, obwohl man bei vielen Differentialgleichungen aufeinander zulaufende Lösungen, also fallende Abstände, beobachtet (etwa bei $y' = -y$). In diesen Fällen bekommt man in der Euklidnorm mit dem folgenden Begriff präzisere Schranken.

Definition 2.1.6 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfüllt eine einseitige Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten $\mu \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$(u - v)^\top (f(t, u) - f(t, v)) \leq \mu \|u - v\|_2^2 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, t_e]. \quad (2.1.8)$$

Wenn f eine Lipschitzbedingung (2.1.3) mit L in der Euklidnorm erfüllt, erfüllt f natürlich auch (2.1.8) mit $|\mu| \leq L$. Bei geeignetem f kann die neue Bedingung aber auch mit negativem μ gelten und führt dann im folgenden Satz zu Schranken, die mit der Zeit t fallen.

Satz 2.1.7 Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und erfülle eine einseitige Lipschitzbedingung (2.1.8) mit $\mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt für je zwei Lösungen $z'(t) = f(t, z(t))$, $y'(t) = f(t, y(t))$ der Differentialgleichung die Ungleichung

$$\|z(t) - y(t)\|_2 \leq e^{\mu(t-t_0)} \|z(t_0) - y(t_0)\|_2, \quad t \geq t_0.$$

Beweis Da z und y differenzierbar sind, ist dies auch die Funktion $u(t) := \|z(t) - y(t)\|_2^2 \geq 0$. Für deren Ableitung gilt

$$\begin{aligned} u'(t) &= 2(z(t) - y(t))^\top (z'(t) - y'(t)) = 2(z(t) - y(t))^\top (f(t, z(t)) - f(t, y(t))) \\ &\leq 2\mu \|z(t) - y(t)\|_2^2 = 2\mu u(t). \end{aligned}$$

Aus $u'(t) \leq 2\mu u(t)$ folgt mit dem Gronwall-Lemma $u(t) \leq u(t_0)e^{2\mu(t-t_0)}$ und durch Übergang zu $\sqrt{u(t)}$ die Behauptung. \blacksquare

Beispiel 2.1.8 Für die rechte Seite der autonomen Dgl $y'(t) = 1 - y(t)^3$ gilt mit $f(t, u) = 1 - u^3$

$$f(t, u) - f(t, v) = -u^3 + v^3 = -(u^2 + uv + v^2)(u - v).$$

Wenn man hier direkt zu Beträgen übergeht, erhält man in einem unbeschränkten Streifen überhaupt keine endliche Lipschitzkonstante L (\rightarrow Modifikationstrick). Mit dem Innenprodukt dagegen ergibt sich

$$\begin{aligned} (u - v)(f(t, u) - f(t, v)) &= (u - v)(-u^3 + v^3) = -(u^2 + uv + v^2) \underbrace{(u - v)^2}_{\geq 0} \\ &\leq -(u^2 - 2|uv| + v^2)(u - v)^2 = -(|u| - |v|)^2(u - v)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

eine einseitige Lipschitz-Bedingung (2.1.8) mit $\mu = 0$. Mit Satz 2.1.7 folgt daher, dass Lösungen $x(t), y(t)$ dieses Problems sich nicht voneinander entfernen $\|x(t) - y(t)\|_2 \leq \|x(t_0) - y(t_0)\|_2$. Daher ist z.B. das Gleichgewicht $\hat{y} = 1$ der Dgl stabil, vgl. Defin. 1.2.4.

Bemerkung: Die verschiedenen Ergebnisse sollen mit den Begriffen für dynamische Systeme aus der Einleitung 1.2 in Beziehung gesetzt werden. Tatsächlich ist $\varphi(t; x) := y(t)$ mit der Lösung y von (2.1.2) und der Anfangsbedingung $y(0) = x$ (im autonomen Fall) unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.2 ein dynamisches System im Sinne von Defin. 1.2.1. Die Bedingung (1.2.1), $\varphi(0; x) = y(0) = x$, entspricht gerade der Anfangsbedingung. Aus der eindeutigen Lösbarkeit folgt auch, dass die Lösung $z(t)$ eines weiteren Anfangswertproblems mit der selben Differentialgleichung, aber Anfangsbedingung $z(t_1) = y(t_1) = \varphi(t_1; x)$ in t_1 nahtlos an die Lösung $y(t)$ anschließt, also stetig ist. Zu prüfen bleibt nur noch, ob $z(t) = \varphi(t - t_1; y(t_1)) = \varphi(t - t_1; \varphi(t_1; x))$ auch stetig diffbar an $y(t)$ anschließt. Das folgt aber aus der Stetigkeit der rechten Seite f , denn für $s < t_1 < t$ gilt

$$y'(s) = f(y(s)) \rightarrow f(y(t_1)) = f(z(t_1)) \leftarrow f(z(t)) = z'(t),$$

wenn $s \nearrow t_1$ und $t \searrow t_1$. Damit gilt $z(t) = \varphi(t - t_1; \varphi(t_1; x)) = \varphi(t; x)$ auch für $t > t_1$ und zeigt Eigenschaft (1.2.2).

Die Ungleichungen der letzten Sätze sagen aber noch mehr aus über dieses dynamische System φ . Mit Anfangswerten $x, z \in \mathbb{R}^n$ entspricht Satz 2.1.7 der folgenden Schranke in der Euklidnorm

$$\|\varphi(t; x) - \varphi(t; z)\|_2 \leq e^{\mu(t-t_0)} \|x - z\|_2, \quad t \geq t_0. \quad (2.1.9)$$

Dies heißt, dass das dynamische System $x \mapsto \varphi(t; x)$ eine Lipschitz-Bedingung erfüllt mit Konstante $\exp(\mu(t - t_0))$, es hängt Lipschitz-stetig vom Anfangswert x ab. Für negatives μ wird die Lipschitz-Konstante sogar immer kleiner für $t \rightarrow \infty$. Ist dabei $\hat{x} \equiv \varphi(t; \hat{x}) \forall t$ ein Gleichgewicht, dann ist es für $\mu < 0$ attraktiv, vgl. Defin. 1.2.4. Die Lipschitz-Stetigkeit (2.1.9) läßt sich noch verschärfen, wenn f differenzierbar ist. Dann existiert sogar die Ableitung der Abbildung $x \mapsto \varphi(t; x)$ nach dem Anfangswert x .

Satz 2.1.9 Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei im \mathbb{R}^n zweimal stetig differenzierbar, ihre Ableitungen f_y, f_{yy} dort beschränkt. Dann ist das dynamische System $\varphi(t; x)$, das die Lösung des AWP (2.1.2) beschreibt, differenzierbar nach dem Anfangswert x . Für genügend kleines $v \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [t_0, t_e]$ gilt dabei, dass

$$\varphi(t; x + v) - \varphi(t; x) = u(t) + \mathcal{O}(\|v\|^2), \quad (2.1.10)$$

ist mit der Lösung $u(t)$ des linearen, homogenen Anfangswertproblems

$$u'(t) = f'(\varphi(t; x)) \cdot u(t), \quad u(t_0) = v. \quad (2.1.11)$$

Beweis Mit $L := \max\{\|f_y(z)\| : z \in \mathbb{R}^n\}$ erfüllt f die Lipschitzbedingung (2.1.3) und daher existieren die Lösungen $y(t) = \varphi(t; x)$ und $y(t) + w(t) = \varphi(t; x + v)$. Dabei gilt $w(t_0) = v$ und nach Satz 2.1.5 auch die Schranke $\|w(t)\|_2 \leq e^{L(t-t_0)}\|v\| \leq K\|v\|$, $t \in [t_0, t_e]$ mit $K = e^{L(t_e-t_0)}$. Für die Differenz $w(t)$ der beiden Lösungen folgt

$$w'(t) = f(y(t) + w(t)) - f(y(t)) = A(t) \cdot w(t) + r(t), \quad A(t) := f_y(y(t)),$$

mit einer Funktion r , für die $\|r(t)\| \leq C\|w(t)\|^2 \leq CK^2\|v\|^2$ gilt. Nach Übergang zur Integralgleichung bei w und u aus (2.1.11) liefert ein Vergleich der beiden

$$\begin{aligned} w(t) - u(t) &= \int_{t_0}^t (A(s)(w(s) - u(s)) + r(s)) ds \quad \Rightarrow \\ \|w(t) - u(t)\| &\leq L \int_{t_0}^t \|w(s) - u(s)\| ds + CK^2\|v\|^2. \end{aligned}$$

Das Gronwall-Lemma und $w(t_0) - u(t_0) = 0$ liefern die Behauptung $w(t) - u(t) = \mathcal{O}(\|v\|^2)$. ■

Tatsächlich ist (2.1.11) eine homogene, lineare Differentialgleichung $u'(t) = A(t)u(t)$, Koeffizient ist die Ableitungs-Matrix $A(t) = f'(y(t))$ der rechten Seite f , welche auf der Kurve $y(t) = \varphi(t; x)$ ausgewertet wird. Allerdings ist dieses lineare System nicht mehr *autonom*! Im folgenden Abschnitt wird sich zeigen, dass die Lösung u von (2.1.11) die Form $u(t) = Y(t)v$ besitzt mit einer Matrixfunktion $Y(t)$, einem sogenannten *Fundamentalsystem* der Dgl. Insbesondere ist für festes t die Zuordnung $v \mapsto u(t)$ eine lineare Abbildung und gegeben durch die Matrix $Y(t)$. Damit besitzt (2.1.10) exakt die Form, die $Y(t)$ als Ableitung von φ nach dem Vektor x identifiziert. Daraus folgt, dass die Richtungsableitung $\partial\varphi/\partial v$ und die gesamte Ableitung (Jacobi-Matrix) $\partial\varphi/\partial x$ an der Stelle t gegeben sind durch

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(t; x) = Y(t)v, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t; x) = Y(t). \quad (2.1.12)$$

2.2 Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Linearisierung ist eine der grundlegenden Techniken in der Analysis, mit der man über die Ableitungen das Verhalten eines Systems in einer Umgebung interessanter Punkte untersuchen kann.

Obwohl in dieser Vorlesung autonome Probleme im Vordergrund stehen, führt die Linearisierung auch für autonome rechte Seiten $f = f(y)$ im Satz 2.1.9 doch auf ein zeitveränderliches lineares System. Daher wird jetzt der allgemeine Fall betrachtet beim linearen Anfangswertproblem

$$y'(t) = A(t)y(t) + g(t), \quad t \in [t_0, t_e], \quad y(t_0) = x, \quad (2.2.1)$$

mit einer stetigen Matrixfunktion $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $g \in C[t_0, t_e]$. Die Lösung y läßt sich als nicht-autonomes dynamisches System $y(t) = \Phi(t; t_0, x)$ schreiben, das nun vom Startzeitpunkt t_0 abhängt. Für ein solches System ändern sich die Bedingungen aus Defin. 1.2.1 folgendermaßen:

$$\Phi(t; t, x) = x, \quad \Phi(t + s; t_0, x) = \underbrace{\Phi(t + s; t, \Phi(t; t_0, x))}_{\text{Diff. } s}.$$

Das erste Argument hat jetzt also nicht mehr die Bedeutung einer *Zeit-Differenz*, sondern der der aktuellen Zeit. Für festes t ist die Abbildung $x \mapsto \Phi(t; t_0, x)$ zu (2.2.1) affin linear, d.h. für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda + \mu = 1$ gilt

$$\Phi(t; t_0, \lambda x + \mu y) = \lambda \Phi(t; t_0, x) + \mu \Phi(t; t_0, y).$$

Dies erkennt man daran, dass die Differenz $u(t) = \Phi(t; t_0, x + v) - \Phi(t; t_0, x)$ von zwei Lösungen das homogene System

$$u'(t) = A(t)u(t), \quad u(t_0) = v, \quad (2.2.2)$$

erfüllt. Das zu (2.2.2) gehörige dynamische System sei mit $\Phi_h(t; t_0, v) := u(t)$ bezeichnet. Offensichtlich ist die Abbildung $v \mapsto \Phi_h(t; t_0, v)$ linear. Zu dieser Abbildung gehört daher eine Matrix $Y(t; t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\Phi_h(t; t_0, v) = Y(t; t_0)v \forall v \in \mathbb{R}^n$. Diese bildet ein spezielles *Fundamentalsystem* der Dgl (2.2.2), d.h. ein System aus n linear unabhängigen Lösungen dieser Gleichung. Diese Matrixfunktion $t \mapsto Y(t) = Y(t; t_0)$ löst sogar das Matrix-Anfangswertproblem

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = I. \quad (2.2.3)$$

Umgekehrt kann man n linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung zu einer Matrixfunktion $U(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zusammensetzen. Diese bildet dann ein Fundamentalsystem, $U'(t) = A(t)U(t)$, und man bekommt mit $Y(t; t_0) = U(t)U(t_0)^{-1}$ ein für (2.2.3) normiertes Fundamentalsystem. Dabei besitzt ein Fundamentalsystem für jeden Zeitpunkt $t \geq t_0$ linear unabhängige Spalten, wenn dies am Anfangszeitpunkt t_0 galt, etwa wie in (2.2.3). Denn für die sog. *Wronski-Determinante* $W(t) := \det(Y(t))$ gilt $W(t_0) = 1$ und die Differentialgleichung (Beweis Analysis 2)

$$W'(t) = \text{spur}(A(t)) \cdot W(t). \quad (2.2.4)$$

Mit $S(t) := \int_{t_0}^t \text{spur}(A(s)) ds$ folgt daraus $W(t) = e^{S(t)}W(t_0) \neq 0$ und dies zeigt die Regularität des Fundamentalsystems, da die Exponentialfunktion im Reellen nie verschwindet. Mit einem

beliebigen Fundamentalsystem $U(t)$ kann man über die *Variation der Konstanten* die folgenden Lösungsformeln für das inhomogene Problem (2.2.2) herleiten

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t) \left(U(t_0)^{-1}x + \int_{t_0}^t U(s)^{-1}g(s) ds \right) \\ &= Y(t; t_0)x + \int_{t_0}^t Y(t; s)g(s) ds, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

welche sich mit dem speziellen Fundamentalsystem $Y(t; \cdot)$ vereinfacht. Denn man verifiziert sofort, dass $y(t_0) = x$ ist und $y'(t) = Y'(t; t_0)x + Y(t; t)g(t) + \int_{t_0}^t Y'(t; s)g(s) ds = A(t) \left(Y(t; t_0)x + \int_{t_0}^t Y(t; s)g(s) ds \right) + g(t)$ gilt.

Die Lösungsschranken aus §2.1 übertragen sich natürlich vereinfacht auf lineare Probleme. Dies beginnt schon bei der einseitigen Lipschitzbedingung aus Defini 2.1.6, welche direkt mit Hilfe der quadratischen Form der Matrix charakterisiert werden kann. Da später auch komplexe Matrizen auftreten, wird dieser Fall hier im Komplexen betrachtet. Dabei bezeichnet $x^* := \bar{x}^T$ den konjugiert transponierten Vektor.

Definition 2.2.1 Zu einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ wird die Logarithmische Norm definiert durch

$$\mu(A) := \max\{\operatorname{Re} x^* A x : x^* x = 1\}. \quad (2.2.6)$$

Genau genommen wurde die zur Euklidnorm gehörige logarithmische Norm μ_2 eingeführt, für sie gilt $\operatorname{Re}(x^* A x) \leq \mu(A) \|x\|_2^2$. Man beachte, dass bei der Berechnung von μ wegen $\mu(A^*) = \mu(A)$ nur der hermitesche (symmetrische) Anteil $\frac{1}{2}(A + A^*)$ der Matrix A eingeht, der nur reelle Eigenwerte besitzt. Insbesondere ist in der Definition der Fall $\mu(A) < 0$ möglich und beim Einsatz auch besonders interessant. Im folgenden Satz wird die durch

$$\|Y\|_p := \max_{x \neq 0} \frac{\|Yx\|_p}{\|x\|_p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (2.2.7)$$

von der Höldernorm $\|x\|_p$ induzierte Matrixnorm verwendet. Sie ist die kleinstmögliche Konstante in der Ungleichung $\|Yx\|_p \leq \|Y\|_p \|x\|_p \forall x \in \mathbb{C}^n$.

Satz 2.2.2 Die Funktionen $A(t), g(t)$ in (2.2.1) seien stetig auf $[t_0, t_e]$ und

$$\hat{\mu} := \max_{t \in [t_0, t_e]} \mu(A(t)).$$

Dann gilt für jedes Fundamentalsystem von (2.2.1) die Normschranke

$$\|Y(t; s)\|_2 \leq e^{\hat{\mu}(t-s)}, \quad t_0 \leq s \leq t \leq t_e, \quad (2.2.8)$$

und für jede Lösung des inhomogenen Problems auch

$$\|y(t)\|_2 \leq e^{\hat{\mu}(t-t_0)} \|y(t_0)\|_2 + \int_{t_0}^t e^{\hat{\mu}(t-s)} \|g(s)\|_2 ds, \quad t_0 \leq t \leq t_e. \quad (2.2.9)$$

Beweis Die Behauptung (2.2.8) ist ein Spezialfall von Satz 2.1.7, denn im linearen Fall ist $L := \max\{\|A(t)\| : t \in [t_0, t_e]\} < \infty$ und die einseitige Lipschitzbedingung

$$(u - v)^*(f(t, u) - f(t, v)) = (u - v)^*A(t)(u - v) \leq \mu(A(t))\|u - v\|_2^2$$

ist erfüllt mit der Konstanten $\mu(A(t)) \leq \hat{\mu}$. Für die Funktion $y(t) = Y(t; s)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, folgt daher

$$\|Y(t; s)x\|_2 \leq e^{\hat{\mu}(t-s)} \|x\|_2.$$

Dies entspricht der ersten Ungleichung (2.2.8) Diese kann jetzt in die Lösungsformel (2.2.5) eingesetzt werden und führt auf

$$\|y(t)\|_2 \leq \|Y(t; t_0)x\|_2 + \int_{t_0}^t \|Y(t; s)\|_2 \|g(s)\|_2 ds.$$

Mit(2.2.8) folgt die Behauptung. ■

Beispiel 2.2.3 Für die Differentialgleichung im \mathbb{R}^2 , $y'(t) = A(t)y(t)$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2t^2} & -\frac{5}{2t} \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad U(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{\sqrt{t}} \\ -\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{2t\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem, wie man leicht nachprüft. Das spezielle Fundamentalsystem zur Anfangsbedingung in $t_0 = 1$ ist dann

$$Y(t; 1) = U(t)U(1)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{t}-2t}{t^{3/2}} & -2\frac{\sqrt{t}-t}{t^{3/2}} \\ \frac{\sqrt{t}-t}{t^{5/2}} & \frac{2\sqrt{t}-t}{t^{5/2}} \end{pmatrix}.$$

2.3 Konstante Koeffizienten, Matrix-Exponential

Wenn die Matrix A des linearen Systems (2.2.1) sogar konstant ist, das System also autonom, läßt sich wie bei skalaren Problemen ein Fundamentalsystem explizit mit Hilfe der Exponentialfunktion angeben. Im Satz 2.1.9 über die Ableitung $\partial\varphi/\partial x$ tritt dieser Fall auf, wenn $x = \hat{y} \equiv y(t)$ zu einer Gleichgewichtslösung gehört. Mit der expliziten Darstellung kann man dann das Verhalten der Lösungen in Abhängigkeit von den Eigenwerten von A exakt klassifizieren. Diese Klassifikation überträgt sich unter geeigneten Voraussetzungen auch auf allgemeine autonome Probleme, ohne dass man deren Lösungen explizit kennen muss.

Beispiel 2.3.1 (Wettrüsten) Zwei konkurrierende Machtblöcke legen ihre Rüstungsausgaben y_1, y_2 nach ihren eigenen Absichten fest, berücksichtigen aber auch die Ausgaben des Gegners. Ein einfaches, lineares Modell beschreibt die Ausgaben y_1, y_2 der beiden Mächte durch ein System $y' = f(y) = Ay + g$ mit konstanten Koeffizienten in der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= -a_1 y_1 + r_1 y_2 + b_1, \\ y_2' &= r_2 y_1 - a_2 y_2 + b_2. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Dabei sind $a_1, a_2 \geq 0$ Abrüstungskoeffizienten, die den Abbau bei fehlender äußerer Bedrohung beschreiben und $r_1, r_2 \geq 0$ Aufrüstungskoeffizienten als Reaktion auf die Rüstungsausgaben des Gegners. Für $\det(A) \neq 0$ existiert ein Rüstungsgleichgewicht mit $f(\hat{y}) = A\hat{y} + g = 0$ im Punkt

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 a_2 - r_1 r_2} \begin{pmatrix} a_2 b_1 + r_1 b_2 \\ r_2 b_1 + a_1 b_2 \end{pmatrix}. \quad (2.3.2)$$

Dieses ist positiv, $\hat{y} \in \mathbb{R}_+^2$, wenn $b_1, b_2 > 0$ gilt und auch $\det(A) = a_1 a_2 - r_1 r_2 > 0$ ist. Entscheidend ist aber die Frage, ob sich die Rüstungsausgaben auf diesen Wert einpendeln, weil das Gleichgewicht stabil ist, oder ob eine "Spirale" des Wettrüstens entsteht.

Kriterien für diese Unterschiede werden in diesem Abschnitt entwickelt. Der dafür grundlegende Satz wird für den komplexen Fall $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ formuliert, da später auch Ähnlichkeitstransformationen eingesetzt werden.

Satz 2.3.2 Zur Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(tA) = e^{tA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \quad (2.3.3)$$

in jeder Norm und für jedes $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion $Y(t) := e^{tA}$ ist ein Fundamentalsystem und erfüllt die Differentialgleichung $Y'(t) = AY(t)$ mit $Y(0) = I$ sowie die Rechenregel

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} = e^{sA} e^{tA}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Speziell für die 2-Norm gilt die Schranke

$$\|e^{tA}\|_2 \leq e^{t\mu(A)}, \quad t \geq 0. \quad (2.3.4)$$

Beweis Die Folge der Partialsummen $S_m := \sum_{j=0}^m \frac{t^j}{j!} A^j$ ist eine Cauchyfolge, denn für $m > k > \|tA\|$ gilt

$$\left\| \sum_{j=k}^m \frac{t^j}{j!} A^j \right\| \leq \sum_{j=k}^m \frac{|t|^j}{j!} \|A\|^j \leq \frac{1}{k!} \|tA\|^k \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\|tA\|}{k} \right)^i = \frac{1}{k!} \frac{\|tA\|^k}{1 - \|tA\|/k}.$$

Da $k!$ schneller wächst als jede Potenz x^k wird dieser Ausdruck beliebig klein und zeigt die Cauchy-Eigenschaft der Folge, aus der die Konvergenz folgt. Die Funktionalgleichung ist eine rein algebraische Identität und folgt wie im Reellen. Eine Konsequenz daraus ist

$$\frac{1}{h} (e^{(t+h)A} - e^{tA}) = \frac{1}{h} (e^{hA} - I) e^{tA} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h^{j-1}}{j!} A^j e^{tA} \rightarrow A e^{tA} \quad (h \rightarrow 0)$$

und verifiziert $(e^{tA})' = A e^{tA}$. Die Normschränke entspricht (2.2.8). ■

Vorsicht: Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion für $\exp(A+B)$ gilt **nicht** mit allgemeinen Matrizen A, B ! Nur für kommutierende Matrizen $AB = BA$ gilt $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Bei konstanter Matrix A wird aus der Lösungsformel (2.2.5) die Darstellung

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} x + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} g(s) ds \quad (2.3.5)$$

und die Schranke (2.2.9) gilt mit $\hat{\mu} = \mu(A)$.

Bemerkung: Durch Einführung von $S := e^A$ ist $\varphi^t = S^t := e^{tA}$ ein dynamisches System im Raum $\mathbb{C}^{n \times n}$, für das die Rechenregeln (1.2.3) gerade mit denen für Matrix-Potenzen zusammenfallen,

$$\varphi^{t+s} = S^{t+s} = e^{(t+s)A} = e^{sA} e^{tA} = S^s S^t = \varphi^s \circ \varphi^t.$$

Insbesondere bildet $\{\varphi^t : t \in \mathbb{R}\}$ eine *Gruppe*.

In der Analysis löst man lineare, autonome Systeme i.d.R. über den Ansatz $y'(t) = e^{\lambda t} v$ und das daraus resultierende Eigenwertproblem $Av = \lambda v$. Das Vorgehen entspricht aber genau dem Satz 2.3.2 unter Verwendung der *Jordan-Normalform* von A . Grundlage sind Basiswechsel bei der Matrix (linearen Abbildung) A . Mit einer regulären Matrix $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind die beiden Matrizen

$$X^{-1}AX =: B \quad \text{und} \quad A = XBX^{-1}$$

ähnlich zueinander und besitzen die gleichen Eigenwerte. Bei Matrixfunktionen wie A^k und $\exp(A)$ sieht man die grundlegende Bedeutung von Ähnlichkeitstransformationen. Denn es gilt $X^{-1}A^kX = (X^{-1}AX)^k$ und daher auch

$$X^{-1}e^AX = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} X^{-1}A^jX = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (X^{-1}AX)^j = e^{X^{-1}AX}. \quad (2.3.6)$$

Die Berechnung der Exponentialfunktion wird also einfacher, wenn $X^{-1}AX$ einfache Gestalt hat. Dies gilt z.B. dann, wenn X eine Basis von Eigenvektoren (und Hauptvektoren) von A enthält. Daher sind die folgenden Spezialfälle wichtig:

- Für eine *Diagonalmatrix*

$$D = \text{diag}(d_i) = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & & \\ & e^{d_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{d_n t} \end{pmatrix}.$$

Dies folgt einfach daraus, dass Produkte von Diagonalmatrizen wieder diagonal sind, also auch $D^j = \text{diag}(d_i^j)$, $j \in \mathbb{N}$ (sogar $j \in \mathbb{Z}$, wenn D regulär).

- Für eine Schiebematrix $N := \left(\delta_{i,j-1} \right)_{i,j=1}^m$, der Dimension $m \times m$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad e^{tN} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} N^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Denn N verschiebt die Elemente eines Spaltenvektors um eins nach oben, $(Nx)_i = x_{i+1}$, $i < m$, $(Nx)_m = 0$. Die k -te Potenz verschiebt demnach um k Positionen, $N^k = \left(\delta_{i,j-k} \right)_{i,j=1}^m$ und daher ist N *nilzyklisch*, $N^k = 0$ für $k \geq m$. Die Exponentialreihe hat daher tatsächlich nur m Summanden.

- Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Matrix N ähnlich zu εN . Denn mit der diagonalen Gewichtsmatrix $G_\varepsilon := \text{diag}_i(\varepsilon^{i-1})$ gilt

$$G_\varepsilon^{-1} N G_\varepsilon = \left(\varepsilon^{1-i} \delta_{i,j-1} \varepsilon^{j-1} \right)_{i,j} = \varepsilon N. \quad (2.3.7)$$

- Die einzelnen Blöcke der Jordan-Normalform haben die Form $\lambda I + N \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Da λI mit jeder Matrix vertauschbar ist, gilt

$$e^{t(\lambda I + N)} = e^{\lambda t} e^{tN} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3.8)$$

In der *Jordan-Normalform* wird die Matrix A mit einer Basismatrix X aus Eigen- und Hauptvektoren so transformiert, dass $X^{-1}AX$ Block-Diagonalform besitzt mit Blöcken der Form $\lambda_j I + N_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}$, d.h.

$$A = X \begin{pmatrix} \lambda_1 I + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I + N_k \end{pmatrix} X^{-1}. \quad (2.3.9)$$

Die Gesamtgröße ist natürlich $m_1 + \dots + m_k = n$, Eigenwerte in verschiedenen Blöcken können gleich sein. Dabei bilden die Eigen- und Hauptvektoren $x^{(j,1)}, \dots, x^{(j,m_j)}$ zu jedem einzelnen Jordanblock der Größe m_j eine Basis für den linearen Unterraum $U_j = \text{span}(x^{(j,1)}, \dots, x^{(j,m_j)})$. Dieser ist *invariant* unter A , es gilt $AU_j \subseteq U_j$. Die Exponentialfunktion von A besitzt eine analoge Form, aus den besprochenen Spezialfällen folgt der folgende Satz.

Satz 2.3.3 *Es sei $J := X^{-1}AX$ die Jordan-Normalform (2.3.9) von A mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Dann gilt für die Exponentialfunktion der Matrix A die Darstellung*

$$e^{tA} = X \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} e^{tN_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k t} e^{tN_k} \end{pmatrix} X^{-1},$$

wobei die Gestalt der Blöcke $e^{\lambda_j t} e^{tN_j}$ durch (2.3.8) gegeben ist. Jeder der Unterräume U_1, \dots, U_k ist auch *invariant* bei der Exponentialfunktion, d.h. $e^{tA}U_j \subseteq U_j$, $1 \leq j \leq k$.

Die letzte Aussage des Satzes besagt insbesondere, dass die Dynamik, d.h. die Veränderung des Systemzustands $e^{tA}y_0$ mit der Zeit, in jedem der invarianten Unterräume U_j unabhängig vom Rest des Systems ist. Dies ist eine wichtige Grundlage für weitergehende Folgerungen.

Dynamik bei konstanten Koeffizienten

Die Aussagen zu linear-autonomen Systemen besitzen grundlegende Bedeutung für die Analyse der Dynamik allgemeiner autonomer Probleme, dies wird jetzt im Detail diskutiert. Es ist klar, dass beim homogenen linearen Problem (2.2.1) der Nullpunkt ein Gleichgewicht des Systems darstellt, $\hat{y} = 0 \Rightarrow y' = A(t)\hat{y} = 0$. Und wenn $A(t)$ regulär ist, ist dies auch der einzige Gleichgewichtspunkt. Mit den eingeführten Hilfsmitteln läßt sich die Attraktivität und Stabilität des Nullpunkts bei konstanten Koeffizienten exakt charakterisieren.

Satz 2.3.4 *Der Nullpunkt $\hat{y} = 0$ ist bei der Differentialgleichung $y' = Ay$ genau dann attraktiv, wenn für die Spektralabszisse $\alpha(A)$ der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt*

$$\alpha(A) := \max_{i=1}^n \text{Re } \lambda_i < 0.$$

Beweis a) Wenn ein Eigenwert existiert mit $\text{Re } \lambda_j \geq 0$, dann ist mit dem zugehörigen Eigenvektor $x^{(j)}$ die Funktion $y(t) = e^{\lambda_j t} x^{(j)}$ eine spezielle Lösung von $y'(t) = Ay(t)$. Für diese gilt aber $\|y(t)\| = |e^{\lambda_j t}| \|x^{(j)}\| = e^{\text{Re } \lambda_j t} \|x^{(j)}\| \geq \|x^{(j)}\|$ für $t \geq 0$ und damit ist der Nullpunkt nicht attraktiv.

b) Es sei $J = X^{-1}AX$ die Jordan-Normalform von A . Durch eine zusätzliche Ähnlichkeitstransformation mit der Diagonalmatrix G_ϵ aus (2.3.7) bekommt $\tilde{J} = (XG_\epsilon)^{-1}AXG_\epsilon$ in der

Nebendiagonalen Elemente, die entweder null oder ε sind. Daher gilt für deren Logarithmische Norm (mit Hilfe der Ungleichung $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$)

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{J}) &= \max_{\|x\|_2=1} \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 + \tilde{J}_{i,i+1} \bar{x}_i x_{i+1} \right) \\ &\leq \max_{\|x\|_2=1} \sum_{i=1}^n \left(\operatorname{Re} \lambda_i |x_i|^2 + \frac{\varepsilon}{2} (|x_i|^2 + |x_{i+1}|^2) \right) \\ &\leq \max_{\|x\|_2=1} \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon) |x_i|^2 = \alpha(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\alpha = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ist, ist mit $\varepsilon := -\alpha/2 > 0$ auch $\mu(\tilde{J}) \leq \frac{1}{2}\alpha < 0$ und (2.3.4) zeigt, dass für jede Lösung von $u'(t) = \tilde{J}u(t)$ gilt $\|u(t)\|_2 \leq e^{t\alpha/2} \|u(0)\|_2 \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$). Jede Lösung des Ausgangsproblems $y'(t) = Ay(t) = XG_\varepsilon \tilde{J} (XG_\varepsilon)^{-1} y(t)$ hat daher die Form $y(t) = XG_\varepsilon u(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$). ■

Bemerkung: Der Beweis benutzte folgenden Zusammenhang zwischen Spektralabszisse und logarithmischer Norm: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Basismatrix $X_\varepsilon (= XG_\varepsilon)$ so, dass gilt

$$\mu(X_\varepsilon^{-1} A X_\varepsilon) \leq \alpha(A) + \varepsilon. \quad (2.3.10)$$

Umgekehrt ist natürlich $\alpha(A) \leq \mu(A)$ und daher $\mu(A) < 0$ hinreichend für die Attraktivität des Nullpunkts, vgl. (2.2.9).

Später werden auch noch andere Eigenwert-Konstellationen betrachtet. Eine erschöpfende Diskussion aller unterschiedlichen Situationen ist allerdings nur bei Dimension $n = 2$ überschaubar, insbesondere bei reeller Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Daher werden jetzt Systeme in der Ebene \mathbb{R}^2 betrachtet. Bei der Lösungsdarstellung gibt es nur 2 unterschiedliche Fälle, nämlich den mit Existenz einer Eigenvektorbasis und den Fall eines doppelten reellen Eigenwerts $\lambda_1 = \lambda_2$ mit einem Hauptvektor. Um die Anwendung auf Beispiele zu erleichtern werden die einzelnen Fälle auch mit den Daten der Originalmatrix A in Beziehung gesetzt. Dazu verwendet man die Darstellung des charakteristischen Polynoms für $n = 2$ mit

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \sigma\lambda + \delta, \quad \sigma := \operatorname{spur}(A), \quad \delta := \det(A). \quad (2.3.11)$$

Die beiden Eigenwerte sind

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\Delta}) = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \delta}.$$

Vom Vorzeichen der *Diskriminante* $\Delta := \sigma^2 - 4\delta$ hängt es ab, ob die Eigenwerte reell ($\Delta \geq 0$) oder komplex ($\Delta < 0$) sind. Aus der Formel leitet man auch leicht ab, dass für $\delta > 0$ beim Vorzeichen der Eigenwerte gilt $\operatorname{sign}(\operatorname{Re} \lambda_{1/2}) = \operatorname{sign}(\sigma)$. Eine Diskussion führt auf folgende Fallklassen:

- A** ($\Delta \neq 0$): Da 2 linear unabhängige Eigenvektoren $x^{(1)}, x^{(2)}$ existieren mit $Ax^{(j)} = \lambda_j x^{(j)}$, $j = 1, 2$, ist die Matrix $X := (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ regulär. Dann ist die allgemeine Lösung

$y(t)$ bzw. ein Fundamentalsystem $U(t)$ gegeben durch

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} \\ x_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} c = U(t)c \quad (2.3.12)$$

mit $U(t) = X e^{t\Lambda}$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Dies schließt auch den Fall komplexer Eigenwerte ein, wobei aber $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ und $x^{(2)} = \overline{x^{(1)}}$ gilt. Für eine reelle Lösung $y(t) \in \mathbb{R}^2$ ist in diesem Fall auch $c_2 = \bar{c}_1$. Daher bilden auch

$$\begin{aligned} \text{Re}(e^{\lambda_1 t} x^{(1)}) &= \frac{1}{2}(e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + e^{\lambda_2 t} x^{(2)}) = e^{t \text{Re } \lambda_1} (\cos(\text{Im } \lambda_1 t) \text{Re } x^{(1)} - \sin(\text{Im } \lambda_1 t) \text{Im } x^{(1)}) \\ \text{Im}(e^{\lambda_1 t} x^{(1)}) &= \frac{1}{2i}(e^{\lambda_1 t} x^{(1)} - e^{\lambda_2 t} x^{(2)}) = e^{t \text{Re } \lambda_1} (\sin(\text{Im } \lambda_1 t) \text{Re } x^{(1)} + \cos(\text{Im } \lambda_1 t) \text{Im } x^{(1)}) \end{aligned}$$

eines anderen, reelles Fundamentalsystem $U(t)V$ mit $V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

B ($\Delta = 0$): Ein doppelter Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ist natürlich reell. Wenn es dazu nur einen Eigenvektor $x^{(1)}$ gibt, muss dieser durch einen Hauptvektor $x^{(2)}$ zur Basismatrix $X = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ergänzt werden. Hier gilt nur noch $Ax^{(2)} = \lambda x^{(2)} + x^{(1)}$. Aus Satz 2.3.3 folgt, dass Fundamentalsystem und allgemeine Lösung jetzt die Gestalt

$$U(t) = X \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}, \quad y(t) = e^{\lambda t} \left((c_1 + c_2 t) x^{(1)} + c_2 x^{(2)} \right) \quad (2.3.13)$$

besitzen. Im Unterschied zum Normalfall tritt plötzlich ein Polynomanteil $c_2 t$ auf. Dies zeigt insbesondere, dass der Stabilitäts-Satz 2.3.4 nicht mit der schwachen Ungleichung $\text{Re } \lambda_j \leq 0$ gilt. Denn im Fall $\lambda = 0$ wächst die spezielle Lösung $t x^{(1)} + x^{(2)}$ über alle Grenzen für $t \rightarrow \infty$.

Das tatsächliche Verhalten der Lösung beim Gleichgewicht null hängt von der Konstellation der Eigenwerte ab. Dazu werden 8 Fälle betrachten, die auch noch einmal in der Tabelle 1 mit Graphiken zusammengestellt werden. An übersichtlichsten ist der komplexe Fall.

C ($\Delta < 0$): In diesem Spezialfall von **A** ist $\text{Im } \lambda_1 \neq 0$ und daher treten tatsächlich oszillierende Anteile $\cos(\text{Im } \lambda_1 t)$, $\sin(\text{Im } \lambda_1 t)$ auf, die im Phasenraum zu einer Drehbewegung führen. Das Wachstum für $t \rightarrow \infty$ wird aber durch den gemeinsamen Vorfaktor $e^{t \text{Re } \lambda_1}$ bestimmt, wobei $\text{Re } \lambda_j = \sigma/2$ ist. Daher gibt es 3 Unterfälle:

2c.	$\text{Re } \lambda_j < 0$	$\sigma < 0, \Delta < 0$	$y(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$	<i>stabiler Strudel</i>
3c.	$\text{Re } \lambda_j = 0$	$\sigma = 0, \Delta = -4\delta < 0$	$y(t)$ periodisch	<i>Wirbelzentrum</i>
4c.	$\text{Re } \lambda_j > 0$	$\sigma > 0, \Delta < 0$	$y(t) \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$	<i>instabiler Strudel</i>

Bei reellen Eigenwerten (Fall $\Delta \geq 0$) kann man fünf wesentliche Fälle unterscheiden.

1r. *Sattelpunkt*, $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ($\delta < 0$): Wenn etwa $\lambda_1 > 0$ ist, gilt für $t \rightarrow \infty$ in (2.3.12)

$$y(t) = c_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t} x^{(1)}}_{\rightarrow \infty} + c_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t} x^{(2)}}_{\rightarrow 0}.$$

Hier sind fast alle Lösungen unbeschränkt, nämlich die mit $c_1 \neq 0$. Der Anteil in $x^{(2)}$ -Richtung fällt gegen null. Daher laufen die Bahnen im Phasenraum zunächst in Richtung des Unterraums $\text{span } x^{(1)}$ und dann dort gegen unendlich.

2r. *Senke*, stabiler Knoten, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ ($\sigma < 0$, $0 < \delta < \sigma^2/4$): Nach Satz 2.3.4 geht jede Lösung gegen null, $y(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$). Dies bedeutet aber nicht, dass etwa die Norm $\|y(t)\|_2$ monoton fällt. Denn wenn die Eigenvektoren $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ nicht orthogonal sind, kann die Norm zunächst wachsen. Nur für $\mu(A) < 0$ fällt die Norm monoton gegen null nach (2.2.8).

3r. *Gerade*, ein $\lambda_j = 0$, z.B. $\lambda_2 = 0$ ($\delta = 0$), es gibt 2 Eigenvektoren. Für $\lambda_1 < 0$ laufen alle Bahnen asymptotisch in den Unterraum $\text{span } x^{(2)}$ und kommen dort zur Ruhe. Für $\lambda_1 > 0$ laufen alle Bahnen außerhalb des Unterraums gegen unendlich.

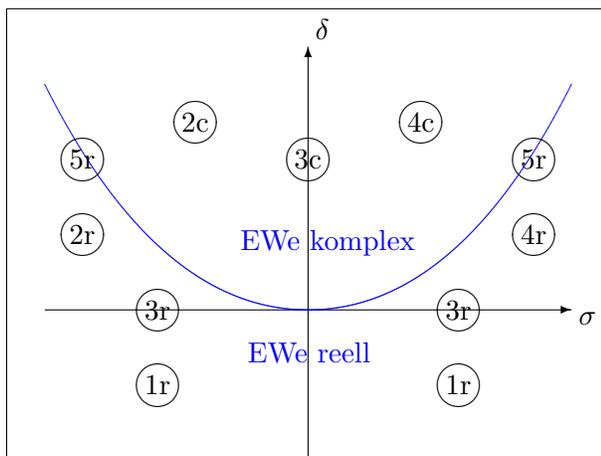
4r. *Quelle*, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ ($\sigma > 0$, $0 < \delta < \sigma^2/4$): Alle Bahnen laufen nach unendlich, $y(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$).

5r. Jordan-Kasten (Fall **B**), $\lambda_1 = \lambda_2$ ($\delta = \sigma^2/4$), es gibt keine EV-Basis. Für $c_2 \neq 0$ ist nach (2.3.13)

$$y(t) = e^{\lambda t} (c_1 x^{(1)} + c_2 (t x^{(1)} + x^{(2)})).$$

Für kleine t bewegt sich die Bahn zunächst in der Richtung $c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)}$ und schwenkt für größere t dann in den Unterraum $\text{span } x^{(1)}$ ein, $y(t) \cong c_2 t e^{\lambda t} x^{(1)}$. Für $\lambda \geq 0$ gilt dabei $y(t) \rightarrow \infty$. Umgekehrt konvergiert für $\lambda < 0$ die Lösung gegen null, aber erst nach einem anfänglichen Anwachsen aufgrund des Faktors t .

Die Klassifikation bei Anwendungsbeispielen wird einfacher, wenn man für die Fallunterscheidung nicht zuerst die Eigenwerte berechnen muß. Daher zeigt das Diagramm rechts in der (σ, δ) -Ebene die Lage der verschiedenen Bereiche, wobei die Fallnummer in den Kreisen angegeben sind. Zusätzlich zu den Achsen ist die blaue Parabel $\delta = \sigma^2/4$ ($\Delta = 0$) eingezeichnet, die den reellen Fall unten vom komplexen Fall oben trennt. Die Grenzfälle 3r und 5r betreffen nur die Kurven, auf denen die Markierungen liegen.



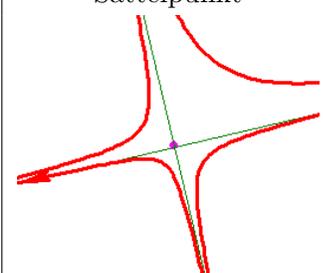
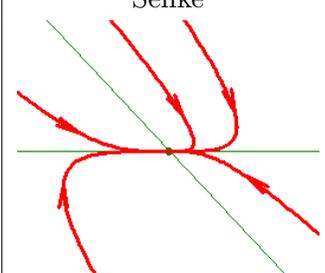
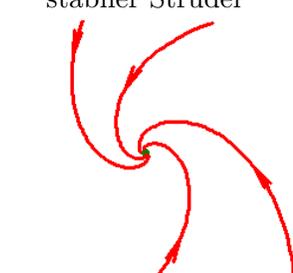
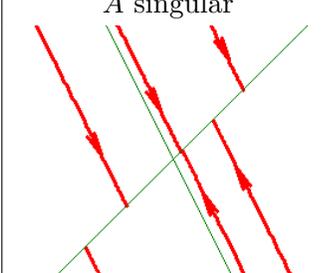
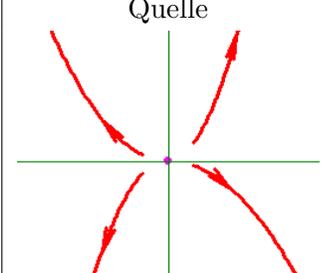
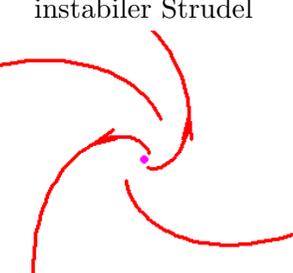
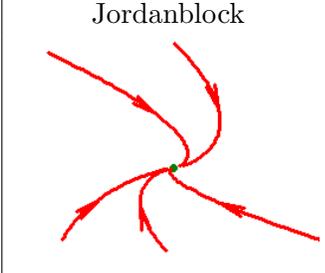
	Eigenwerte reell	Eigenwerte komplex
1. $\operatorname{Re} \lambda_1 \operatorname{Re} \lambda_2 < 0$	Sattelpunkt 	—
2. Realteile negativ	Senke 	stabiler Strudel 
3. Realteil(e) null	A singularär 	Wirbelzentrum 
4. Realteile positiv	Quelle 	instabiler Strudel 
5. doppelter EW < 0	Jordanblock 	—

Tabelle 1: Dgl-Dynamik beim Nullpunkt für $n = 2$

Bemerkung: Außer im Fall 3, wo der Eigenwert null auftritt, gilt die angegebene Einteilung auch bei inhomogenen autonomen Problemen $y'(t) = Ay(t) + g =: f(y(t))$. Denn dann ist A regulär und $f(u) = A(u + A^{-1}g)$ hat den einzigen Gleichgewichtspunkt $\hat{y} = -A^{-1}g$, um den sich die Dynamik jetzt entfaltet, denn es ist $(y - \hat{y})' = A(y - \hat{y})$. Nur beim Eigenwert $\lambda = 0$ und $g \neq 0$ tritt eine neue Situation ein. Denn wenn y_0 ein Kernvektor von A ist mit $Ay_0 = 0$ und $g = \beta y_0$, dann ist $y(t) = y_0 + tg$ eine unbeschränkte Lösung, denn es gilt $y'(t) = g = A(y_0 + tg) + g$. Dies macht den Fall $\lambda = 0$ undurchsichtiger.

Beispiel 2.3.5 (Wettrüsten) Die Klassifikation wird auf das Rüstungsbeispiel 2.3.1 mit Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & r_1 \\ r_2 & -a_2 \end{pmatrix}$$

angewendet. Es gilt $\sigma = \text{spur}(A) = -a_1 - a_2 < 0$ und $\Delta = \sigma^2 - 4\delta = (a_1 - a_2)^2 + 4r_1r_2 > 0$, die Eigenwerte sind also reell. Die Entscheidung zwischen Fall 1r (Sattelpunkt) und 2r (Senke) hängt nur vom Vorzeichen der Determinante $\delta = a_1a_2 - r_1r_2$ ab und es gilt

$$\begin{aligned} a_1a_2 > r_1r_2 &\Rightarrow \text{Gleichgewicht } \hat{y} \text{ attraktiv, da } \lambda_{1/2} < 0, \\ a_1a_2 < r_1r_2 &\Rightarrow \text{Rüstungswettlauf, da } \lambda_1 > 0. \end{aligned}$$

Wenn das Produkt der Rüstungsfaktoren größer als das der Abrüstungsfaktoren ist ($\delta < 0$), kommt es zum Wettrüsten, das in Beisp. 2.3.1 bestimmte Gleichgewicht \hat{y} liegt dann auch nicht im positiven Quadranten \mathbb{R}_+^2 . Die Rüstungsausgaben vor dem 1. Weltkrieg passen zu diesem Modell im Fall des Rüstungswettlaufs [M.Braun, Differentialgleichungen].

Es wird sich später zeigen, dass in allen Fällen der Tabelle 1 außer dem Fall 3 mit $\text{Re } \lambda = 0$ die Dynamik robust ist beim Übergang zu nichtlinearen Problemen. Daher bekommen die robusten Fälle einen besonderen Namen.

Definition 2.3.6 Die rechte Seite f des autonomen Systems $y' = f(y)$ sei differenzierbar. Ein Gleichgewichtspunkt \hat{y} heißt hyperbolisch, wenn die Ableitungsmatrix $f'(\hat{y})$ keine Eigenwerte mit Realteil null besitzt. Wenn dabei Eigenwerte mit positivem und negativem Realteil auftreten, heißt \hat{y} Sattelpunkt.

Im hyperbolischen Fall kann man bei linear-autonomen Gleichungen $y' = Ay + g$ die Eigenwerte und Basisvektoren so nummerieren, dass die Jordan-Normalform in Satz 2.3.3 aus maximal zwei Blöcken besteht,

$$A = X \begin{pmatrix} J_s & \\ & J_u \end{pmatrix} X^{-1} \Rightarrow e^{tA} = X \begin{pmatrix} e^{tJ_s} & \\ & e^{tJ_u} \end{pmatrix} X^{-1}, \quad (2.3.14)$$

mit regulären Teilblöcke J_s, J_u , für deren Eigenwerte gilt

$$\text{Re } \lambda(J_s) < 0 < \text{Re } \lambda(J_u).$$

Die Defn. 2.3.6 schließt natürlich den Fall ein, dass alle EWe streng auf einer Seite der imaginären Achse liegen, dann ist nur einer der Blöcke J_s, J_u vorhanden. Bei einem Sattelpunkt treten dagegen beide Blöcke auf.

In der Klassifikation aus diesem Paragraphen schließt der hyperbolische Fall alle Fälle außer 3(c+r) ein. Bei einem Sattelpunkt $\hat{y} = -A^{-1}g$ entwickelt sich nach Satz 2.3.3 die Dynamik in den zugehörigen invarianten Unterräumen U_s, U_u unabhängig voneinander (genauer in den affinen Unterräumen $\hat{y} + U_s, \hat{y} + U_u$). Insbesondere enthält der *stabile affine Unterraum* $\hat{y} + U_s$ genau die beschränkten Lösungen, für diese gilt sogar $x = y(0) \in \hat{y} + U_s \Rightarrow y(t) \rightarrow \hat{y} (t \rightarrow \infty)$. Für alle anderen Startwerte, bei denen $x \notin \hat{y} + U_s$ ist und daher einen Anteil im *instabilen Unterraum* $\hat{y} + U_u$ enthält, ist die Lösung $y(t)$ unbeschränkt für $t \rightarrow \infty$ wie beim Fall 1r, d.h., alle Lösungen $\notin \hat{y} + U_s$ sind unbeschränkt für $t \rightarrow \infty$. Für $t \rightarrow -\infty$ sind dagegen genau die Lösungen $\notin \hat{y} + U_u$ beschränkt. Daher verlaufen alle Bahnen $\mathcal{B}(x)$ mit $x \notin \hat{y} + U_s$ für $t \geq 0$ zunächst grob parallel zum stabilen Unterraum U_s , schwenken dann aber um und laufen asymptotisch in Richtung von U_u nach unendlich. Für Dimension 2 sehen die Bahnen daher aus wie die Höhenlinien bei einer Sattelfläche.

2.4 Nichtlineare Dynamik bei Gleichgewichtspunkten

Zur Untersuchung nichtlinearer autonomer Systeme

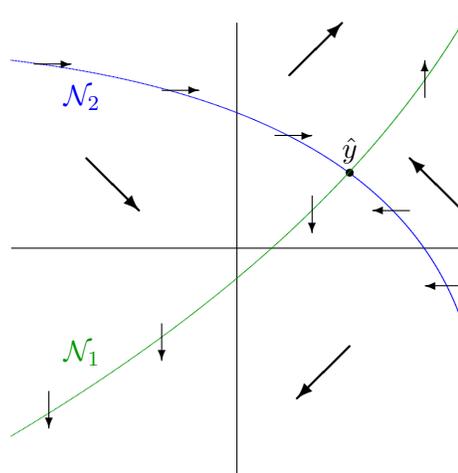
$$y'(t) = f(y(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.4.1)$$

geht man so vor, dass man zunächst alle Gleichgewichtspunkte \hat{y} mit $f(\hat{y}) = 0$ sucht, dort ist die konstante Funktion $x(t) \equiv \hat{y}$ eine Lösung, da $x'(t) = 0 = f(x(t)) \forall t$ gilt. In einer Umgebung von Gleichgewichten läßt sich das System sehr einfach linear approximieren (s.u.).

Jeder Gleichgewichtspunkt \hat{y} ist natürlich eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $f(\hat{y}) = 0$ mit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, wo also jede einzelne Komponentenfunktion f_i verschwindet, $1 \leq i \leq n$. Als Vorstufe kann man zunächst diejenigen Hyperflächen (Kurven im \mathbb{R}^2 für $n = 2$) betrachten, wo jeweils nur eine dieser Komponenten f_i null ist. Aus der Dgl folgt in solchen Punkten somit, dass die Steigung $y'_i = f_i(y) = 0$ der i -ten Lösungskomponenten einer Lösung $y(t)$ dort null ist. Daher definiert man die verschiedenen *Nullklinen* durch

$$\mathcal{N}_i := \{y \in \mathbb{R}^n : f_i(y) = 0\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4.2)$$

Diese sind spezielle Isoklinen (=Linien/Flächen gleicher Steigung) zur Steigung 0. Die Menge der Gleichgewichte ist die Menge aller Nullstellen von f und besteht daher aus dem Schnitt aller Nullklinen $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{N}_i$. Das Studium der Nullklinen ist ein Hilfsmittel zur qualitativen Diskussion der Dynamik. Da bei einer Lösung $y(t)$ beim Durchgang durch die Nullkline \mathcal{N}_i die i -te Komponente von f (in der Regel) das Vorzeichen wechselt, unterteilen die Nullklinen den Gesamttraum \mathbb{R}^n in mindestens 2^n Teile, in denen die Tangenten der Lösungen jeweils im gleichen Oktanten/Quadranten des \mathbb{R}^n liegen. Im Diagramm zeigen die Pfeile auf den Nullklinen, dass die Lösungen dort achsenparallel verlaufen, dann die Tangenten hinter dem Schnittpunkt \hat{y} mit der anderen Nullkline aber ihre Richtung wechseln. In den $4 = 2^2$ Bereichen dazwischen wird die Bewegungsrichtung grob mit den langen Pfeilen angedeutet. Diese zeigen, dass der Fluss hier aus dem östlichen und westlichen Bereich in den nördlichen und südlichen verläuft.



Nach Satz 2.1.9 läßt sich die Änderung der Gleichgewichtslösung $x(t) \equiv \hat{y}$ bei einer kleinen Störung v des Anfangswert $x = \hat{y} + v$ in erster Näherung durch die Funktion u beschreiben, welche das lineare Anfangswertproblem

$$u'(t) = f'(\hat{y})u(t), \quad u(0) = v, \quad (2.4.3)$$

löst mit $t_0 = 0$ (oBdA). Da beim autonomen Problem die Ableitungsmatrix $A = f'(\hat{y})$ unabhängig von der Zeit ist, gilt für die Lösung $y(t) = \varphi(t; x)$ nach §2.3 die Darstellung

$$y(t) = \hat{y} + e^{tA}(x - \hat{y}) + \mathcal{O}(\|x - \hat{y}\|^2). \quad (2.4.4)$$

In einer Umgebung des Gleichgewichts wird die Dynamik also i.w. durch das Verhalten der Exponentialfunktion bestimmt, wenn der Fehlerterm $\mathcal{O}(\|x - \hat{y}\|^2)$ nicht stört. Dieses ist bei hyperbolischen Punkten der Fall (s.u.), daher wurde dieser Begriff auch eingeführt.

Vor der Einführung weiterer Hilfsmittel werden zwei typische Beispiele aus der Biologie bzw. Medizin betrachtet.

Beispiel 2.4.1 Das Modell von *Lotka-Volterra* behandelt die Populationsdynamik in einem Räuber-Beute-Ökosystem aus einer Beutespezies (Hasen) und Räubern (Füchse). Es wird von einem überschaubaren Gebiet (Insel) ausgegangen, wo Wanderungsbewegungen keine große Rolle spielen. Die Größe $y_j(t) \geq 0$ einzelner Populationen ändert sich generell immer nach dem Modell $y_j' = (\alpha_j - \omega_j)y_j$, $j = 1, 2$, wobei $\alpha_j > 0$ die Geburtenrate und $\omega_j > 0$ die Sterberate ist, welche von vielen Faktoren, insbesondere aber der anderen Spezies abhängen kann. Im Lotka-Volterra-Modell macht man dabei folgende Annahmen:

	α_j	ω_j
Hasen y_1 :	Geburtenrate α_1 konstant	Sterberate proportional zur Zahl der Füchse, die Hasen jagen, $\omega_1 = \beta_1 y_2$
Füchse y_2 :	Überlebensrate der Jungtiere prop. zum Nahrungsangebot, $\alpha_2 = \beta_2 y_1$	Sterberate ω_2 konstant

mit positiven Konstanten α, β, ω . Dies führt auf das System

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= (\alpha_1 - \beta_1 y_2) y_1 \\ y_2' &= (\beta_2 y_1 - \omega_2) y_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\beta_2 y_1 - \omega_2}{y_1} \frac{y_2}{\alpha_1 - \beta_1 y_2}. \quad (2.4.5)$$

Da das System autonom ist, kann man es über den Ansatz $y_2 = y_2(y_1)$ in die rechts gezeigte einzelne Dgl überführen, welche unter Verlust der Zeitinformation direkt Bahnen im Phasenraum beschreibt (s.u.). Wegen der einfachen Form des Dgl-Systems kann man auch die Nullklinen direkt ablesen. Beide Nullklinen bestehen aus jeweils zwei Geraden, es gilt

$$\mathcal{N}_1 = \{y : y_1 = 0\} \cup \{y : y_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}\}, \quad \mathcal{N}_2 = \{y : y_2 = 0\} \cup \{y : y_1 = \frac{\omega_2}{\beta_2}\}.$$

Die Schnittmenge $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ besteht daher aus dem Nullpunkt und dem weiteren Gleichgewichtspunkt $\hat{y} := (\frac{\omega_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$ im positiven Quadranten. Für die Ableitungsmatrix der rechten Seite des Systems in (2.4.5) gilt

$$f'(y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 y_2 & -\beta_1 y_1 \\ \beta_2 y_2 & \beta_2 y_1 - \omega_2 \end{pmatrix} \Rightarrow f'(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\omega_2 \end{pmatrix}, \quad f'(\hat{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 \hat{y}_1 \\ \beta_2 \hat{y}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Das triviale Gleichgewicht 0 ist ein Sattelpunkt (EWe $-\omega_2 < 0 < \alpha_1$), während $f'(\hat{y})$ rein imaginäre Eigenwerte $\pm i\sqrt{\alpha_1 \omega_2}$ besitzt. Weitere Eigenschaften werden später behandelt.

Beispiel 2.4.2 Bei einem einfachen *Epidemie*-Modell einer ansteckenden Krankheit, die nach der Genesung zur Immunität führt (z.B. Grippe), wird die Bevölkerung in 3 Gruppen mit

Bevölkerungsanteilen $y_j(t) \geq 0$, $j = 1, 2, 3$, eingeteilt. Die erste Gruppe ist die der Ansteckungs-Gefährdeten, die zweite Gruppe die der Infizierten und die dritte die der Geheilten/Immunisten/Gestorbenen. Der Anteil y_1 der Gefährdeten verringert sich durch Ansteckung (\rightarrow Gruppe 2), die Änderung ist proportional zum Produkt $y_1 y_2$, welches die Wahrscheinlichkeit eines Zusammentreffens mit Infizierten angibt. Der Faktor α davor beschreibt die Häufigkeit einer tatsächlichen Übertragung. Die Infizierten bekommen den Zuwachs $\alpha y_1 y_2$ aus der Gruppe 1, ihr Anteil vermindert sich aber auch proportional zu ihrer Zahl, $-\beta y_2$, um die Genesenen (bzw. Toten). Letztere wandern in die 3. Gruppe. Das System hat also die Form

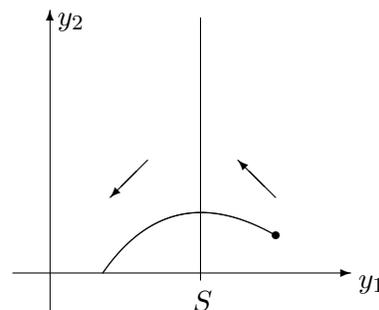
$$\left. \begin{array}{l} y_1' = -\alpha y_1 y_2 \\ y_2' = (\alpha y_1 - \beta) y_2 \\ y_3' = \beta y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy_2}{dy_1} = -1 + \frac{\beta}{\alpha y_1}. \quad (2.4.6)$$

Da y_3 nicht in den ersten beiden Gleichungen auftritt und wegen $y_1' + y_2' + y_3' = 0$ aus den anderen bestimmt werden kann, wird nur das System zu $y = (y_1, y_2)^T$ betrachtet. Die Nullklinen sind

$$\mathcal{N}_1 = \{y : y_1 = 0\} \cup \{y : y_2 = 0\},$$

$$\mathcal{N}_2 = \left\{y : y_1 = \frac{\beta}{\alpha}\right\} \cup \{y : y_2 = 0\}.$$

Hier sind alle Punkte der y_1 -Achse Gleichgewichte, Bahnen enden dort. Im positiven Quadranten des Phasenraums bewegen die Bahnen sich wegen $y_1' < 0$ nach links (Gefährdete werden weniger), bis sie eine Achse treffen. Die Zahl der Infizierten steigt für $y_1 > \beta/\alpha =: S$ und fällt für $y_1 < S$. Diese Situation ist durch die Pfeile im Diagramm angedeutet.



Den Verlauf der Infektion kann man auch durch Lösung der kombinierten Dgl $dv/dx = -1 + S/x$ aus (2.4.6) (für $v = y_2, x = y_1$) bestimmen. Durch einfache Integration bekommt man

$$v(x) = \int \left(-1 + \frac{S}{x}\right) dx = S \ln x - x + c$$

mit einer Integrationskonstanten c , die aus der Anfangsbedingung $y_2(0) = S \ln y_1(0) - y_1(0) + c$ zu bestimmen ist. Wegen des Logarithmus kreuzt die Lösung immer die y_1 -Achse in einem Punkt $\tilde{y}_1 > 0$ mit $v(\tilde{y}_1) = 0$, die Infektion endet also in $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = (\tilde{y}_1, 0)^T$, wo es keine Infizierten mehr, aber immer noch einen Rest $\tilde{y}_1 > 0$ an Nicht-Immunisten gibt. Eine Beispielkurve wird in der Graphik gezeigt. Ein wichtiges Ergebnis ist der *Schwellensatz der Epidemiologie*:

für $y_1 > S$ gibt es zunächst ein, evtl. sehr starkes, Anwachsen der Infizierten, also eine Epidemie. Erst, wenn die Zahl der Gefährdeten unter die Schwelle $S = \beta/\alpha$ gesunken ist, nimmt die Zahl der Infizierten ab und geht gegen null.

für $y_1 < S$ gibt es **keine Epidemie**, $y_2(t) \searrow 0$ fällt monoton gegen null.

Ein wichtiges Ziel der Gesundheitspolitik (WHO) ist es daher, die Zahl der Gefährdeten durch vorbeugende Immunisierung (Impfung) unter die Epidemie-Schwelle $S = \beta/\alpha$ zu drücken.

Lyapunov-Funktionen

Bei attraktiven Gleichgewichten kann man mit Hilfe von (2.4.4) die Beweistechnik von Satz 2.3.4 übertragen. Man kann aber auch die Technik mit der einseitigen Lipschitzbedingung aus Satz 2.1.7 verallgemeinern. Tatsächlich wurde in diesem Beweisen eine sog. Lyapunov-Funktion verwendet. Für manche Anwendungsprobleme lassen sich spezielle Lyapunov-Funktionen konstruieren, die eine genaue Analyse ermöglichen, manchmal sogar exakt. Die folgende Definition behandelt sog. quadratische Lyapunov-Funktionen $V(x)$, ihr Gradient V' ist ein Zeilenvektor.

Definition 2.4.3 Die differenzierbare Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lokale Lyapunov-Funktion des Systems (2.4.1) beim Gleichgewicht \hat{y} , wenn es Konstanten $\beta \geq \alpha > 0, \gamma \geq 0$ gibt mit

$$\begin{aligned}\alpha \|x - \hat{y}\|^2 &\leq V(x) \leq \beta \|x - \hat{y}\|^2, \\ V'(x)f(x) &\leq -\gamma V(x),\end{aligned}$$

für $x \in \{u : V(u) \leq \varepsilon\}$. Wenn diese Ungleichungen für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gelten, heißt V globale Lyapunov-Funktion.

Die Lyapunov-Funktion hat als einzige Nullstelle den Gleichgewichtspunkt \hat{y} und die zweite Bedingung besagt, dass $f(x)$ im Punkt x eine Abstiegsrichtung beim Graph von V ist. Für Systeme, deren rechte Seite f eine einseitige Lipschitzbedingung mit $\mu < 0$ erfüllt, ist ganz einfach $V(x) = \|x - \hat{y}\|_2^2$ eine Lyapunov-Funktion, vgl. Satz 2.1.7. Das Beweisprinzip dieses Satzes überträgt sich direkt, denn mit jeder Lösung $y(t)$ von (2.4.1) gilt nach Definition

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) = V'(y(t))y'(t) = V'(y(t))f(y(t)) \leq -\gamma V(y(t)). \quad (2.4.7)$$

Dies ist wieder eine Differential-Ungleichung für die Funktion $V(y(t))$. Bei manchen Systemklassen sind Lyapunov-Funktionen direkt angebar.

Beispiel 2.4.4 Eine Dgl $y' = f(y)$ heißt *Gradientensystem*, wenn eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existiert so, dass $f(u) = -\nabla\varphi(u) = -\phi'(u)^\top$ ist. Die Lösungskurven eines solchen Systems laufen (wie fließendes Wasser) überall in Richtung des stärksten Abstiegs der Funktion $u \mapsto \varphi(u)$. Daher ist $V := \varphi$ auch eine (i.a. nicht-quadratische) Lyapunov-Funktion mit $\gamma = 0$, denn in jeder Lösung $y(t)$ gilt

$$\frac{d}{dt}\varphi(y(t)) = \nabla\varphi(y(t))^\top y'(t) = -\|\nabla\varphi(y(t))\|_2^2 \leq 0.$$

Unter zusätzlichen Voraussetzungen an φ gelten evtl. auch die Eigenschaften aus Defn. 2.4.3.

Der folgende Satz enthält zwei unterschiedliche Voraussetzungen, die die Attraktivität eines Gleichgewichts garantieren. Die erste ist abstrakt, die zweite überträgt die lineare Stabilität von Satz 2.3.4, indem eine lokale Lyapunov-Funktion konstruiert wird.

Satz 2.4.5 Es sei $\hat{y} \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewichtspunkt des Systems (2.4.1).

a) Wenn eine Lyapunov-Funktion V bei \hat{y} existiert gemäß Definition 2.4.3, dann gilt für die Lösung $y(t) = \varphi(t; x)$ mit $V(x) \leq \varepsilon$, dass

$$\alpha \|y(t) - \hat{y}\|^2 \leq V(y(t)) \leq e^{-\gamma t} V(x) \leq \beta e^{-\gamma t} \|x - \hat{y}\|^2, \quad t \geq 0, \quad (2.4.8)$$

für $\gamma > 0$ ist also \hat{y} insbesondere attraktiv, $y(t) \rightarrow \hat{y}$ ($t \rightarrow \infty$).

b) Wenn $f \in C^2(\mathcal{D})$ ist in einer abgeschlossenen Umgebung \mathcal{D} von \hat{y} und die Spektralabszisse der Ableitungsmatrix in \hat{y} negativ ist, d.h. $\alpha(f'(\hat{y})) < 0$ gilt, dann ist \hat{y} attraktiv.

Beweis a) Aus (2.4.7) folgt die mittlere Schranke für die Funktion $u(t) := V(y(t))$ aus dem Gronwall-Lemma 2.1.3. Insbesondere verläßt y wegen $V(y(t)) \leq V(x) \leq \varepsilon$ nicht das *Bassin* $\{u : V(u) \leq \varepsilon\}$ aus Defin. 2.4.3. Die anderen Ungleichungen entsprechen den Annahmen aus der Definition.

b) Nach dem Beweis von Satz 2.3.4 existiert eine Basis X so, dass $\mu(X^{-1}AX) \leq \frac{1}{2}\alpha(A) < 0$ ist für $A = f'(\hat{y})$, vgl. (2.3.10). Damit zeigt man, dass $V(x) := \|X^{-1}(x - \hat{y})\|_2^2$ eine lokale Lyapunov-Funktion bei \hat{y} ist. Die Schranken für V gelten mit $\alpha = 1/\|X\|_2^2$ und $\beta = \|X^{-1}\|_2^2$. Da f zweimal stetig diffbar ist, gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$X^{-1}(f(x) - f(\hat{y})) = X^{-1}AX(X^{-1}x - X^{-1}\hat{y}) + r$$

mit $\|r\| \leq C_1\|X^{-1}(x - \hat{y})\|_2^2 = C_1V(x)$. Für den Gradienten $V'(x) = 2(X^{-1}(x - \hat{y}))^\top X^{-1}$ folgt

$$\begin{aligned} V'(x)f(x) &= 2(X^{-1}(x - \hat{y}))^\top X^{-1}(f(x) - f(\hat{y})) \\ &= 2(X^{-1}(x - \hat{y}))^\top X^{-1}AX(X^{-1}(x - \hat{y})) + 2(X^{-1}(x - \hat{y}))^\top X^{-1}r \\ &\leq \left(\alpha(A) + C_2\sqrt{V(x)}\right)V(x). \end{aligned}$$

Da die Klammer für kleines $V(x)$ durch eine negative Konstante beschränkt ist, etwa $-\gamma := \frac{1}{2}\alpha(A)$ für $V(x) \leq \alpha(A)^2/(4C_2^2) =: \varepsilon$ folgt die Behauptung. ■

Die folgenden Beispiele zeigen, dass die Nichtlinearität die lineare *Attraktivität* eines Gleichgewichts nicht stört. Im Grenzfall $\alpha(A) = 0$ bleibt allerdings kein Spielraum für (nichtlineare) Störungen, die einfache lineare Stabilität überträgt sich daher nicht ins Nichtlineare.

Beispiel 2.4.6 Das System

$$y'(t) = Ay(t) + \|y(t)\|_2^2 \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

hat das Gleichgewicht $\hat{y} = 0$ und dort die Ableitungsmatrix $f'(0) = A$ (Definition unten). Der nichtlineare Term addiert darauf eine mit $\|y\|_2^2$ wachsende Störung. Die Auswirkungen sind (für $\beta = 0.5$) in den Bildern zu sehen. Im Fall a) ist $\alpha(A) = \mu(A) = -1$, der Nullpunkt ist attraktiv und in seiner Nähe laufen die Bahnen (rot) weiter in den Ruhepunkt. Denn es gilt

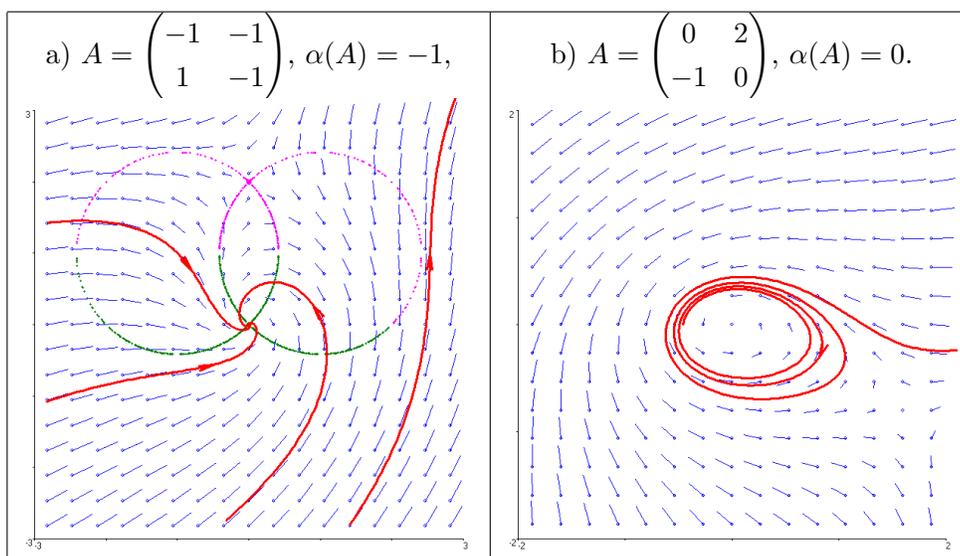
$$\frac{1}{2}(\|y\|_2^2)' = y^\top y' = y^\top Ay + \beta\|y\|_2^2 \mathbf{1}^\top y \leq (-1 + \beta\sqrt{2}\|y\|_2)\|y\|_2^2 < 0$$

für $0 < \beta\sqrt{2}\|y\|_2 < 1$. Erst bei größerer Entfernung vom Nullpunkt tauchen auch unbeschränkte Lösungen auf. Die Nullklinen lassen sich sogar explizit berechnen:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1: 0 &\stackrel{!}{=} f_1(y) = -y_1 - y_2 + \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) = \frac{1}{2}(y_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(y_2 - 1)^2 - 1, \\ \mathcal{N}_2: 0 &\stackrel{!}{=} f_2(y) = y_1 - y_2 + \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) = \frac{1}{2}(y_1 + 1)^2 + \frac{1}{2}(y_2 - 1)^2 - 1.\end{aligned}$$

Beide Nullklinen sind daher Kreise mit Radius $\sqrt{2}$, mit Mittelpunkt $(1, 1)^T$ bei \mathcal{N}_1 und $(-1, 1)$ bei \mathcal{N}_2 . Im Inneren der Kreise sind die jeweiligen Komponenten f_j negativ, im rechten Kreis gilt daher $y_1' < 0$ und im linken $y_2' < 0$. Das Problem hat ein zweites Gleichgewicht in $(0, 2)$, das aber instabil ist (Farbe magenta).

Im Fall b) im rechten Bild sind die Eigenwerte rein imaginär, $\alpha(A) = \alpha(-A) = 0$. Das Wirbelzentrum wird aber instabil für $\beta \neq 0$. Für kleine $\|y(0)\|$ macht sich das erst nach sehr langen Laufzeiten bemerkbar, die Bahn im Bild startet daher weit weg vom Gleichgewicht.



2.5 Invariante Mengen

Bei Existenz einer Lyapunov-Funktion kann man Bereiche des Phasenraums angeben (Bassins), in welche die Lösung sich hinbewegt (Satz 2.4.5 und Beweis). Entsprechende Begriffe werden jetzt eingeführt. Da man bei autonomen Dglen problemlos positive und negative Zeiten t betrachten kann, wird jetzt die ganze Zeitachse $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ zugrunde gelegt, für das zugehörige dynamische System φ ist dann $\mathcal{B}(x) = \{\varphi(t; x) : t \in \mathbb{R}\}$ die Bahn (der Orbit). Davon unterschieden werden die Halborbit $\mathcal{B}^+(x) := \{\varphi(t; x) : t \geq 0\}$ und $\mathcal{B}^-(x) := \{\varphi(t; x) : t \leq 0\}$.

Definition 2.5.1 Bei einem dynamischen System φ heißt die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ positiv invariant, wenn $\mathcal{B}^+(x) \subset M \forall x \in M$ ist. M heißt negativ invariant, wenn $\mathcal{B}^-(x) \subset M \forall x \in M$ ist, und invariant, wenn sie positiv und negativ invariant ist, $\mathcal{B}(x) \subset M \forall x \in M$.

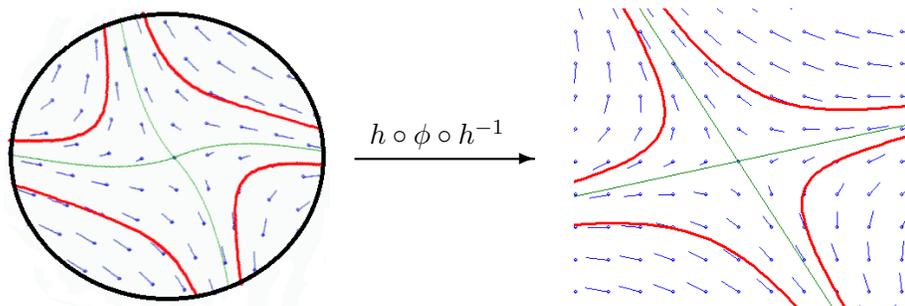
Wegen $\varphi(0; \cdot) = Id$ keine echte Teilmengen: M positiv/negativ invariant $\iff \mathcal{B}^\pm(M) = M$.

Bemerkung: Mit einer Lyapunov-Funktion V besagt die mittlere Ungleichung in (2.4.8), dass $V(y(t)) \leq e^{-\gamma t}V(x) \leq V(x)$, $t \geq 0$, gilt, die Lösung $y(t)$ ist auf V also nicht aufsteigend. Wenn der Startwert x daher in einem *Bassin* $\{u : V(u) \leq r\}$, $0 < r \leq \varepsilon$, liegt, dann verweilt die ganze Lösung auch darin für $t \geq 0$. Damit ist jede dieser ineinander geschachtelten Bassinmengen $\{u : V(u) \leq r\}$ positiv invariant.

Auch bei allgemeineren Gleichgewichten bleiben dynamische Eigenschaften vom linearen Fall erhalten, zumindestens lokal. Denn die lokale Dynamik ist auch bei allen *hyperbolischen* Gleichgewichten \hat{y} robust, wo nach Defn. 2.3.6 keine Eigenwerte von $f'(\hat{y})$ rein imaginär sind. Die erste, lokale Aussage besagt, dass in einer Umgebung des Gleichgewichts die Dynamik nur leicht deformiert wird, die Bilder aus Tabelle 1 außer im Fall 3 also nur leicht verzerrt.

Satz 2.5.2 (Hartmann-Grobmann) *Es sei \hat{y} ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt und f stetig differenzierbar, $A := f'(\hat{y})$. Dann gibt es einen Homöomorphismus $h : M \rightarrow N$ zwischen einer Umgebung M von \hat{y} und einer Nullumgebung N so, dass für genügend kleine t gilt $h(\varphi(t; x)) = e^{tA}h(x) \forall x \in M$, d.h.*

$$h \circ \varphi(t; \cdot) = e^{tA}h.$$



Der Beweis ist allerdings zu aufwändig für diese Vorlesung. Nach der Aussage des Satzes werden insbesondere die stabilen und instabilen affinen Unterräume $\hat{y} + U_s$, $\hat{y} + U_u$ aus §2.3 lokal leicht deformiert. An ihre Stelle treten allgemeinere Flächen (Mannigfaltigkeiten), die man auch außerhalb der Umgebungen aus Satz 2.5.2 fortsetzen kann. Sie bestehen aus allen Bahnen, die bei positiver oder negativer Zeit in den Punkt \hat{y} laufen.

$$\begin{aligned} W_s(\hat{y}) &:= \{x : \varphi(t; x) \rightarrow \hat{y} (t \rightarrow \infty)\} \\ W_u(\hat{y}) &:= \{x : \varphi(t; x) \rightarrow \hat{y} (t \rightarrow -\infty)\}. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Diese Flächen heißen die *stabilen* (W_s) bzw. *instabilen Mannigfaltigkeiten* (W_u) zum hyperbolischen Gleichgewichtspunkt \hat{y} . Bei der genauen Definition muß man einige Vorsicht walten lassen, da sie über Satz 2.5.2 zunächst nur in einer Umgebung eindeutig definiert sind. Bei einer differenzierbaren rechten Seite f sind die wesentlichen Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeiten, dass z.B. W_s die gleiche Dimension wie der stabile Unterraum U_s von $f'(\hat{y})$ besitzt und insbesondere dieser stabile Unterraum $\hat{y} + U_s$ *tangential* an W_s ist (vgl. Beisp. 2.5.3). Bei einem Sattelpunkt sind tatsächlich beide Mannigfaltigkeiten vorhanden und sie sind in kleinen Umgebungen auch

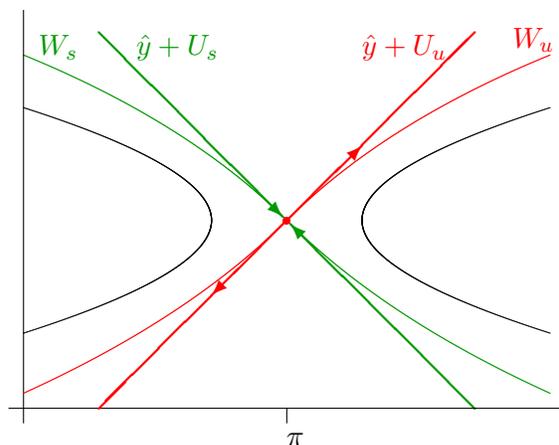
verschieden, wobei gilt $\hat{y} \in W_s(\hat{y}) \cap W_u(\hat{y})$. Die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten sind insbesondere wieder invariante Mengen (mit einer Dimension $< n$).

In manchen Fällen können beide Mannigfaltigkeiten aber in einiger Entfernung von $\{\hat{y}\}$ ineinander übergehen, dann kann der Schnitt $W_s(\hat{y}) \cap W_u(\hat{y})$ eine umfangreichere invariante Menge sein. Dazu gehört ein sog. *homokliner* Orbit $\{y(t) : t \in \mathbb{R}\}$, der (zur Zeit $t \rightarrow -\infty$) in \hat{y} startet, sich tangential zum instabilen Unterraum $\hat{y} + U_u$ davon entfernt und für große Zeiten ($t \rightarrow +\infty$) tangential zum stabilen $\hat{y} + U_s$ zurückkehrt, allerdings mit unendlicher Laufzeit, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \hat{y}$. Von einem *heteroklinen* Orbit spricht man, wenn für 2 Gleichgewichte $\hat{y}_1 \neq \hat{y}_2$ gilt $W_u(\hat{y}_1) \cap W_s(\hat{y}_2) \neq \emptyset$, und eine Lösung existiert mit $y(-\infty) = \hat{y}_1$, $y(+\infty) = \hat{y}_2$. Diese homoklinen bzw. heteroklinen Orbits kann man in der Praxis wegen der unendlichen Laufzeit i.d.R. nicht beobachten, ihre Existenz erklärt aber das Verhalten von Bahnen in ihrer Nachbarschaft wie im Fall des Pendels.

Beispiel 2.5.3 Außer der stabilen Ruhelage $(0,0)$ besitzt das *Pendel* u.a. auch den Gleichgewichtspunkt $\hat{y} = (\pi, 0)^\top$ (kopfüber), der ein Sattelpunkt ist. Die Ableitung der rechten Seite f aus (1.1.2) ist für $\beta = 0$ dort

$$f'(\hat{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit dem instabilen Eigenraum $U_u = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ zum EW 1 und dem stabilen Eigenraum $U_s = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ zum EW -1. Im Bild sind die zugehörigen affinen Unterräume eingezeichnet (grün: stabil, rot: instabil) und die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten, welche im Gleichgewicht \hat{y} die beiden Unterräume berühren ("tangential sind"). Zu Bahnen auf W_s und W_u gehört aber eine unendlich lange Schwingungsdauer, das ungestörte Pendel kommt asymptotisch zur Ruhe. In Schwarz sind Bahnen mit endlicher Schwingungsperiode eingezeichnet.



Die Bahnen auf W_s, W_u laufen zwischen den Überkopf-Positionen $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Im Unterschied zum linearen Fall können auch Bahnen aus der instabilen Mannigfaltigkeit W_u beschränkt bleiben. Dies gilt für die Bahn von $\hat{y} = (\pi, 0)$ durch $(0, -2)$ zur anderen Überkopf-Position $(-\pi, 0)$, die ebenfalls ein Sattelpunkt ist. Diese Bahn verbindet zwei Sattelpunkte mit unendlicher Laufzeit, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y_1(t) = \mp\pi$, sie ist ein heterokliner Orbit.

Zu einem Gleichgewichtspunkten gehört die triviale Bahn $\mathcal{B}(\hat{y}) = \{\hat{y}\}$, sie ist eine besonders einfache invariante Menge. Bei Existenz einer Lyapunov-Funktion gibt es sogar ganze, ineinander geschachtelte Familien invarianter Mengen. Ein weiteres Beispiel sind periodische Lösungen wie beim ungedämpften Pendel, denn jede periodische Bahn ist wegen der Kozyklenbedingung (1.2.2) auch eine *invariante Menge*. Periodische Bahnen unterscheiden sich aber von den Bassin-Mengen

einer Lyapunov-Funktion dadurch, dass man sie nicht weiter verkleinern kann. "Minimale" invariante Mengen konstruiert man durch Beobachtung von Lösungskurven über sehr lange Zeiten, d.h. durch Betrachtung der Halb-Orbits $\mathcal{B}^+(x) := \{\varphi(t; x) : t \geq 0\}$.

Definition 2.5.4 Die ω -Limesmenge $\omega(x)$ eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Häufungspunkte des Halborbis $\mathcal{B}^+(x)$, d.h.

$$\omega(x) := \{y : \text{es gibt eine Folge } (t_k)_k \geq 0 \text{ mit } t_k \rightarrow \infty, \varphi(t_k; x) \rightarrow y (k \rightarrow \infty)\}$$

Tatsächlich erhält man die Limesmenge $\omega(x)$ auch als Schnitt aller Endstücke des Halborbis, sie ist abgeschlossen und positiv invariant,

$$\omega(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\{\varphi(s; x) : s \geq t\}}, \quad \mathcal{B}^+(\omega(x)) = \omega(x).$$

Die α -Limesmenge $\alpha(x)$ wird analog zum Grenzwert $t \rightarrow -\infty$ definiert. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß endet eine beschränkte Lösung in ihrer ω -Limesmenge. Bei einigen Aussagen wird demnächst der Abstand eines Punktes $u \in \mathbb{R}^n$ von einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ verwendet,

$$\text{dist}(u, M) := \inf\{\|u - v\| : v \in M\}. \quad (2.5.2)$$

Wenn M kompakt ist, wird das Infimum auch angenommen. Wenn $\mathcal{B}^+(x)$ beschränkt ist für ein $x \in \mathbb{R}^n$, kann man zeigen, dass dann $\omega(x) \neq \emptyset$ kompakt und zusammenhängend ist und es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t; x), \omega(x)) = 0$, d.h. die Lösung $\varphi(t; x)$ verläuft am Ende beliebig nahe an/in der Limesmenge.

Beispiel 2.5.5 Mit einem Parameter $\beta \in \mathbb{R}$ wird die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta(1 - y_1^2 - y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =: f(y) \quad (2.5.3)$$

betrachtet. Für $\beta = 0$ sind die Bahnen einfache Kreise. Für allgemeines β betrachtet man zur Analyse der Dynamik hier die Funktion

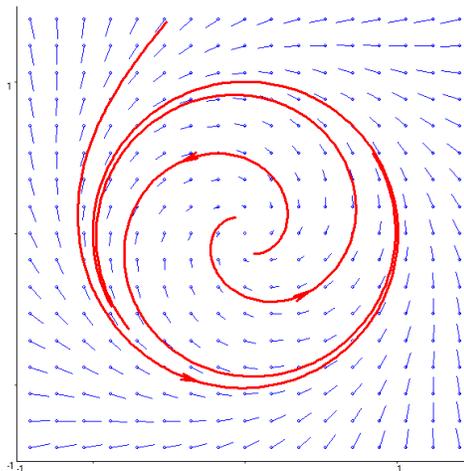
$$V(x) := x_1^2 + x_2^2 = \|x\|_2^2.$$

Mit jeder Lösung $y(t)$ von (2.5.3) gilt für die Funktion $u(t) = V(y(t))$, dass

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt} V(y(t)) = 2y(t)^\top y'(t) = 2y(t)^\top f(y(t)) \\ &= 2(-y_1 y_2 + y_1 y_2) + 2\beta(1 - \|y\|_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = 2\beta V(y(t)) (1 - V(y(t))) \\ &= 2\beta u(t) (1 - u(t)). \end{aligned}$$

Diese einfache skalare Differentialgleichung $u' = 2\beta u(1-u) =: g(u)$ hat die beiden Gleichgewichte $\hat{u} = 0$ und $\hat{u} = 1$. Wegen $g'(0) = 2\beta$ und $g'(1) = -2\beta$ ist für $\beta > 0$ der Nullpunkt abstoßend und

der Punkt $\hat{u} = 1$ attraktiv, und umgekehrt für $\beta < 0$. Für $\beta = 0$ sind dagegen alle Lösungen periodisch, da $V(y(t))' = 0$ ist. Für $\beta > 0$ gilt insbesondere $u(t) = V(y(t)) \rightarrow 1$ ($t \rightarrow \infty$). Daher laufen alle nichttrivialen Lösungen der Dgl (2.5.3) (in Spiralen) zum Einheitskreis $K_1(0) = \{x : V(x) = 1\}$. Dieser enthält aber keine Fixpunkte, sondern nur periodische Lösungen. Für jeden Startwert $x \neq 0$ ist in diesem Beispiel daher die ω -Limesmenge gerade der Einheitskreis, $\omega(x) = \{x : V(x) = 1\}$, er ist ein sogenannter *Grenzzzyklus*. Die Situation am Nullpunkt läßt sich auch mit Satz 2.4.5 nachvollziehen, die Ableitung ist



$$f'(y) = \begin{pmatrix} \beta(1 - 3y_1^2 - y_2^2) & -1 - 2\beta y_1 y_2 \\ 1 - 2\beta y_1 y_2 & \beta(1 - y_1^2 - 3y_2^2) \end{pmatrix}.$$

Im Nullpunkt sind die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \beta \pm \mathbf{i}$ und markieren für $\beta = 0$ ein Wirbelzentrum und sonst einen stabilen ($\beta < 0$) bzw. instabilen ($\beta > 0$) Strudel.

Beim Beispiel 2.5.5 ist besonders interessant, dass der Grenzzzyklus für $\beta > 0$ andere Lösungen anzieht und daher bei Rechnungen direkt beobachtet werden kann. Dazu passende Begriffe sollen jetzt eingeführt werden. Zunächst nennt man eine Menge $U \supseteq M$ eine Umgebung der Menge M , wenn eine offene Menge B existiert mit $M \subseteq B \subseteq U$.

Definition 2.5.6 Man sagt, dass ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ von der Menge M angezogen wird, wenn $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t; x), M) = 0$ ist. Die Menge aller solchen Punkte nennt man den Anziehungsbe- reich von M ,

$$A^+(M) = \{x : \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t; x), M) = 0\}.$$

Die Menge M heißt Attraktor, wenn $A^+(M)$ eine Umgebung von M ist. Für $A^+(M) = \mathbb{R}^n$ heißt M globaler Attraktor.

Nach Satz 2.4.5 sind Gleichgewichtspunkte $\{\hat{y}\}$ mit $\alpha(f'(\hat{y})) < 0$ Attraktoren, natürlich sehr einfache. Im Beispiel 2.5.5 ist für $\beta > 0$ der Grenzzzyklus, also der ganze Einheitskreis $K_1(0)$ ein Attraktor, sein Einzugsbereich ist $A^+(K_1(0)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Beispiel 2.5.5 sieht natürlich sehr konstruiert aus, damit man die wesentlichen Ergebnisse explizit angeben kann. Ein berühmtes praktisches Beispiel mit ähnlichen Eigenschaften ist der *Brüsselator*, ein Modell für oszillierende chemische Reaktionen. Beiden Beispielen gemeinsam ist ein weiterer Aspekt, nämlich der, dass die Dgl von Parametern abhängt, deren Werte einen erheblichen Einfluß auf die Art der Dynamik haben. Die rechte Seite der Dgl hat dabei die Form $f(y) = f(y, \beta)$ mit $\beta \in \mathbb{R}$. Bei Überschreiten eines bestimmten Werts (hier $\beta = 0$) ändert sich das Verhalten der Lösungen schlagartig. Aus Lösungen, die für $\beta < 0$ gegen das Gleichgewicht

$\hat{y} = 0$ konvergieren, entsteht plötzlich für $\beta > 0$ ein *Grenzzzyklus*. Diese Erscheinung nennt man eine *Verzweigung*, welche in vielen praktischen Modellen im Vordergrund der Analyse steht und in §2.6 detaillierter untersucht wird.

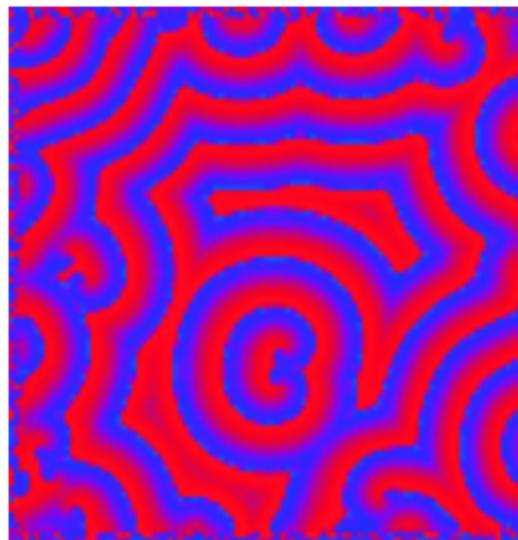
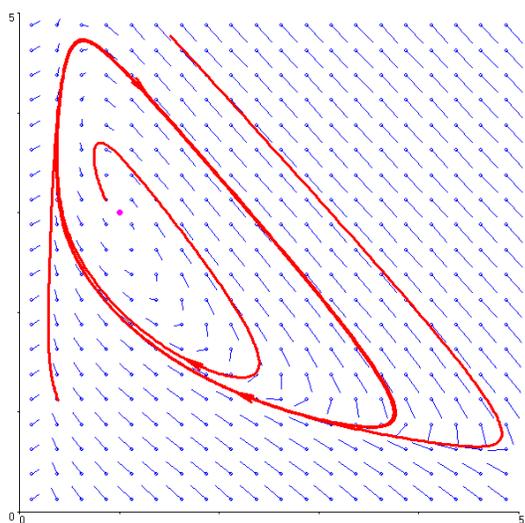
Beispiel 2.5.7 (Brüsselator) Die Konzentrationsänderung von 2 bestimmten chemischen Reagenzien (Belousov-Zhabotinsky-Reaktion) wird beschrieben durch die Dgl

$$\begin{aligned}y_1' &= \alpha - (\beta + 1)y_1 + y_1^2 y_2, \\y_2' &= \beta y_1 - y_1^2 y_2,\end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta > 0$. Wegen $f_1(y) = \alpha - y_1 - f_2(y)$ bekommt man als einzigen Gleichgewichtspunkt $\hat{y}_1 = \alpha$, $\hat{y}_2 = \beta/\alpha$. Dort ist

$$A := f'(\hat{y}) = \begin{pmatrix} -\beta - 1 + 2y_1 y_2 & y_1^2 \\ \beta - 2y_1 y_2 & -y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta - 1 & \alpha^2 \\ -\beta & -\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(A) = \alpha^2 > 0$, daher liegen beide Eigenwerte von A auf der gleichen Seite der imaginären Achse, das Vorzeichen ihres Realteils wird also durch $\sigma = \beta - 1 - \alpha^2$ bestimmt. Für $\beta < 1 + \alpha^2$ ist \hat{y} daher attraktiv, für $\beta > 1 + \alpha^2$ abstoßend bzw. instabil. Im instabilen Fall wachsen die Lösungen aber wegen der nichtlinearen Terme nicht unbegrenzt, sondern gehen asymptotisch in eine periodische Lösung über. Die linke Graphik zeigt 3 verschiedene Bahnen, die alle recht schnell periodisch werden und von innen oder außen zu der linsenförmigen ω -Limesmenge laufen. Diese ist wieder ein *Grenzzzyklus*. Wenn man die Reagenzien in einem zweidimensionalen Medium (Filz, Löschblatt) unterbringt, entstehen wandernde Wellen wie im rechten Bild (Quelle: Wikipedia). Numerische Berechnungen mit passenden Erweiterungen des Brüsselator-Modells ergeben ähnliche Bilder.



Kriterien für die Stabilität von einfachen Gleichgewichtspunkten wurden in Satz 2.4.5 angegeben, für periodische Lösungen ist dies etwas aufwändiger.

Die Stabilität periodischer Lösungen

Eine Lösung $y(t)$ des AWP's $y' = f(y)$, $y(0) = x$, bzw. das zugehörige dynamische System $\varphi(t; x)$ zu festem $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *periodisch*, wenn ein $T \in \mathbb{R}$, $T \neq 0$, existiert mit

$$\varphi(t + T; x) = \varphi(t; x) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

T heißt Periode(-nlänge). Offensichtlich ist mit T auch jedes Vielfache kT , $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, eine Periode, man vereinbart daher, dass man die kleinste positive Periodenlänge T verwendet. Insbesondere sind die zeitkonstanten Gleichgewichtslösungen nicht gemeint, welche natürlich für jedes $T \in \mathbb{R}$ periodisch sind. Da $t \mapsto \varphi(t; x)$ als stetig vereinbart wurde, betrachtet man nur beschränkte Lösungen des AWP's und die Bahn $\mathcal{B}^+(x) = \mathcal{B}(x)$ ist eine kompakte Menge, der *periodische Orbit*. Dieser ist offensichtlich auch eine invariante Menge, denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{B}(\varphi(t; x)) = \mathcal{B}(x)$. Die Stabilitätsbegriffe aus Defin. 1.2.4 lassen sich analog auf periodische Orbits übertragen.

Definition 2.5.8 *Es sei $\mathcal{B}^+(\hat{x})$ ein periodischer Orbit des dynamischen Systems.*

a) $\mathcal{B}^+(\hat{x})$ heißt Lyapunov-stabil, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\|\varphi(t; x) - \varphi(t; \hat{x})\| < \varepsilon \quad \forall \|x - \hat{x}\| < \delta, \quad t \geq 0.$$

b) Ein stabiler Orbit $\mathcal{B}^+(\hat{x})$ heißt asymptotisch Lyapunov-stabil, wenn ein $r > 0$ existiert so, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t; x) - \varphi(t; \hat{x})) = 0 \quad \forall \|x - \hat{x}\| < r.$$

Kriterien für diese Stabilitätsaussagen lassen sich für glatte Anfangswertprobleme mit rechter Seite $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ über den Satz 2.1.9 herleiten. Für eine gestörte Lösung, die in $x = \hat{x} + v$ startet, gilt danach

$$\varphi(t; \hat{x} + v) - \varphi(t; \hat{x}) = Y(t)v + \mathcal{O}(\|v\|^2), \quad (2.5.4)$$

wobei $Y(t)v = u(t)$ ist mit dem Fundamentalsystem $Y(t)$ zur linearen, homogenen Dgl

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad A(t) = f'(\varphi(t; \hat{x})), \quad (2.5.5)$$

mit $Y(0) = I$. Zur Überprüfung der Lyapunov-Stabilität ist analog zum Satz 2.4.5b) das Verhalten von $Y(t)$ für $t \rightarrow \infty$ zu untersuchen. Da $y(t) = \varphi(t; \hat{x})$ nach Voraussetzung T -periodisch ist, ist auch $t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine T -periodische Matrixfunktion, $A(t + T) = A(t) \forall t$. Daher ist auch $U(t) := Y(t + T)$ wieder ein Fundamentalsystem von (2.5.5), denn

$$U'(t) = Y'(t + T) = A(t + T)Y(t + T) = A(t)U(t).$$

Daher gilt $Y(t) = U(t)U(0)^{-1}$ und somit $U(t) = Y(t + T) = Y(t)M$ mit der regulären Matrix $M = U(0) = Y(T)$, kurz $Y(t + T) = Y(t)Y(T)$. Diese Beziehung hängt auch nicht grundlegend vom speziellen Fundamentalsystem ab. Ist $Z(t) = Y(t)C$ ein weiteres, dann gilt

$$Z(t + T) = Y(t + T)C = Y(t)MC = Z(t)C^{-1}MC = Z(t)\tilde{M}.$$

Die Matrizen M und \tilde{M} sind also ähnlich und besitzen die gleichen Eigenwerte. Die folgende Definition nimmt dabei Bezug auf die Formel (2.1.12).

Definition 2.5.9 Bei einer periodischen Lösung mit $\varphi(t+T; \hat{x}) = \varphi(t; \hat{x})$ und dem Fundamentalsystem $Y(t)$ aus (2.5.5) heißt

$$M := Y(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T; \hat{x})$$

die Monodromie-Matrix, ihre Eigenwerte m_i , $i = 1, \dots, n$, die Floquet-Multiplikatoren von $\varphi(t; \hat{x})$.

Bemerkung: Nach dem Satz von Floquet gilt in der Situation aus der Definition sogar eine Beziehung

$$Y(t) = G(t) e^{tR} \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

mit einer stetig diffbaren T -periodischen Matrixfunktion $G(t)$ und einer konstanten Matrix R . Dabei ist $M = e^{TR}$.

Mit den gefundenen Eigenschaften läßt sich die (asymptotische) Lyapunov-Stabilität von $\mathcal{B}^+(\hat{x})$ betrachten. Jedes $t = t_0 + kT \in \mathbb{R}$ kann eindeutig zerlegt werden in ein $t_0 \in [0, T)$ und $k \in \mathbb{Z}$. Damit entwickelt sich die Störung (2.5.4) wie folgt

$$\varphi(t; \hat{x} + v) - \varphi(t; \hat{x}) = Y(t)v + \mathcal{O}(\|v\|^2) = Y(t_0)M^k v + \mathcal{O}(\|v\|^2).$$

Voraussetzung für einen asymptotisch Lyapunov-stabilen Orbit ist daher, dass für $t \rightarrow \infty$ die Matrixpotenzen M^k , $k \in \mathbb{N}$, gegen null konvergieren. Da die Eigenwerte von M^k die Potenzen m_i^k sind, folgt die Einschränkung $|m_i| < 1 \forall i$. Diese Anforderung ist bei nicht-autonomen, zeitperiodischen Systemen $y' = f(t, y)$ erfüllbar, wenn $f(t, y) \equiv f(t+T, y)$. Bei autonomen Problemen gilt allerdings

Lemma 2.5.10 Für $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ sei $y(t) = \varphi(t; \hat{x})$ eine T -periodische Lösung von $y' = f(y)$, $y(0) = \hat{x}$. Dann besitzt die Monodromie-Matrix den Eigenwert $m_1 = 1$ mit zugehörigem Eigenvektor $v = f(\hat{x})$.

Beweis Die Ableitung $u(t) = y'(t)$ erfüllt nach der Kettenregel die Dgl

$$u'(t) = \frac{d}{dt} y'(t) = \frac{d}{dt} f(y(t)) = f'(y(t)) y'(t) = A(t) u(t)$$

mit der T -periodischen Matrix $A(t)$ aus (2.5.5) und dem Anfangswert $u(0) = y'(0) = f(\hat{x}) = v$. Daher gilt auch $u(t) = Y(t)v$. Mit $y(t)$ ist aber auch $u(t) = y'(t)$ T -periodisch und daher gilt

$$Y(T)v = u(T) = u(0) = v. \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Bei beliebigen autonomen Systemen $y' = f(y)$ ist mit $y(t)$ auch jede phasenverschoebene Funktion $y(t + t_0)$ eine Lösung (die auf die gleiche Bahn führt). Eine leichte Störung des

Anfangszeitpunkts entspricht daher einer leichten Verschiebung *längs* der Bahn, die zugehörige Richtung ist gerade die Kurventangente $y'(0) = f(y(0))$. Im periodischen Fall ist daher $v = f(y(0))$ der Eigenvektor, eine Störung in Richtung der Kurventangente ändert den Orbit nicht.

Tatsächlich können periodische Orbits autonomer Systeme nicht asymptotisch Lyapunov-stabil sein, Lösungen, die an verschiedenen Stellen auf $\mathcal{B}(\hat{x})$ starten, nähern sich nicht dauerhaft an, ihre Bahnen sind aber die selben. Auch bei Systemen, bei denen (fast) alle Lösungen periodisch sind, wie beim Pendel (Beisp.1.1.1) oder dem Lotka-Volterra-Modell (Beisp.2.4.1) haben selbst eng benachbarte periodische Orbits unterschiedliche Periodenlängen, ein Pendel mit geringen Ausschlägen eilt einem identischen mit größeren Amplituden voraus. Daher entfernen sich die Lösungen voneinander, obwohl sich die Bahnen \mathcal{B} im Phasenraum nur wenig unterscheiden.

Bevor eine Korrektur der Stabilitätsbegriffe vorgenommen wird, wird das Lotka-Volterra-Beispiel wieder aufgegriffen, bei dem i.w. nur periodische Lösungen auftreten, die aber keine Attraktoren sind. Dies erkennt man daran, dass die Lösungen sich auf den Höhenlinien einer Funktion L (ihres Graphen) bewegen. Auch beim Pendel gibt es eine solche Funktion, vgl. (1.1.3), die dabei die Energie des Systems beschreibt, welche bei fehlender Dämpfung (Energieerhaltung) konstant ist $L(y(t)) \equiv L(y(0))$.

Beispiel 2.5.11 Beim *Lotka-Volterra*-Beispiel 2.4.1 konnte das System (2.4.5) auch als eine Dgl für $v(x) = y_2(y_1)$, $y_1 = x$, geschrieben werden:

$$\frac{dv}{dx} = \left(\beta_2 - \frac{\omega_2}{x}\right) \frac{v}{\alpha_1 - \beta_1 v}. \quad (2.5.6)$$

Dies ist eine Dgl mit getrennten Variablen, die in impliziter Form gelöst werden kann durch

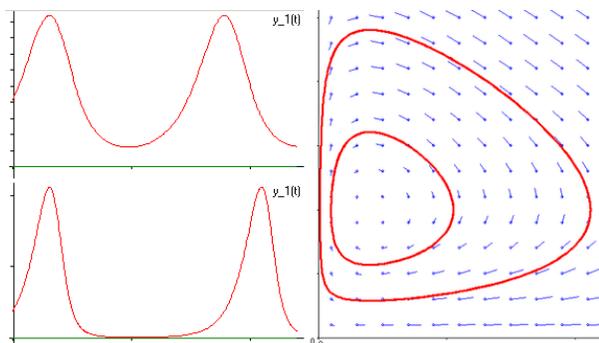
$$L(y_1, y_2) \equiv c, \quad \text{mit} \\ L(x, v) = L(y_1, y_2) := \omega_2 \log y_1 + \alpha_1 \log y_2 - \beta_2 y_1 - \beta_1 y_2.$$

Die Konstante c ist aus der Anfangsbedingung $y(0)$ zu bestimmen. Denn für jede Lösung $v(x)$ von (2.5.6) gilt $\frac{d}{dx}L(x, v(x)) \equiv 0$ bzw. für jede Lösung $y(t)$ von (2.4.5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(y(t)) &= \frac{\partial L}{\partial y_1} y_1'(t) + \frac{\partial L}{\partial y_2} y_2'(t) \\ &= \left(\frac{\omega_2}{y_1} - \beta_2\right)(\alpha_1 - \beta_1 y_2) y_1 + \left(\frac{\alpha_1}{y_2} - \beta_1\right)(\beta_2 y_1 - \omega_2) y_2 \equiv 0. \end{aligned}$$

Daher bewegt sich die Kurve $t \mapsto y(t)$ auf den *Höhenlinien* der Funktion $L(y) = \text{const}$. Diese Höhenlinien sind geschlossene Kurven (vgl. Bild), der Gleichgewichtspunkt $\hat{y} = (\omega_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)^\top$ ist das globale Maximum von L im positiven Quadranten. Daher sind alle nicht-konstanten Lösungen periodisch. Dieses Ergebnis war auch ein Ziel dieses Modells, da auf einer bestimmten Insel phasenverschobene, periodische Schwankungen von Beutetieren (Schneehasen) und Räubern (Luchse) tatsächlich beobachtet wurden.

Die verschiedenen Lösungskurven besitzen aber unterschiedliche Perioden, über lange Zeiten entfernen sich daher auch Lösungen zu nah benachbarten Startwerten weit, selbst wenn der Abstand zwischen den Bahnen gering ist. Das Bild zeigt zur Demonstration die ersten Komponenten $y_1(t)$ von 2 Lösungen. Dabei wurde der Abstand so groß gewählt, dass die unterschiedlichen Periodenlängen leicht erkennbar sind.



An die genannten Situationen muss man die Stabilitätsbegriffe anpassen, indem man sich auf Bahnen als Ganzes bezieht. Dabei wird die Abstandsdefinition (2.5.2) verwendet.

Definition 2.5.12 Sei $\varphi(t; \hat{x})$ eine T -periodische Lösung von (2.4.1) und $\Omega := \mathcal{B}(\hat{x})$ ihr Orbit.

a) Ω heißt orbital stabil, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\text{dist}(\varphi(t; x), \Omega) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0, \quad x : \text{dist}(x, \Omega) < \delta.$$

b) Ein orbital-stabiles Ω heißt asymptotisch orbital-stabil, wenn Ω ein Attraktor ist, d.h. wenn

$$\exists r > 0 : \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t; x), \Omega) = 0 \quad \forall x : \text{dist}(x, \Omega) < r.$$

Im positiven Quadranten \mathbb{R}_+^2 ist die Funktion L aus dem Lotka-Volterra-Beisp. 2.5.11 stetig diffbar, in jeder invarianten kompakten Teilmenge davon sind daher alle Lösungen periodisch und orbital-stabil (aber nicht asymptotisch o.s.). Bei der asymptotischen Orbital-Stabilität spielt jetzt nach Definition eine Phasenverschiebung von Lösungen keine Rolle mehr. Daher ist der Eigenwert $m_1 = 1$ der Monodromie-Matrix unschädlich, wenn er nur einfach auftritt. Tatsächlich beschreibt der nächste Satz eine feste, asymptotische Phasenverschiebung $a(x) \in [0, T)$ in Bezug auf die Referenzlösung $\varphi(t; \hat{x})$.

Satz 2.5.13 Es sei f stetig differenzierbar und $\varphi(t; \hat{x})$ eine (nicht-konstante) T -periodische Lösung von (2.4.1), $\Omega := \mathcal{B}(\hat{x})$. Für die Floquet-Multiplikatoren gelte $|m_n| \leq \dots \leq |m_2| < 1$ und $m_1 = 1$ sei einfach. Dann ist Ω asymptotisch orbital-stabil. Es existiert ein $r > 0$ und eine stetige Funktion a mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t + a(x); x) - \varphi(t; \hat{x})) = 0 \quad \forall x : \text{dist}(x, \Omega) \leq r.$$

Der Beweis ist leider sehr aufwändig, vgl. Prüss/Wilke.

Beispiel 2.5.14 Die Differentialgleichung aus Beisp.2.5.5

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta(1 - y_1^2 - y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f(y)$$

hat die 2π -periodische Lösung $y(t) = (\cos t, \sin t)^\top$ zum Startwert $\hat{x} = (1, 0)^\top$. Die Ableitungsmatrix $A(t)$ ist dort

$$A(t) = f'(y(t)) = \begin{pmatrix} -2\beta \cos^2 t & -1 - 2\beta \sin t \cos t \\ 1 - 2\beta \sin t \cos t & -2\beta \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Als normiertes Fundamentalsystem mit $Y'(t) = A(t)Y(t)$, $Y(0) = I$ findet man

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-2\beta t} \cos t & -\sin t \\ e^{-2\beta t} \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad M = Y(T = 2\pi) = \begin{pmatrix} e^{-2\beta T} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung in der 2. Spalte von $Y(t)$ ist gerade $u = y'$ aus Lemma 2.5.10 und beschreibt die (hier konstante) Phasenverschiebung infolge des gestörten Startwerts, während die erste Spalte die Annäherung an den Einheitskreis bewirkt. Tatsächlich sind die Eigenwerte der Monodromie-Matrix M gerade $m_1 = 1$ und $m_2 = e^{-4\beta\pi} < 1$ für $\beta > 0$.

Beim Brüsselator sind weder die Bahn noch die Periode explizit bekannt. Daher kann man hier die Floquet-Multiplikatoren nur numerisch bestimmen.

Bemerkung: Bei einem gegebenen System mit einer anscheinend periodischen Lösung $y(t)$ kann man die Periode T i.d.R. nicht direkt angeben. Sie war aber die Grundlage der bisherigen Ergebnisse. Ein wertvolles Hilfsmittel ist hier der sogenannte *Poincaré-Schnitt*, bei dem man den Phasenraum durch eine Hyperebene "quer" zur Bahn zerschneidet und nur die Zeitpunkte betrachtet, an denen eine Lösung $y(t)$ zu dieser Hyperebene zurückkehrt. Da man in einem Punkt x mit $x = y(0)$ (oBdA $t = 0$) die Tangentenrichtung $y'(0) = f(x)$ kennt, durchstößt die Bahn $\mathcal{B}(x)$ die Hyperebene

$$\mathcal{H} := \{u \in \mathbb{R}^n : f(x)^\top(u - x) = 0\}$$

dort sogar orthogonal. Definiert man jetzt den *Rückkehr-Zeitpunkt* $\tau = \tau(x)$ als kleinste positive Zeit mit

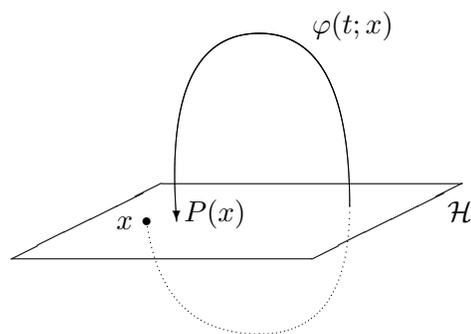
$$\varphi(\tau(x); x) = y(\tau(x)) \in \mathcal{H}, \quad f(x)^\top y'(\tau(x)) > 0,$$

bekommt man mit $\tau(x)$ selbst dann eine gute Schätzung für T , wenn x nicht exakt auf dem geschlossenen Orbit liegt. Die Zusatzbedingung $f^\top y' > 0$ stellt

dabei sicher, dass \mathcal{H} in der Richtung von $y'(0)$ durchquert wird. Man kann zeigen, dass die Rückkehrzeit $\tau(x)$ bei glattem f in einer Umgebung dieses Orbits sogar eine stetig diffbare Funktion von x ist. Die auf (einer Umgebung auf) \mathcal{H} definierte *Poincaré-Abbildung*

$$P : x \mapsto \varphi(\tau(x); x) \in \mathcal{H}$$

stellt damit die direkte Verbindung zwischen $x \in \mathcal{H}$ und dem nächsten *Rückkehrpunkt* $\varphi(\tau(x); x)$ her. Diese Abbildung P entspricht jetzt einem diskreten dynamischen System und ein periodi-



schers Orbit von φ liegt dann vor, wenn $x = P(x)$ ein *Fixpunkt* von P ist. Daher sind bei P die Methoden aus §?? einsetzbar.

Im zweidimensionalen Phasenraum können nur Gleichgewichtspunkte und zusammenhängende Orbits (periodisch, homoklin, heteroklin) als ω -Limesmengen bzw. Attraktoren auftreten (*Satz von Poincaré-Bendixson*). Bei höherdimensionalen Systemen gibt es dagegen eine größere Vielfalt, zwei werden kurz angesprochen.

- *Quasiperiodische* Lösungen können bei schwacher Kopplung von (≥ 2) schwingenden Systemen unterschiedlicher Frequenz auftreten. Diese Lösungen $y(t)$ besitzen gleichzeitig verschiedene Perioden. Mit positiven "Frequenzen" $\omega_1, \omega_2, \dots$, welche rational unabhängig sind (keine ganzzahlige Linearkombination ist null), gilt dabei eine Darstellung

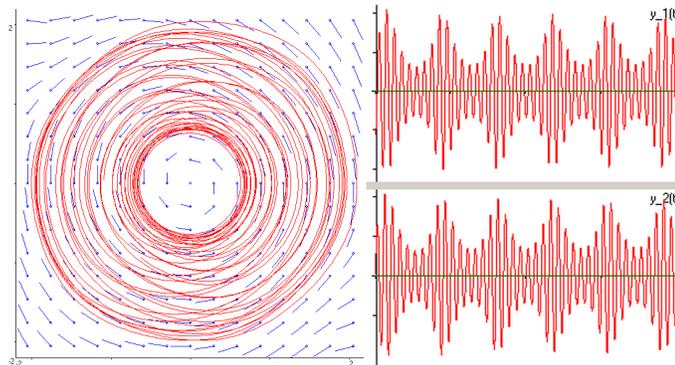
$$y(t) = w(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei $w(s_1, s_2, \dots)$ in jeder Variablen 2π -periodisch ist. Im Phasenraum ist die ω -Limesmenge ein invarianter *Torus*. Ein einfaches Beispiel in Dimension $n = 3$ besteht aus einem beschleunigten mathematischen Pendel (Kuznetsov/Stankevich)

$$\begin{aligned} x'' &= (z + x^2 - \frac{1}{2}x^4)x' - \omega^2 x, \\ z' &= \mu - x^2. \end{aligned}$$

Die Zusatzvariable $z(t)$ integriert die Abweichung $\mu - x^2(t)$ und bewirkt zusammen mit dem nichtlinearen Term $x^2(1 - \frac{1}{2}x^2)$ abwechselnd eine Anregung oder Dämpfung des Pendels.

Lösungen ändern hier in regelmäßiger Abfolge ihre Amplitude, der Attraktor ist ein zweidimensionaler Torus (Fahrrad-schlauch). Das Bild zeigt links eine Bahn in der (x, x') -Ebene und rechts den Verlauf der Komponenten $x(t), x'(t)$.



- Allgemeinere Attraktoren: in höheren Dimensionen können sehr unregelmäßig geformte invariante Mengen auftreten, sehr bekannt ist etwa der Lorenz-Attraktor mit nicht-ganzzahliger Dimension. Ein einfacheres System mit einem ähnlich komplexen Attraktor ist das Rössler-System,

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 - y_3 \\ y_3' &= \alpha + (y_2 - \beta)y_3, \end{aligned}$$

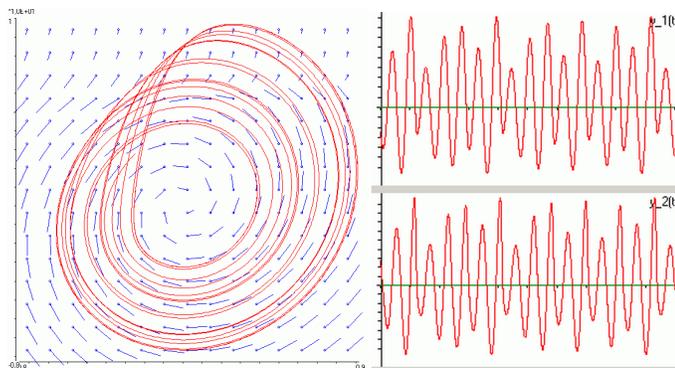
dessen Funktionsweise sich auch leichter erklären läßt. Der Parameter $\alpha > 0$ ist klein ($\alpha = 1/5$), aber β recht groß. Für kleine Werte von y_2 wird $y_3 \geq 0$ durch die 3. Dgl auch

klein gehalten ($\partial f_3/\partial y_3 < 0$). Die beiden ersten Gleichungen erzeugen daher nahe der (y_1, y_2) -Ebene zunächst einen instabilen Strudel mit spiralförmig wachsenden Amplituden. Wenn y_2 dann den Wert β überschreitet, wächst y_3 schlagartig an, und die Kurve steigt aus der Ebene nach oben. Zur Interpretation des weiteren Verhaltens muß man wieder die Gleichgewichte betrachten. Für diese gilt $\hat{y}_2 = -\alpha\hat{y}_1$, $\hat{y}_3 = -\hat{y}_1$ und $\alpha\hat{y}_1^2 + \beta\hat{y}_1 + \alpha = 0$. Nur der betragskleinere Ruhezpunkt ist wichtig, er ist $\hat{y}^T \doteq (-\alpha, \alpha^2, \alpha)/\beta$. Die Ableitungsmatrix dort ist

$$A = f'(\hat{y}) \doteq \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \hat{y}_3 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte bestehen zunächst aus einem instabilen komplexen Paar $\lambda_{1/2} \doteq \alpha/2 \pm \mathbf{i}$, der zugehörige Eigenraum liegt sehr nahe an der (y_1, y_2) -Ebene. Der dritte EW $\lambda_3 \doteq -2\beta$ ist stark negativ mit einem Eigenvektor $x^{(3)} \doteq (-1/(4\beta^2), 1/(2\beta), 1)$ der fast senkrecht auf der (y_1, y_2) -Ebene steht. Das Gleichgewicht ist also ein *Sattelpunkt* mit einer für große $\beta \geq 5$ sehr stark anziehenden Richtung $U_3 = \text{span } x^{(3)} \cong \text{span } e^{(3)}$.

Wenn sich also die Bahn wie beschrieben aus der (y_1, y_2) -Ebene nach oben bewegt hat, wird sie in der Nähe von U_3 wieder eingefangen und zum Sattelpunkt zurückgezogen. Das Ergebnis sind Schwingungen mit sehr unregelmäßig schwankender Amplitude.



2.6 Verzweigungen

Mit dem Studium der Dynamik kann man weitgehende Aussagen über das Verhalten dynamischer Systeme treffen, ohne (viele) einzelne Lösungen im Detail berechnen zu müssen. In den Beispielen 2.5.5, 2.5.7, etc. wurde aber auch klar, dass sich diese Dynamik bei Änderung von Parametern in der Dgl grundlegend ändern kann. Man spricht dann von einer *Verzweigung* oder *Bifurkation*. Wenn man diejenigen Parameterwerte identifiziert, bei denen ein solcher Wechsel stattfindet, bekommt man eine Charakterisierung auf einer weiteren, übergeordneten Ebene. Bei Modellen aus der Praxis kann das u.a. dazu dienen, den Parameterbereich zu charakterisieren, in dem ein gewünschtes Verhalten auftritt (stabiles Gleichgewicht, Oszillation, etc.).

In diesem Abschnitt werden die Kriterien für verschiedene Arten von Verzweigungen hergeleitet, man betrachtet dazu die von einem Parameter $\beta \in \mathbb{R}$ abhängige autonome Differentialgleichung

$$y' = f(y, \beta), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.6.1)$$

Beim Anfangswertproblem kann auch der Startwert von β abhängen: $y(0) = x(\beta)$. Der Startwert wird im Folgenden aber eine untergeordnete Rolle spielen. Die rechte Seite $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Dgl sei sowohl nach x und β (mindestens einmal) stetig differenzierbar. Bei Änderung des Parameters β können an bestimmten Verzweigungspunkten β_0, β_1, \dots grundlegende Änderungen bei (2.6.1) auftreten, etwa:

1. Gleichgewichtspunkte $\hat{y}(\beta)$ entstehen, verschwinden oder kreuzen sich,
2. Änderung der Dynamik bei einem Gleichgewicht (Vorzeichen der EW-Realteile)
3. Entstehung/Verschwinden von periodischen Orbits oder anderer invarianter Mengen bzw. Attraktoren.

Hier können aber nur die beiden ersten Fälle behandelt werden.

Sattel-Knoten-Verzweigung

Wie bisher sind Gleichgewichtspunkte durch Nullstellen der rechten Seite charakterisiert,

$$f(\hat{y}, \beta) = 0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.6.2)$$

Da jetzt aber der zusätzliche Parameter β auftritt, ist dies ein nichtlineares Gleichungssystem mit nur n Bedingungen für $n + 1$ Unbekannte (\hat{y}, β) . Daher kann man davon ausgehen, dass die Lösungsmenge aus mehr als einzelnen Punkten besteht. Nimmt man vorläufig an, dass $\hat{y} = \hat{y}(\beta)$ eine glatte Funktion von β ist, bekommt man aus (2.6.2) durch Differentiation nach β :

$$0 \equiv f(\hat{y}(\beta), \beta) \Rightarrow 0 \equiv f_y(\hat{y}(\beta), \beta) \frac{d\hat{y}}{d\beta} + f_\beta(\hat{y}(\beta), \beta). \quad (2.6.3)$$

Wenn hier die Jacobimatrix regulär ist, $\det f_y(\hat{y}(\beta), \beta) \neq 0$, folgt daraus

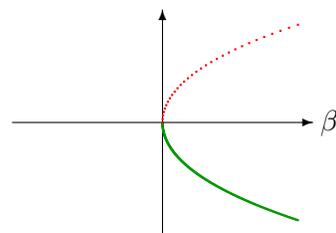
$$\frac{d\hat{y}}{d\beta} = -(f_y(\hat{y}, \beta))^{-1} f_\beta(\hat{y}, \beta).$$

Dies ist jetzt wieder eine gewöhnliche Dgl für den Gleichgewichtspunkt, auf die der Existenzsatz 2.1.2 anwendbar ist, sofern ein Startpunkt mit $f(\hat{y}_0, \beta_0) = 0$ existiert und Regularität gilt. Allerdings ist der Ansatz $\hat{y}(\beta)$ zu einschränkend, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.6.1 Die skalare Dgl ($n = 1$)

$$y' = y^2 - \beta \quad =: f(y, \beta)$$

hat als Gleichgewichte alle Punkte $\{(y, \beta) : y^2 = \beta\}$ einer Parabel. Insbesondere existieren für $\beta > 0$ zwei Gleichgewichte $\hat{y}_{1/2} = \pm\sqrt{\beta}$, für $\beta = 0$ nur der Nullpunkt und für $\beta < 0$ keines. Für $\beta > 0$ ist in $\hat{y}_{1/2}$ die Ableitung der rechten Seite $f_y(\pm\sqrt{\beta}) = \pm 2\sqrt{\beta}$, also ist das positive Gleichgewicht $\hat{y}_1 = \sqrt{\beta}$ instabil und das negative $\hat{y}_2 = -\sqrt{\beta}$ attraktiv.



Daher ist $\beta_0 = 0$ ein Verzweigungspunkt im Sinne des oben genannten 1. Falls, nur für $\beta \geq \beta_0$ existieren Gleichgewichte (mit unterschiedlicher Stabilität für $\beta > \beta_0$). In der Graphik ist der Verlauf dieser Gleichgewichte $\hat{y}(\beta)$ gezeigt, instabile sind rot gepunktet gezeichnet, attraktive grün durchgezogenen.

Andererseits bildet die Parabel als Menge aller Gleichgewichte im Beispiel ein glatte Kurve, welche allerdings an der Stelle $\beta_0 = 0$ einen *Umkehrpunkt* besitzt. Dieser ist an der Singularität der partiellen Ableitung $f_y(\hat{y}_0, \beta_0) = 0$ erkennbar. Eine neutralere Formulierung vermeidet die Sonderbetrachtung dieses Punktes, denn nach dem Satz über implizite Funktionen gilt

Lemma 2.6.2 Die Funktion f sei stetig diffbar und es gelte $f(\hat{y}_0, \beta_0) = 0$ in $(\hat{y}_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wenn die Ableitungsmatrix

$$Df(\hat{y}_0, \beta_0) := \frac{\partial f}{\partial (y, \beta)}(\hat{y}_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$$

den maximalen Rang n besitzt, dann existiert eine stetig differenzierbare Kurve $(\hat{y}(s), \beta(s))$, die in einer Umgebung von $(\hat{y}_0, \beta_0) = (\hat{y}(0), \beta(0))$ die Lösungsmenge $f^{-1}(0)$ von (2.6.2) beschreibt.

Bemerkung: Die Dgl (2.6.3) verallgemeinert sich für den im Lemma betrachteten Fall zu

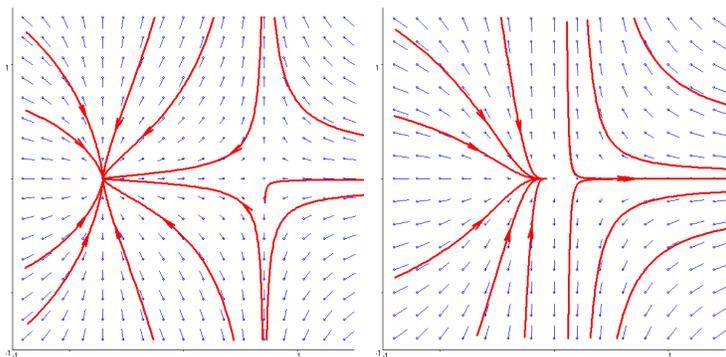
$$0 \equiv \frac{d}{ds} f(y(s), \beta(s)) = f_y(y, \beta) \dot{y} + f_\beta(y, \beta) \dot{\beta} = Df(y(s), \beta(s)) \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix},$$

der besagt, dass der Tangentenvektor an die Kurve im Kern der Matrix Df liegt (mit $\dot{y} = dy/ds$, $\dot{\beta} = d\beta/ds$).

Die Situation beim Umkehrpunkt aus Beispiel 2.6.1 ist ein einfacher Fall einer *Sattel-Knoten-Verzweigung*, zu deren exakten Charakterisierung auch Annahmen an die 2. Ableitung von f gehören. Bei dieser Verzweigung löschen sich zwei Gleichgewichte entgegengesetzter Stabilität aus bzw. entstehen neu. Eine Erklärung für die Begriffswahl findet man bei höheren Dimensionen. Wenn man die Dgl Bsp 2.6.1 um die zusätzliche Dgl $y'_2 = -y_2$ ergänzt, bekommt man für das (entkoppelte) System

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1^2 - \beta, \\ y'_2 &= -y_2, \end{aligned}$$

die Dynamik im linken Bild ($\beta = \frac{1}{2}$). Das linke Gleichgewicht ist attraktiv (*Knoten* bzw. *Senke*), das rechte ist ein Sattelpunkt. Für $\beta \rightarrow 0$ (Bild außen) treffen sich beide, von



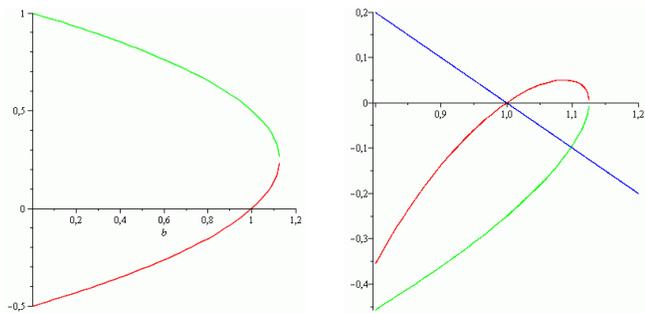
links laufen die Bahnen in den Nullpunkt, rechts davon laufen sie weg. Für $\beta < 0$ sind alle Bahnen streng monoton wachsend in y_1 , da $y'_1 \geq |\beta| > 0$ gilt.

Beispiel 2.6.3 Den Bestand $y(t) \geq 0$ einer nachwachsenden Nutzpflanze (Gras) bei Beweidung durch Tiere (Rinder) kann man durch die Dgl

$$y' = y(1 - y) - \beta \frac{y}{1 + 2y}$$

modellieren. Der erste Anteil $y(1 - y)$ beschreibt das ungestörte Pflanzenwachstum bei beschränkten Ressourcen (logistische Dgl), der Anteil $\beta y/(1 + 2y)$ die Beweidung durch den Bestand β von Weidetieren. Dabei modelliert der Nenner die Begrenzung der Nahrungsaufnahme durch Sättigung. Die Gleichung hat das triviale Gleichgewicht null, und die weiteren $y^\pm(\beta) = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{9 - 8\beta})$, wobei der kleinere Wert nur für $\beta > 1 =: \beta_0$ positiv ist, $y^-(\beta) > 0$. Offensichtlich verschwinden die nichttrivialen Gleichgewichte jenseits des Umkehrpunkts $\beta_1 = 9/8$. Dieser Grenzwert entspricht dem Zusammenbruch des Ökosystems durch Überweidung. Aber auch schon beim ersten Verzweigungspunkt $\beta_0 = 1$ findet ein Stabilitätswechsel statt. Hier kreuzen sich die Gleichgewichte 0 und $y^-(\beta)$ (sog. *transkritische Verzweigung*), die Null ist bis β_0 instabil und y^+ attraktiv (Gras wächst), für $\beta > \beta_0$ wird dagegen auch die Null attraktiv, nur y^- ist bis zum Umkehrpunkt instabil. Daher würde sich das Ökosystem schon für $\beta \in (\beta_0, \beta_1)$ nach einem Zusammenbruch nicht von alleine erholen, ein Grasbestand unter $y^-(\beta)$ wird bis

zum Verschwinden abgeweidet. Das linke Bild zeigt die Gleichgewichte $y^\pm(\beta)$, das rechte den Verlauf der Ableitungen mit $f_y(y^+(\beta)) < 0$, sowie den Vorzeichenwechseln von $f_y(0) = 1 - \beta$ und $f_y(y^-(\beta))$ bei $\beta_0 = 1$.



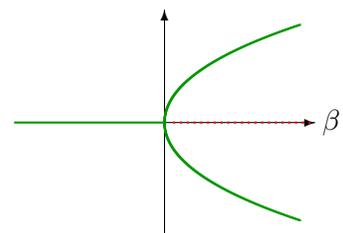
Heugabel-Verzweigung (Pitchfork-Bifurcation)

Bei manchen Modellen gibt es ein "eingebautes" Gleichgewicht, wie etwa die Null bei Wachstumsmodellen $y' = \alpha(y)y$. Bei einer parameterabhängigen rechten Seite können dann aber zusätzliche Gleichgewichte entstehen.

Beispiel 2.6.4 Die Dgl

$$y' = y(\beta - y^2) \quad =: f(y, \beta)$$

besitzt immer das Gleichgewicht $\hat{y}_0 = 0$ und für $\beta > 0$ wieder die zusätzlichen $\hat{y}_{1/2} = \pm\sqrt{\beta}$. Die Ableitungen sind $f_y(0, \beta) = \beta$ und für $\beta > 0$ auch $f_y(y_{1/2}) = \beta - 3y_{1/2}^2 = -2\beta < 0$. Die Graphik zeigt den Verlauf aller Lösungen $\hat{y}(\beta)$, die für $\beta < 0$ stabile triviale Ruhelage wird bei $\beta_0 = 0$ instabil, für $\beta > 0$ sind dann nur noch die nichttrivialen Ruhelagen $\hat{y}_{1/2}$ beobachtbar.



Das Bild sieht aus wie eine Heugabel (Pitchfork) und dies ist der Grund für die Benennung

als *Heugabel-Verzweigung*. Im Unterschied zur Sattel-Knoten-Verzweigung (mit $f(y_0, \beta_0) = 0$, $f_y(y_0, \beta_0) = 0$) ist der Verzweigungspunkt jetzt durch das Verschwinden der beiden ersten Ableitungen charakterisiert, d.h. für $n = 1$ durch die 3 Bedingungen

$$f(y_0, \beta_0) = 0, \quad f_y(y_0, \beta_0) = 0, \quad f_{yy}(y_0, \beta_0) = 0.$$

Ein praktisches Beispiel für eine Heugabel-Verzweigung ist der *Knickstab*. Dabei wird eine vertikale, elastische Säule (Stab) senkrecht von oben mit einer wachsenden Kraft (Gewicht) β belastet. Offensichtlich ist die senkrechte Ruhelage mit Auslenkung $y = 0$ eine Lösung für beliebige $\beta > 0$. Wenn die Kraft allerdings einen gewissen Grenzwert β_0 überschreitet, knickt der Stab zur Seite, die Ruhelage ist nicht länger stabil.

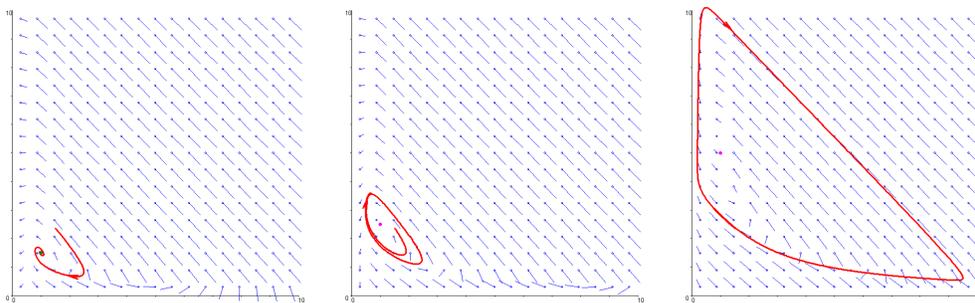
Hopf-Verzweigung

Die oben betrachteten Verzweigungen sind durch die explizite Bedingung $\det f_y(\hat{y}_0, \beta_0) = 0$ charakterisiert. In β_0 ist also die Ableitungsmatrix singular, einer ihrer Eigenwerte wandert durch den Nullpunkt in \mathbb{C} . Bei der *Hopf-Verzweigung* tritt dagegen eine neuartige Situation auf. Hier wandern Eigenwerte von $f_y(\hat{y}_0, \beta_0)$ abseits des Nullpunkts von links nach rechts über die imaginäre Achse (bei reellem f sind das Paare von konjugierten Eigenwerten). In diesem Fall wird aus dem stabilen *Strudel* beim Gleichgewicht $\hat{y}(\beta)$ ein instabiler, der möglicherweise zu einem *Grenzzyklus* führt. Dieser Übergang lag in dem Beispiel 2.5.5 und beim Brusselator Beisp. 2.5.7 vor, er läßt sich allerdings nicht durch eine einfache Bedingung charakterisieren.

Beispiel 2.6.5 Für $\alpha = 1$ ist $\hat{y} = (1, \beta)$ das einzige Gleichgewicht beim Brusselator, Beisp. 2.5.7. Die Eigenwerte der Ableitungsmatrix dort sind

$$\lambda_{1/2}(\beta) = \frac{\beta}{2} - 1 \pm \sqrt{\beta\left(\frac{\beta}{4} - 1\right)}.$$

Wie schon diskutiert wurde, tritt bei $\beta_0 = 1 + \alpha^2 = 2$ eine Hopf-Verzweigung auf, mit rein imaginären Eigenwerten $\lambda_{1/2}(2) = \pm i$. Offensichtlich wird das Eigenwertpaar aber wieder reell für $\beta \geq 4$. Aber auch dann bleibt der Grenzzyklus erhalten. Die Bilderserie zeigt die Dynamik für $\beta = 3/2$ links, $\beta = 5/2$ in der Mitte und $\beta = 5$ rechts jeweils im Quadrat $[0, 10] \times [0, 10]$.



Bei den genannten Verzweigungen hat man also grundlegende Änderungen der sichtbaren Zustände. Bei Überschreiten von Verzweigungspunkten können stabile Gleichgewichte plötzlich

entstehen, oder einfache stabile Zustände (triviale Lösung) sich in komplexere verwandeln. Es kann auch eine Änderung der Dynamik geben, wo an Stelle von stabilen Zuständen plötzlich periodische Bahnen auftreten.

Beispiel-Differentialgleichungen

Physikalisches Pendel	1.1.1, 2.5.3
Nicheindeutigkeit beim AWP	2.1.4
Fundamentalsystem nicht-autonom	2.2.3
Wettrüsten	2.3.1, 2.3.5
Lotka-Volterra, Räuber-Beute	2.4.1, 2.5.11
Epidemie	2.4.2
Gradientensystem	2.4.4
Linear+radial	2.4.6
Spiralen-Gleichung	2.5.5, 2.5.14
Brüsselator	2.5.7
Quasiperiodische Lösungen	S.47
Rössler-System	S.47
Sattel-Knoten-Verzweigung	2.6.1
Ökosystem Weide	2.6.3
Heugabel-Verzweigung	2.6.4

Index

- Ähnlichkeitstransformation, 22, 43
- Äquilibrium, *siehe* Gleichgewicht

- Anfangswertproblem, 11, 12, 31
- Anziehungsbereich, 40
- attraktiv, 10, 16, 24, 29, 34, 35, 40, 41, 49
- Attraktor, 40, 45, 47
- autonom, 8, 9, 12, 17, 21, 29, 31, 43, 44, 48

- Bahn, 1, 4, 7, 30, 36, 38, 42, 45
- Banach-
 - Fixpunktsatz, 4, 12
 - Raum, 12
- Bassin, 35, 37
- Bifurkation, *siehe* Verzweigung
- Brüsselator, 40, 41, 52

- Chaos, 6
- Collatz-Folge, 6, 7

- Determinante, 29, 49
- Diagonalmatrix, 23
- Differential-
 - Gleichung, 2, 9, 11
 - Ungleichung, 13, 34
- Diskriminante, 25
- Dynamik, 9

- Eigenwert, 22, 24–27, 29, 36, 37, 40, 41, 43, 52
- Epidemie, 32
- Exponentialfunktion, 21, 22, 24

- Fixpunkt, 4, 10, 47
- Floquet-Multiplikator, 43, 45
- Fluss, 8, 31
- Fundamentalsystem, 17–19, 21, 42, 46
- Funktionalgleichung, 22
 - hyperbolisches, 29, 32, 37
- Gradientensystem, 34
- Grenzyklus, 40, 41, 52
- Gronwall-Lemma, 13, 15, 17, 35
- Gruppe, 7, 22

- Höhenlinie, 4, 44
- Hölder-Norm, 9
- Halborbit, 36

- instabil, 10
- Integralgleichung, 12
- invariant, 36, 38, 39, 42
 - negativ, 36
 - positiv, 36
- Isokline, 31
- Iteration, 4, 8

- Jordan-Normalform, 22–24

- Knickstab, 52
- kommutierend, 22
- kontraktiv, 5
- Kugel, 10

- Limesmenge, 39–41, 47
- Lipschitz-Bedingung, 12, 14–16
 - einseitige, 15, 16, 19, 34
- Logarithmische Norm, 19, 25
- Lotka-Volterra, 32, 44
- Lyapunov-
 - Funktion, 34, 35, 37
 - stabil, 42
- Mannigfaltigkeit
 - instabile, 38
 - stabile, 37
- Monodromie-Matrix, 43, 45, 46
- nilzyklisch, 23
- Nullkline, 31–33, 36

- Nullstelle, 10, 31, 49
- Orbit, 7, 45
 - heteroklin, 38
 - homoklin, 38
 - periodisch, 42
- Pendel, 2, 38, 44, 47
- periodisch, 3, 38, 40, 42
- Phasenraum, 1
- Phasenverschiebung, 45
- Poincaré-
 - Abbildung, 46
 - Schnitt, 9, 46
- quasiperiodisch, 47
- Quelle, 27
- Rückkehrpunkt, 46
- Richtungsfeld, 2, 9, 11, 12
- Sattelpunkt, 27, 29, 30, 32, 37, 38, 48, 50
- Senke, 27, 29, 50
- Spektralabszisse, 24, 25, 35
- stabil, 10
 - asymptotisch -, 10, 42, 45
 - Lyapunov-, 42
 - orbital-, 45
- Stroboskop-Abbildung, 9
- Strudel, 26, 40, 48, 52
- tangential, 37
- Teilfolge, 5
- Torus, 47
- Trajektorie, *siehe* Bahni
- Umkehrpunkt, 50, 51
- Unterraum
 - instabiler, 30
 - invarianter, 24, 30
 - stabiler, 30, 37, 38
- Variaton der Konstanten, 19
- Verzweigung, 6, 41, 48
 - Heugabel-, 52
 - Hopf-, 52
 - Sattel-Knoten-, 50
 - transkristische, 51
- Wettrüsten, 21, 29
- Wirbelzentrum, 26, 40
- Wronski-Determinante, 18
- Zustandsraum, 7
- Zyklus, 6