

# Lineare Optimierung

Bernhard Schmitt

Winter-Semester 2004

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Optimierungs-Probleme</b>	<b>1</b>
1.1	Strukturen . . . . .	1
1.2	Beispiele . . . . .	3
	Produktionsplanung . . . . .	3
	Transportprobleme . . . . .	4
	Das Problem des Handlungsreisenden (TSP) . . . . .	5
1.3	Lineare Programme . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Konvexe Geometrie</b>	<b>9</b>
2.1	Bezeichnungen . . . . .	9
2.2	Konvexe Mengen . . . . .	11
2.3	Randflächen und Ecken . . . . .	15
2.4	Polyeder, Polytope, Kegel . . . . .	17
2.5	Der Dekompositionssatz für Polyeder . . . . .	21
2.6	Existenzsätze für Ungleichungssysteme . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Duale Programme</b>	<b>24</b>
3.1	Optimalitätskriterien . . . . .	24
3.2	Komplementarität, Schattenpreise . . . . .	26

<b>4 Simplex – Verfahren</b>	<b>30</b>
4.1 Matrix – Umformungen . . . . .	30
4.2 Ecken und Nachbarn . . . . .	34
4.3 Das revidierte Simplex-Verfahren . . . . .	38
4.4 Tabellenform des Simplex-Verfahrens . . . . .	40
4.5 Anlaufrechnung . . . . .	42
Zwei-Phasen-Methode . . . . .	42
Groß-M-Methode . . . . .	43
4.6 Ausgeartete Ecken und praktische Aspekte . . . . .	45
<b>5 Dualität beim Simplexverfahren</b>	<b>46</b>
5.1 Duales Simplexverfahren . . . . .	46
5.2 Problem-Modifikationen . . . . .	49
<b>6 Spezielle Strukturen und Anwendungen</b>	<b>53</b>
6.1 Dekompositionsverfahren . . . . .	53
6.2 Transportprobleme in Graphen . . . . .	56
<b>A Symbole, Abkürzungen</b>	<b>64</b>
<b>Index</b>	<b>65</b>

# 1 Optimierungs-Probleme

## 1.1 Strukturen

Eine präzise Vorstellung für die 'Optimierung' einer Eigenschaft erfordert, dass man deren Qualität  $F$  quantitativ (als reelle Zahl) beschreiben kann und dass man sich über Einflußgrößen  $x$  dieser Qualität im Klaren ist. Dann kann man die in Frage kommenden Werte der Parameter  $x$  zu einer Menge  $X$  zusammenfassen und das Qualitätsmaß  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine reelle Funktion auf  $X$ . In der *Optimierungsaufgabe*

$$\max\{F(x) : x \in X\} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} \max F(x) \\ x \in X \end{cases} \quad (\text{P})$$

wird eine Maximalstelle  $\hat{x} \in X$  gesucht mit  $F(\hat{x}) \geq F(x) \forall x \in X$ .

*Bezeichnung:*  $F$  heißt *Zielfunktion*,  $X$  *zulässiger Bereich*, jedes  $x \in X$  *zulässiger Vektor bzw. Element*,  $\hat{x}$  eine (*globale*) *Lösung* von (P) und  $F(\hat{x})$  der *Wert* von (P).

Ein wesentlicher Teil der Problematik besteht meist darin, dass zwar die Zielfunktion  $F$  explizit vorliegt, der zulässige Bereich  $X$  aber nur implizit gegeben ist, etwa durch Systeme von Gleichungen oder Ungleichungen. Daher zerfällt schon die Grundaufgabe (P) in mehrere Teile:

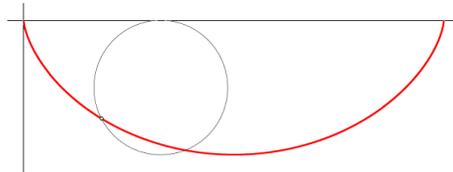
1. Frage  $X = \emptyset$ ?
2. für  $X \neq \emptyset$ :
  - (a)  $F(x)$  beschränkt auf  $X$ , d.h.  $\sup\{F(x) : x \in X\} < \infty$  ?  
Wird dann das Supremum auch angenommen („Maximum“)?
  - (b) Wenn ja: berechne ein  $\hat{x} \in X$  mit  $F(\hat{x}) \geq F(x) \forall x \in X$ .

Die einsetzbaren Methoden unterscheiden sich auch nach der Art und Anzahl der „Freiheitsgrade“, die in der Menge  $X$  zu berücksichtigen sind.

**Beispiel 1.1.1** a) Problem der *Brachistochrone* von Galilei.

*Ein Körper soll nur durch den Einfluß der Schwerkraft zwischen zwei Punkten bewegt werden. Gesucht ist die Kurve, auf der der Körper am schnellsten vom höheren zum niederen Punkt kommt.*

Johann Bernoulli: Lösung ist Zykloide



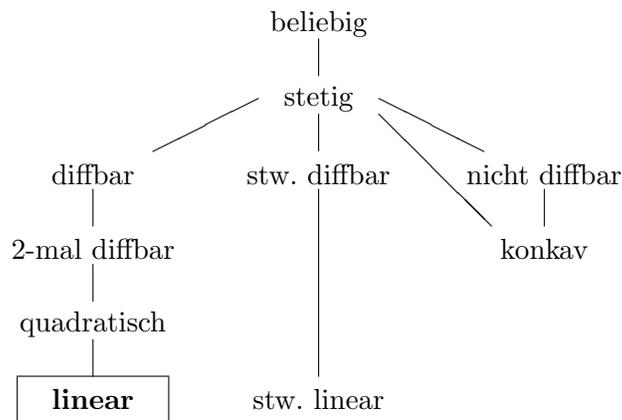
b) Transportproblem: *Ein Unternehmen mit mehreren Produktionsstandorten beliefert verschiedene Abnehmer mit seinen Produkten (Massen-/Stückgut). Gesucht ist ein Transportplan mit möglichst geringen Kosten*

Einordnung der Beispiele: Da die Weghöhe beim Brachistochronen-Problem an jeder Stelle unbekannt ist, hat man eine *unendliche Anzahl an Freiheitsgraden* (überabzählbar). Zur korrekten

Beschreibung wäre die Menge  $X$  als ein Raum geeigneter Funktionen  $x(s)$ ,  $s \in [a, b]$ , zu wählen. Derartige Probleme werden in der Variationsrechnung und Steuerungstheorie behandelt. Beim Transportproblem sind dagegen die endlich vielen, vom Produktionsort  $P_i$  zum Kunden  $K_j$  zu liefernden Mengen unbekannt. Bei Massengütern können diese (nichtnegative) reelle Werte, bei Stückgütern ganzzahlige Werte annehmen. Die Grundmenge  $X$  ist also (ein Teil) eines geeigneten  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ . In dieser Vorlesung wird nur der Fall  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  behandelt.

Eine weitere Klassifikation des Problems ergibt sich aus den

Eigenschaften der Zielfunktion  $F$ :



Die Gestalt des *zulässigen Bereichs*  $X$  ist in der Regel nicht explizit bekannt, sondern durch Einschränkungen an die Parameter  $x$ . Die Art dieser *Nebenbedingungen* schränkt die Auswahl möglicher Verfahren ein. Daher ist es zweckmäßig, die Nebenbedingungen aufzuteilen in funktionale und mengenmäßige. Ab jetzt sei also

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0, g(x) = 0, x \in C\}, \quad (1.1.1)$$

mit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Generell werden Ungleichung wie in dieser Beschreibung komponentenweise verstanden,  $f_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , für  $f = (f_i)_{i=1}^p$ . Auch die Eigenschaften der Funktionen  $f$  führen zu einer weiteren Klassifizierung von Optimierungsproblemen. Als Grundmengen  $C$  treten oft folgende Fälle auf

- $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  die Nichtnegativität ließe sich auch bei  $f$  unterbringen
- $B_r(y)$  Kugel um  $y$  vom Radius  $r$ , allgemeiner: Ellipsoid
- $\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$  ganzzahlige, gemischt-ganzzahlige Probleme,
- $\mathbb{B}^n = \{0, 1\}^n$  boolesche Optimierungsprobleme.

In dieser Vorlesung werden nur *Lineare Programme* (LP) behandelt, das sind *kontinuierliche Optimierungsprobleme* ( $C = \mathbb{R}^n$ ) mit Funktionen

$$F(x) = c^T x + d, \quad f_i, g_j \text{ affin linear.}$$

Bei einer (in der Praxis üblichen) großen Anzahl von Unbekannten  $n$  ist oft eine Sonderbehandlung bei speziellen Strukturen sinnvoll, etwa bei linearen *Transport-* oder *Fluß-Problemen*. Verfahren zur Behandlung von Optimierungsproblemen haben offensichtlich im Unternehmensbereich (Kostenminimierung) eine erhebliche ökonomische Bedeutung. Aber auch in theoretischer Hinsicht (Komplexitätstheorie) sind sie eine große Herausforderung. Naheliegende Fragestellungen sind:

Theorie:

- Allgemeine, z.B. Struktur-Aussagen
- Existenz und Eindeutigkeit
- Kriterien für Optimalität
- Empfindlichkeit der Lösungen (Problem-Stabilität)
- Komplexität des Problems

Praxis:

- Algorithmenentwicklung
- Empfindlichkeit der berechneten Lösung (Stabilität des Algorithmus)
- Komplexität des Algorithmus

In die erste Kategorie fallen bei Linearen Programmen Erkenntnisse zur Geometrie des zulässigen Bereichs  $X$ . Diese hat zentrale Bedeutung, denn  $X$  ist ein konvexer Polyeder (Vielflächner). Daher werden in §2 zunächst die Grundlagen der Konvexen Geometrie behandelt.

## 1.2 Beispiele

### Produktionsplanung

In einem Unternehmen können  $n$  verschiedene Produkte  $P_j$  erzeugt werden unter Nutzung  $m$  unterschiedlicher Ressourcen  $R_i$  (Arbeitszeit, Rohstoffe, Energie, ...). Der Gewinn bei Produktion einer Einheit von Produkt  $P_j$  sei  $c_j$ .

Die zu erzeugende Menge des Produkts  $P_j$  wird als Unbekannte  $x_j$  eingeführt. Eine erste Nebenbedingung ist offensichtlich  $x_j \geq 0$ , der erzielte Gewinn ist  $\sum_{j=1}^n c_j x_j = F(x_1, \dots, x_n)$  und stellt die *Zielfunktion* des Problems dar. Nimmt man weiter an, dass zur Produktion von  $P_j$  jeweils  $a_{ij}$  Einheiten von beschränkten Ressourcen  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , verwendet werden, sind ausserdem die Restriktionen

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

einzuhalten. Insgesamt lautet das Problem somit

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_i & \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Hier bietet sich die Vektor-/Matrix-Notation für eine kompaktere Schreibweise an. Mit  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ ,  $c := (c_1, \dots, c_n)^\top$ ,  $b = (b_1, \dots, b_m)^\top$ ,  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$  ist  $F(x) = c^\top x$  und man hat die äquivalente Formulierung

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Die Ungleichungen bei Vektoren sind dabei wieder komponentenweise zu verstehen. Da alle Restriktionen Ungleichungen sind, ist der zulässige Bereich  $X := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ .

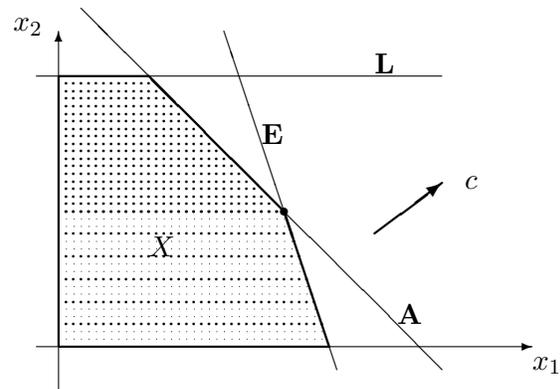
**Beispiel 1.2.1** Fall  $n = 2$ ,  $m = 3$ , die Produkte  $P_1$  (Gewinn  $c_1 = 4$  EUR) und  $P_2$  (Gewinn  $c_2 = 3$  EUR) sollen mit Hilfe der Ressourcen **A**rbeitszeit, **E**nergie, **L**agerkapazität produziert werden. Die Einschränkungen seien

$$\begin{aligned} \mathbf{A}: \quad & x_1 + x_2 = 16 \quad (\text{gleicher Arbeitsaufwand}) \\ \mathbf{L}: \quad & x_2 \leq 12 \quad (\text{Rohstoffe nur für } P_2 \text{ zu lagern}) \\ \mathbf{E}: \quad & 3x_1 + x_2 \leq 36 \quad (3\text{-facher Energiebedarf } P_1) \end{aligned}$$

Gesamtformulierung und zulässiger Bereich:

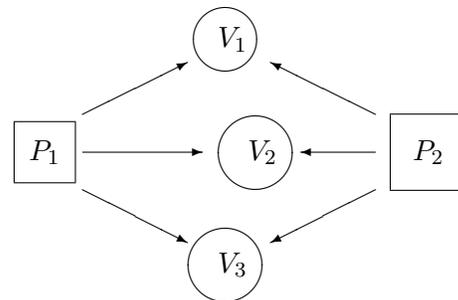
$$\begin{aligned} \max \quad & (4, 3)x \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x & \leq \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Der Pfeil  $c$  ist der (konstante!) Gradient der Zielfunktion  $F(x) = c^\top x = 4x_1 + 3x_2$ , das Maximum wird im markierten **Randpunkt**  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (10, 6)$  angenommen mit dem Wert  $F(\hat{x}) = 58$ .



## Transportprobleme

Hier soll ein Massengut (beliebig teilbar) von  $m$  Produktions-/Lagerstätten  $P_i$  mit Kapazität  $s_i$  zu  $n$  Verbrauchern  $V_j$  mit Bedarf  $r_j$  transportiert werden. Die Gesamtmenge bei Produktion und Verbrauch sollen dabei gleich sein  $\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n r_j$  (oBdA).



Als Unbekannte werden die von  $P_i$  nach  $V_j$  transportierten Mengen  $x_{ij} \geq 0$  eingeführt, der Transport einer Einheit auf dieser Strecke habe den Preis  $c_{ij}$ . Für den optimalen *Transportplan*,

der minimale Kosten verursacht, ergibt sich das Programm

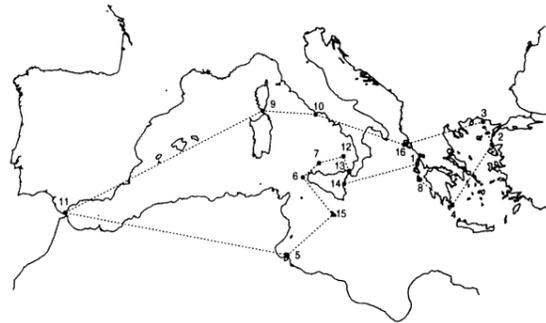
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = r_j, \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \end{aligned}$$

Die Restriktionen sind hier einerseits lineare Gleichungen, andererseits Nichtnegativitäts-Bedingungen an alle Variable. Zum LGS gehört ein affin-linearer Lösungsraum und der zulässige Bereich  $X$  ist daher der Durchschnitt dieses Lösungsraums mit  $\mathbb{R}_+^{mn}$ . Diese Struktur wird bei dem Standard-Lösungsverfahren zugrunde gelegt. Wenn der Transport von Stückgut betrachtet wird, sind nur ganzzahlige Werte  $x_{ij} \in \mathbb{Z}_+$  zulässig. Dann liegt ein ganzzahliges Optimierungsproblem vor.

*Modifikation:* Transport in Netzwerk (Graph), wenn nur ein Teil der Transportstrecken vorhanden ist. Hierbei können reine Umschlagknoten (ohne Produktion und Verbrauch) auftreten.

### Das Problem des Handlungsreisenden (TSP)

Dieses Problem ('traveling salesman problem') hat in der Komplexitätstheorie die Bedeutung eines (sehr schweren) Referenz-Problems. In der Grundform soll ein Reisender eine Anzahl von  $n$  Orten je einmal besuchen und zum Ausgangspunkt zurückkehren. Ziel ist eine Tour mit minimaler Gesamtstrecke. Dies ist also die moderne Form der klassischen *Odyssee* (rechts: eine optimale Lösung derselben).



Dazu sei  $N = \{1, \dots, n\}$  die Menge der Orte und  $w_{ij} \geq 0$  die Entfernung von  $i$  und  $j$ . Ist die Rundreise (*Tour*) gegeben durch die Liste  $(p(1), \dots, p(n))$  der besuchten Orte, so können in der Gesamtstrecke  $\sum_{j=1}^{n-1} w_{p(j)p(j+1)} + w_{p(n)p(1)}$  die Summanden  $w$  offensichtlich nach dem ersten Index umsortiert werden. Im zweiten Index steht dann eine *zyklische Permutation*  $\pi \in S_n$  mit  $\pi(p(j)) = p(j+1)$ . Die Menge der zyklischen  $n$ -Permutationen  $S_{z,n} \subseteq S_n$  enthält alle diejenigen, welche aus einem einzigen Zyklus bestehen. Das Problem lautet daher

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n w_{i,\pi(i)} : \pi \in S_{z,n} \right\} \quad (\text{TSP})$$

In der allgemeinen Form sind die Entfernungsangaben  $w_{ij} \geq 0$  nicht weiter eingeschränkt. Sinnvolle Spezialfälle sind aber offensichtlich das

symmetrische TSP:  $w_{ij} = w_{ji}$  (z.B., keine Einbahnstraßen)

euklidische TSP:  $w_{ij} \leq w_{ik} + w_{kj} \forall i, j, k$  (Gültigkeit der Dreieckungleichung)

In der Form (TSP) liegt ein kombinatorisches Optimierungsproblem vor. Wegen  $|S_{z,n}| = (n-1)!$  ist eine reine Enumeration aller Möglichkeiten zur Lösung nur für kleine  $n$  möglich, denn, z.B., ist  $5! = 120$ ,  $10! = 368800$ ,  $25! = 16 \cdot 10^{25}$ . Der z.Z. schnellste Rechner (Earth Simulator mit 35 TeraFLOPS) packt  $10^{21}$  Operationen im Jahr.

Eine alternative Formulierung als (LP) ist möglich durch Betrachtung des charakteristischen Vektors  $x = (x_{ij}) \in \mathbb{B}^k$ ,  $k = n(n-1)$  beim allgemeinen und  $k = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$  beim symmetrischen Problem. Beim symmetrischen Problem haben die Variablen  $x_{ij}$ ,  $i < j$ , folgende Bedeutung

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{der Weg zwischen } i \text{ und } j \text{ wird benutzt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit sich eine Tour ergibt, müssen zu jedem Ort genau zwei Wege benutzt werden, also

$$\sum_{j<i} x_{ji} + \sum_{j>i} x_{ij} = 2 \quad \forall 1 \leq i \leq n. \quad (1.2.1)$$

Allerdings sind dadurch Teiltouren noch nicht ausgeschlossen. Zusätzlich kann man dazu fordern, dass in keiner echten Teilmenge  $U \subseteq N$  ein Kreis auftritt,  $\sum_{i,j \in U} x_{ij} \leq |U| - 1$ , bzw. die Menge wieder verlassen wird

$$\sum_{i \in U, j \notin U} x_{ij} \geq 2 \quad \forall U \subset N, 2 \leq |U| \leq n-2. \quad (1.2.2)$$

Diese Formulierung des (TSP) ist damit

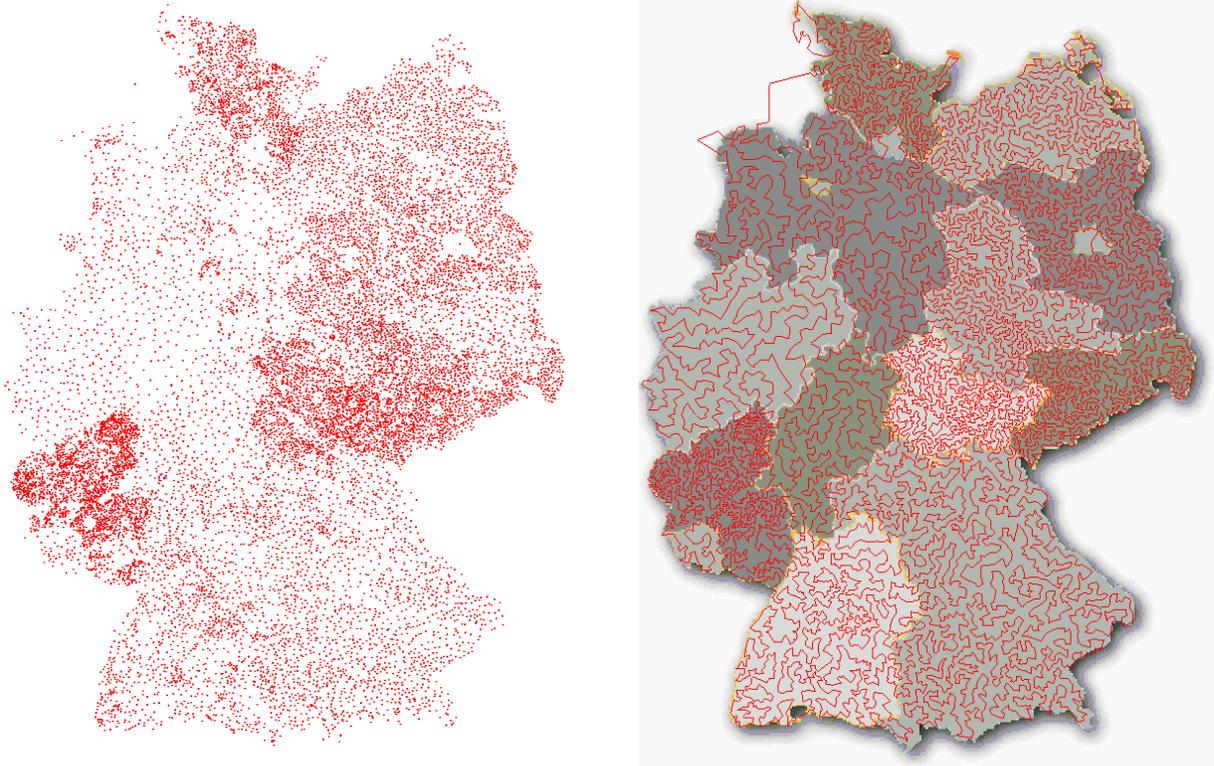
$$\begin{aligned} & \min \sum_{i,j=1}^n w_{ij} x_{ij} \\ & x \in X := \{x \in \mathbb{B}^{\binom{n}{2}} : (1.2.1), (1.2.2) \text{ gelten} \} \end{aligned} \quad (\text{TSPB})$$

(TSPB) ist ein boolesches lineares Programm mit  $n$  Gleichungen und  $\sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k} = 2^n - 2n - 2$  Ungleichungen. Wegen dieser vielen Bedingungen und der booleschen Variablen ist auch diese (und jede) Form des (TSP) schwierig zu lösen.

Daten zur Geschichte des Problems:

1930	Karl Menger	Formulierung des Problems, einzige Lösungsmöglichkeit
1934	Hasler Whitney	vollständige Enumeration
1954	G.B. Dantzig, D.R. Fulkerson, S.M. Johnson	Lösen 42-Städte-Problem mit Schnittebenen-Verfahren und linearen Programmen,
1972	R.M Karp	TSP ist NP-vollständig,
1979	Crowder, Padberg	318 Orte, Branch-and-Cut-Verfahren,
1995	Applegate, Bixby, Chvátal, Cook	7397-Städte-Problem, Parallelrechner
2001	dito	15112 Städte BRD

Der aktuelle Rekord ([www.math.princeton.edu/tsp/](http://www.math.princeton.edu/tsp/), 8 Jahre Rechenzeit) berechnet die optimale Rundreise durch 25000 Städte Schwedens, der Vorgänger-Rekord 2001 betraf 15112 deutsche Städte ([elib.zib.de](http://elib.zib.de)):



Statt des Booleschen Problems (TSPB) kann man auch seine *stetige Relaxation* betrachten, mit dem zulässigen Bereich

$$X_1 := \{x \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} : 0 \leq x \leq \mathbf{1}, \text{ und } (1.2.1), (1.2.2)\} \supset X. \quad (1.2.3)$$

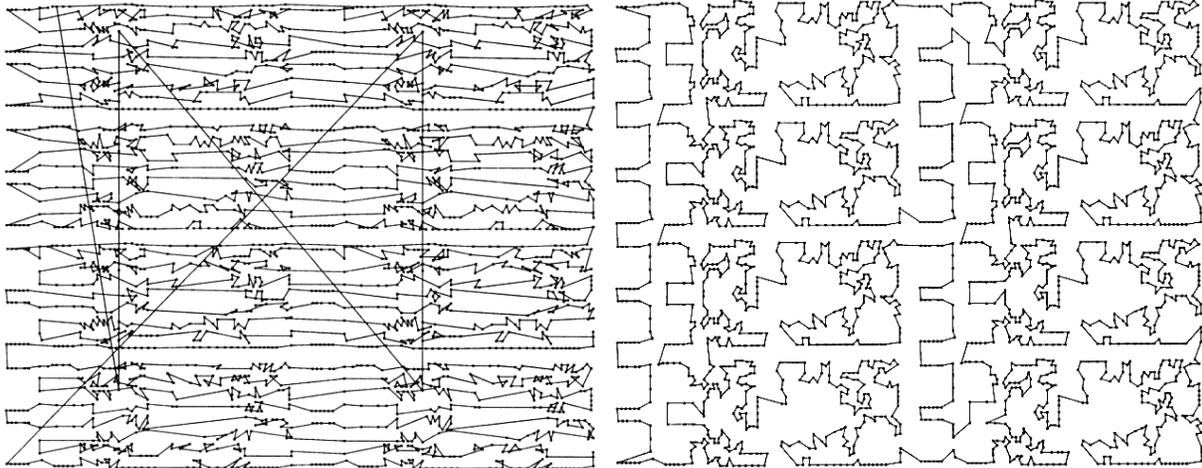
Hieraus erhält man zumindestens eine untere Schranke  $W_1$  für den Wert  $W$  des (TSPB):  $W \geq W_1$ . Bei den erwähnten *Schnittebenen-Verfahren* legt man tatsächlich (1.2.3) zugrunde und eliminiert schrittweise unbrauchbare Lösungen durch Hinzunahme weiterer Nebenbedingungen, die nichtganzzahlige Lösungen *abschneiden*.

*Anwendungen* Viele praktische Fragen führen direkt auf das TSP oder können analog formuliert werden:

- Leiterplatten-Produktion, Computerverdrahtung
- Tourenplanung
- Ablaufplanung (job-shop scheduling)

Zur Bestückung von Platinen mit Bauteilen sind für deren Anschlußdrähte Bohrungen in den Leiterplatten anzubringen. Da die Zeit pro Bohrung konstant ist, wird die Gesamtzeit v.a. durch die Fahrzeit zwischen den Bohrpunkten bestimmt. Unter der Annahme, dass die Fahrzeit proportional zur Entfernung ist, entspricht  $c_{ij}$  dem euklidischen Abstand der Punkte. Die für  $n = 2392$

Punkte per Hand geplante Tour ist um 90% länger als die optimale.



'manuelle' Lösung mit Länge 718876

Optimale Lösung der Länge 378032

### 1.3 Lineare Programme

Für Lineare Optimierungsprobleme hat sich der Begriff *Lineare Programme* eingebürgert. In dem allgemeinen Rahmen der Form (P) mit dem zulässigen Bereich (1.1.1) sind alle auftretenden Funktionen (affin) linear, es gelten also Darstellungen der Form

$$F(x) = c^T x, \quad f_i(x) = a_i^T x + \alpha_i, \quad g_j(x) = b_j^T x + \beta_j,$$

$i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m$ . Dabei wurde  $F$  oBdA als linear angenommen, da eine Konstante zwar den Wert des Problems, aber nicht die Lösung  $\hat{x}$  ändert. In den Beispielen traten Ungleichungsrestriktionen oft in sehr einfacher Form, als Vorzeichenbeschränkungen, auf. Wegen ihrer vielfältigen Sonderrolle werden diese im folgenden gesondert notiert, man teilt die Unbekannten auf in *freie* und *vorzeichenbeschränkte Variable*. Zusammen mit der Aufteilung in Ungleichungen und Gleichungen können die Restriktionen in einer Blockmatrix gesammelt werden. Die allgemeine Form eines linearen Programms lautet daher

$$\left. \begin{array}{l} \max c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1, c_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2, c_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, n = n_1 + n_2, \\ b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, m = m_1 + m_2, \\ A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_j}, i, j = 1, 2. \end{array} \quad (\text{LP})$$

Allerdings kann durch elementare Umformungen daraus jedes der folgenden, einfacheren Standardprogramme erzeugt werden,

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} \quad (\text{LP1})$$

$$\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} \quad (\text{LP2})$$

$$\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\} \quad (\text{LP3})$$

Bei diesen ist in der allgemeinen Form (LP) jeweils nur ein Matrixblock nichttrivial, nämlich  $A_{11} \neq 0$  bei (LP1),  $A_{12} \neq 0$  bei (LP2) und  $A_{22} \neq 0$  bei (LP3). Folgende *elementare Umformungen* können eingesetzt werden, die auf äquivalente Probleme führen:

1. eine Gleichung  $a^\top x = \alpha$  kann durch die beiden Ungleichungen  $a^\top x \leq \alpha$ ,  $-a^\top x \leq -\alpha$  ersetzt werden.
2. eine freie Variable  $\xi$  kann als Differenz  $\xi = \xi^+ - \xi^-$  von zwei nichtnegativen Variablen  $\xi^+, \xi^- \geq 0$  geschrieben werden.
3. Ungleichungen  $a^\top x \leq \alpha$  können durch Einführung einer *Schlupfvariablen*  $\eta \geq 0$  durch die Gleichung  $a^\top x + \eta = \alpha$  ersetzt werden.
4. jede Vorzeichenbeschränkung  $\xi \geq 0$  kann als Ungleichungsrestriktion  $-\xi \leq 0$  einer freien Variablen  $\xi$  nach  $A_{11}$  verlagert werden.

Durch diese Umformungen können sich die Dimensionen  $m, n$  vergrößern, die wesentlichen Eigenschaften aus §1.1 ( $X \neq \emptyset$ ?  $\sup\{F(x) : x \in X\} < \infty$ ?) bleiben aber unverändert. Allerdings unterscheiden sich die geometrischen Eigenschaften der zulässigen Bereiche bei den 3 Standardformen. Dies eröffnet die Möglichkeit, bei verschiedenen Fragestellung die passende zu wählen.

(LP1)  $X = \{x : Ax \leq b\} = \bigcap_{i=1}^m \{(e_i^\top A)x \leq b_i\}$ . Da jede Ungleichung der Form  $a^\top x \leq \beta$  einen abgeschlossenen Halbraum definiert, ist  $X$  als deren Durchschnitt ein *Polyeder*.

(LP2)  $X = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$  ist Durchschnitt des erwähnten Polyeders mit dem *positiven Kegel*  $\{x : x \geq 0\} = \mathbb{R}_+^n$ , also wieder ein *Polyeder*.

(LP3)  $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ , dies ist der Durchschnitt  $\{x : Ax = b\} \cap \mathbb{R}_+^n$  des affinen Unterraums der Lösungen des Gleichungssystems  $Ax = b$  mit dem positiven Kegel.

## 2 Konvexe Geometrie

Da die Zielfunktion der linearen Programme (LP) linear ist, treten Maxima auf dem Rand der zulässigen Bereiche  $X$  auf. Als Hauptaufgabe wird in diesem Kapitel die geometrische Struktur von Polyedern und allgemeineren konvexen Mengen behandelt. Dabei zeigt sich, dass bei der Suche des Maximums in (LP) tatsächlich nur endlich viele Punkte bzw. Richtungen von  $X$  zu prüfen sind.

### 2.1 Bezeichnungen

Es wird der  $n$ -dimensionale Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  zugrundegelegt. Die Vektoren der Einheitsbasis heißen  $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^n$  und es sei  $\mathbb{1} := \sum_{i=1}^n e_i$ . Allgemein werden Elemente  $x \in \mathbb{R}^n$  als *Spaltenvektoren*

geschrieben,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_i)_{i=1}^n.$$

In der Regel wird die Euklidnorm  $\|x\| = \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  verwendet, eine andere interessante Norm ist die Maximumnorm  $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n |x_i|$ . Ungleichungen zwischen Vektoren sind komponentenweise zu verstehen. Eine solche wird in der Definition  $\mathbb{R}_+^n := \{x : x \geq 0\}$  des *positiven Kegels* verwendet (s.o.). Die Menge der reellen  $m \times n$ -Matrizen heißt  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Im folgenden ist es oft wichtig, Untermatrizen aus ausgewählten Spalten oder Zeilen einer Matrix zu betrachten. Zu  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  seien daher  $a_j = Ae_j \in \mathbb{R}^m$  die Spalten und  $a^{(i)} = A^T e_i \in \mathbb{R}^n$  die Zeilen von  $A$ . Dann gelten folgende Schreibweisen

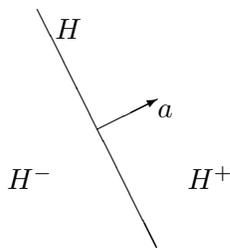
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) = (a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a^{(1)\top} \\ \vdots \\ a^{(m)\top} \end{pmatrix}.$$

Elemente einer Vektorfolge werden ebenfalls durch einen oberen Index unterschieden,  $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})^\top$ .

Die zulässigen Bereiche von (LP\*) lassen sich als Durchschnitte einfacher Gebilde darstellen. Jeder  $(n - 1)$ -dimensionale affine Unterraum  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine *Hyperebene*. Sie kann durch eine einzelne lineare Gleichung charakterisiert werden

$$H = \{x : a^\top(x - y) = 0\} = \{x : a^\top x = \alpha\}, \quad a \neq 0, y \in H, \alpha = a^\top y, \quad (2.1.1)$$

wobei  $a$  der (bis auf Skalierung eindeutige) *Normalenvektor* von  $H$  ist und  $y \in H$  beliebig. Kompaktschreibweise  $H = H(a, y) = H(a, \alpha)$ . Modifikationen der Darstellung  $H(a, \alpha)$  führen auf die *offenen Halbräume*



$$H^+(a, \alpha) := \{x : a^\top x > \alpha\}, \quad H^-(a, \alpha) := \{x : a^\top x < \alpha\}. \quad (2.1.2)$$

Die Zerlegung  $\mathbb{R}^n = H^- \cup H \cup H^+$  ist damit disjunkt. Die entsprechenden *abgeschlossenen Halbräume* sind  $H^\oplus := H^+ \cup H$ ,  $H^\ominus := H^- \cup H$ . Jeder  $r$ -dimensionale affine Unterraum,  $r < n$ , ist Durchschnitt von  $n - r$  Hyperebenen.

Zu einer beliebigen Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $M \neq \emptyset$ , wird die *affine Hülle*  $\text{aff}(M)$  definiert als kleinster affiner Unterraum  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $M \subseteq U$ , also

$$\text{aff}(M) = \bigcap_{U \supseteq M} U \quad (U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ affiner Unterraum}) \quad (2.1.3)$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{(i)} : x^{(i)} \in M, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in \mathbb{N} \right\}. \quad (2.1.4)$$

Außerdem wird die (affine) *Dimension*  $\dim M = \dim \text{aff}(M)$  gesetzt. Umgekehrt ist der größte, bei jeder Verschiebung, in  $M$  'passende' Unterraum der *Linealraum*  $L(M)$  von  $M$ :

$$x + L(M) \subseteq M \quad \forall x \in M. \quad (2.1.5)$$

Für  $0 \in M$  ist offensichtlich  $L(M) \subseteq M$ , für beschränktes  $M$  ist  $L(M) = \{0\}$  trivial.

**Beispiel 2.1.1** Für eine Hyperebene  $H = H(a, \alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \neq 0$ , ist  $\text{aff}(H \cup \{0\}) = \mathbb{R}^n$  und  $L(H) = H(a, 0)$ .

Die beiden Darstellungen (2.1.3, 2.1.4) können als Charakterisierungen der affinen Hülle von 'außen' bzw. 'innen' gesehen werden, wobei die zweite affine Kombinationen von Vektoren verwendet. Da unterschiedliche Arten von Linearkombinationen auch im folgenden auftreten, werden sie gemeinsam eingeführt.

**Definition 2.1.2** Zu Vektoren  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  heißt die *Linearkombination*  $z := \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{(i)}$  mit  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , eine

- konische Kombination für  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,
- positive Kombination für  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,
- affine Kombination für  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ,
- konvexe Kombination für  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .

Die  $k + 1$  Punkte  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  heißen *affin linear unabhängig* bzw. in *allgemeiner Lage*, wenn die  $k$  Differenzen  $x^{(1)} - x^{(0)}, \dots, x^{(k)} - x^{(0)}$  linear unabhängig sind. Andernfalls sind  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$  affin linear abhängig, was äquivalent zur Existenz eines nichttrivialen Tupels  $(\lambda_0, \dots, \lambda_k) \neq 0$  ist mit

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i x^{(i)} = 0. \quad (2.1.6)$$

## 2.2 Konvexe Mengen

**Definition 2.2.1** Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, wenn

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq M \quad \forall x, y \in M.$$

Zu jedem Paar von Punkten  $x, y \in M$  liegt hier die ganze Verbindungsstrecke  $[x, y]$  in  $M$ . Die 'offene' Strecke wird mit  $(x, y) = \{\lambda x + (1 - \lambda)y, 0 < \lambda < 1\}$  bezeichnet (enthält Endpunkte nicht für  $x \neq y$ ). Die Konvexität hat für uns zentrale Bedeutung, vgl. c) im Beispiel.

### Beispiel 2.2.2

- a) Affine Unterräume  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  sind konvex, da mit  $x, y \in U$  sogar  $[x, y] \subseteq \text{aff}(x, y) \subseteq U$  gilt.

- b) Der Durchschnitt  $\bigcap_{i \in I} M_i$  konvexer Mengen  $M_i \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $i \in I$ , ist konvex.  
 c) Halbräume  $H^\pm$ ,  $H^\ominus$ ,  $H^\oplus$  sind konvex. Die Menge der Lösungen

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i \in I\}$$

eines linearen Ungleichungssystems  $Ax \leq b$  ist als Durchschnitt  $\bigcap_{i \in I} H^\ominus(a^{(i)}, b_i)$ , von Halbräumen konvex.

- d) Der *Einheitssimplex*  $\Delta_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbb{1}^\top x = 1, x \geq 0\}$  ist ebenso konvex wie  $\Delta'_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbb{1}^\top x \leq 1, x \geq 0\}$ .  
 e) Streckung und Addition erhalten die Konvexität. Mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  und konvexen Mengen  $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$  sind auch folgende Mengen konvex

$$\begin{aligned} \lambda M &:= \{\lambda x : x \in M\}, \\ M + N &:= \{x + y : x \in M, y \in N\}. \end{aligned}$$

**Definition 2.2.3** Zu  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt die kleinste konvexe Menge, die  $M$  enthält, die konvexe Hülle von  $M$ , bezeichnet mit  $\text{konv}(M)$ .

Offensichtlich gilt für Mengen  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ :  $M$  konvex  $\iff M = \text{konv}(M)$ . Den Zusammenhang zwischen Konvexität und Konvex-Kombinationen präzisieren die folgenden Sätze.

**Satz 2.2.4**  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist genau dann konvex, wenn jede konvexe Kombination von endlich vielen Punkten aus  $M$  wieder in  $M$  liegt. Bew

Spezielle Charakterisierungen der konvexen Hülle von  $M$  sind auch:

- Durchschnitt aller konvexen Obermengen:

$$\text{konv}(M) = \bigcap_{M \subseteq N \subseteq \mathbb{R}^n} N \quad (N \text{ konvex})$$

- Menge aller konvexen Kombinationen von Punkten aus  $M$ :

$$\text{konv}(M) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{(i)} : x^{(i)} \in M, \lambda \in \Delta_k \right\}. \quad (2.2.1)$$

Der Einheitssimplex ist die konvexe Hülle aller Einheitsvektoren  $\Delta_n = \text{konv}(\{e_1, \dots, e_n\})$  und  $\Delta'_n = \text{konv}(\Delta_n \cup \{0\})$ . Dieses Beispiel läßt erwarten, dass in der Darstellung (2.2.1) nur eine Höchstanzahl von Summanden zu betrachten ist. Das bestätigt folgender Satz.

**Satz 2.2.5 (Caratheodory)** Die Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $M \neq \emptyset$ , besitze Dimension  $m$ . Dann kann jeder Punkt  $z \in \text{konv}(M)$  durch höchstens  $m + 1$  Punkte konvex kombiniert werden, d.h., es existieren  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in M$ ,  $k \leq m + 1$ ,  $\lambda \in \Delta_k$  so, dass  $z = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{(i)}$  gilt. Bew

Zum Zusammenspiel von Konvexität und Topologie:

**Satz 2.2.6** Bei einer nichtleeren konvexen Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  sind auch das Innere  $\overset{\circ}{M}$  und der Abschluß  $\bar{M}$  konvex. Bew

Bei der Übertragung topologischer Eigenschaften auf die konvexe Hülle ist Vorsicht angebracht. Die Abgeschlossenheit von  $M$  überträgt sich nur bei beschränkten Mengen auf  $\text{konv}(M)$ .

**Satz 2.2.7** Die Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  sei

$$\left. \begin{array}{l} \text{offen} \\ \text{beschränkt} \\ \text{kompakt} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{konv}(M) \text{ ist } \left\{ \begin{array}{l} \text{offen} \\ \text{beschränkt} \\ \text{kompakt} \end{array} \right.$$

Bew

Zu einem beliebigen Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  gibt es in einer nichtleeren konvexen, abgeschlossenen Menge  $M$  einen *eindeutigen*, nächstgelegenen Punkt. Denn bei festem  $x$  ist  $f_x(y) := \|y - x\|^2$  eine stetige Funktion, und muß mit einem beliebigen  $y_0 \in M$  nur auf der Kugel  $B_r(x)$ ,  $r^2 = f_x(y_0)$ , bzw. der kompakten Menge  $M \cap B_r(x)$  betrachtet werden. Dieses Minimum ist eindeutig aufgrund der Parallelogrammgleichung

$$\left\| \frac{y+z}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \|y\|^2 + \frac{1}{2} \|z\|^2 - \frac{1}{4} \|y-z\|^2. \quad (2.2.2)$$

Bei zwei Minimalstellen  $y \neq z$  wäre  $f_x$  in  $u := (y+z)/2$  echt kleiner:  $f_x(u) < f_x(y) = f_x(z)$ . Dies zeigt den

**Satz 2.2.8** Die Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $M \neq \emptyset$ , sei konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu jedem  $x \in \mathbb{R}^n$  einen *eindeutigen*, nächstgelegenen Punkt

$$\hat{y} \in M : \hat{y} = \arg \min \{ f_x(y) : y \in M \}.$$

Die Zuordnung  $p_M : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ ,  $x \mapsto \hat{y}$  wird die Projektion auf  $M$  genannt.

Fixpunkte dieser Projektion  $p_M(x) = x$  sind genau die Punkte  $x \in M$ , daher ist die Abbildung  $p_M$  auch *idempotent*,  $p_M \circ p_M = p_M$ . Bei einem affinen Unterraum  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $p_U$  die orthogonale Projektion auf  $U$ , mit  $\hat{y} = p_M(x)$  ist

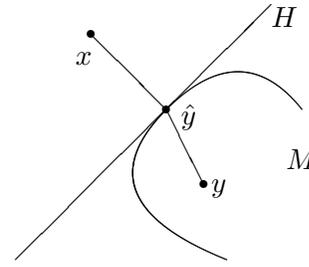
$$x = \hat{y} + (x - \hat{y}), \quad \text{wobei } (x - \hat{y})^\top (y - \hat{y}) = 0 \quad \forall y \in U.$$

Bei einem linearen Unterraum ist auch  $p_U$  linear. Eine zur letzten Gleichung ähnliche Charakterisierung von  $p_M(x)$  gilt im allgemeinen Fall.

**Satz 2.2.9** Die nichtleere Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  sei konvex und abgeschlossen und  $\hat{y} \in M$ . Dann gilt mit  $x \in \mathbb{R}^n$  Bew

$$\hat{y} = p_M(x) \iff (x - \hat{y})^\top (y - \hat{y}) \leq 0 \quad \forall y \in M. \quad (2.2.3)$$

Für  $x \notin M$  ist der nächstgelegene Punkt  $\hat{y} = p_M(x)$  also dadurch charakterisiert, dass gilt  $M \subseteq H^\ominus$ , mit der Hyper-ebene  $H = H(x - \hat{y}, \hat{y})$ . Wie im linearen Fall ist die Abbildung  $p_M$  nicht-expandierend, aber keine Kontraktion, da alle Elemente von  $M$  Fixpunkte sind.



**Satz 2.2.10** Die Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $M \neq \emptyset$ , sei konvex und abgeschlossen. Dann gilt für  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|p_M(x) - p_M(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Hyperebenen der in Satz 2.2.9 auftretenden Art sind im folgenden ein wichtiges Hilfsmittel.

**Definition 2.2.11** Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex,  $M \neq \emptyset$ , und  $H = H(a, \alpha)$  eine Hyperebene mit  $M \subseteq H^\ominus$ ,  $H \cap \bar{M} \neq \emptyset$ . Dann heißt  $H$  Stützebene für  $M$  und  $a^\top x \leq \alpha$  zulässige Ungleichung für  $M$ . Wenn  $B := H \cap M \neq \emptyset$  ist, heißt  $B$  Stützmenge.

In Satz 2.2.9 liegt also  $p_M(x)$  für  $x \notin M$  in der Stützmenge der dort zur abgeschlossenen(!) Menge  $M$  konstruierten Stützebene  $H$ . Diese trennt den Punkt  $x$  von der Menge  $M$ . Eine entsprechende Aussage gilt für beliebige disjunkte, konvexe Mengen.

**Definition 2.2.12** Zur Lage einer Hyperebene  $H = H(a, \alpha)$  relativ zu nichtleeren Mengen  $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$  verwendet man folgende Begriffe.

- $H$  trennt  $M$  und  $N$ , wenn  $M \subseteq H^\ominus$ ,  $N \subseteq H^\oplus$  (bzw. umgekehrt)
- $H$  trennt  $M$  und  $N$  echt, wenn  $M \subseteq H^\ominus$ ,  $N \subseteq H^+$  (bzw. umgekehrt)
- $H$  trennt  $M$  und  $N$  strikt, wenn  $M \subseteq H^-$ ,  $N \subseteq H^+$  (bzw. umgekehrt)
- $H$  trennt  $M$  und  $N$  stark, wenn für ein  $\epsilon > 0$  gilt

$$a^\top x \leq \alpha - \epsilon < \alpha + \epsilon \leq a^\top y \quad \forall x \in M, y \in N.$$

Mit Satz 2.2.9 kann direkt eine Hyperbene konstruiert werden, die einen Punkt  $x \notin \bar{M}$  außerhalb einer konvexen Menge von dieser strikt trennt. Etwas schwieriger wird der Nachweis, wenn  $x$  auf dem Rand von  $M$  liegt, die trennende Ebene ist dann eine Stützebene.

**Satz 2.2.13** Die nichtleere Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  sei konvex.

a) Ist  $M$  abgeschlossen und  $x \notin M$ , dann existiert eine Hyperebene mit  $M \subseteq H^-(a, \alpha)$ ,  $x \in H^+(a, \alpha)$ , d.h.,

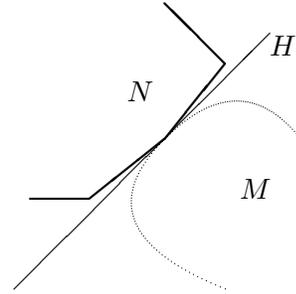
$$\forall y \in M : a^\top y < \alpha < a^\top x.$$

b) Ist  $x$  ein Randpunkt von  $M$ ,  $x \in \bar{M} \setminus \overset{\circ}{M}$ , dann existiert eine Hyperebene  $H$  mit  $x \in H$ ,  $M \subseteq H^\ominus$ .

Bew

Auch im Grenzfall sich berührender konvexer Mengen ist noch eine Trennung möglich.

**Theorem 2.2.14** *Es seien  $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$  nichtleere, disjunkte, konvexe Mengen,  $M \cap N = \emptyset$ , und  $M$  offen. Dann existiert eine Hyperebene  $H$ , die  $M$  und  $N$  echt trennt,  $M \subseteq H^-$ ,  $N \subseteq H^+$ .*



Bew

Bei ihrer Einführung wurde die konvexe Hülle als Durchschnitt allgemeiner konvexer Obermengen definiert. Mit den letzten Ergebnissen ist auch eine Charakterisierung nur mit Halbräumen (d.h. linearen Ungleichungen) möglich.

**Satz 2.2.15**  *$M \subseteq \mathbb{R}^n$  sei eine konvexe, abgeschlossene, echte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ ,  $M \neq \emptyset$ ,  $M \neq \mathbb{R}^n$ . Bezeichnet  $\mathcal{H}_M$  die Menge der Stützebenen an  $M$ , dann gilt*

$$M = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_M} H^\ominus.$$

**Beispiel 2.2.16** Bei der Einheitskugel  $M := B_1(0)$  ist diese Aussage sofort nachvollziehbar. Für jedes  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq 0$ , ist  $H(a, \|a\|)$  eine Stützebene an  $M$ . Man sieht hier auch sofort, dass in der Darstellung  $\bigcap_{H \in \mathcal{H}_M} H^\ominus$  unendlich viele Halbräume auftreten.

## 2.3 Randflächen und Ecken

Bekanntlich sind bei der Suche nach Extrema von Funktionen die Ränder des zulässigen Bereichs gesondert zu prüfen, insbesondere bei linearen Zielfunktionen. Auch eine Stützebene berührt eine konvexe Menge in (mindestens einem) Randpunkt. Die Definition des Randes ist bei abgeschlossenen konvexen Mengen aber auch mit rein geometrischen Begriffen möglich.

**Definition 2.3.1** *Sei  $R \neq \emptyset$  und beide Mengen  $R \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex. Dann heißt  $R$  Randfläche von  $M$ , wenn*

$$\forall x, y \in M : (x, y) \cap R \neq \emptyset \Rightarrow x, y \in R.$$

Punkte einer Randfläche  $R$  können also nur aus Punkten von  $R$  selbst kombiniert werden. Abhängig von der Dimension einer Randfläche  $R$  verwendet man folgende Bezeichnungen:

- $\dim R = 0$ :  $R = \{y\}$  ist *Ecke* von  $M$
- $\dim R = 1$ :  $R$  ist *Kante* von  $M$
- $\dim R = n - 1$ :  $R$  ist *Facette* von  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Der wichtigste Begriff hier ist der der Ecke, die Menge aller Ecken von  $M$  heißt  $E(M)$ .

**Satz 2.3.2** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  nichtleer und konvex. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

Bew

- a)  $z \in M$  ist Ecke von  $M$ ,
- b)  $z \in (x, y)$ ,  $x, y \in M \Rightarrow x = y = z$ ,
- c)  $z = \frac{1}{2}(x + y)$ ,  $x, y \in M \Rightarrow x = y = z$ ,
- d)  $M \setminus \{z\}$  ist konvex.

### Beispiel 2.3.3

- a) Die Eckenmenge der Einheitskugel  $M = B_1(0) = \{x : \|x\| \leq 1\}$  ist die Sphäre  $E(M) = \{x : \|x\| = 1\}$ . Dies folgt direkt aus der Parallelogrammgleichung (2.2.2) und Satz 2.3.2b. Die offene Kugel hat keine Ecken  $E(\overset{\circ}{M}) = \emptyset$ .
- b) Auch Unterräume  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  haben keine Ecken, sind aber abgeschlossen.
- c) Im folgenden treten aber in der Regel Mengen mit endlich vielen Ecken auf. Dazu gilt etwa: für  $M = \text{konv}\{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\}$  ist  $E(M) \subseteq \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\}$ .

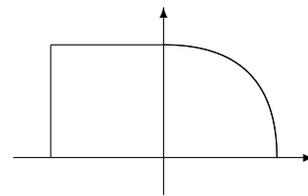
Jede nichtleere kompakte Menge  $M$  enthält mindestens eine Ecke (Satz, denn  $\text{argmax}\{\|x\| : x \in M\}$  ist Ecke).  $E(M)$  enthält dann sogar so viele Punkte, dass die ganze Menge  $M$  daraus rekonstruiert werden kann (Theorem 2.3.6). Zum Beweis wird benötigt:

**Satz 2.3.4** Sei  $M \neq \emptyset$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und kompakt und  $H$  eine Stützebene an  $M$ . Dann ist  $R := H \cap M$  eine Randfläche von  $M$  und enthält eine Ecke von  $M$ .

Bew

Also ist jede Stützmenge auch Randfläche, aber i.a. nicht umgekehrt:

**Beispiel 2.3.5** Bei der Vereinigung  $M = ([-1, 0] \times [0, 1]) \cup (B_1(0) \cap \mathbb{R}_+^2)$  von Quadrat und Viertelkreis ist  $e_2 = (0, 1)^\top$  zwar eine Ecke, aber selbst nur Ecke einer Stützmenge.



**Theorem 2.3.6 (Krein-Milman)** Sei  $M \neq \emptyset$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und kompakt. Dann gilt

Bew

$$M = \text{konv}(E(M)).$$

Konvexität und Randflächen-Eigenschaft sind 'monotone' bzw. transitive Eigenschaften.

**Satz 2.3.7** a)  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $M \neq \emptyset$  sei konvex und kompakt. Dann ist jede Randfläche von  $M$  konvex und kompakt.

b) Bei den konvexen Mengen  $S \subseteq R \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $S \neq \emptyset$ , sei  $S$  Randfläche von  $R$  und  $R$  Randfläche von  $M$ . Dann ist auch  $S$  Randfläche von  $M$  und  $E(R) \subseteq E(M)$ .

Bew

## 2.4 Polyeder, Polytope, Kegel

Theorem 2.3.6 liefert für kompakte, konvexe Mengen eine vollständige, konstruktive Darstellung mit Hilfe der Ecken. Für unbeschränkte Mengen muß diese Darstellung aber ergänzt werden. Dazu konzentrieren wir uns jetzt auf *Polyeder*. Dieser Begriff wurde schon mehrfach informell für die Lösungsmengen von Ungleichungssystemen benutzt und wird nun zusammen mit einem verwandten Begriff eingeführt.

**Definition 2.4.1** *Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine nichtleere Menge.*

a)  $M$  heißt Polyeder, wenn eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und ein Vektor  $b \in \mathbb{R}^m$  existieren mit  $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ .

b)  $M$  heißt Polytop, wenn (endlich viele) Punkte  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  existieren mit  $M = \text{konv}(x^{(0)}, \dots, x^{(k)})$ . Wenn die Punkte  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$  dabei affin linear unabhängig sind, nennt man  $M$  einen  $k$ -Simplex.

Polyeder und Polytope sind natürlich konvex. Beim Polyeder treten insbesondere in Satz 2.2.15 nur endlich viele (höchstens  $m$ ) Halbräume auf. Ein Polytop  $M = \text{konv}(x^{(0)}, \dots, x^{(k)})$  ist nach Satz 2.2.7 kompakt, da die Eckenmenge  $E(M) \subseteq \{x^{(0)}, \dots, x^{(k)}\}$  kompakt ist. In einem  $k$ -Simplex  $S$  hat jeder Punkt  $z \in S$  eine eindeutige Darstellung

$$z = \sum_{j=0}^k \lambda_j x^{(j)}, \quad (\lambda_j) \in \Delta_{k+1}.$$

Die zugehörigen  $\lambda_j$  sind die *baryzentrischen* Koordinaten von  $z$  in  $S$ , und  $\bar{x} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k x^{(j)}$  der *Schwerpunkt* von  $S$ .

Nach Theorem 2.3.6 ist ein Polytop durch seine Ecken explizit darstellbar. Im kompakten Fall gilt das auch für Polyeder, die zulässigen Bereiche von (LP):

**Satz 2.4.2** *Ein nichtleeres, beschränktes Polyeder ist ein Polytop.*

Der Satz folgt direkt aus Theorem 2.3.6, wenn man weiß, dass jedes Polyeder nur endlich viele Ecken hat. Dieses Ergebnis wiederum ergibt sich elementar aus dem jetzt hergeleiteten Zusammenhang (Satz 2.4.3) zwischen den Ecken von  $X = \{x : Ax \leq b\}$  und ihrer algebraischen Charakterisierung durch die *regulären*  $n \times n$ -Untermatrizen von  $A$ . Da es überhaupt nur  $\binom{m}{n}$  quadratische  $n \times n$ -Untermatrizen gibt, ist diese Zahl auch eine obere Schranke für die der Ecken.

Formal wird zu einer Indexmenge  $J = \{j_1, \dots, j_n\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ ,  $m \geq n$ , der Größe  $|J| = n$  die folgende Untermatrix  $A^{(J)}$  gebildet. Analog geht man zur Bildung eines passenden Teilvektors  $b_J \in \mathbb{R}^n$  vor:

$$A^{(J)} := \begin{pmatrix} a^{(j_1)} \\ \vdots \\ a^{(j_n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b_J := \begin{pmatrix} b_{j_1} \\ \vdots \\ b_{j_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

**Satz 2.4.3** Das Polyeder  $X = \{x : Ax \leq b\}$  sei durch  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , gegeben und es sei  $z \in X$ . Dann ist  $z$  genau dann Ecke, wenn es eine reguläre  $n \times n$ -Untermatrix  $A^{(J)}$ ,  $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ ,  $|J| = n$ , gibt mit  $A^{(J)}z = b_J$ . Bew

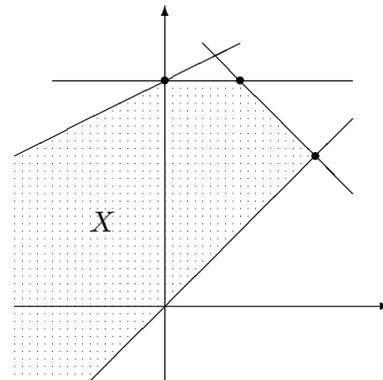
*Bemerkung:* a) Wenn die Matrix  $A$  nicht vollen Spaltenrang hat, also ein nichttrivialer Kern existiert, besitzt das Polyeder überhaupt keine Ecken, da mit  $Ay = 0$ ,  $y \neq 0$ , und  $x \in X$  auch  $x + ty \in X \forall t \in \mathbb{R}$  gilt. Tatsächlich ist der Linealraum  $L(X) = \text{kern}(A)$ .

b) Das System  $A^{(J)}z = b_J$  definiert den Schnittpunkt der  $n$  Hyperebenen  $H(a^{(j)}, b_j)$ ,  $j \in J$ . Für eine Ecke  $z$  müssen aber auch die übrigen Zulässigkeitsbedingungen  $A^{(K)}z \leq b_K$  mit  $K = \{1, \dots, m\} \setminus J$  erfüllt sein.

**Beispiel 2.4.4** Es sei  $m = 4$ ,  $n = 2$  und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es gibt  $\binom{4}{2} = 6$  Indexmengen  $J$  mit  $|J| = 2$ , und da die zugehörigen Untermatrizen regulär sind, auch entsprechend viele Kreuzungspunkte von Hyperebenen (=Geraden). Allerdings sind nur drei davon zulässig, also Ecken von  $X$ :



$$\begin{aligned} 1) J = \{1, 2\}: \quad A^{(J)}x &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = b_J: \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ 2) J = \{2, 3\}: \quad A^{(J)}x &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = b_J: \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ 3) J = \{3, 4\}: \quad A^{(J)}x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = b_J: \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Beispiel zeigt, daß die Ecken hier nicht ausreichen, um die Menge  $X$  zu beschreiben. Die Menge enthält zusätzlich bestimmte Richtungen, in denen sie sich unendlich weit trichterförmig ausdehnt. Diese Gestalt läßt sich durch Kegel beschreiben, welche gegenüber konischen Kombinationen (vgl. Defn. 2.1.2) abgeschlossen sind.

**Definition 2.4.5** a) Die nichtleere Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt konvexer Kegel, wenn  $\lambda x + \mu y \in K$ ,  $\forall x, y \in K$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ .

b) Der konvexe Kegel  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K \neq \emptyset$ , heißt spitz, wenn  $K \cap (-K) = \{0\}$  ist.

c) Zu einer beliebigen Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist

$$\text{keg}(M) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{(i)} : x^{(i)} \in M, \lambda_i \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

der von  $M$  erzeugte Kegel. Ein Kegel  $K$  heißt endlich erzeugt, wenn  $K = \text{keg}(b_1, \dots, b_k)$  ist,  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$ , d.h.,

$$K = B \cdot \mathbb{R}_+^k = \{By : y \in \mathbb{R}_+^k\} \quad \text{mit } B = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}. \quad (2.4.1)$$

*Bemerkung:* a)  $K$  konvexer Kegel  $\iff K = \text{keg}(K)$ .

b) Wenn  $M$  schon konvex war, gilt einfach  $\text{keg}(M) = \mathbb{R}_+ \cdot M = \{\lambda x : x \in M, \lambda \geq 0\}$ . Daher ist für beliebiges  $M$  auch  $\text{keg}(M) = \mathbb{R}_+ \cdot \text{konv}(M)$ .

c) Analog zur Situation bei konvexen Mengen sind nichtleere Durchschnitte und Linearkombinationen von konvexen Kegeln wieder welche.

d) Die Darstellung (2.4.1) besagt, dass  $K$  als lineares Bild des Standard-Kegels  $\mathbb{R}_+^k$  darstellbar ist (unter der zu  $B$  gehörigen linearen Abbildung).

e) Für einen konvexen Kegel  $K$  ist die affine Hülle  $\text{aff}(K) = K - K$  und der Linealraum  $L(K) = K \cap (-K)$ . Spitze Kegel haben also trivialen Linealraum.

**Beispiel 2.4.6** a)  $\mathbb{R}_+^n$  ist natürlich ein endlich erzeugter konvexer Kegel.

b) Lineare Unterräume  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  sind endlich erzeugte konvexe Kegel. Mit einer Basismatrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $U = B \cdot \mathbb{R}^l$ , läßt sich  $U$  auch als Kegel schreiben,  $U = (B, -B) \cdot \mathbb{R}_+^{2l}$  (vgl. §1.3, Umformung 3).

Das nächste Beispiel hat für die Behandlung von Polyedern zentrale Bedeutung.

**Satz 2.4.7** Gegeben sei das Polyeder  $X = \{x : Ax \leq b\}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist  $O^+(X) := \{x : Ax \leq 0\}$  ein konvexer Kegel. Er wird Ausdehnungskegel von  $X$  genannt, es gilt Bew

$$O^+(X) = \{y : x + \lambda y \in X \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

Die Formel für den Kegel  $O^+(X)$  läßt sich als Definition für beliebige konvexe Mengen verstehen. Dieser Kegel enthält alle Richtungen, in die sich  $X$  unendlich weit ausdehnt. Bei Polyedern ist  $O^+(X)$  insbesondere die Lösungsmenge des *homogenen* Ungleichungssystems analog zur Situation bei linearen *Gleichungssystemen*.

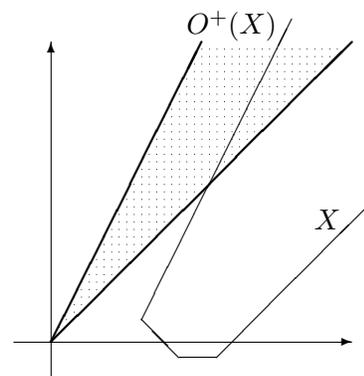
*Bemerkung:* Für Polyeder  $X \neq \emptyset$  gilt offensichtlich

a)  $X + O^+(X) = X$ .

b)  $X$  kompakt  $\iff O^+(X) = \{0\}$ .

c)  $O^+(X)$  ist spitz, wenn  $L(X) = \text{kern}(A) = \{0\}$ .

d) Bedeutung für (LP),  $\max\{c^T x : x \in X\}$ : Für nichttriviales  $c \in O^+(X)$  ist (LP) unbeschränkt, denn da dann mit  $\bar{x} \in X$  auch  $x = \bar{x} + \lambda c \in X \quad \forall \lambda \geq 0$ , ist  $\sup\{c^T(\bar{x} + \lambda c) : \lambda \geq 0\} = \infty$ .



**Beispiel 2.4.8** Zum Beispiel 2.4.4 ist der Ausdehnungskegel  $O^+(X)$  durch das homogene System

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y \leq 0$$

bestimmt. Dieses entspricht den Bedingungen  $y_1 \leq y_2 \leq 0$ ,  $y_2 \leq -y_1$ ,  $y_2 \leq y_1/2$ . Also kommt nur  $y_1 \leq 0$  in Frage und es bleiben nur  $y_1 \leq y_2 \leq \frac{1}{2}y_1$ . Das sind die Bedingungen zu  $A^{(J)}y \leq 0$  mit  $J = \{1, 4\}$ . Die beiden homogenen Lösungen zu  $a^{(j)\top}y^{(j)} = 0$ ,  $j \in J$ , erzeugen diesen Kegel

$$O^+(X) = \text{keg}\{y^{(1)}, y^{(4)}\} = \text{keg}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

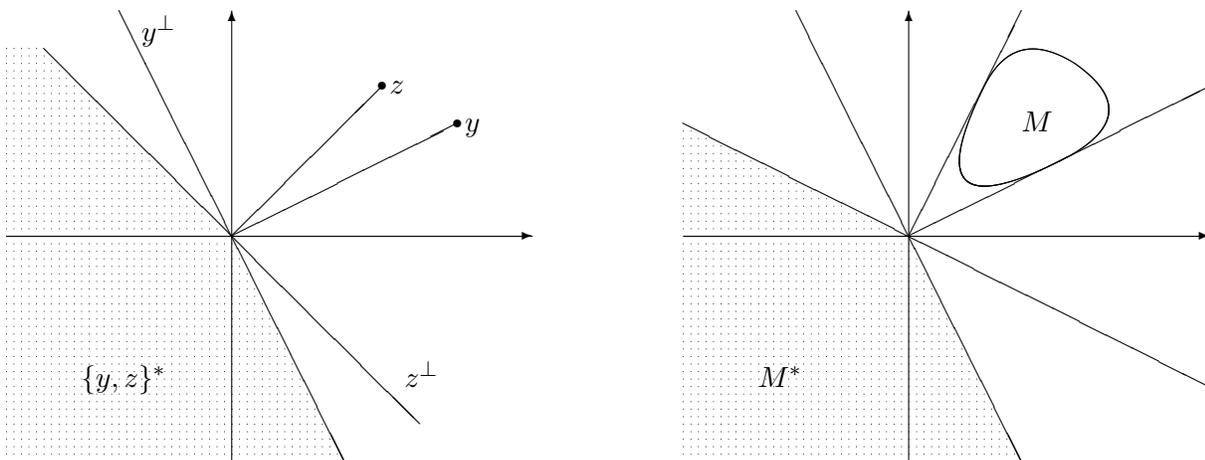
Im zentralen Dekompositionssatz wird der Ausdehnungskegel benötigt, um Theorem 2.3.6 für unbeschränkte Polyeder zu ergänzen. Bisher ist aber nur die *implizite* Beschreibung von  $O^+(X)$  aus Satz 2.4.7 durch das homogene Ungleichungssystem bekannt, unklar ist auch, ob eine endliche Erzeugermenge für ihn existiert.

**Satz 2.4.9** Der konvexe Kegel  $K := \{x : Ax \leq 0\}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , ist endlich erzeugt. Bew

Bevor die Zerlegung von Polyedern weiter verfolgt wird, wird kurz ein abgeleiteter Kegel studiert, der die Interpretation einiger Ergebnisse erleichtert.

**Definition 2.4.10** Der Polarkegel (duale Kegel) zu einer nichtleeren Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist

$$M^* := \{x \in \mathbb{R}^n : y^\top x \leq 0 \forall y \in M\} = \bigcap_{y \in M} H^\ominus(y, 0).$$



*Bemerkung:* a) Für einen linearen Unterraum  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $U^* = U^\perp$ .

b) Für  $M \neq \emptyset$  gilt  $M^* = (\text{keg}(M))^*$  und  $M \subseteq M^{**} := (M^*)^*$ .

c) Der Definition nach entspricht der Polyeder-Kegel  $K = \{x : Ax \leq 0\}$  gerade dem Polarkegel zu den Zeilen von  $A$ ,  $K = \{a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\}^* = (A^\top \cdot \mathbb{R}_+^m)^*$ .

Bemerkung b) kann für die hier interessierenden Kegel präzisiert werden (o.Bew.).

**Satz 2.4.11** *Für einen endlich erzeugten konvexen Kegel  $K$  gilt  $K^{**} = K$ .*

Also ist für  $K = \{x : Ax \leq 0\}$  der Polarkegel  $K^* = A^\top \cdot \mathbb{R}_+^m$  und daher endlich erzeugt. Mit diesem Satz kann die obige Bemerkung d) zur Unbeschränktheit von (LP1) präzisiert werden. Für  $\bar{x} \in X$ ,  $y \in O^+(X)$  ist auf dem Strahl  $\{x = \bar{x} + \lambda y : \lambda \geq 0\}$  der Wert der Zielfunktion  $c^\top x = c^\top \bar{x} + \lambda c^\top y$  genau dann unbeschränkt, wenn  $c^\top y > 0$  gilt. Also, gilt *nicht*:  $c^\top v \leq 0 \forall v \in O^+(X)$ . Dies heißt aber gerade, dass  $c$  *nicht* im Polarkegel  $(O^+(X))^* = A^\top \cdot \mathbb{R}_+^m$  liegt. Dieses Ergebnis (LP1) *unbeschränkt*  $\iff c \notin A^\top \cdot \mathbb{R}_+^m$  wird in der Dualitätstheorie wieder auftauchen.

## 2.5 Der Dekompositionssatz für Polyeder

Zur Ergänzung der Polyeder-Zerlegung muß auch der Ausdehnungskegel berücksichtigt werden. Bei der endlichen Darstellung von Polyeder-Kegeln, vgl. Satz 2.4.9, kann eine Minimalmenge erforderlicher Richtungen identifiziert werden, die Kanten des Kegels. Ähnlich zu Satz 2.4.3 können auch die Kanten über  $(n-1) \times n$ -Untermatrizen von  $A$  bestimmt werden. Zu  $y \in \{x : Ax \leq 0\} \setminus \{0\}$  ist  $\text{keg}(y)$  genau dann Kante, wenn eine Untermatrix  $A^{(J)}$  maximalen Ranges  $|J| = n-1$  existiert mit  $A^{(J)}y = 0$ .

Es werden nur spitze Kegel betrachtet, da sonst keine Ecken existieren. Eine wichtige Schlußweise in spitzen Kegeln  $K$  ist, dass für die Null nur die triviale konische Kombination möglich ist,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i y^{(i)} = 0, \text{ mit } y^{(i)} \in K, \lambda_i \geq 0 \implies (\lambda_i) = 0.$$

Denn für  $\lambda_j > 0$  wäre mit  $y^{(j)}$  auch  $-y^{(j)} = \sum_{i \neq j} (\lambda_i / \lambda_j) y^{(i)} \in K$  und  $K$  hätte nichttrivialen Linealraum, da  $\text{keg}(y^{(j)}, -y^{(j)}) = \text{span}(y^{(j)}) \subseteq L(K)$ .

**Satz 2.5.1** *Wenn der konvexe Kegel  $K := \{x : Ax \leq 0\}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , spitz ist, kann  $K$  durch die Richtungen seiner Kanten erzeugt werden.*

Bew

Für das folgende Theorem wird  $\text{keg}(\emptyset) := \{0\}$  verabredet.

**Theorem 2.5.2** *Es sei  $X := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \neq \emptyset$  der durch  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  bestimmte Polyeder mit  $L(X) = \{0\}$ . Dann ist  $X$  die Summe eines Polytops und eines endlich erzeugten Kegels. Mit den Ecken  $x^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , von  $X$  und Kantenrichtungen  $y^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ , von  $O^+(X)$  gilt*

Bew

$$\begin{aligned} X &= \text{konv}(E(X)) + O^+(X) \\ &= \text{konv}(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) + \text{keg}(y^{(1)}, \dots, y^{(\ell)}). \end{aligned}$$

Dieses Theorem über die endliche Zerleg- bzw. Darstellbarkeit von Polyedern (er gilt auch allgemein, nach Einschränkung auf  $L(X)^\perp$ ) liefert die Rechtfertigung für das Vorgehen bei den numerischen Verfahren, wo ausschließlich die Ecken und Kantenrichtungen von  $X$  inspiziert werden.

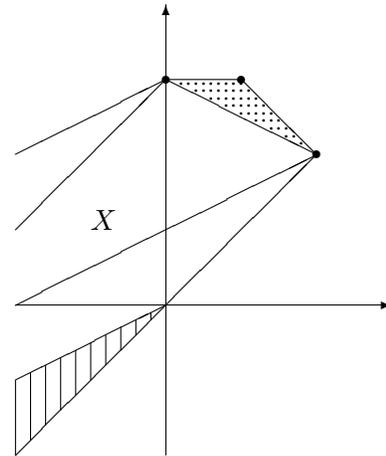
**Beispiel 2.5.3** Zusammenfassung der Beispiele 2.4.6/8: das Polyeder  $X := \{x : Ax \leq b\}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

läßt sich darstellen in der Form

$$X = \text{konv}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} + \text{keg}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Im Bild zeigt der punktierte Teil das Polytop  $\text{konv}(E(X))$ , unten ist schraffiert der Ausdehnungskegel  $O^+(X)$  eingezeichnet, welcher im Theorem an jeden Punkt des Polytops 'angeheftet' wird. Die zwei extremalen verschobenen Kegel sind ebenfalls eingezeichnet.



## 2.6 Existenzsätze für Ungleichungssysteme

Die bisherigen Sätzen bezogen sich naturgemäß auf den Fall nichtleerer zulässiger Bereiche  $X$ . Kriterien für die Gültigkeit dieser Voraussetzung, d.h., die Lösbarkeit der Ungleichungssysteme, werden jetzt als weitere Anwendung der Trennungssätze aus §2.2 hergeleitet. Grundlage ist das folgende Lemma von Farkas, es bildet insbesondere auch die Basis für die Dualitätstheorie linearer Programme. Es orientiert sich klassisch an der Form (LP3):

**Satz 2.6.1 (Farkas)** Mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  gilt

Bew

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset \iff \left(y^\top A \geq 0^\top \Rightarrow y^\top b \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}^m\right). \quad (2.6.1)$$

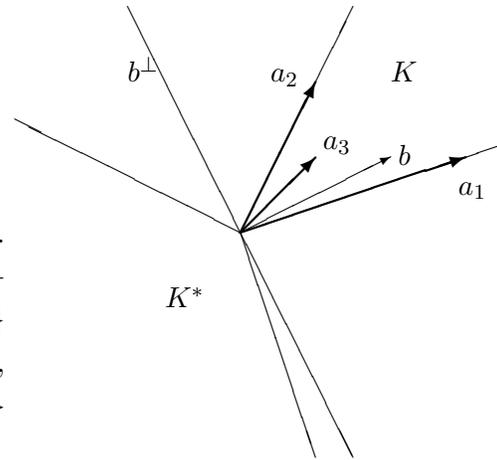
*Geometrische Interpretation:* Die Lösbarkeit des Systems auf der linken Seite bedeutet, dass  $b$  als konische Kombination der Spalten von  $A$  ausgedrückt werden kann,  $b \in A\mathbb{R}_+^n =: K$ . Die rechte Seite von (2.6.1) heißt, dass  $-y \in H^\ominus(b, 0) = \{b\}^*$  für jeden Vektor  $-y \in \{a_1, \dots, a_n\}^*$  im Polarkegel  $K^* = (A\mathbb{R}_+^n)^*$ . Also entspricht (2.6.1) der einfachen Aussage:

$$b \in A \cdot \mathbb{R}_+^n = \text{keg}(a_1, \dots, a_n) \iff \{a_1, \dots, a_n\}^* \subseteq \{b\}^* = H^\ominus(b, 0).$$

**Beispiel 2.6.2** Bei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist  $a_3 = \frac{1}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2$ , also  $K := A\mathbb{R}_+^3 = \text{keg}\{a_1, a_2\}$ .  
 Daher ist der Polarkegel  $K^* = \{y : 3y_1 + y_2 \leq 0, y_1 + 2y_2 \leq 0\}$ ,  
 der darstellbar ist als  $K^* = \text{keg}\{y^{(1)}, y^{(2)}\}$  mit  $y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $y^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  
 Es liegt  $K^* \subseteq \{b\}^*$ , wenn alle Erzeugenden dies tun. Also gilt  $b \in K \iff b^\top y^{(i)} \leq 0, i = 1, 2$ .



Analoge Lösbarkeitssätze gibt es auch für die allgemeine Standardform

**Satz 2.6.3** Mit  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $i, j = 1, 2$ , sind äquivalent:

Bew

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \text{ mit } \begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

und

$$\forall y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2} \text{ mit } \begin{cases} y_1^\top A_{11} + y_2^\top A_{21} = 0^\top \\ y_1^\top A_{12} + y_2^\top A_{22} \geq 0^\top \\ y_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y_1^\top b_1 + y_2^\top b_2 \geq 0.$$

Die anderen Formen der Standardprogramme sind darin als Spezialfälle enthalten, als Übersicht:

- (LP1)  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \neq \emptyset \iff \{y^\top A = 0^\top \Rightarrow y^\top b \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}_+^m\}$
- (LP2)  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \iff \{y^\top A \geq 0^\top \Rightarrow y^\top b \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}_+^m\}$
- (LP3)  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset \iff \{y^\top A \geq 0^\top \Rightarrow y^\top b = 0 \forall y \in \mathbb{R}_+^m\}$
- (LGS)  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \neq \emptyset \iff \{y^\top A = 0^\top \Rightarrow y^\top b = 0 \forall y \in \mathbb{R}^m\}$

Als vierte Variante wurden Gleichungssysteme aufgenommen. Das Lösbarkeitskriterium dort ist bekanntlich  $b \in (A \cdot \mathbb{R}^n) = \text{kern}(A^\top)^\perp$  und wird oft als Fredholm-Alternative formuliert. Auch die obigen Kriterien können als Alternativsätze formuliert werden, z.B.:

- (LGS) Entweder ist  $Ax = b$  lösbar, oder  $y^\top A = 0^\top, y^\top b = 1$
- (LP1) Entweder ist  $Ax \leq b$  lösbar, oder  $y^\top A = 0^\top, y \geq 0, y^\top b = -1$
- (LP3) Entweder ist  $Ax = b, x \geq 0$  lösbar, oder  $y^\top A \geq 0^\top, y^\top b = -1$

Die Merkgeln für den Zusammenhang zwischen den Alternativsystemen entsprechen denen bei der Dualität und werden dort formuliert.

### 3 Duale Programme

#### 3.1 Optimalitätskriterien

Im letzten Abschnitt konnte die Lösbarkeit eines Ungleichungssystems mit Eigenschaften eines verwandten Systems in Beziehung gesetzt werden. Diese Zusammenhänge können auf vollständige Lineare Programme durch Betrachtung ihrer dualen Versionen erweitert werden. Als wichtige Arbeitshilfe für die Praxis werden dabei Kriterien für die *Optimalität* eines zulässigen Punktes  $x$  hergeleitet, die (etwa durch einen Auftraggeber) *effektiv nachprüfbar* sind, da sie nur wenige Berechnungsschritte erfordern ("Einsetzen").

Ansatzpunkt ist eine Standardmethode bei Extremalproblemen mit Nebenbedingungen, die Verwendung von *Lagrange-Multiplikatoren*. Beim Problem (LP1) hat man  $m$  Nebenbedingungen  $b - Ax \geq 0$ , verwendet dazu also einen Vektor  $y \in \mathbb{R}^m$  und bildet die Lagrangefunktion

$$\phi(x, y) = c^T x + y^T (b - Ax) = y^T b + (c^T - y^T A)x.$$

Die rechte Version zeigt, dass  $\phi$  auch als Lagrangefunktion eines Extremalproblems für  $y$ , des *dualen* Problems, interpretiert werden kann. Beim Umgang sind aber auch Vorzeichenbedingungen zu berücksichtigen. Der Vollständigkeit halber wird die duale Form (LP\*) zunächst zum allgemeinen *primalen* Programm (LP) angegeben.

$$\begin{array}{l}
 \text{(LP)} \quad \left. \begin{array}{l} \max \quad c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \min \quad b_1^T y_1 + b_2^T y_2 \\ A_{11}^T y_1 + A_{21}^T y_2 = c_1 \\ A_{12}^T y_1 + A_{22}^T y_2 \geq c_2 \\ y_1 \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{(LP*)}
 \end{array}$$

In der Regel betrachtet man eine der Standardformen (LP1..3), für diese ist

(LP1)	$\begin{array}{l} \max \quad c^T x \\ Ax \leq b \end{array}$	$\begin{array}{l} \min \quad b^T y \\ A^T y = c \\ y \geq 0 \end{array} \quad \text{(LP1*)}$
(LP2)	$\begin{array}{l} \max \quad c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} \min \quad b^T y \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{array} \quad \text{(LP2*)}$
(LP3)	$\begin{array}{l} \max \quad c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} \min \quad y^T b \\ A^T y \geq c \end{array} \quad \text{(LP3*)}$

Die Übersicht zeigt den Grund, warum Programm (LP2) überhaupt betrachtet wird. Es ist dasjenige Programm, bei dem das duale i.w. die gleiche Gestalt hat. Die Übergänge (LP)  $\rightarrow$  (LP\*) und (LP\*)  $\rightarrow$  (LP\*\*)=(LP) sind symmetrisch und geschehen nach folgenden Merkgeln:

1. Aus einem Maximum-Problem wird ein Minimierungsproblem,

2. die Koeffizientenmatrix wird transponiert,
3. der Gradientenvektor der Zielfunktion wird mit der rechten Seite des (Un-) Gleichungssystems getauscht,
4. Ungleichungsrestriktionen werden ausgetauscht durch vorzeichenbeschränkte Variable, Gleichungen durch freie Variable und umgekehrt.

Für die Zielfunktionen in zulässigen Punkten von primalem und dualem Programm gibt es einen grundlegenden Zusammenhang:

**Satz 3.1.1** Der Vektor  $x^\top = (x_1^\top, x_2^\top)$  sei zulässig für (LP) und  $y^\top = (y_1^\top, y_2^\top)^\top$  zulässig für (LP\*). Dann gilt für die Zielfunktionen  $c^\top x = c_1^\top x_1 + c_2^\top x_2$  und  $b^\top y = b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2$  die Beziehung

$$c^\top x \leq b^\top y.$$

Bei Gleichheit,  $c^\top \hat{x} = b^\top \hat{y}$ , ist  $\hat{x}$  optimal für (LP) und  $\hat{y}$  optimal für (LP\*).

Bew

**Anwendung** Bei Kenntnis von zulässigen Punkten  $\hat{x}, \hat{y}$  ist die Prüfung auf Optimalität,  $c^\top \hat{x} = b^\top \hat{y}$ , trivial (z.B., für Auftraggeber). Und trivialerweise erhält man für jedes dual zulässige  $y$  aus  $b^\top y$  eine obere Schranke für den Optimalwert bei (LP).

Einzelne Eigenschaften der Programme haben eine bestimmte Bedeutung für das dazu duale. Es sei daran erinnert, dass mit der *Lösung* eines Programms eine Optimallösung gemeint ist. Ein Problem mit nichtleerem zulässigem Bereich nennt man *konsistent*, ansonsten *inkonsistent*. Die folgenden Sätze werden jeweils nur für dasjenige Standardprogramm (LP<sub>i</sub>) bewiesen, dessen Form sich dazu anbietet. Sie gelten aber natürlich für (LP). In den folgenden Beweisen spielt das Lemma von Farkas eine zentrale Rolle.

**Satz 3.1.2** Die Probleme (LP) und (LP\*) seien beide konsistent. Dann existieren auch Lösungen für beide Programme.

Bew

Der folgende Satz nutzt die Tatsache aus, dass in einer Lösung von Problem (LP1) nur ein Teil der Restriktionen *straff* sind, vgl. Satz 2.4.3. Im Beweis wird ein Zusammenhang zwischen den Lösungen von Primal- und Dual-Problem konstruiert, der weitergehende Bedeutung hat.

**Satz 3.1.3** Es sei  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (LP1) und  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

a) Mit  $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ ,  $K = \{1, \dots, m\} \setminus J$  gelte dabei

$$A^{(J)} \hat{x} = b_J, \quad A^{(K)} \hat{x} < b_K.$$

Dann ist  $\hat{x}$  auch Lösung des reduzierten Programms  $\max\{c^\top x : A^{(J)} x \leq b_J\}$ .

Bew

b) Dann hat das duale Programm (LP1\*) eine Lösung.

**Beweis** für b) Für ein beliebiges zulässiges Element des reduzierten Programms gilt nach Teil a)  $A^{(J)}x \leq b_J = A^{(J)}\hat{x}$  und  $c^\top x \leq c^\top \hat{x}$ , also die Folgerung

$$A^{(J)}(\hat{x} - x) \geq 0 \Rightarrow c^\top(\hat{x} - x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Nach Satz 2.6.3 (Farkas) ist daher die Menge  $Y_J := \{y_J : y_J^\top A^{(J)} = c^\top, y_J \geq 0\} \neq \emptyset$ . Daraus folgt aber sofort, dass der zulässige Bereich  $Y := \{y \in \mathbb{R}^m : y^\top A = c^\top, y \geq 0\}$  von (LP1\*) ebenfalls nicht leer ist. Denn mit  $y_J \in Y_J$  liegt  $y^\top := (y_J^\top, y_K^\top)$ ,  $y_K := 0_K$  in  $Y$ , es gilt

$$y^\top A = y_J^\top A^{(J)} + 0_K^\top A^{(K)} = c^\top, \quad \text{sowie} \quad y^\top b = y_J^\top b_J + 0_K^\top b_K = y_J^\top A \hat{x} = c^\top \hat{x}. \quad (3.1.1)$$

Da die Zielfunktionen gleich sind, ist nach Satz 3.1.1 jedes solche  $y$  optimal bei (LP1\*). ■

Wenn die Untermatrix  $A^{(J)}$  im letzten Satz zu den straffen Restriktionen maximalen Rang hat, besteht  $Y_J$  aus genau einem Punkt  $y_J$ , der wie im Beweis zu einer Lösung  $y^\top = (y_J^\top, 0_K^\top)$  von (LP1\*) ergänzt werden kann.

**Theorem 3.1.4 (Dualitätssatz)** *Das Lineare Programm (LP) ist genau dann lösbar, wenn (LP\*) lösbar ist.*

Bew

Wenn beide Probleme inkonsistent sind, ist die Situation klar. Andernfalls gilt:

**Satz 3.1.5** *Wenn nur eines der Programme (LP) oder (LP\*) zulässige Punkte hat, dann ist dessen Zielfunktion unbeschränkt.*

Bew

Die Unbeschränktheit von (LP1) wurde schon am Ende von §2.4 behandelt, das dortige, über Polarkegel hergeleitete, Kriterium  $c \notin A^\top \mathbb{R}_+^m$  entspricht gerade der Unlösbarkeit des Systems  $A^\top y = c$ ,  $y \geq 0$ . Insgesamt ergibt sich folgende Situation:

<b>Zusammenfassung</b>	(LP) hat zulässige Punkte	(LP) inkonsistent
(LP*) hat zulässige Punkte	(LP) und (LP*) lösbar	(LP*) unbeschränkt
(LP*) inkonsistent	(LP) unbeschränkt	keine Lösungen

### 3.2 Komplementarität, Schattenpreise

Zur Vorbereitung des Dualitätssatzes wurde in Satz 3.1.3 i.w. die Konstruktion einer dualen Optimallösung aus der primalen durchgeführt. Ansatzpunkt war die Erkenntnis, dass in Optimallösungen bestimmte Restriktionen *straff* sind, d.h., Gleichheit gilt. Eine analoge Formulierung bzw. Schlußweise verwendet dazu die folgende *strukturelle Orthogonalität* bei nicht-negativen Vektoren:

$$u, v \geq 0, \quad u^\top v = 0 \Rightarrow \forall i : \{u_i = 0 \text{ oder } v_i = 0\}$$

**Satz 3.2.1 (Komplementarität)**

a) Es sei  $x$  zulässig für (LP1),  $y$  für (LP1\*). Beide Punkte sind genau dann optimal, wenn gilt

$$y^\top(b - Ax) = 0, \quad \text{d.h., für } i = 1, \dots, m : \begin{cases} y_i > 0 \Rightarrow a^{(i)\top}x = b_i \\ a^{(i)\top}x < b_i \Rightarrow y_i = 0 \end{cases} .$$

b) Es sei  $x$  zulässig für (LP) und  $y$  für (LP\*). Beide Punkte sind genau dann optimal, wenn gilt

$$y^\top(b - Ax) = 0 \quad \text{und} \quad (y^\top A - c^\top)x = 0. \quad (3.2.1)$$

Bew

*Anmerkung:* In Teil b) des Satzes wurde zur einfacheren Darstellung eine etwas verkürzte Schreibweise gewählt. Die Anteile der Gleichungsrestriktionen an den Innenprodukten verschwinden von vorneherein. In den restlichen bedeutet (3.2.1) ausführlich

$$y_1^\top(b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2) = 0, \quad (y_1^\top A_{12} + y_2^\top A_{22} - c_2^\top)x_2 = 0.$$

Damit markieren die nichtverschwindenden Komponenten von  $y_1$  die straffen Restriktionen von (LP) und die nichttrivialen bei  $x_2$  die straffen bei (LP\*).

Man redet im Zusammenhang mit Satz 3.2.1 auch von *komplementärem Schlupf*. Denn die Ungleichungen in (LP) und (LP\*) können durch Einführung von Schlupfvariablen  $u_1 \geq 0, v_2 \geq 0$  zu Gleichungsrestriktionen gemacht werden,  $A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + u_1 = b_1, A_{12}^\top y_1 + A_{22}^\top y_2 - v_2 = c_2$ . Damit entspricht die Bedingung (3.2.1) einfach der Aussage

$$y_1^\top u_1 = 0, \quad v_2^\top x_2 = 0,$$

dass je Komponente die Schlupfvariable im { primalen / dualen } Problem oder die Variable im { dualen / primalen } Problem verschwindet.

Außer den Existenzaussagen zu Lösungen können aus dem dualen Problem auch *quantitative* Angaben zum Primalproblem abgeleitet werden. Die Größe  $b$  enthält in (LP1) die oberen Schranken für die einzelnen Ressourcen (angelehnt an das Beispiel Produktionsplanung in §1.3), die einer Vergrößerung des Gewinns  $c^\top x$  im Wege stehen. In einem Lösungs-Paar  $\hat{x}, \hat{y}$  wird die Aufteilung der Restriktionen wie in Satz 3.1.3 benutzt,

$$A^{(J)}\hat{x} = b_J, \quad A^{(K)}\hat{x} < b_K, \quad J \cup K = \{1, \dots, m\}.$$

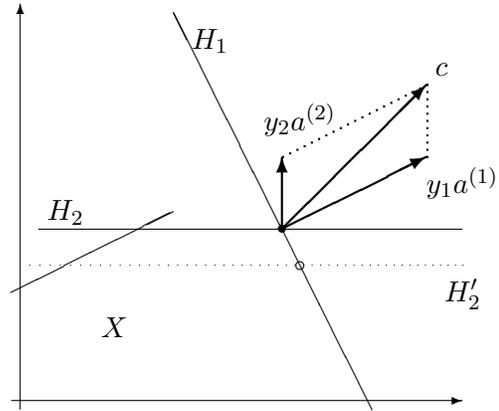
Die Restriktionen zu  $J$  sind also straff, die zu  $K$  locker und aus dem Komplementaritätssatz folgt  $\hat{y}_K = 0$ . Für die Zielfunktion gilt nun  $W := c^\top \hat{x} = b^\top \hat{y} = b_J^\top \hat{y}_J$ . Für eine Vergrößerung des Gewinns ist es sicher nicht sinnvoll, Restriktionen aus  $K$  weiter zu lockern. In dem dualen Wert  $b^\top \hat{y}$  kommt das dadurch zum Ausdruck, dass eine Vergrößerung von  $b_K$  wegen  $\hat{y}_K = 0$  keine Auswirkung hätte. Dagegen stellen die straffen Restriktionen aus  $J$  *Flaschenhalse* dar. Bei einer kleinen Änderung  $b_J \rightarrow b_J + \bar{b}_J$  ( $\|\bar{b}_J\| \leq \epsilon$ ) bleibt die zugehörige Lösung  $\hat{x} + \bar{x}$  in der Regel

(z.B., im generischen Fall  $|J| = n$ ,  $A^{(J)}$  regulär) weiterhin zulässig mit  $A^{(K)}(\hat{x} + \bar{x}) \leq b_K$ , und die Zielfunktion verändert sich gemäß

$$c^\top(\hat{x} + \bar{x}) = (b_J + \bar{b}_J)^\top \hat{y}_J = W + \bar{b}_J^\top \hat{y}_J.$$

Also gibt die Komponente  $\hat{y}_i$  an, welche direkte Auswirkung eine Vergrößerung der Schranke  $b_i$  auf den Zielwert hat.

**Geometrische Interpretation** Die nichttrivialen Werte  $\hat{y}_J$  der dualen Variablen erfüllen  $\hat{y}_J^\top A^{(J)} = c^\top$ ,  $y_J \geq 0$ . Geometrisch bedeutet das, dass der Zielgradient  $c$  konische Kombination der  $J$ -Zeilen von  $A$  ist, also in dem davon erzeugten Kegel liegt,  $c \in \text{keg}\{a^{(j)} : j \in J\}$ . Dies ist auch geometrisch klar, denn da die  $a^{(j)}$  die Normalen auf den Randflächen  $H_j$  des Polyeders  $X$  sind, würde andernfalls das Maximum überhaupt nicht in  $\hat{x}$  (schwarzer Punkt) angenommen. Verringert man im Bild ( $J = \{1, 2\}$ ) den Wert  $b_2$  etwas, entspricht



die neue Nebenbedingung der gestrichelten Ebene  $H'_2$  und der Optimalpunkt bewegt sich mit (offener Kreis). Der Wert  $c^\top x$  ändert sich aber nicht im gleichen Ausmaß, nur proportional zu  $y_2$ , da  $a^{(2)}$  im Bild nur einen kleineren Anteil an  $c$  hat.

**Ökonomische Interpretation** Man nennt die Komponenten  $\hat{y}_i$  der dualen Variablen auch *Schattenpreise*, da ihr Wert angibt, welchen Preis dem Nutzer eine Vergrößerung von  $b_i$  wert ist. Diese Interpretation läßt sich anhand der Beispiele aus §1.2 erläutern.

**Beispiel 3.2.2** Die *Produktionsplanung* hat die Standardform (LP2), wobei  $c_j$  den Preis für das Produkt  $P_j$  und  $b_i$  den Umfang der begrenzten Resource  $R_i$  angibt. Mit einer Lösung  $y$  des dualen Programms

$$\min b^\top y, \quad \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad y \geq 0,$$

kann  $y_i$  als innerer oder Schattenpreis der Resource  $R_i$  interpretiert werden. Nach der Vorüberlegung darf die (Vergrößerung der) Resource  $R_i$  höchstens diesen Preis  $y_i$  kosten, damit beim Verkauf ein Zugewinn bleibt. Das duale Programm bestimmt diese Preise so, dass der innere Gesamtpreis der verwendeten Ressourcen  $\sum_i b_i y_i = c^\top x$  beim Verkauf der Produkte ( $x_j$ ) exakt erzielt wird. Dabei unterschreitet der innere Einzelpreis  $\sum_i y_i a_{ij}$  von Produkt  $P_j$  nicht den beim Verkauf erzielten äußeren Preis  $c_j$ .

Die Folgerungen des Komplementaritätssatzes

$$\left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < b_i \Rightarrow y_i = 0 \right\}, \quad \left\{ \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} > c_j \Rightarrow x_j = 0 \right\}$$

können so interpretiert werden:

- Eine Resource, die nicht ausgeschöpft wird, ist im Überfluß vorhanden und bekommt den inneren Preis null
- Ein Produkt, dessen innerer Preis höher als der erzielbare ist, wird nicht hergestellt.

**Beispiel 3.2.3** Beim *Transportproblem* war  $s_i$  die Kapazität von Produzent  $P_i$  und  $r_j$  der Bedarf von Abnehmer  $V_j$ . Das duale Problem hat die Form

$$\max \left( \sum_{j=1}^n v_j r_j - \sum_{i=1}^m u_i s_i \right) : v_j - u_i \leq c_{ij}, u_i, v_j \geq 0.$$

Interpretiert man  $u_i$  als Herstellungspreis bei  $P_i$  und  $v_j$  als Abnahmepreis bei  $V_j$ , bedeutet diese Form, dass zwar der Gesamtgewinn  $\sum v_j r_j - \sum u_i s_i$  maximiert wird, aber die Gewinnspannen  $v_j - u_i$  im Einzelfall nicht über den Transportkosten  $c_{ij}$  liegen.

## 4 Simplex – Verfahren

### 4.1 Matrix – Umformungen

In den beiden letzten Kapiteln wurde mehrfach ausgenutzt, dass Ecken bzw. optimale Punkte durch quadratische Gleichungssysteme bestimmt sind (straffe Restriktionen). Ein zentraler Bestandteil von Optimierungsverfahren ist daher die Lösung von Gleichungssystemen. Allerdings treten in aufeinanderfolgenden Schritten nur wenig geänderte Systeme auf. Für diese werden oft Aktualisierungs-Formeln ('matrix update') benutzt. Bei Änderung einer Matrix durch eine andere, welche Rang 1 besitzt, kann die Inverse explizit angegeben werden.

**Satz 4.1.1** Die Matrix  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sei regulär, mit Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^m$  sei  $\beta := 1 + v^\top B^{-1}u \neq 0$ . Dann ist auch die Matrix  $B + uv^\top$  regulär und ihre Inverse ist

$$(B + uv^\top)^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{1 + v^\top B^{-1}u} B^{-1}uv^\top B^{-1}. \quad (4.1.1)$$

Wenn dabei nur in  $B$  die Spalte Nummer  $s \in \{1, \dots, m\}$  durch einen anderen Vektor  $a$  ersetzt wird, d.h.,  $v = e_s$  und  $u = a - b_s$  gilt, ist  $\beta = e_s^\top B^{-1}a$  und die Zeilen der Inversen ergeben sich aus

$$e_i^\top (B + ue_s^\top)^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e_s^\top B^{-1}, & i = s, \\ e_i^\top B^{-1} - \frac{1}{\beta} e_i^\top B^{-1}a e_s^\top B^{-1}, & i \neq s. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Bew

Einfacher ist die Formel (4.1.1) für den Fall  $B = I$  mit  $(I + uv^\top)^{-1} = I - \frac{1}{\beta} uv^\top$ ,  $\beta = 1 + v^\top u$ . Aber auch hieraus folgt schon die allgemeine Version, denn mit  $w^\top := v^\top B^{-1}$  ist

$$(B + uv^\top)^{-1} = \left( (I + uv^\top)B \right)^{-1} = B^{-1} \left( I - \frac{1}{\beta} uv^\top \right) = B^{-1} - \frac{1}{\beta} B^{-1}uv^\top B^{-1}.$$

Die Formel (4.1.2) wird in der klassischen Tabellenform des Simplexverfahrens (Handrechnung) benutzt, da der Rechenaufwand bei  $O(m^2)$  arithmetischen Operationen (FLOP: *F*loating *O*peration) liegt. Er aber den Nachteil, dass sich bei größeren Problemen und insbesondere für kleine Werte  $\beta$  *Rundungsfehler* ansammeln.

Für große (Computer-) Anwendungen greift man zur Lösung auf den *Gauß-Algorithmus* oder verwandte Methoden zurück. Auch dieser läßt sich so anpassen, dass geringfügige Änderungen der Matrix mit geringem Aufwand berücksichtigt werden können. Dazu ist es nützlich, die Zeilenumformungen im Gauß-Algorithmus als Matrixmultiplikation zu interpretieren. Mit  $z \in \mathbb{R}^m$  und  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  betrachtet man

$$L_j(z) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -z_{j+1} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -z_m & & & 1 \end{pmatrix}, \quad L_j(z)A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{j+1,1} - z_{j+1}a_{j1} & \dots & a_{j+1,n} - z_{j+1}a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - z_m a_{j1} & \dots & a_{mn} - z_m a_{jn} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $L_j$  beschreibt also den Effekt einer vollständigen Elimination in Spalte  $j$  und läßt sich auch kompakt in der Form  $L_j = I - ze_j^\top$  schreiben. Ihre Inverse ist nach (4.1.1) gegeben durch  $L_j^{-1} = I + ze_j$ . Beim Gauß-Algorithmus werden der Reihe nach Umformungen  $A \rightarrow L_1A \rightarrow L_2L_1A$  etc. angewendet, um die Matrix auf *obere Dreiecksgestalt* (Stufenform) zu bringen. Da Produkte von unteren Dreiecksmatrizen wieder solche Dreiecksmatrizen sind, kann das Ergebnis des Gauß-Algorithmus folgendermaßen zusammengefaßt werden.

**Satz 4.1.2** *Der einfache Gauß-Algorithmus, der die Matrix  $A = A_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \leq n$ , mit Zeilenumformungen  $A_{j+1} = (a_{ik}^{(j+1)}) := L_j(z^{(j)})A_j$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ , und*

$$z^{(j)} = \frac{1}{a_{jj}^{(j)}} \left( 0, \dots, 0, a_{j+1,j}^{(j)}, \dots, a_{mj}^{(j)} \right)^\top,$$

*in obere Dreiecksgestalt  $R := A_m$  überführt, erzeugt eine LR-Zerlegung der Matrix als Produkt einer unteren Dreiecksmatrix  $L = L_1^{-1} \dots L_{m-1}^{-1}$  und einer oberen  $R = A_m$ :*

$$A = LR, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ z_2^{(1)} & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ z_m^{(1)} & \dots & z_m^{(m-1)} & 1 & \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & \dots & \cdot & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & \dots & \cdot & r_{2n} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & r_{mm} & \cdot & r_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Die Berechnung der LR-Zerlegung hat einen Aufwand von i.w.  $(n - \frac{1}{3}m)m^2$  arithmetischen Operationen, also  $\frac{2}{3}m^3$  FLOP für  $m = n$ .*

Im Satz wurde implizit vorausgesetzt, dass die *Pivot-Elemente*  $a_{jj}^{(j)} = r_{jj}$ , durch welche dividiert wird, von Null verschieden sind. Bei einer Rechnung mit Maschinenzahlen endlicher Genauigkeit muß aber nicht nur der Fall  $a_{jj}^{(j)} = 0$  durch Zeilenvertauschungen vermieden werden, sondern auch die Verwendung kleiner Pivot-Werte  $a_{jj}^{(j)} \cong 0$ . Sonst zeigen sich die gleichen Probleme wie bei Verwendung der Rang-1-Formel (4.1.2).

Durch Berechnung einer LR-Zerlegung wird die Berechnung der Inversen absolut überflüssig. Denn mit der Zerlegung kostet die Auflösung eines quadratischen linearen Gleichungssystem  $Bx = c$  nur noch den Aufwand der Lösung von zwei gestaffelten (Dreieck-) Systemen:

$$x = B^{-1}c = R^{-1}L^{-1}c \iff Ly = c, \quad Rx = y.$$

Außerdem kann diese Auflösung ohne Zusatzvariable (am Platz) durchgeführt werden. Die folgenden Anweisungen überschreiben die rechte Seite  $c = (c_i)$  zunächst mit der Zwischenlösung  $y$ , dann mit der Gesamtlösung  $x$ :

$$\begin{array}{l} \text{löst } Ly = c, \quad c := y \\ \hline \text{für } i = 2 \text{ bis } m: \\ \quad \text{für } j = 1 \text{ bis } i - 1: \quad c_i := c_i - l_{ij}c_j; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{löst } Rx = c, \quad c := y \\ \hline \text{für } i = m \text{ abwärts bis } 1: \\ \quad \text{für } j = i + 1 \text{ bis } m: \quad c_i := c_i - r_{ij}c_j; \\ \quad c_i := c_i / r_{ii}; \end{array}$$

Der Rechenaufwand beträgt pro Teilsystem i.w.  $m^2$  Operationen. Damit ist der Gesamtaufwand zur Lösung von  $Bx = LRx = c$  mit  $2m^2$  Operationen *nicht höher* als die reine Multiplikation  $B^{-1}c$ , jeweils für jede neue rechte Seite  $c$

**Zeilenvertauschungen** bei einer  $m \times n$ -Matrix  $A$  können formal mit Hilfe einer Permutationsmatrix  $P \in \mathbb{B}^{m \times m}$  dargestellt werden. So wird etwa mit einer Permutation  $\pi$  die entsprechende Umordnung in  $A = (a_{ij})$  folgendermaßen bewirkt ( $\delta$ : Kronecker-Symbol):

$$A' = (a'_{kj}) = (a_{\pi(i),j}) \iff A' = PA, \quad P = \left( \delta_{\pi(i),j} \right)_{i,j=1}^m.$$

Permutationsmatrizen entstehen durch Vertauschungen bei der Einheitsmatrix und sind unitär,  $P^{-1} = P^T$  bewirkt die inverse Permutation. In der praktischen Realisierung bestimmt man vor Elimination der  $j$ -ten Spalte das betragsmaximale Element unterhalb von  $a_{jj}$  und tauscht dessen Zeile mit der  $j$ -ten. Dann sind alle Elemente von  $L$  betragsmäßig durch eins beschränkt. Die Permutationen protokolliert man dabei in einem Indexfeld  $P[1..m]$ , in dem alle Zeilenvertauschungen der Matrix  $A$  synchron durchgeführt werden. Der obige Satz 4.1.2 kann damit in folgender Weise verallgemeinert werden:

*Für jede reguläre Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  gibt es eine Permutationsmatrix  $P$  so, dass die LR-Zerlegung  $PA = LR$  existiert.*

**Beispiel 4.1.3** Die folgende Matrix  $A$  besitzt offensichtlich keine LR-Zerlegung, da schon das erste Pivotelement verschwindet,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Mit } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt aber

$$PA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = LR.$$

Bei Elimination der 2. Spalte wurde keine weitere Vertauschung durchgeführt. Da hier  $a_{22}^{(2)} = -\frac{1}{2}$  und  $a_{32}^{(2)} = 1$  gilt, wäre nach der Strategie des Spaltenmaximums eine Vertauschung der 2. und 3. Zeile günstig. Dann sind tatsächlich alle Beträge im  $L$ -Faktor nicht größer als eins.

**Anpassung der LR-Zerlegung** Der Aufwand bei einem Gauß-Eliminationsschritt, also der 'Multiplikation' mit einer Matrix  $L_j(z^{(j)})$  ist proportional zur Zahl der nichttrivialen Elemente von  $z^{(j)}$ , also der Anzahl solcher Elemente in der  $j$ -ten Spalte von  $B_j$ . Tauscht man in der (quadratischen) Matrix  $B$  mit  $B = LR$  wieder die Spalte  $s$  aus,  $C := B + ue_s^T$ ,  $u = a - b_s$ , tritt in  $L^{-1}C$  dort eine volle Spalte auf, deren Elimination (etwa bei  $s = 1$ ) fast den vollen Aufwand einer Neuzerlegung verursacht. Denn bei Elimination in Spalte  $s$  füllt sich der vorher freie Bereich hinter dieser Spalte i.a. vollständig auf! Dies läßt sich dadurch vermeiden, dass



## 4.2 Ecken und Nachbarn

Bei den numerischen Verfahren geht man vom Programm (LP3) aus

$$\max\{c^\top x : x \in X\}, \quad X := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\},$$

und betrachtet ohne Einschränkung den Fall  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{Rang}(A) = m < n$ . Denn für  $\text{Rang}(A) < m$  wäre der affine Unterraum  $U = \{x : Ax = b\}$  entweder leer, oder Gleichungen könnten entfernt werden. Das Simplexverfahren besucht nur die Ecken des Polyeders  $X$ , da ein Optimum auch in einer Ecke angenommen wird. Für kompaktes  $X$  folgt das aus Satz 2.3.4. Denn mit einer Maximalstelle  $\hat{x} \in X$  wo  $c^\top \hat{x} = \hat{W}$  gilt, ist die Hyperebene  $H(c, W)$ , auf der die Zielfunktion konstanten Wert hat, eine Stützhyperebene für  $X$ . Dann enthält die Randfläche  $X \cap H(c, W)$  auch eine Ecke, die also ebenfalls Maximalstelle ist.

Der zulässige Bereich  $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$  ist der Schnitt von  $U$  mit dem Positivkegel  $\mathbb{R}_+^n$ . Ecken  $x$  von  $X$  liegen auf dem Rand des Positivkegels, wo also ein Teil der Komponenten von  $x$  null ist. In diesem Zusammenhang sind folgende Bezeichnungen nützlich. Zu  $x \in \mathbb{R}^n$  sei

$$J^+(x) := \{i : x_i > 0\}, \quad J^-(x) := \{i : x_i < 0\}, \quad J(x) := J^-(x) \cup J^+(x)$$

die Menge der (positiven, negativen bzw. gesamten) *Stützindizes* von  $x$ . Für  $x \geq 0$  ist  $J(x) = J^+(x)$ . Zu  $J = \{j_1, \dots, j_\ell\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,  $|J| = \ell$ , wird folgende Untermatrix aus *Spalten*  $a_j = Ae_j$  von  $A$  eingeführt

$$A_J = (a_{j_1}, \dots, a_{j_\ell}) \in \mathbb{R}^{m \times \ell}.$$

Die verschwindenden Komponenten von  $x$  (und die betroffenen Matrixspalten) können aus dem Gleichungssystem  $Ax = b$  entfernt werden. Denn mit  $J = J(x)$  und  $K = \{1, \dots, n\} \setminus J$  gilt (etwa nach geeigneter Umordnung) mit  $A = (A_J, A_K)$ ,  $x^\top = (x_J^\top, x_K^\top)$ :

$$b = Ax = (A_J, A_K) \begin{pmatrix} x_J \\ x_K \end{pmatrix} = A_J x_J + A_K x_K \iff A_J x_J = b, \quad x_K = 0. \quad (4.2.1)$$

Daher ist die Charakterisierung von *Ecken* dual zu der beim Programm (LP1), vgl. Satz 2.4.3 und (3.1.1). Im Unterschied zu (LP1) besitzt ein konsistentes Problem (LP3) immer eine Ecke. Eine triviale, aber wichtige Schlußweise wird im folgenden häufig benutzt:

$$x, y, z \in \mathbb{R}_+^n, \quad x = \frac{1}{2}(y + z) \Rightarrow J(y), J(z) \subseteq J(x).$$

**Satz 4.2.1** a) Ein Element  $\bar{x} \in X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$  ist genau dann Ecke von  $X$ , wenn  $\{a_i : i \in J(\bar{x})\}$  linear unabhängig ist, also  $\text{rang}(A_{J(\bar{x})}) = |J(\bar{x})|$  gilt.

b) Wenn (LP3) eine Lösung besitzt, ist auch eine Ecke von  $X$  Lösung. Bew

Wenn  $A_J$ ,  $|J| = \ell$ , maximalen Rang  $\ell \leq m$  besitzt, läßt sich das System (4.2.1) in einer Ecke so erweitern, dass  $\bar{x}$  sogar die eindeutige Lösung wird:

$$\begin{pmatrix} A_J & A_K \\ 0 & I_{n-\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_J \\ \bar{x}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Der Rang der Gesamtmatrix mit Dimension  $(m + n - \ell) \times n$  ist  $\text{rang}(A_J) + n - \ell$ , das System also eindeutig lösbar für  $\text{Rang}(A_J) = \ell$ .

**Definition 4.2.2** Ein  $\bar{x} \in X$  heißt Basislösung, wenn  $\text{Rang}(A_{J(\bar{x})}) = |J(\bar{x})| (\leq m)$  ist. Für  $\text{Rang}(A_{J(\bar{x})}) = |J(\bar{x})| < m$  nennt man  $\bar{x}$  ausgeartete Basislösung. Umgekehrt heißt jede  $m \times m$ -Untermatrix  $B = A_J$  mit  $|J| = m$  Basis, wenn sie regulär ist,  $\det(B) \neq 0$ .

Bei jeder ausgearteten Basislösung (Ecke)  $\bar{x}$  kann  $A_{J(\bar{x})}$  mit geeigneten Spalten von  $A_K$  zu einer Basis  $B = A_J, J \supseteq J(x)$ , ergänzt werden. Daher gehören zu einer ausgearteten Ecke verschiedene Basen. Dies kann im Simplexverfahren zu Problemen führen, dieses Verfahren nicht durch die Orte  $\bar{x}$  sondern die zugehörigen Basen  $B$  gesteuert wird ( $\rightarrow$  läuft im Kreis). Zu jeder Basis  $B = A_J$  gehört nach (4.2.1) eine Lösung  $\bar{x}_J = A_J^{-1}b, \bar{x}_K = 0$ , die aber nur für  $A_J^{-1}b \geq 0$  auch zulässig, also 'Basislösung' ist.

**Basisdarstellung von  $X$ :** Zu jeder Ecke  $\bar{x}$  von  $X$  gibt es eine Basis  $B = A_J$  mit  $A_J\bar{x}_J = b, \bar{x}_K = 0, J \cup K = \{1, \dots, n\}$ . Aber nicht nur dieser spezielle Punkt, sondern jeder Punkt  $x \in X$  kann mit Hilfe dieser Basis dargestellt werden. Analog zu (4.2.1) wird von der Aufteilung der Gesamtmatrix  $A = (A_J, A_K)$  ausgegangen. Da  $A_J^{-1}$  existiert, gilt also

$$Ax = A_Jx_J + A_Kx_K = b \iff x_J = A_J^{-1}b - A_J^{-1}A_Kx_K = \bar{x}_J - A_J^{-1}A_Kx_K. \quad (4.2.3)$$

Dies ist die aus der Linearen Algebra bekannte Parameterdarstellung des Lösungsraums  $U$  mit den Variablen  $x_K \geq 0$  als 'freien' und den  $x_J$  als 'abhängigen' Variablen und der speziellen Lösung  $\bar{x}$ . Nach Einführung von  $n - m = |K|$  echten Parametern  $\lambda_K \geq 0$  heißt das also

$$Ax = b, x \geq 0 \iff x = \begin{pmatrix} x_J \\ x_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_J \\ 0_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_J^{-1}A_K \\ I_{n-m} \end{pmatrix} \lambda_K = \bar{x} + V_K \lambda_K \geq 0. \quad (4.2.4)$$

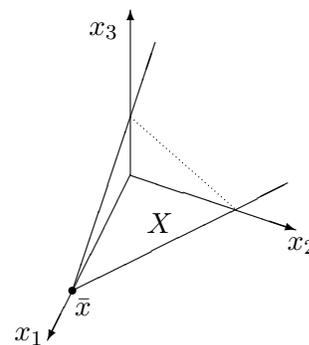
Im letzten Schritt wurde die Abkürzung

$$\begin{pmatrix} -A_J^{-1}A_K \\ I_{n-m} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} V_K^{(J)} \\ V_K^{(K)} \end{pmatrix} = V_K = (v_{i,k_j}) \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}, \text{ mit } k_j \in K$$

benutzt. Die Spalten von  $V$  sind trivialerweise linear unabhängig und bilden eine Basis von  $\text{kern}(A)$ . In einer Umgebung der Ecke  $\bar{x}$  sieht das Polyeder  $X$  also aus wie ein verschobener Kegel, denn nach (4.2.4) liegt  $x - \bar{x}$  im Kegel

$$x - \bar{x} \in V_K \cdot \mathbb{R}_+^{n-m} \quad \text{und } x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Im Bild befindet sich, von  $\bar{x}$  aus gesehen, der Bereich  $X$  in dem durch die beiden Kanten gegebenen Kegel, der allerdings an der gepunkteten Linie den Positivkegel  $\mathbb{R}_+^3$  verläßt.



Die Richtungen der von  $\bar{x}$  ausgehenden Kanten werden durch Spalten von  $V$  beschrieben. Dazu wird zu festem  $\ell \in K$  der Strahl

$$x(t) := \bar{x} + tv_\ell \iff \begin{cases} x_J(t) = \bar{x}_J - tA_J^{-1}a_\ell \\ x_k(t) = t\delta_{k\ell}, \quad k \in K, \end{cases} \quad (4.2.5)$$

betrachtet. Da diese Vektoren die Gestalt (4.2.4) haben, ist  $Ax(t) \equiv b$  automatisch erfüllt. Zu prüfen bleibt nur das Vorzeichen  $x(t) \geq 0$  für kleine Werte  $t > 0$ . Der mögliche Fall ausgearteter Ecken ( $J(\bar{x}) \neq J$ ) kompliziert die Voraussetzungen des folgenden Satzes.

**Satz 4.2.3** *Es sei  $A_J$  Basis mit Basislösung  $\bar{x}$ . Für  $\ell \in K$  und den Spaltenvektor  $v_\ell$  der Matrix  $V_K$  aus (4.2.4) gelte*

$$J^-(v_\ell) \subseteq J(\bar{x}), \quad \text{d.h. } v_{i\ell} < 0 \Rightarrow x_i > 0 \quad \forall i \in J.$$

Dann ist  $\{\bar{x} + tv_\ell : t \geq 0\} \cap X$  Kante von  $X$ .

Bew

Durch Einsetzen der Basisdarstellung (4.2.3) in die Zielfunktion und Berücksichtigung von Satz 4.2.3 können wichtige Aussagen zur Bedeutung einer Ecke getroffen werden. Mit einer Ecke  $\bar{x}$  und zugehöriger Basis  $A_J$  gilt für beliebige  $x \in X$

$$\begin{aligned} c^\top x &= c_J^\top x_J + c_K^\top x_K \stackrel{(4.2.3)}{=} c_J^\top (\bar{x}_J - A_J^{-1}A_K x_K) + c_K^\top x_K \\ &= c_J^\top \bar{x}_J + \left( c_K^\top - c_J^\top A_J^{-1}A_K \right) x_K = c^\top \bar{x} + \gamma_K^\top x_K. \end{aligned}$$

Da  $c^\top \bar{x}$  der Zielwert in der aktuellen Ecke ist, beschreibt der  $n$ -Vektor

$$\gamma^\top := c^\top - c_J^\top A_J^{-1}A \quad \text{mit} \quad \gamma_K^\top = c_K^\top - c_J^\top A_J^{-1}A_K = c^\top V_K \quad (4.2.6)$$

der sogenannten *reduzierten Gewinne*, wie sich die Zielfunktion bei Vergrößerung der Nichtbasis-Variablen  $x_K$  ändert. Es gilt  $\gamma_J = 0$ .

**Satz 4.2.4 (Optimalität)** *Gegeben sei eine Basis  $A_J$  mit Basislösung  $\bar{x}$ . Wenn alle reduzierten Gewinne nicht-positiv sind,  $\gamma \leq 0$ , dann ist  $\bar{x}$  (Maximal-) Lösung von (LP3).*

Bew

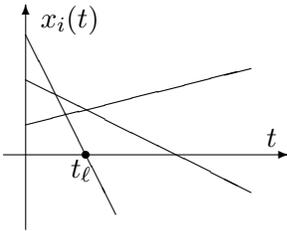
Bezogen auf die Ecke  $\bar{x}$  ist das Kriterium nur hinreichend, da zu einer ausgearteten Ecke verschiedene Basen existieren können, die nicht alle das Optimalitätskriterium erfüllen.

Wenn also positive Gewinne  $\gamma_\ell > 0$  existieren, kann die Zielfunktion evtl. noch vergrößert werden, indem man auf einem Strahl (4.2.5) entlangläuft. Wenn dieser Strahl ganz in  $X$  liegt, d.h.,  $v_\ell \in O^+(X)$  gilt, existiert keine Lösung für (LP3).

**Satz 4.2.5 (Unbeschränktheit)** *Gegeben sei eine Basis  $A_J$  mit Basislösung  $\bar{x}$ . Wenn für ein  $\ell \in K$  gilt  $\gamma_\ell > 0$  und  $v_\ell \geq 0$ , ist (LP3) unbeschränkt.*

Bew

Wenn umgekehrt  $v_\ell \not\geq 0$  gilt, kann man dem Strahl (4.2.5) nur ein endliches Stück weit folgen, ohne den zulässigen Bereich  $X$  zu verlassen. Der Grenzpunkt (vor dem Verlassen von  $X$ ) ist wieder eine Ecke. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.2.3 ist dieses eine *Nachbarecke*, welche mit der aktuellen durch eine Kante positiver Länge verbunden ist. Die Zulässigkeit von (4.2.5)



erfordert mit  $t \geq 0$ :

$$x_i(t) = \bar{x}_i + tv_{i\ell} \geq 0 \quad \forall i \in J.$$

Der hier bei  $t$  maximal zulässige Wert ergibt sich daher zu

$$t_\ell := \min\left\{\frac{\bar{x}_i}{-v_{i\ell}} : i \in J, v_{i\ell} < 0\right\} = \frac{\bar{x}_p}{-v_{p\ell}} \geq 0. \quad (4.2.7)$$

Dieser Wert wurde gerade so bestimmt, dass eine Komponente  $x_p(t_\ell) = 0$  wird mit dem Index  $p \in J$ , in dem das Minimum angenommen wird. Für eine nicht ausgeartete Ecke ist  $\bar{x}_J > 0$  und daher  $t_\ell > 0$ , im neuen Punkt ist nun die Komponente  $x_\ell(t_\ell) > 0$ , es gilt also  $J(x(t_\ell)) = J \setminus \{p\} \cup \{\ell\}$ . Dieser Punkt gehört somit zu einer neuen Basis.

**Satz 4.2.6 (Basiswechsel)** Gegeben sei eine Basis  $B = A_J$  mit Basislösung  $\bar{x}$ . Für  $\ell \notin J$  sei

$$\gamma_\ell = c^\top v_\ell > 0 \quad \text{und} \quad v_\ell \not\geq 0.$$

Es sei  $p \in J$  ein Index, in dem das Minimum in (4.2.7) angenommen wird, und  $J' := J \setminus \{p\} \cup \{\ell\}$ . Dann ist  $B' = A_{J'}$  neue Basis mit Basislösung  $x' = x(t_\ell)$ , d.h.  $x'_{J'} = (B')^{-1}b \geq 0$ , und neuem Zielfunktionswert  $c^\top x' \geq c^\top \bar{x}$ . Die echte Ungleichung ' $>$ ' gilt hier, wenn  $t_\ell > 0$  ist in (4.2.7).

**Beweis** Es sei  $s$  die Position von  $a_p$  in  $B$ ,  $a_p = B e_s$ . Die neue Spalte  $a_\ell$  werde bei  $B'$  an dieser Stelle eingefügt, es gilt also  $B' = B + (a_\ell - a_p)e_s^\top$  und  $B' e_s = a_\ell$ . Für die Anwendung der Rang-1-Formel (4.1.2) ist erforderlich

$$0 \neq \beta = e_s^\top B^{-1} a_\ell = e_p^\top A_J^{-1} a_\ell = -v_{p\ell} > 0.$$

Denn die Zeile  $p$  von  $A_J^{-1}$  steht bei  $B^{-1}$  in Zeile  $s$ , und  $v_{p\ell} < 0$  ist das Element, das den Wert  $t_\ell$  bestimmt. Also ist  $B'$  regulär. Die zu  $B'$  gehörige Basislösung  $x'$  kann ebenfalls mit (4.1.2) bestimmt werden, es gilt mit  $A_J^{-1} a_\ell = -v_\ell$  und der Definition von  $t_\ell$ :

$$\begin{aligned} x'_\ell &= e_s^\top (B')^{-1} b = \frac{1}{\beta} e_s^\top B^{-1} b = \frac{1}{\beta} \bar{x}_p = t_\ell, \\ x'_i &= e_i^\top A_J^{-1} b - \frac{1}{\beta} v_{i\ell} \bar{x}_p = \bar{x}_i + t_\ell v_{i\ell}, \quad i \in J. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $x'_p = 0$ . Die Zielfunktion im neuen Punkt  $x'$  ergibt sich demnach zu

$$c^\top x' = c^\top \bar{x} + t_\ell (c_\ell + \sum_{i \in J} c_i v_{i\ell}) = c^\top \bar{x} + t_\ell \underbrace{c^\top v_\ell}_{\gamma_\ell > 0} \geq c^\top \bar{x}.$$

Für  $t_\ell > 0$  (d.h.  $\bar{x}_J > 0$ ) tritt hier ein positiver Zuwachs  $t_\ell \gamma_\ell > 0$  auf. ■

### 4.3 Das revidierte Simplex-Verfahren

In der Ecke  $\bar{x}$  mit Basis  $A_J$  charakterisiert der Vektor  $\gamma$  der reduzierten Gewinne alle diejenigen Richtungen, in der die Zielfunktion wächst, für die nämlich  $\gamma_K^\top x_K > 0$  bei  $x_K \geq 0$  gilt. Eine aus Kostengründen wichtige Einschränkung im Simplexverfahren ist dabei, dass man in jedem Schritt nur eine einzige Komponente  $x_\ell$  vom aktuellen Vektor  $\bar{x}_K = 0$  aus vergrößert mit nicht fallender Zielfunktion. Daher besteht der Ablauf (ausgehend von einer Startecke) grob aus folgenden Schritten:

1. Berechne  $\bar{x}_J$  und  $\gamma_K$  zu  $K = \{1, \dots, n\} \setminus J$ ,
2. suche  $\gamma_\ell > 0$ ,  $\ell \in K$ ,
3. wenn aber  $\gamma_K \leq 0$ , nach S. 4.2.4 \_\_\_\_\_: OPTIMUM!,
4. wenn  $v_\ell \geq 0$ , nach S. 4.2.5 \_\_\_\_\_: UNBESCHRÄNKT!
5. bestimme Minimalindex  $p$ ,  $v_{p\ell} < 0$ , in (4.2.7),
6. Basiswechsel zu  $J := J \setminus \{p\} \cup \{\ell\}$ .

Aus Effizienzgründen ist darauf zu achten, dass die zur Durchführung erforderlichen Berechnungen nicht zu teuer sind. Benötigt werden dabei die Größen

$$\gamma_K = c_K^\top - (c_J^\top A_J^{-1}) A_K, \quad I^{(J)} v_\ell = -A_J^{-1} a_\ell, \quad \bar{x}_J = A_J^{-1} b.$$

Wenn die Berechnung von  $\gamma_K$  in der angegebenen Weise geklammert wird, mit  $y^\top := c_J^\top A_J^{-1}$ , kostet die Bestimmung der drei Lösungen

$$y^\top A_J = c_J^\top, \quad A_J v_\ell^{(J)} = -a_\ell, \quad A_J \bar{x}_J = b,$$

bei vorhandener LR-Zerlegung  $A_J = LR$  nur einen Aufwand von höchstens  $6m^2$  Operationen. Außerdem kann diese LR-Zerlegung mit der Technik aus §4.1 mit einem  $O(m^2)$ -Aufwand zu einer Zerlegung von  $A_{J'}$ ,  $J' = J \setminus \{p\} \cup \{\ell\}$ , korrigiert werden. Bei großen praktischen Problemen hat die Matrix  $A$  meist nur wenige nichttriviale Einträge. Bei solchen 'dünn besetzten' Matrizen können die genannten Auflösungen bzw. Anpassungen oft mit geringerem Aufwand durchgeführt werden. Die Dimension  $n > m$  geht nur bei  $\gamma_K = c_K^\top - y^\top A_K$  in Schritt 2 ein, der Aufwand wäre hier  $2m(n - m)$  Operationen, wenn alle Komponenten bestimmt würden. Man muss aber nur einen Teil der  $\gamma_j$  berechnen, wenn man das *erste*  $\gamma_\ell > 0$  akzeptiert.

#### Simplex-Algorithmus

Eingabe:	Zulässige Basis $A_J$ , $J \subseteq \{1, \dots, n\}$
Schritt 1	$x_J := A_J^{-1} b$ , $y^\top := c_J^\top A_J^{-1}$ , $K := \{1, \dots, n\} \setminus J$ ,
2	suche $\gamma_\ell > 0$ unter $\gamma_j := c_j - y^\top a_j$ , $j \in K$ .
3	wenn $\gamma_j \leq 0 \forall j \in K$ : _____ <b>STOP</b> , Optimum!
4	$v_\ell^{(J)} := -A_J^{-1} a_\ell$ , wenn $v_{i\ell} \geq 0 \forall i \in J$ : _____ <b>STOP</b> , unbeschränkt!
5	Bestimme $p \in J$ : $-x_p/v_{p\ell} = \min\{-x_i/v_{i\ell} : v_{i\ell} < 0, i \in J\} = t_\ell$
6	$J := J \setminus \{p\} \cup \{\ell\}$ , weiter mit 1

**Beispiel 4.3.1** Simplexverfahren mit  $m = 3$ ,  $n = 6$  bei (LP3) mit  $c^T = (9, 6, 7, 0, 0, 0)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Das Problem ist aus einem (LP2) durch Einführung von Schlupfvariablen entstanden. Hier bekommt man mit  $J = \{4, 5, 6\}$  eine Startbasis  $A_J = I_3$  mit Basislösung  $\bar{x}_J = b$ . Simplex-Basen:

B-1 1.  $J = \{4, 5, 6\}$ ,  $A_J = I$ ,  $\bar{x}_J = \begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 40 \end{pmatrix}$ ,  $y^T = 0^T$ ,  $\gamma_K^T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (9, \underline{6}, 7)$ .

2+4. wähle  $\ell = 2$ :  $v_2^{(J)} = \begin{pmatrix} v_{42} \\ v_{52} \\ v_{62} \end{pmatrix} = -Ia_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,

5. (4.2.7):  $\left. \begin{array}{l} x_4(t) = 20 - t \geq 0 \\ x_5(t) = \underline{11 - t} \geq 0 \\ x_6(t) = 40 - 3t \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t_2 = 11, p = 5.$

B-2 1.  $J = \{2, 4, 6\}$ ,  $A_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{x}_J = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,

$y^T = (c_2, c_4, c_6)A_J^{-1} = (0, 6, 0)$ ,  $\gamma_K^T = (c_1, c_3, c_5) - (0, 6, 0) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = (\underline{3}, 1, -6)$ .

2+4. wähle  $\ell = 1$ :  $v_1^{(J)} = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{41} \\ v_{61} \end{pmatrix} = -A_J^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

5. (4.2.7):  $\left. \begin{array}{l} x_2(t) = 11 - t \geq 0 \\ x_4(t) = \underline{9 - 2t} \geq 0 \\ x_6(t) = 7 - t \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t_1 = \frac{9}{2}, p = 4.$

B-3 1.  $J = \{1, 2, 6\}$ ,  $A_J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_J^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{x}_J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,

$y^T = (c_1, c_2, c_6)A_J^{-1} = \frac{1}{2}(3, 9, 0)$ ,  $\gamma_K^T = (c_3, c_4, c_5) - \frac{1}{2}(3, 9, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{9}{2})$ .

3.  $\gamma_K < 0$ ,  $\bar{x}_J > 0$ : eindeutiges Maximum!

Beim Simplex-Algorithmus gibt es noch zwei offene Fragen, die später behandelt werden:

- Bestimmung einer Start-Basis bzw. -Ecke (Anlaufrechnung, vgl. §4.5)
- Der Algorithmus ist endlich, wenn Basen *nicht* wiederholt auftreten.

Da nach Satz (4.2.1) nur endlich viele Ecken (Basen) existieren, ist nur beim 'Kreisen' des Simplex-Verfahrens, d.h., zyklischer Wiederholung von Basen, dessen Beendigung nicht garantiert. Dieses Problem tritt aber nur in ausgearteten Ecken auf, in normalen Ecken  $\bar{x}$  mit  $|J(\bar{x})| = m$  gibt es beim Basiswechsel nach Satz 4.2.6 dagegen einen echten Zuwachs der Zielfunktion, was eine Rückkehr zu  $\bar{x}$  ausschließt. Ausgeartete Ecken  $\bar{x}$  treten eher selten auf (nicht-generischer Fall), wenn  $\bar{x}$  'zufälligerweise' auf mehr als  $n - m$  Hyperebenen  $H(a^{(i)}, b_i)$  bzw.  $\{x : x_j = 0\}$  liegt. Vor allem bei Problemen mit (kleinen) ganzzahligen Koeffizienten ist der Fall aber nicht auszuschließen. Das Kreisen kann durch Zusatzmaßnahmen verhindert werden (s.u.).

**Gesamtaufwand des Simplex-Verfahrens** Der einzelne Simplex-Schritt, der im Algorithmus formuliert wurde, ist zwar effizient durchführbar mit einem Aufwand von  $O(m(m+n))$  Operationen. Der Gesamtaufwand hängt aber von der Anzahl der untersuchten Ecken ab und kann durch Änderungen bei den Auswahlentscheidungen in Schritt 2 und 5 im Einzelfall verbessert werden. Unglücklicherweise fallen aber generelle Aussagen zur Anzahl der zu untersuchenden Basen eher negativ aus.

**Beispiel 4.3.2** (Klee-Minty) Zu  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$  betrachte man

$$\begin{aligned} & \max\{e_n^\top x : x \in X\}, \\ & X := \{x : 0 \leq x_1 \leq 1, \epsilon x_i \leq x_{i+1} \leq 1 - \epsilon x_i, i = 1, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Es läßt sich zeigen, dass das Polyeder  $X$  genau  $2^n$  Ecken besitzt, und einen Simplexpfad, der alle besucht. Dieses Problem kann auch nicht durch verbesserte Auswahlstrategien umgangen werden, auch dafür gibt es meist Gegenbeispiele mit exponentiellem Aufwand. In der Praxis arbeitet das Simplexverfahren aber sehr effizient, bei genügend allgemeiner Verteilung der Restriktionen ist beim Problem (LP1) im Mittel mit  $O(n^{-1/\sqrt{m}} \cdot n^3)$  Schritten zu rechnen.

#### 4.4 Tabellenform des Simplex-Verfahrens

Beim revidierten Simplexverfahren werden nur die für die Durchführung der einzelnen Schritte erforderlichen Größen berechnet. Der dafür erforderliche Verwaltungsaufwand (Indexmenge  $J$ ) ist nur gering, für Handrechnung aber irritierend. In der Tabellenform des Simplexverfahrens wird immer das gesamte System umgeformt und notiert in der ursprünglichen Reihenfolge der Spalten,  $H := A_J^{-1}A$ . Dieses System  $Hx \doteq A_J^{-1}Ax = A_J^{-1}b = \bar{x}_J$  wird ergänzt durch  $W = c^\top \bar{x}$ ,  $\gamma^\top = c^\top - c_J^\top A_J^{-1}A$  und als Tableau geschrieben in der Form

$$\left( \begin{array}{c|c} -c^\top \bar{x} & c^\top - c_J^\top A_J^{-1}A \\ \hline A_J^{-1}b & A_J^{-1}A \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} -W & \gamma^\top \\ \bar{x}_J & H \end{array} \right) =: \bar{H} = (h_{ij})_{i,j=0}^{m,n}. \quad (4.4.1)$$

Die zusätzlichen Daten werden also als nullte Zeile und Spalte des Tableaus geführt. Wegen  $H_J \doteq A_J^{-1}A_J = I$  stehen in den Spalten zu Basisindizes  $j \in J$  Einheitsvektoren, dort gilt  $\gamma_j = 0$  und  $He_j \in \{e_1, \dots, e_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ . Zur Vereinfachung der folgenden Regeln wird zur Indizierung der Zeilen von  $H$  die Position  $i$  und nicht der Basisindex  $j_i$  aus  $J = \{j_1, \dots, j_m\}$  verwendet. Die Zugehörigkeit der Komponenten aus der nullten Spalte  $(h_{i0}) = \bar{x}_J$  (Steuerspalte) wird durch die Position der Einheitsvektoren hergestellt, es gilt  $h_{i0} = x_{j_i}$  und  $e_i$  steht in Spalte  $j_i$  von  $H$ . In der nullten 'Steuerzeile' stehen die reduzierten Gewinne  $h_{0j} = \gamma_j, j \geq 1$ . Der aktuelle Zielfunktionswert wird negativ in  $h_{00} = -c_0^T \bar{x}_J$  notiert, dann gilt mit  $c_0 := 0$  in der nullten Zeile die einheitliche Vorschrift  $h_{0j} = c_j - \sum_i c_{j_i} h_{ij}, j = 0, \dots, n$ .

So kann nämlich ein Basiswechsel zu dem Tableau, das zur Basis  $A_{J'}$  mit  $J' = J \setminus \{p\} \cup \{\ell\}$  gehört, durch Anwendung der Rang-1-Formel (4.1.2) auf das *Gesamtttableau*  $\bar{H}$  durchgeführt werden. Für  $p = j_s$  entspricht das "Pivot-Element"  $h_{s\ell} = -v_{p\ell}$ . Die Formeln für den Basiswechsel lauten einheitlich für alle Daten:

$$\left. \begin{aligned} h'_{sj} &= \frac{h_{sj}}{h_{s\ell}}, \\ h'_{ij} &= h_{ij} - h_{i\ell} h'_{sj}, \quad i \in \{0, \dots, m\} \setminus \{s\} \end{aligned} \right\} j = 0, \dots, n. \quad (4.4.2)$$

Hier wurde insbesondere zur Vereinfachung berücksichtigt, dass bei der Korrektur für  $i \neq s$  die auftretenden Quotienten  $h_{sj}/h_{s\ell}$  schon in Zeile  $s$  berechnet wurden.

**Satz 4.4.1** *Es sei  $\bar{H}$  das Simplex-Tableau (4.4.1) zur zulässigen Basis  $A_J$ . Dann wird der Übergang zum Tableau  $\bar{H}'$  zur Basis  $A_{J'}$  mit  $J' = J \setminus \{j_s\} \cup \{\ell\}$ ,  $h_{s\ell} \neq 0$ , durch (4.4.2) hergestellt.* Bew

Damit läßt sich das Tableau-Verfahren angeben (Numerierung wie in §4.3). Die Formulierung nimmt dabei keinerlei Bezug auf die Bedeutung der Zeilenindizes.

#### Simplex-Tableau-Verfahren

Eingabe:	Zulässiges Tableau $\bar{H}$
2	suche $h_{0\ell} > 0, 1 \leq \ell \leq n$ ,
3	wenn $h_{0j} \leq 0 \forall 1 \leq j \leq n$ : _____ <b>STOP</b> , Optimum!
4	wenn $h_{i\ell} \leq 0 \forall 1 \leq i \leq m$ : _____ <b>STOP</b> , unbeschränkt!
5	Bestimme $s$ : $h_{s0}/h_{s\ell} = \min\{h_{i0}/h_{i\ell} : h_{i\ell} > 0, 1 \leq i \leq m\}$
6	Basiswechsel nach (4.4.2), weiter mit 2

**Beispiel 4.4.2** Mit dem Ablauf aus Beispiel 4.3.1 bekommt man beim Tableauperfahren folgende Tabellen. In den Steuer-Zeilen und -Spalten ist jeweils das ausgewählte Element  $h_{0\ell} = \gamma_\ell$  bzw.  $h_{0s} = \bar{x}_p, p = j_s$ , unterstrichen, außerdem wurde das Pivotelement für den Basiswechsel eingerahmt. Unter den Tabellen ist die Position der Basisindizes angegeben. Das erste Tableau

ist zulässig, das dritte Tableau optimal, da keine positiven Gewinne mehr auftreten.

0	9	<u>6</u>	7	0	0	0	-66	<u>3</u>	0	1	0	-6	0	$-\frac{159}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0
20	3	1	2	1	0	0	<u>9</u>	<u>2</u>	0	1	1	-1	0	$\frac{9}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
<u>11</u>	1	<u>1</u>	1	0	1	0	11	1	1	1	0	1	0	$\frac{13}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
40	4	3	4	0	0	1	7	1	0	1	0	-3	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1
$J :$			$j_1$	$j_2$	$j_3$				$j_2$	$j_1$	$j_3$				$j_1$	$j_2$				$j_3$

Das Tabellenverfahren hat den vordergründigen Vorteil (für Handrechnung), dass der Basiswechsel mit einer einheitlichen Vorschrift für alle Daten des Linearen Programms durchgeführt werden kann. Für große Probleme besteht aber der wesentliche Nachteil, dass immer wieder die ganze Matrix umgeformt (und damit zerstört) wird und sich die Pivotwahl nicht nach der Größe von  $h_{s\ell}$  richtet. Daher besteht die Gefahr des Ansammelns von Rundungsfehlern, und der Aufwand für einen Schritt ist immer  $(2m + 1)(n + 1)$  Operationen.

#### 4.5 Anlaufrechnung

Das Simplexverfahren setzt die Kenntnis einer Ecke des zulässigen Bereichs voraus. Eine Startecke konstruiert man durch Betrachtung von Hilfsproblemen, welche die gleichen Restriktionen, aber eine andere Zielfunktion verwenden.

#### Zwei-Phasen-Methode

Diese basiert auf der Beobachtung, dass man beim Übergang von einem Problem (LP2) mit  $b \geq 0$  zur Form (LP3) durch Einführung von Schlupfvariablen direkt eine Startbasis angeben kann (vgl. Beispiel 4.3.1). Diese Kenntnis nutzt man beim Problem (LP3)

$$\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}, \quad b \geq 0 \text{ (oBdA)}.$$

Da  $b$  die rechte Seite eines Gleichungssystems ist, ist die Vorzeichenbedingung an die  $b_i$  keine Einschränkung. Zu (LP3) wird nun das Hilfsproblem (Phase I)

$$\max(-\mathbf{1}^T y) : Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0, \quad (4.5.1)$$

mit der Matrix  $D := (A, I_m) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$  betrachtet. Die Variablen können zu einem Vektor  $z^T = (x^T, y^T)$  zusammengefaßt werden. Mit  $J = \{n + 1, \dots, n + m\}$  ist  $D_J = I_m$  eine Basis und die Basislösung  $\bar{z}_J = \bar{y} = b \geq 0$  zulässig. Die neue Zielfunktion  $-\mathbf{1}^T y = -\sum_{i=1}^m y_i \leq 0$  ist eine *Straffunktion*, sie 'bestraft' die künstlichen Schlupfvariablen und ist nach oben beschränkt, das Hilfsproblem also lösbar. Nun sei  $\hat{z}^T = (\hat{x}^T, \hat{y}^T)$  eine Lösung, die das Verfahren mit der Indexmenge  $J \subseteq \{1, \dots, n + m\}$  bestimmt hat.

Fallunterscheidung:

- a)  $\hat{y} \neq 0$ : Das Ausgangsproblem (LP3) ist inkonsistent.  
 b)  $\hat{y} = 0$ :  $\hat{x}$  ist zulässig bei (LP3), dabei  
 b1)  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ :  $A_J$  bildet eine zulässige Basis für (LP3).  
 b2)  $J \not\subseteq \{1, \dots, n\}$ :  $P := J \cap \{n+1, \dots, n+m\} \neq \emptyset$ , für  $p = j_s \in P$  ist  $\hat{z}_p = \hat{y}_{p-n} = h_{s0} = 0$  und ein Austauschschritt mit Pivot  $h_{s\ell} = -v_{p\ell} \neq 0$ ,  $\ell \in \{1, \dots, n\} \setminus J$  ändert nicht die Ecke  $\hat{z}$ , verkleinert aber  $P$ . Wenn bei  $P \neq \emptyset$  kein Austausch mehr möglich ist, gilt also  $h_{sj} = -v_{pj} = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  und die Matrix  $D_J^{-1}A$  hat eine Nullzeile,  $A$  also einen Rangdefekt. Dann kann Zeile  $p-n$  (zur Schlupfvariable  $z_p$ ) aus  $A$  entfernt werden, da deren Koeffizient in der Linearkombination dieser Nullzeile 1 ist.

Im Fall b) kann die Rechnung mit dem Simplex-Verfahren aus §4.3 fortgesetzt werden, für das Tabellenverfahren aus §4.4 ist dazu die Steuerzeile aus  $c$  neu zu berechnen.

Wenn das Ausgangsproblem (LP3) selbst schon Schlupfvariable enthält in Gleichungen mit  $b_i \geq 0$ , muß an dieser Stelle nicht noch eine weitere eingeführt werden.  $\rightarrow$

### Groß-M-Methode

Das Umschalten von Phase I auf Phase II (Originalproblem) erspart man sich, wenn man in (4.5.1) die gemischte Zielfunktion

$$c^T x - M \mathbb{1}^T y = (c^T, -M \mathbb{1}^T) z$$

mit einer "genügend großen" Konstanten  $M$  betrachtet. Diese muß die künstlichen Variablen  $y$  so stark bestrafen, dass sie im Optimum nicht mehr auftreten. Allerdings ist eine geeignete Wahl von  $M$  nicht einfach zu treffen, insbesondere, wenn (LP3) inkonsistent ist.

Wenn allerdings ursprünglich das Problem (LP2) mit  $b \not\geq 0$  vorliegt, hat die Methode den Vorteil, dass nur eine überflüssige Variable benötigt wird. Dazu sei  $b_q = \min\{b_i : 1 \leq i \leq m\} < 0$ . Im erweiterten System  $Ax + y = b$  wird nun die Zeile  $q$  von allen anderen subtrahiert und macht deren rechte Seite dadurch nichtnegativ. Die Zeile  $q$  selbst wird mit  $-1$  multipliziert und bekommt eine zusätzliche Variable  $y_{m+1} \geq 0$ . Damit ergibt sich das Problem

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x & & -M y_{m+1} \\ \sum_{j=1}^m (a_{ij} - a_{qj}) x_j & -y_q & +y_i & = b_i - b_q, \quad i \neq q, \\ \sum_{j=1}^m (-a_{qj}) x_j & -y_q & +y_{m+1} & = -b_q, \\ x_j \geq 0, & & & y_i, y_q, y_{m+1} \geq 0 \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Die Matrix mit den Spalten zu den Indizes  $J = \{n+1, \dots, n+m+1\} \setminus \{n+q\}$  bildet eine zulässige Basis aus Einheitsvektoren. Wenn dann im Optimum  $(\hat{x}^T, \hat{y}^T)$  die Zusatzvariable verschwindet,  $\hat{y}_{m+1} = 0$ , hat man natürlich auch eine Lösung des Ausgangsproblems gefunden. Im umgekehrten

Fall ist allerdings nicht klar, ob nur  $M$  zu klein gewählt wurde, oder ob das Ausgangsproblem inkonsistent ist. Die Zwei-Phasen-Methode bietet hier eine verlässlichere Entscheidung.

**Beispiel 4.5.1** Beim folgenden Problem (LP2), einschließlich Schlupfvariablen,

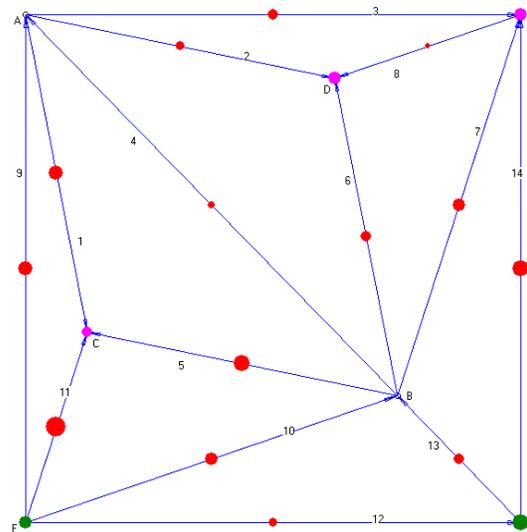
$$\begin{array}{rcccccc} \max & -2x_1 & +3x_2 & & & & \\ & 2x_1 & -3x_2 & +y_1 & & & = -5 \\ & x_1 & -2x_2 & & +y_2 & & = -2 \\ & x_1 & +2x_2 & & & +y_3 & = 6 \end{array}$$

tritt das kleinste Element von  $b$  in der ersten Zeile auf. Subtraktion von den übrigen und Einführung der Zusatzvariablen  $y_4$  führt auf das folgende zulässige Tableau  $\bar{H}$ . Die Gewinne für die Steuerzeile sind  $\gamma^T = (c^T, 0^T, -M) + Me_q^T H$ , es wird also das  $M$ -fache der  $q$ -ten Gesamtzeile zum Zielvektor addiert. Das  $M$  in der letzten Spalte hebt sich dabei auf.

$5M$	$-2 - 2M$	$3 + 3M$	$-M$	$0$	$0$	$0$	$0$	$-5$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$-M - 1$
$\underline{5}$	$-2$	$3$	$-1$	$0$	$0$	$1$	$0$	$5/3$	$-2/3$	$1$	$-1/3$	$0$	$0$	$1/3$
$3$	$-1$	$1$	$-1$	$1$	$0$	$0$	$0$	$4/3$	$-1/3$	$0$	$-2/3$	$1$	$0$	$-1/3$
$11$	$-1$	$5$	$-1$	$0$	$1$	$0$	$0$	$8/3$	$7/3$	$0$	$2/3$	$0$	$1$	$-5/3$

Der Wert von  $M \geq 0$  war hier unerheblich, nach einem Schritt ist die Zusatzvariable eliminiert und das Verfahren kann mit der verkleinerten Tabelle fortgesetzt werden.

**Beispiel 4.5.2** (Rechner-Demo) In dem gezeigten Transportnetz soll ein Produkt von den Produzenten F und G zu den Abnehmern C,D,E geliefert werden, die Knoten A und B sind reine Umschlagplätze mit Bedarf 0. Transporte verlaufen nur längs der nummerierten Kanten  $j$  in der angezeigten Richtung (Menge  $x_j \geq 0$ ). Das zugehörige (LP3) ist in der folgenden Tabelle beschrieben, die Transportkosten der Kanten in der nullten Zeile, der Bedarf in den Knoten in der nullten Spalte. Zu beachten ist hierbei, dass die Kosten zu minimieren sind. Die Restriktionen sind Bilanzgleichungen in den einzelnen Knoten, die Differenz aller eingehenden und ausgehenden Mengen entspricht dem Bedarf des Knotens. Die Zeile zu Knoten G fehlt, da sie redundant ist (Bedarf= $-15$ ), vgl. §1.2.2.



	$53$	$18$	$29$	$8$	$60$	$28$	$37$	$5$	$44$	$38$	$98$	$14$	$23$	$59$
$A:$	$0$	$-1$	$-1$	$-1$	$1$				$1$					
$B:$	$0$			$-1$	$-1$	$-1$	$-1$			$1$			$1$	
$C:$	$6$	$1$			$1$					$1$				
$D:$	$10$		$1$			$1$		$1$						
$E:$	$8$			$1$			$1$	$-1$						$1$
$F:$	$-9$								$-1$	$-1$	$-1$	$-1$		

## 4.6 Ausgeartete Ecken und praktische Aspekte

Die Steuerung beim Simplexverfahren erfolgt allein über die (Indexmenge der) Basen. Da zu einer ausgearteten Ecke verschiedene Basen gehören, kann die Situationen eintreten, dass das Verfahren zwar die Basis wechselt, aber in der gleichen Ecke verharrt. Dann besteht auch die Möglichkeit, dass das Verfahren (bei unveränderter Pivotwahl) zu einer früheren Basis zurückkehrt und dann in dieser Schleife gefangen bleibt ('Kreisen' beim Simplexverfahren). Die Ansichten über die Wahrscheinlichkeit dieses Falls gehen in der Literatur auseinander. Im Verfahren sind ausgeartete Ecken daran zu erkennen, dass das Minimum in Schritt 5 bzw. (4.2.7), das die maximal mögliche Schrittweite

$$t_\ell = \min\left\{\frac{\bar{x}_i}{-v_{i\ell}} : i \in J, v_{i\ell} < 0\right\}$$

bestimmt, in mehreren Indizes  $p_1, p_2, \dots$  angenommen wird. Dann gilt also  $x_{p_1}(t_\ell) = x_{p_2}(t_\ell) = \dots = 0$  und  $x(t_\ell)$  ist wegen  $|J(x(t_\ell))| < m$  also ausgeartet. Eine einfache Abhilfe gegen das Kreisen besteht darin, dass man die Auswahl unter diesen Indizes durch Zusatzregeln wieder eindeutig macht. In der Literatur gibt es dazu unterschiedliche Strategien.

Die folgenden beiden *kleinste Index*-Regeln wählen jeweils den in Frage kommenden kleinsten Original-Index bezogen auf die ursprüngliche Reihenfolge der Komponenten (im  $\mathbb{R}^n$ ) und verhindert dadurch ein Kreisen. Die Schritte 2 und 5 des Simplexverfahrens aus §4.3 sind dazu folgendermaßen zu präzisieren:

2	bestimme $\ell \in K : \ell = \min\{j \in K : \gamma_j > 0\}$	(4.6.1)
5	bestimme $p \in J : p = \min\{i \in J : -\bar{x}_i/v_{i\ell} = t_\ell\}$	

Die Durchführung dieser Regel erfordert beim Tabellenverfahren und auch beim revidierten Verfahren (abhängig von der Indexverwaltung dort) einen geringen Organisationsaufwand (Index-Sortierung), da die zugehörigen Daten im Verfahren oft den Platz wechseln.

Das Simplexverfahren basiert darauf, dass an mehreren Stellen eine Auswahl anhand des Vorzeichens berechneter Daten, etwa der Gewinne  $\gamma_K$  getroffen wird. Leider muß man aber bei der Durchführung im Rechner mit Rundungsfehlern rechnen und daher kann statt eines exakten Gewinns  $\gamma_j = 0$  ein berechneter Wert  $\tilde{\gamma}_j > 0$ ,  $\tilde{\gamma}_j \cong 0$  auftreten. In der Praxis müssen daher die Entscheidungen in (4.6.1) durch eine sorgfältig gewählte Toleranz  $\epsilon$  ( $\cong$  Rechengenauigkeit  $10^{-15}$ ) modifiziert werden:  $\min\{j \in K : \gamma_j > \epsilon\}$ . Analog ist bei der Bestimmung von  $p$  vorzugehen, es ist der minimale Index mit  $-\bar{x}_i/v_{i\ell} \leq t_\ell + \epsilon$  zu verwenden.

Bei sehr kritischen Anwendungen kann man versuchen, Rundungsfehler ganz zu vermeiden. Ein Gleichungssystem mit rationalen Koeffizienten kann durch Erweiterung ganzzahlig gemacht werden und die Gauß-Elimination kann dann divisionsfrei ganzzahlig durchgeführt werden. Die dann auftretenden Koeffizienten können allerdings eine erhebliche Größenordnung annehmen.

## 5 Dualität beim Simplexverfahren

Bisher wurden die Dualitätsaussagen aus §3, die wichtige Hintergrundinformation zu den Eigenschaften eines linearen Programms liefern, nicht erwähnt. Tatsächlich ist es so, dass zwischen den Daten des Simplexverfahrens zum Primalproblem (LP3) und dessen Dualprogramm (LP3\*) ein direkter Zusammenhang hergestellt werden kann, der zusätzliche Möglichkeiten bei der Implementierung von Simplexverfahren eröffnet. Die beiden Programme

$$\max\{c^\top x : Ax = b, x \geq 0\}, \quad \min\{y^\top b : y^\top A \geq c^\top\}$$

sind zueinander dual. Wenn im Simplexverfahren aus §4.3 eine optimale Basis  $A_J$  bestimmt wurde, gilt dort mit dem Hilfsvektor  $y^\top = c^\top A_J^{-1}$  für den Vektor  $\gamma$  der reduzierten Gewinne die Ungleichung

$$0 \geq \gamma^\top = c^\top - c^\top A_J^{-1} A = c^\top - y^\top A, \quad \text{d.h.} \quad y^\top A \geq c^\top, \quad (5.0.1)$$

also ist  $y$  eine dual zulässige Lösung. Wenn man die Lagrangefunktion  $\phi$  aus der Einleitung von §3.1 betrachtet, ist der Gewinnvektor gerade deren Gradient bezgl.  $x$ ,  $\gamma^\top = \nabla_x \phi(x, y) = c^\top - y^\top A$ . Wegen  $\gamma_J = 0$  sind die  $J$ -Ungleichungen straff,  $y^\top A_J = c^\top$ , was genau der Aussage des Komplementaritätssatzes  $0 = (y^\top A - c^\top)\bar{x} = 0$  entspricht. Damit stimmen auch die Zielfunktionen  $y^\top b = c^\top A_J^{-1} b = c^\top \bar{x}$  überein und der Vektor  $y$  ist sogar (Optimal-) Lösung von (LP3\*).

### 5.1 Duales Simplexverfahren

Vollkommen unabhängig von der Zulässigkeit des primalen Vektors  $A_J^{-1}b$  gehört zu jeder Basis, die (5.0.1) erfüllt, ein dual zulässiger Vektor  $y$ .

**Definition 5.1.1** *Eine Basis  $A_J$  heißt dual zulässig, wenn (5.0.1) gilt, sie heißt primal zulässig, wenn  $\bar{x}_J = A_J^{-1}b \geq 0$ , und optimal, wenn sie primal und dual zulässig ist.*

Beim dualen Simplexverfahren arbeitet man mit den gleichen Basen  $A_J$  wie in §4.3, startet aber mit einer dual zulässigen Basis. In Bezug auf das Primal-Problem ist der zugehörige Vektor  $\bar{x}_J = A_J^{-1}b$  zwar "optimal", aber nicht zulässig. Beim Basisaustausch werden daher negative Komponenten  $\bar{x}_p < 0$  eliminiert.

Mit dieser Variante gewinnt man zusätzliche Wahlmöglichkeiten der Verfahrensgestaltung. Z.B. gilt beim Problem (LP2),

$$\max\{c^\top x : Ax + z = b, x \geq 0, z \geq 0\},$$

das hier durch Schlupfvariablen ergänzt wurde, mit  $D = (A, I)$ ,  $J = \{n+1, \dots, n+m\}$ :

$$\text{die Basis } D_J = I_m \text{ ist } \begin{cases} \text{primal} & \text{zulässig für } b \geq 0, \\ \text{dual} & \text{zulässig für } c \leq 0. \end{cases}$$

Im zweiten Fall läßt sich die Anlaufrechnung also durch Verwendung des dualen Simplexverfahrens einsparen.

Zur Herleitung sei jetzt also  $A_J$  eine dual zulässige Basis,  $y^\top = c_J^\top A_J^{-1}$ ,  $\gamma^\top = c^\top - y^\top A \leq 0$ ,  $\bar{x}_J = A_J^{-1}b$ ,  $K = \{1, \dots, n\} \setminus J$ . Ist nun  $\bar{x}_p < 0$ ,  $p \in J$ , so ist die duale Zielfunktion

$$y^\top b = c_J^\top A_J^{-1}b = c_J^\top \bar{x}_J$$

noch nicht minimal. Der negative "duale Schattenpreis"  $x_p < 0$  zeigt an, dass durch eine virtuelle Vergrößerung von  $c_p$ ,  $p \in J$ , eine Verminderung dieser Zielfunktion erfolgen kann. Analog zu (4.2.5) betrachtet man daher den Strahl

$$y(\lambda)^\top := (c + \lambda e_p)^\top A_J^{-1} = y^\top + \lambda (e_p)^\top A_J^{-1}, \quad \lambda \geq 0. \quad (5.1.1)$$

Für die duale Zielfunktion gilt dort tatsächlich

$$y(\lambda)^\top b = y^\top b + \lambda (e_p)^\top A_J^{-1}b = y^\top b + \lambda \bar{x}_p < y^\top b \quad \text{für } \lambda > 0.$$

Allerdings muß dabei, wieder analog zu (4.2.7), die duale Zulässigkeit von  $y(\lambda)$  geprüft werden. Es ist zu fordern

$$0^\top \stackrel{!}{\geq} c^\top - y(\lambda)^\top A = c^\top - y^\top A - \lambda (e_p)^\top A_J^{-1}A = \gamma^\top - \lambda u_p^\top, \quad u_p^\top := (e_p)^\top A_J^{-1}A.$$

Wegen  $\gamma_J = 0$  ist diese Bedingung für Indizes aus  $J$  automatisch erfüllt,  $\gamma_J^\top - \lambda (e_p)^\top A_J^{-1}A_J = -\lambda (\delta_{pj})_{j \in J} \leq 0^\top$ . Auch ist für  $u_p \geq 0$  zu erkennen, dass  $\lambda$  beliebig groß werden darf. In diesem Fall ist (LP3\*) unbeschränkt und (LP3) inkonsistent, vgl. §3.1. Nur für negative Komponenten von  $u_p = (u_{pj})_j$  ergeben sich Einschränkungen und führen zum maximal zulässigen Wert

$$\lambda_p := \min \left\{ \frac{\gamma_j}{u_{pj}} : u_{pj} < 0, j \in K \right\} = \frac{\gamma_\ell}{u_{p\ell}}. \quad (5.1.2)$$

Wenn das Minimum, wie angegeben, im Index  $\ell \in K$  angenommen wird, wird die entsprechende Ungleichung *straff*,

$$0 = \gamma_\ell - \lambda_p u_{p\ell} = c_\ell - y^\top a_\ell - \lambda_p (e_p)^\top A_J^{-1}a_\ell = c_\ell - y(\lambda_p)^\top a_\ell.$$

Der Index  $\ell$  wandert also in die Stützmenge  $J$  der straffen Ungleichungen bei (LP3\*), vgl. Satz 2.4.3. Umgekehrt ist für  $\lambda_p > 0$  in der Ungleichung zu  $p \in J$  nach Konstruktion das Gegenteil der Fall,  $0 > c_p - y(\lambda_p)^\top a_p = -\lambda_p$ . Daher ist  $y(\lambda_p)$  die duale Basislösung zur Basis

$$A_{J'}, \quad J' = J \setminus \{p\} \cup \{\ell\}.$$

Analog zu Satz 4.2.6 läßt sich zeigen, dass  $A_{J'}$  wegen  $u_{p\ell} < 0$  tatsächlich regulär ist. Die obigen Überlegungen werden zusammengefaßt:

### Duales Simplex-Verfahren

Eingabe:	Dual zulässige Basis $A_J$ , $J \subseteq \{1, \dots, n\}$
Schritt 1	$x_J := A_J^{-1}b$ , $y^\top := c_J^\top A_J^{-1}$ , $K := \{1, \dots, n\} \setminus J$ ,
2	suche $x_p < 0$ unter $x_i$ , $i \in J$ .
3	wenn $x_i \geq 0 \forall i \in J$ : _____ <b>STOP</b> , Optimum!
4	$u_{pj} := (e_p)^\top A_J^{-1} a_j$ , $j \in K$ , wenn $u_{pj} \geq 0 \forall j \in K$ : <b>STOP</b> , (LP3) inkonsistent!
5	$\gamma_j := c_j - y^\top a_j$ , $j \in K$ , suche $\ell \in K$ : $\gamma_\ell / u_{p\ell} = \min\{\gamma_j / u_{pj} : u_{pj} < 0, j \in K\} = \lambda_p$
6	$J := J \setminus \{p\} \cup \{\ell\}$ , weiter mit 1

Zur Durchführung sind wie beim Primalverfahren drei Gleichungssysteme zu lösen, etwa mit einer fortlaufend angepaßten LR-Zerlegung von  $A_J$ . Dies sind zunächst wieder die drei Systeme  $A_J x_J = b$ ,  $y^\top A_J = c_J^\top$ , und  $f^\top A_J = (e_p)^\top$ . Der Aufwand dafür liegt wieder bei  $O(m^2)$  einschließlich der LR-Anpassung. Dann sind folgende Innenprodukte zu berechnen

$$u_{pj} = f^\top a_j, \quad j \in K, \quad \text{sowie } c_j - y^\top a_j, \quad \text{für } u_{pj} < 0.$$

Hierfür sind zwischen  $2m(n-m)$  und  $4m(n-m)$  Operationen nötig, dieser Anteil ist also etwa doppelt so groß wie beim primalen Verfahren aus §4.3. Bei vorhandener Wahlmöglichkeit hat das Primalverfahren also einen Effizienzvorteil.

**Beispiel 5.1.2** Für das Problem

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ \quad 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -2 \\ \quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ \quad x_i \geq 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \max \quad -2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \quad -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ \quad 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = -2 \\ \quad -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_6 = -1 \\ \quad x_i \geq 0 \end{array} \right.$$

gehört zu  $J = \{4, 5, 6\}$  eine dual, aber nicht primal zulässige Basis. Das duale Simplexverfahren führt hier mit den folgenden Daten in 2 Schritten zum Ziel:

B-1 1.  $J = \{4, 5, 6\}$ ,  $A_J = I$ ,  $\bar{x}_J^\top = (-1, -2, -1)$ ,  $y = 0$ ,  $c^\top \bar{x} = 0$ .

2. wähle  $p = 4$ ,  $u^\top = (e_4)^\top A_J^{-1} A = e_1^\top A = (-1, -1, -1, 1, 0, 0)$ ,  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (-2, -1, -3)$ ;  
 $\lambda_p = \min\{2, 1, 3\} = 1$  angenommen in  $\ell = 2$ .

B-2 1.  $J = \{2, 5, 6\}$ ,  $A_J^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$ ,  $x_J^\top = (A_J^{-1}b)^\top = (1, -1, 1)$ .  $c^\top \bar{x} = -1$ ,

$y^\top = (1, 0, 0)$ .

2. wähle  $p = 5$ ,  $u^\top = (e_5)^\top A_J^{-1} A = e_2^\top B A = (3, 0, 3, -1, 1, 0)$ ,  $\gamma_4 = -1$ ,  $\lambda_p = \gamma_4 / u_{p4} = 1$  mit  $\ell = 4$ .

B-3 1.  $J = \{2, 4, 6\}$ ,  $A_J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{x}_J^\top = (A_J^{-1}b)^\top = (2, 1, 3)$  **optimal**,  $c^\top \bar{x} = -2$ .

Auch beim dualen Verfahren besteht die Gefahr des Kreisens, wenn das Minimum bei (5.1.2) nicht in einem einzigen Index  $\ell$  angenommen wird. Diese Gefahr läßt sich auch hier wieder durch *kleinste Index*-Regeln ausschalten. Diese lauten in Schritt 2 und 5:

2	bestimme $p \in J$ : $p = \min\{i \in J : x_i < 0\}$
5	bestimme $\ell \in K$ : $\ell = \min\{j \in K : \gamma_j/u_{pj} = \lambda_p\}$

## 5.2 Problem-Modifikationen

In die Formulierung praktischer Probleme gehen oft Daten ein, deren Wert nicht genau bekannt oder vorhersehbar ist (z.B., die Preis- oder Zinsentwicklung bei einer Produktions- oder Finanzplanung). Dann ist es klug, auch Varianten des Ausgangsproblems zu lösen ('was passiert, wenn der Euro über 1.40 Dollar steigt?'), etwa in Abhängigkeit von einem künstlichen Parameter  $t \in \mathbb{R}$  ('parametrische Optimierung'). Oft will man auch unerwünschte Lösungen nachträglich durch weitere Restriktionen ausschließen, etwa nicht-ganzzahlige in der ganzzahligen Optimierung. In diesen Fällen kann man durch eine geschickte Kombination aus primalem und dualem Simplexverfahren eine bekannte Lösung dem veränderten Problem anpassen. Wir betrachten vier Situationen, Ausgangspunkt sei jeweils eine bekannte (Optimal-) Lösung  $\hat{x}$  mit Basis  $A_J$ .

- Änderung der Zielfunktion  $c$ . Die Untersuchung einer parametrischen Änderung  $c(t) = c + t\tilde{c}$ ,  $t \geq 0$ , (zur Vereinfachung) ist vorteilhaft, da Änderungen der Ausgangssituation dann schrittweise eintreten. Es sei daher

$$W(t) := \max\{(c + t\tilde{c})^\top x : Ax = b, x \geq 0\}.$$

Die Lösung  $\hat{x}$  zu  $t = 0$  ist auch zulässig für  $t \neq 0$ . Der Gewinnvektor ist allerdings

$$\gamma(t)^\top = c(t)^\top - c_J(t)^\top A_J^{-1} A = \gamma(0)^\top + t\tilde{\gamma}^\top, \quad \tilde{\gamma}^\top = \tilde{c}^\top - \tilde{c}_J^\top A_J^{-1} A.$$

Da  $\hat{x}$  optimal in  $t = 0$  war, ist  $\gamma(0) \leq 0$  und  $\hat{x}$  bleibt solange optimal, wie

$$\gamma(t) = \gamma(0) + t\tilde{\gamma} \leq 0 \iff t \leq \min\left\{-\frac{\gamma_j(0)}{\tilde{\gamma}_j} : \tilde{\gamma}_j > 0, j \in K\right\} =: t_{\max},$$

( $\gamma_J(t) \equiv 0$  gilt weiterhin). Wenn  $t_{\max} > 0$  ist, ist  $\hat{x}$  für  $t \in [0, t_{\max}]$  optimal und daher  $W(t) = W(0) + t\tilde{c}^\top \hat{x}$  dort linear (insgesamt ist  $W(t)$  stückweise linear). Bei Vergrößerung von  $t$  über  $t_{\max}$  hinaus verliert  $\hat{x}$  seine Optimalität und im reduzierten Gewinnvektor tauchen positive Komponenten auf. Ausgehend von der primal zulässigen Basis  $A_J$  kann mit dem *primalen* Verfahren aus §4.3 nachoptimiert werden.

- Änderung des (Ressourcen-) Vektors  $b(t) = b + t\tilde{b}$ , wieder parametrisiert mit  $t \geq 0$ . Also sei

$$W(t) := \max\{c^\top x : Ax = b + t\tilde{b}, x \geq 0\}.$$

Dann ist  $x(t)$  mit Nichtbasisvariablen  $x_K(t) = 0$  und Basislösung

$$x_J(t) = A_J^{-1}(b + t\tilde{b}) = \hat{x}_J + t\xi_J, \quad \xi_J := A_J^{-1}\tilde{b},$$

eine Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b + t\tilde{b}$ . Wenn  $\hat{x}$  nicht ausgeartet ist, ist  $x(t)$  zulässig, solange

$$\hat{x}_J + t\xi_J \geq 0 \iff t \leq \min\left\{-\frac{\hat{x}_i}{\xi_i} : \xi_i < 0, i \in J\right\} =: t_{\max}.$$

Die Zielfunktion  $W(t) = W(0) + tc^T\xi_J = W(0) + ty^T\tilde{b}$  ( $y =$  Schattenpreise!) ist in diesem Intervall also wieder linear. Der Gewinnvektor  $\gamma$  ist hier unabhängig von  $t$ , da er nur von  $c$  und  $A$  abhängt. Wenn jetzt also  $t$  über  $t_{\max}$  hinaus vergrößert wird, bleibt  $x(t)$  immer noch optimal, verliert aber seine Zulässigkeit. Ausgehend von der dual zulässigen Basis  $A_J$  kann jetzt mit dem *dualen* Simplexverfahren aus §5.1 nachoptimiert werden.

- Einführung einer zusätzlichen Variablen  $x_{n+1}$ . Es sei  $\tilde{A} = (A, a_{n+1})$ ,  $\tilde{c}^T = (c^T, c_{n+1})$ . Der Vektor  $(\hat{x}^T, 0)$  ist dann auch zulässig beim erweiterten Problem. In Bezug auf Optimalität ist mit der dualen Lösung  $y^T = c_J^T A_J^{-1}$  nur der Wert  $\gamma_{n+1}$  zu prüfen. Für  $\gamma_{n+1} \leq 0$  bleibt der erweiterte Punkt optimal. Für

$$\gamma_{n+1} = c_{n+1} - y^T a_{n+1} > 0$$

kann wieder das *primale* Verfahren aus §4.3 mit der primal zulässigen Basis  $\tilde{A}_J = A_J$  angewendet werden.

**Beispiel 5.2.1** Das Einführungsbeispiel 1.2.1 zur Produktionsplanung hatte die Form

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ \mathbf{A} : \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 16, \\ \mathbf{L} : \quad & x_2 + x_4 = 12, \\ \mathbf{E} : \quad & 3x_1 + x_2 + x_5 = 36, \quad x_i \geq 0, \end{aligned}$$

und die Lösung  $\hat{x}^T = (10, 6, 0, 6, 0)$  zu  $J = \{1, 2, 4\}$  mit  $c^T\hat{x} = 58$ . Die Ungleichungen zu Arbeitsaufwand ( $\hat{x}_3 = 0$ ) und Energiebedarf ( $\hat{x}_5 = 0$ ) sind straff, die Schattenpreise der dualen Lösung  $y^T = (\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2})$  zeigen, dass der Gewinn gesteigert werden kann, wenn eine Erhöhung von Arbeitsleistung nicht mehr als  $y_1 = \frac{5}{2}$  bzw. der Energiekosten um mehr als  $y_3 = \frac{1}{2}$  pro Einheit kostet. Nun werde angenommen, dass zusätzliche Energie zu einem Preis von  $c_6 < 0$  erhältlich ist. Am besten kauft man zusätzliche Energie nicht blind, sondern erweitert das Problem um den zusätzlichen Energieanteil  $x_6 \geq 0$ . Die geänderte Bedingung **E**:  $3x_1 + x_2 \leq 36 + x_6$  führt zur Restriktion

$$\mathbf{E} : 3x_1 + x_2 + x_5 - x_6 = 36, \text{ sowie } c^T x = 4x_1 + 3x_2 + c_6 x_6.$$

Also ist  $a_6 = -e_3$  und  $\gamma_6 = c_6 - y^T a_6 = c_6 + \frac{1}{2}$ . Für  $c_6 > -\frac{1}{2}$  ist der Gewinn positiv und ein Austauschschritt mit  $\ell = 6$ ,  $v_\ell^{(J)} = -A_J^{-1} a_6 = A_J^{-1} e_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 1)^T$  ergibt  $p = j_2 = 2$  und führt zur neuen Lösung  $(16, 0, 0, 12, 0, 12)^T$  mit  $J' = \{1, 5, 6\}$  und Zielfunktionswert  $64 + 12c_6$  ( $> 58$  für  $c_6 > -\frac{1}{2}$ ).

$$A_J^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Einführung zusätzlicher Ungleichungen, etwa  $a^{(m+1)\top} x \leq b_{m+1}$ . Das Programm (LP3) wird also erweitert um die Gleichung  $a^{(m+1)\top} x + x_{n+1} = b_{m+1}$ ,  $x_{n+1} \geq 0$ , in der Zielfunktion ist  $c_{n+1} = 0$ . Mit der entsprechend erweiterten Matrix  $\tilde{A}$  und  $J' := J \cup \{n+1\}$  ist

$$\tilde{A}_{J'} = \begin{pmatrix} A_J & 0 \\ a_j^{(m+1)\top} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\tilde{A}_{J'})^{-1} = \begin{pmatrix} A_J^{-1} & 0 \\ -a_j^{(m+1)\top} A_J^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.1)$$

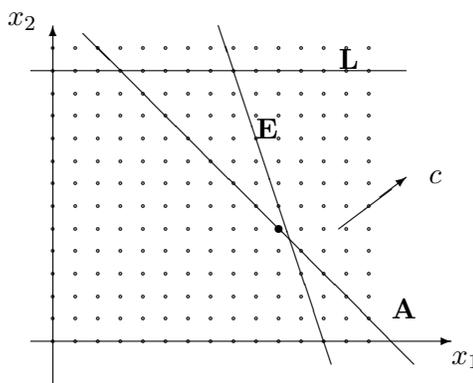
Wegen  $c_{n+1} = 0$  liefert die letzte Zeile keinen Beitrag zum erweiterten Gewinnvektor  $(c^\top, 0) - c_J^\top A_J^{-1}(A, 0) = (\gamma^\top, 0) \leq 0$  und der ergänzte Vektor  $(\hat{x}^\top, \bar{x}_{n+1})^\top$  bleibt weiterhin optimal, allerdings nicht mehr zulässig für

$$\bar{x}_{n+1} = b_{m+1} - a^{(m+1)\top} \hat{x} < 0.$$

Dies ist also mit  $p = n + 1$  wieder ein Fall für das *duale* Simplexverfahren aus §5.1.

Dieser Fall hat eine große Bedeutung in der ganzzahligen und nichtlinearen Optimierung. Dort werden lineare (Hilfs-) Programme gelöst und schrittweise unerwünschte Lösungen durch *Schnittebenen*, d.h. zusätzliche Ungleichungen eliminiert.

**Beispiel 5.2.2** Im Beispiel 1.2.1 sei die Schranke für Resource **A** auf  $b_1 = 15$  geändert, mit  $J = \{1, 2, 4\}$  lautet die Lösung dann  $\hat{x}_J^\top = (10.5, 4.5, 7.5)$ ,  $W = 55.5$ . Wenn nur ganze Einheiten produziert werden, ist diese Lösung unbrauchbar. Eine Rundung dieser Werte ist auch keine Hilfe, da die Zulässigkeit dann nicht gesichert ist. Mit Hilfe der zusätzlichen Ungleichung  $2x_1 + x_2 \leq 25$  kann diese Ecke des zulässigen Bereichs abgeschnitten werden (die Konstruktion solcher Ungleichungen wird in der ganzzahligen Optimierung behandelt).



Im erweiterten Problem ist jetzt  $\hat{x}_6 = 25 - 2\hat{x}_1 - \hat{x}_2 = -1/2 < 0$ ,  $J' = \{1, 2, 4, 6\}$ . Mit  $A_J^{-1}$  aus Beisp. 5.2.1 wird  $u_p$  zu  $p = 6$  aus der letzten Zeile von (5.2.1) berechnet  $u_p^\top = (-a_j^{(6)\top} A_J^{-1}, 1) \tilde{A} = (0, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1)$ . Der (alte) Gewinnvektor ist  $\gamma^\top = (0, 0, -\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2})$  und führt auf  $\lambda_6 = 1$  bei  $\ell = 5$ . Zu den neuen Basisindizes  $J'' = \{1, 2, 4, 5\}$  gehört die ganzzahlige Lösung  $x^\top = (10, 5, 0, 7, 1, 0)$ .

## Ausblick

Professionelle Computerprogramme ('Dynamische Simplex-Verfahren') bringen beim allgemeinen Problem (LP) beide Varianten adaptiv zum Einsatz, teilweise auch als Ersatz für eine Anlaufrechnung. Ansatzweise sei das am Programm (LP) ohne freie Variable erläutert, d.h. bei

$$\max\{c^\top x : Ax = b, Mx \leq d, x \geq 0\}. \quad (\text{LP})$$



## 6 Spezielle Strukturen und Anwendungen

Im folgenden werden Varianten und Anwendungen der Verfahren aus §4-5 und der theoretischen Ergebnisse aus §2-3 auf verschiedene Problembereiche behandelt.

### 6.1 Dekompositionsverfahren

Bei großen Problemdimensionen kann nur das revidierte Simplexverfahren Effizienzvorteile aus speziellen Strukturen ziehen. Die folgende Methode ist auch deshalb von Interesse, weil sie sich an einer etwas abstrakteren Problemformulierung orientiert und auch das Simplexverfahren über die Formulierung von Hilfsproblemen abstrakt zum Einsatz bringt.

Für große  $m, n$  gibt es in der Regel keine enge Kopplung aller auftretenden Variablen, in der Matrix  $A$  der Restriktionen ist dann nur ein (kleiner) Teil der Koeffizienten nichttrivial ("dünn besetzt"). Eine spezielle Variante sind Systeme, die sich aus kleineren Einheiten zusammensetzen, und der größte Teil der Restriktionen sich jeweils auf eine Einheit bezieht. Beispielsweise würde bei einem Unternehmen mit verschiedenen Standorten nur ein Teil der Restriktionen (beschränkte Ressourcen) global gelten. Das Programm hat dann die Form

$$\left. \begin{array}{l} \max c^T x \\ Dx = f \\ Gx = h \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \text{ mit Matrix } \begin{pmatrix} D \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_p \\ G_1 & G_2 & \cdots & G_p \end{pmatrix},$$

und einer (nicht-quadratischen) Blockdiagonalmatrix  $D$ . Das Teil-System  $Dx = f$  zerfällt dann in unabhängige Teilprobleme. Mit Teilvektoren  $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $f^{(i)} \in \mathbb{R}^{m_i}$  und  $D_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$ , sowie

$$x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(p)} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(p)} \end{pmatrix},$$

sind nämlich die folgenden Probleme äquivalent,

$$(HP) \left\{ \begin{array}{l} \max d^T x \\ Dx = f \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \text{ und } (HP_i) \left\{ \begin{array}{l} \max d^{(i)T} x \\ D_i x^{(i)} = f^{(i)} \\ x^{(i)} \geq 0 \end{array} \right\}, i = 1, \dots, p,$$

die kleinen unabhängigen Probleme  $(HP_i)$  können aber effizienter gelöst werden (sogar parallel).

Eine solche Möglichkeit wird im folgenden Dekompositionsverfahren von Dantzig-Wolfe vorausgesetzt, Ansatzpunkt ist aber die abstrakte Problemstellung

$$\max c^T x : \quad Gx = h, \quad x \in M, \tag{ZP}$$

mit  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $h \in \mathbb{R}^m$ , und einem konvexen Polyeder  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Im Beispiel (HP) ist  $M = X_1 \times \cdots \times X_p$  ein cartesisches Produkt der Polyeder  $X_i := \{x^{(i)} : D_i x^{(i)} = f^{(i)}, x^{(i)} \geq 0\}$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Die zulässige Menge von (ZP) ist aber  $X = L \cap M$ ,  $L := \{x : Gx = h\}$ .

Nach Theorem 2.5.2 ist  $M = K(E(M)) + O^+(M)$  als Summe eines Polytops und eines endlich erzeugten Kegels, also durch Ecken und (einige) Kanten, darstellbar. Faßt man die Ecken  $u^{(i)}$  und Kanten  $w^{(j)}$  zusammen in Matrizen

$$U := (u^{(1)}, \dots, u^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n \times k}, \quad W := (w^{(1)}, \dots, w^{(\ell)}) \in \mathbb{R}^{n \times \ell},$$

dann gilt also

$$\begin{aligned} M &= \text{konv}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)}) + \text{keg}(w^{(1)}, \dots, w^{(\ell)}) \\ &= \{Uy + Wz : y \in \mathbb{R}_+^k, z \in \mathbb{R}_+^\ell, \mathbf{1}^\top y = 1\}. \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Für beschränktes  $M$  entfällt natürlich der Anteil  $Wz$ . Das Dekompositions-Verfahren arbeitet abstrakt, ohne explizite Kenntnis der (evtl. sehr großen) Matrizen  $U, W$ ! Denn nur bei Bedarf müssen einzelne ihrer Spalten durch Lösen von Hilfsproblemen (s.o.)

$$\max d^\top x : x \in M \quad (\text{HP})$$

bestimmt werden. Durch Einsetzen der Parametrisierung (6.1.1) von  $M$  in (ZP) ergibt sich ein Problem

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top U y + c^\top W z \\ & G U y + G W z = b \\ & \mathbf{1}^\top y = 1, \quad y, z \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{ZP}')$$

mit nur  $m+1$  Restriktionen, aber einer großen (unbekannten!) Anzahl von Variablen,  $\bar{n} = k + \ell$ . Matrix und Zielvektor zu (ZP') sind

$$A = \begin{pmatrix} GU & GW \\ \mathbf{1}^\top & 0^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & W \\ \mathbf{1}^\top & 0^\top \end{pmatrix}, \quad \tilde{c}^\top = (c^\top U, c^\top W) = (c^\top, 0) \begin{pmatrix} U & W \\ \mathbf{1}^\top & 0^\top \end{pmatrix}.$$

Im Simplexverfahren bedeuten diese Verhältnisse, dass die Menge  $K = \{1, \dots, \bar{n}\} \setminus J$ , der Nicht-Basis-Indizes wesentlich größer als die der Stützmenge  $J$ ,  $|J| = m+1$ , ist. Im *revidierten* Verfahren ist dies unerheblich, da die einzige Rechnung mit  $K$  die reduzierten Gewinne  $\gamma_j$ ,  $j \in K$ , betrifft. Diese werden aber nicht alle benötigt, es reicht z.B. aus, den *maximalen* Gewinn zu bestimmen. Wenn  $J \subseteq \{1, \dots, \bar{n}\}$  die Basisindizes enthält, ist mit  $\tilde{c}_J^\top A_J^{-1} =: \tilde{\eta}^\top = (\eta^\top, \eta_{m+1})$  der ganze Gewinnvektor gegeben durch

$$\gamma^\top = \tilde{c}^\top - \tilde{\eta}^\top A = \left\{ (c^\top, 0) - \eta^\top \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0^\top & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} U & W \\ \mathbf{1}^\top & 0^\top \end{pmatrix} = (c^\top - \eta^\top G)(U, W) - (\eta_{m+1} \mathbf{1}^\top, 0^\top).$$

Nach Konstruktion bestimmt das Simplex-Verfahren aus §4.3 bzw. §4.4 eine Ecke oder unbeschränkte Kante des zulässigen Polyeders. Bei  $M$  sind das nach Definition gerade die Spalten von  $U$  und  $W$ . Demnach liefert das Hilfsproblem (HP) mit  $d^\top = c^\top - \eta^\top G$ , d.h.,

$$\max(c^\top - \eta^\top G)x : x \in M \quad \text{bzw.} \quad \max(c^\top - \eta^\top G)x : Dx = f, x \geq 0,$$

eine Spalte  $u^{(s)} = Ue^{(s)}$  (Stop in Schritt 3) oder  $w^{(s)} = We^{(s)}$  (Stop in Schritt 4). Damit wurde eine maximale Komponente von  $(c^T - \eta^T G)(U, W)$  berechnet. Man muß folgende Fälle unterscheiden:

1. Wenn (HP) unbeschränkt ist, liefert das Simplexverfahren eine Kantenrichtung

$$w^{(s)} = We^{(s)} = (U, W) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{(s)} \end{pmatrix} \text{ mit } \gamma_{k+s} = (c^T - \eta^T G)(U, W) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{(s)} \end{pmatrix} > 0,$$

denn auf dem Strahl  $x(t) = \bar{x} + tw^{(s)}$  gilt  $(c^T - \eta^T G)(\bar{x} + tw^{(s)}) \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ). Damit ist ein  $\gamma_{k+s} > 0$  bestimmt und der in Simplex-Schritt 4 benötigte Richtungsvektor kann mit  $w^{(s)}$  berechnet werden:

$$v_J^{(k+s)} = -A_J^{-1} \begin{pmatrix} Gw^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. (HP) ist beschränkt, mit der Lösung  $\bar{x} = u^{(s)}$  sei

$$d^T \bar{x} = \max\{(c^T - \eta^T G)x : x \in M\} =: \mu < \infty.$$

Dann sind die Gewinne  $(c^T - \eta^T G)W \leq 0$  und nach Konstruktion gilt

$$\max_{i \leq k} \gamma_i = \gamma_s = (c^T - \eta^T G)u^{(s)} - \eta_{m+1} = \mu - \eta_{m+1},$$

da der Anteil  $-\eta_{m+1} \mathbb{1}^T$  den Wert für alle Einheitsvektoren  $y = e^{(i)}$ ,  $i \leq k$ , in identischer Weise ändert. Nun folgt für

- i)  $\mu - \eta_{m+1} \leq 0$ : alle Gewinne sind nichtpositiv, das Maximum ist erreicht.
- ii)  $\mu - \eta_{m+1} > 0$ : mit dem positiven Gewinn  $\gamma_s = \mu - \eta_{m+1}$  kann zu Simplex-Schritt 4 übergegangen werden, mit

$$v_J^{(s)} = -A_J^{-1} \begin{pmatrix} Gu^{(s)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Im Dantzig-Wolfe-Verfahren wird mit der Parametrisierung  $x = Uy + Vz$  von  $X \subseteq M$  gearbeitet. Daher ist der Simplexschritt 5 mit den Koeffizienten  $(y^T, z^T)_J^T$  der aktuellen Ecke durchzuführen, die Lösung selbst bekommt man aber am Ende mit  $J = \{j_1, \dots, j_{m+1}\}$  als Linearkombination

$$\hat{x} = \sum_{j_i \leq k} y_{j_i} u^{(j_i)} + \sum_{j_i > k} z_{j_i - k} w^{(j_i - k)}.$$

Diese Darstellung erfordert, dass alle auftretenden  $u, w$  im vorherigen Ablauf schon berechnet wurden. Dies ist auch tatsächlich der Fall, wenn  $J$  keine Indizes der Startecke mehr enthält, etwa aufgrund einer Anlaufrechnung mit der Zweiphasen- oder Groß-M-Methode. Im Verfahren ist natürlich ein gewisser Verwaltungsaufwand für die  $m + 1$  benötigten Spalten von  $(U, W)$  erforderlich.

## 6.2 Transportprobleme in Graphen

Da diese Probleme gelegentlich als Beispiele diskutiert wurden, wird noch kurz auf einige der speziellen Strukturen eingegangen die sich im Zusammenhang mit Graphen ergeben. Von allgemeinerem Interesse, über die Optimierung hinaus, sind Querverbindungen zwischen Graphentheorie und Linearer Algebra.

**Definition 6.2.1** Ein Graph  $G = G(P, L)$  besteht aus einer Menge  $P = P(G) \neq \emptyset$  von Ecken (Punkten) und einer von Kanten (Linien)  $L = L(G)$ . Kanten eines allgemeinen Graphen sind ungeordnete Paare  $\{u, v\}$ ,  $u, v \in P$ . In einem gerichteten Graphen (Digraph) betrachtet man Kanten als Paare  $k = (u, v)$  mit dem Anfangsknoten  $u$  und Endknoten  $v$  von  $k$ .

Die Bezeichnungen  $P, L$  sind etwas unüblich, die am Englischen angelehnten Bezeichnungen führen aber leicht zu Verwechslungen (Ecken/edges, Kanten/knots). Der Zusammenhang zwischen Kanten und Ecken kann auch durch eine *Inzidenz*-Abbildung

$$\delta : L \rightarrow P \times P, \quad k \mapsto \delta(k) = \{u, v\},$$

beschrieben werden. Im Digraph bezieht sich das auch auf Anfangs- und Endpunkte:

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{l} L \rightarrow P \\ k = (u, v) \mapsto u \end{array} \right., \quad \omega : \left\{ \begin{array}{l} L \rightarrow P \\ k = (u, v) \mapsto v \end{array} \right., \quad \delta : \left\{ \begin{array}{l} L \rightarrow P \times P \\ k \mapsto (\alpha(k), \omega(k)) \end{array} \right. .$$

Es werden nur endliche Graphen betrachtet mit  $P = \{p_1, \dots, p_m\}$  (z.B.  $p_i = i \in \mathbb{N}$ ) und  $L = \{k_1, \dots, k_n\}$ . Da gerichtete Graphen den allgemeineren Fall darstellen, wird dieser in den Vordergrund gestellt. In der allgemeinen Form sind in einem Graphen auch parallele Kanten  $k, l \in L$  mit  $\alpha(k) = \alpha(l)$ ,  $\omega(k) = \omega(l)$  und *Schlingen*  $k$  mit  $\alpha(k) = \omega(k)$  zugelassen. Ein Graph heißt *schlicht*, wenn er keine Schlingen oder parallelen Kanten enthält, dann kann man insbesondere  $L \subseteq P \times P$  betrachten und die Kanten durch ihre Endecken bezeichnen.

Bezogen auf die Ecken sind die aus- und eingehenden Kanten interessant, für  $u \in P$  sei

$$\begin{aligned} L^+(u) &:= \{k \in L : \alpha(k) = u\}, & g^+(u) &:= |L^+(u)|, \\ L^-(u) &:= \{k \in L : \omega(k) = u\}, & g^-(u) &:= |L^-(u)|, \end{aligned}$$

sowie  $L(u) = L^-(u) \cup L^+(u)$ ,  $g(u) = g^-(u) + g^+(u)$ . Die Zahl  $g^+(u)$  der auslaufenden Kanten aus  $L^+(u)$  heißt Außengrad der Ecke  $u$ ,  $g^-(u)$  der Innengrad, die Summe  $g(u)$  der Grad von  $u$ . Eine Ecke vom Grad  $g(u) = 0$  heißt isoliert. Bei schlichten Graphen können statt der Menge  $L(u)$  direkt die *Nachbarn* einer Ecke  $u$  betrachtet werden,

$$N^+(u) = \{\omega(k) : \alpha(k) = u\}, \quad N^-(u) = \{\alpha(k) : \omega(k) = u\},$$

$N(u) = N^-(u) \cup N^+(u)$ . Der Grad beschreibt die Stärke der 'Vernetzung' einer einzelnen Ecke. Um die Vernetzung des Gesamt-Graphen untersuchen zu können, betrachtet man Wege und Kantenzüge im Graphen. Die Begriffe unterscheiden sich darin, ob dabei Kanten nur längs ihrer

Richtung benutzt werden dürfen. In einem ungerichteten Graphen sind beide Begriffe gleich. Ein Weg  $w$  ist eine alternierende Folge von Ecken und Kanten:

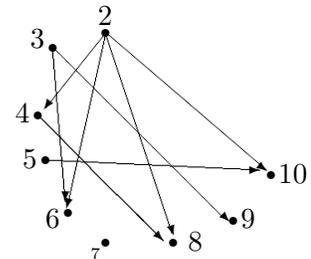
$$w = (p_{i_0}, k_{j_1}, p_{i_1}, \dots, k_{j_r}, p_{i_r}), \quad \text{mit } \delta(k_{j_\ell}) = (p_{i_{\ell-1}}, p_{i_\ell}).$$

Dabei ist  $r$  die Länge,  $p_{i_0}$  Anfangs- und  $p_{i_r}$  Endecke von  $w$ . Ein geschlossener Weg mit  $p_{i_0} = p_{i_r}$  heißt *Kreis*. In einem schlichten Graphen genügt es, die Ecken des Weges anzugeben. Ein *Kantenzug*  $z$  (Kette) unterscheidet sich dadurch vom Weg, dass beliebig orientierte Kanten auftreten können,

$$z = (p_{i_0}, k_{j_1}, p_{i_1}, \dots, k_{j_r}, p_{i_r}), \quad \text{mit } \delta(k_{j_\ell}) \in \{(p_{i_{\ell-1}}, p_{i_\ell}), (p_{i_\ell}, p_{i_{\ell-1}})\}.$$

Ein geschlossener Kantenzug, bei dem alle Kanten verschieden sind, heißt *Zyklus*. Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn zwischen je zwei Ecken  $u, v \in P$  ein sie verbindender Kantenzug existiert. Wenn der Graph dies in Bezug auf Wege erfüllt, heißt er *stark zusammenhängend*.

**Beispiel 6.2.2** Der nebenstehende Digraph mit  $m = 9$  Ecken und  $n = 8$  Kanten beschreibt die Teilbarkeitsrelation der natürlichen Zahlen bis 10. Er ist schlicht (daher keine Kantenbezeichner nötig), aber offensichtlich nicht zusammenhängend, da 7 isoliert ist. Ohne die Ecke 7 ist er zusammenhängend, aber nicht stark zusammenhängend. Denn der einzige nichttriviale Weg geht über die Ecken  $(2, 4, 8)$ . Zur Eckenfolge  $(2, 4, 8, 2)$  gehört ein geschlossener Kantenzug, der der einzige Zyklus des Graphen ist.



Ein *Baum* ist ein zusammenhängender, zyklensfreier Graph. Von besonderem Interesse in der Informatik und hier sind Bäume, da sie die 'sparsamste' Form von (Teil-) Graphen darstellen und Grundlage vieler Algorithmen sind. Ein Graph  $G(P, M)$  mit  $M \subseteq L$  heißt *Teilgraph* von  $G(P, L)$ , enthält also alle Ecken, aber nur einen Teil der Kanten.

**Satz 6.2.3** a) Ist  $G(P, L)$  ein Baum, dann gilt  $|L| = |P| - 1$ .

b) Jeder zusammenhängende Graph  $G(P, L)$  besitzt einen aufspannenden Baum, d.h. einen Teilgraphen  $G(P, M)$ ,  $M \subseteq L$ , der ein Baum ist.

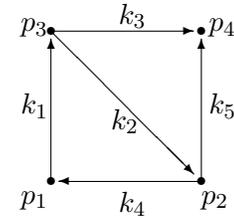
Im Teilbarkeitsgraphen (ohne 7) bekommt man durch Streichung einer Kante des Zyklus  $(2, 4, 8, 2)$  einen aufspannenden Baum mit  $|M| = 7 = |P| - 1$ . Wichtige Zusammenhänge zur Linearen Algebra ergeben sich durch Betrachtung bestimmter, den Graphen zugeordneter Matrizen. Die *Inzidenzmatrix*  $A = A(G) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eines schlingenfreien Graphen mit  $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ ,  $L = \{k_1, \dots, k_n\}$  ist definiert durch

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } p_i = \alpha(k_j), \\ -1 & \text{für } p_i = \omega(k_j), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf ähnliche Weise kann auch eine quadratische *Adjazenzmatrix* (Nachbarschaftsmatrix) im  $\mathbb{R}^{m \times m}$  definiert werden. Diese spielt beim Transportproblem aber keine Rolle.

**Beispiel 6.2.4** Die Inzidenzmatrix zum gezeigten Graphen ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Offensichtlich hat jede Spalte genau zwei nichttriviale Einträge, für eine Kante mit  $\delta(k_j) = (p_\alpha, p_\omega)$  ist  $a_j = e_\alpha - e_\omega$ . Daher sind alle Spaltensummen null,  $\mathbb{1}^\top A = 0^\top$  und der Rang von  $A$  ist daher höchstens  $|P| - 1$ . In Zeile  $i$  sind die bei der Ecke  $p_i$  aus- und einlaufenden Kanten markiert. Die Inzidenzmatrix hat aber noch mehr interessante Eigenschaften.

**Satz 6.2.5** Bei einem schlingenfreien, gerichteten Graph  $G$  ist die Inzidenzmatrix  $A(G)$  total unimodular, d.h., für jede quadratischen Untermatrix hat die Determinante einen Wert aus  $\{-1, 0, 1\}$ .

Als Folge der Cramerschen Regel ist bei einer total unimodularen Matrix die Inverse einer jeden regulären Untermatrix ganzzahlig.

**Satz 6.2.6** Es sei  $G(P, L)$  ein schlichter Digraph mit Inzidenzmatrix  $A = (a_1, \dots, a_n)$ . Zu einem Teilgraph  $G(P, M)$ ,  $M \subseteq L$ , sei  $B = \{a_j : k_j \in M\}$  die entsprechende Untermatrix.  $B$  hat maximalen Rang genau dann, wenn der Teilgraph  $G(P, M)$  keine Zyklen enthält. Insbesondere hat  $B$  Rang  $|P| - 1$  genau dann, wenn  $G(P, M)$  ein aufspannender Baum ist. Bew

Die zu einem Teilgraphen gehörige Untermatrix hat wegen  $\mathbb{1}^\top B = 0^\top$  linear abhängige Zeilen. Durch Streichen einer beliebigen Zeile von  $B$  ergibt sich bei einem aufspannenden Baum aber eine reguläre, quadratische Matrix der Größe  $|P| - 1$ .

Im Beispiel 6.2.4 erhält man mit  $M = \{k_2, k_3, k_4\}$  einen aufspannenden Baum. Die zugehörige Matrix  $B$  hat vollen Rang drei. Denn nach Streichen ihrer letzten Zeile bekommt man eine reguläre Matrix mit Determinante 1.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Transportproblem** Der Graph  $G(P, L)$  besitze zusätzlich eine Bewertung  $b \in \mathbb{R}^m$  der Ecken und  $c \in \mathbb{R}^n$  der Kanten. Die Ecke  $p_i$  nennt man für  $b_i > 0$  eine Quelle, für  $b_i < 0$  eine Senke und für  $b_i = 0$  ein Umschlagplatz. Es wird (ohne wesentl.Einschränkung)  $\sum_{i=1}^m b_i = 0$  vorausgesetzt. Die Zielkoeffizienten  $c_j \leq 0$  werden als Kosten für den Transport längs Kante  $k_j$  negativ notiert. Für den Vektor  $x$  der kostenminimalen Transporte  $x_j \geq 0$  längs Kante  $k_j$  können das primale und duale Programm direkt angegeben werden:

$$\max\{c^\top x : \bar{A}x = b, x \geq 0\} \quad \text{und} \quad \min\{b^\top y : \bar{A}^\top y \geq c\}.$$

Dabei ist  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  die *Inzidenzmatrix* von  $G$ , die einen Rangdefekt eins besitzt. Mit  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{(m-1) \times n}$  werden die ersten  $m - 1$  Zeilen von  $A$  bezeichnet. In Zeile  $i$  bedeutet die Restriktion  $Ax = b$  gerade, dass die Summe der aus Ecke  $p_i$  herausgehenden und hineinfließenden Mengen der Bewertung  $b_i$  (Bedarf) entspricht (Kirchhoffsche Regel). Die dualen Variablen  $y_i$  sind den Ecken zugeordnet.

Aufgrund von Satz 6.2.6 sind die Basen  $\bar{A}_J$  von  $\bar{A}$  gerade durch aufspannende Bäume des Graphen gegeben, insbesondere ist daher auch der optimale Transportplan ein Baum. Der Basiswechsel entspricht dem Übergang zu einem anderen Baum. Das Simplexverfahren kann daher direkt mit diesen Bäumen arbeiten, wenn sich die dabei benötigten Hilfsgrößen leicht bestimmen lassen. Dies gilt insbesondere bei ganzzahligem Bedarf  $b \in \mathbb{Z}^m$  ( $\Rightarrow x \in \mathbb{Z}^n$ ). Zu einem aufspannenden Baum  $G(P, M)$  mit  $M = \{k_{j_1}, \dots, k_{j_{m-1}}\}$  gehört die Basismatrix  $\bar{A}_J$ ,  $J = \{j_1, \dots, j_{m-1}\}$ .

- Die Basislösung  $\bar{x}$  mit  $\bar{A}_J \bar{x}_J = \bar{b}$  zum Baum  $G(P, M)$  kann von den Blättern (Ecken vom Grad  $g(p) = 1$ ) her bestimmt werden, da die Versorgung eines Blattes  $p_i$  vollständig durch die hin-/herlaufende Kante  $k_j$  erfolgen muß. Die entsprechende Zeile von  $\bar{A}_J$  enthält nur ein nichttriviales Element  $a_{ij} = \pm 1$ , womit der Wert von  $x_j = b_i/a_{ij}$  bestimmt werden kann. Der Restgraph ohne  $p_i$ ,  $k_j$  ist wieder ein Baum, mit dem man genauso arbeitet. Zum Start des Verfahrens muß man aber wieder die Zulässigkeit der Basislösung  $\bar{x} \geq 0$  voraussetzen.
- Der Gewinnvektor ist  $\gamma^\top = c^\top - y^\top A$  (Gesamtmatrix zur Vereinfachung). Seine  $J$ -Komponenten verschwinden,  $\gamma_J = 0$ , und definieren die duale Lösung  $y$ , vgl. (5.0.1), welche ähnlich zur primalen Lösung bestimmt werden kann. Der Wert  $y_i$  ist der Schattenpreis des Bedarfs im Knoten  $p_i$ . Für eine Kante mit  $\delta(k_j) = (p_\alpha, p_\omega)$  ist die Matrixspalte  $a_j = e_\alpha - e_\omega$  und daher ist

$$\gamma_j = c_j - y_\alpha + y_\omega \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (6.2.1)$$

Für Kanten im Baum dienen diese Gleichungen  $\gamma_j \stackrel{!}{=} 0$ ,  $j \in J$  zur Berechnung der dualen Lösung  $y$ . Da  $\mathbb{1}$  den Kern von  $A^\top$  aufspannt, kann eine Komponente von  $y$  auf null gesetzt werden, etwa  $y_r = 0$ . Von der zugehörigen Ecke  $p_r$  ( $\sim$  Baumwurzel) aus werden dann mit den Kanten des Baums  $G(P, M)$  die  $y$ -Werte aller Ecken von  $G$  bestimmt. Mit dieser Lösung  $y$  werden dann mit (6.2.1) die Gewinne der restlichen Kanten  $k_j \notin M$  ausgewertet, bis man einen positiven Wert  $\gamma_\ell > 0$ ,  $\ell \in K = \{1, \dots, n\} \setminus J$  zu einer Kante  $k_\ell \notin M$  findet. Wenn keiner existiert, für  $\gamma_K \leq 0$ , liegt natürlich ein Optimum vor.

- Durch Aufnahme dieser Kante,  $M' := M \cup \{k_\ell\}$  in den Baum entsteht ein eindeutiger Zyklus  $z = (p_{i_0}, \dots, p_{i_{s-1}}, k_\ell, p_{i_s}, \dots)$ . Dieser sei so orientiert sei, dass  $k_\ell$  in Vorwärtsrichtung auftritt:  $\delta(k_\ell) = (p_{i_{s-1}}, p_{i_s})$ . Vergrößert man analog zu (4.2.5) den Transport  $\bar{x}_\ell = 0$  längs  $k_\ell$  auf  $x_\ell = t > 0$ , ändern sich der Transport auf allen Kanten dieses Zyklus wegen der

Erhaltungsgleichungen ebenfalls um diesen Betrag  $t$ :

$$x_i(t) = \begin{cases} \bar{x}_i + t, & k_i \text{ Vorwärtskante im Zyklus } z \\ \bar{x}_i - t, & k_i \text{ Rückwärtskante im Zyklus } z \\ \bar{x}_i, & k_i \text{ nicht in } z \end{cases} \quad (6.2.2)$$

Bei der Vergrößerung ist die Zulässigkeit  $x(t) \geq 0$  einzuhalten, im Simplexschritt 4/5 können die beiden Fälle auftreten:

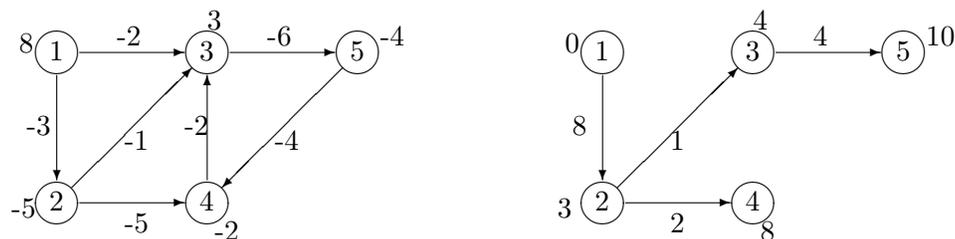
- \* alle Kanten in  $z$  verlaufen in der gleichen Richtung (der von  $k_\ell$ ). Dann ist das Problem unbeschränkt, da  $t$  beliebig groß werden kann.
- \* unter den Rückwärtskanten bestimmt der minimale Wert  $\bar{x}_i$  den maximal zulässigen Schritt  $t_\ell = \min\{x_i : k_i \text{ Rückwärtskante in } z\}$ . Die Kante  $k_q$ , in der das Minimum angenommen wird, wird wegen  $x_q(t_\ell) = 0$  aus  $M'$  gestrichen, und erzeugt einen neuen aufspannenden Baum  $G(P, M \cup \{k_\ell\} \setminus \{k_q\})$  des Graphen, also eine neue Basis zu  $J \cup \{\ell\} \setminus \{q\}$ .

Der unbeschränkte Fall kann natürlich nur auftreten, wenn Kanten im Graph existieren mit nicht-positiven Kosten  $-c_i \geq 0$ . In einer ausgearteten (Polyeder-) Ecke mit  $\bar{x}_q = 0$  ändert sich der Transportplan nicht,  $t_\ell = 0$ . Dann muss ein mögliches Kreisen analog zu §4.6 verhindert werden.

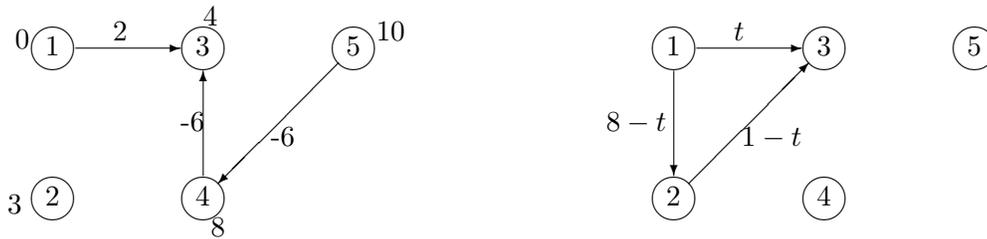
- Für eine Anlaufrechnung können bisher nicht vorhandene Kanten eingeführt und mit sehr hohen Kosten versehen werden.

Probleme wie Anlaufrechnung oder ausgeartete Ecken lassen sich ebenfalls analog zum allgemeinen Fall lösen.

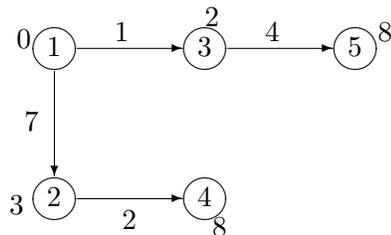
**Beispiel 6.2.7** Das erste Bild zeigt das betrachtete Transportproblem mit 5 Ecken und 7 Kanten, wobei die Werte von  $b$  bei den Ecken und die von  $c$  bei den Kanten notiert sind. Rechts ist ein aufspannender Baum gezeigt. Bei ihm sind an den Kanten die Transporte  $x_j$  und an den Ecken die Schattenpreise  $y_i$  (duale Variable) angegeben.



Mit den Schattenpreisen werden die reduzierten Gewinne an den restlichen Kanten bestimmt (unten linkes Bild). Dabei ist nur  $\gamma_{13} = c_{13} - y_1 + y_3 = 2$  an Kante 1-3 positiv (die Kante wird hier durch Doppelindex bezeichnet). Nimmt man diese Kante dazu mit einem Transport  $x_{13} = t > 0$ , entsteht ein Zyklus  $z = (2, 3, 1, 2)$ , in dem die anderen Transporte um  $t$  geändert werden müssen, damit der Bedarf überall erfüllt bleibt.



Offensichtlich ist  $t \leq 1$  zu wählen, für  $t = 1$  verschwindet der Transport  $x_{23}$ . Die Kante 2-3 kann daher entfernt werden, der folgende neue Baum (mit Transporten und Schattenpreisen) ergibt den optimalen Transportplan.



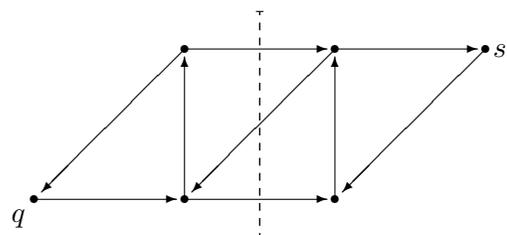
Auf diese Weise kann das Simplexverfahren direkt mit den Datenstrukturen des Graphen operieren ohne aufwändige Matrix-Algebra. Die Problemformulierung führt dazu, dass besonders "billige" Strecken stark ausgelastet werden. In der Praxis sollte man aber damit rechnen, dass alle/individuelle Kanten eine maximale Kapazität besitzen, die ihre Nutzung begrenzt,  $x_i \leq d_i$  auf  $k_i$ . Diese Zusatzeinschränkung ändert den Problemtyp.

**Flußprobleme in Netzwerken** Zunächst wird nur von einer Bewertung  $d : L \rightarrow \mathbb{R}_+$  der Kanten im Digraph  $G(P, L)$  ausgegangen, welche deren Kapazität angibt. Der Transport  $x_i$  über die Kante  $k_i \in L$  ist durch  $0 \leq x_i \leq d_i$  begrenzt. Außerdem zeichnet man zwei Ecken  $q, s \in P$  aus als Quelle und Senke und fragt nach der maximalen Menge, die von  $q$  durch  $G$  nach  $s$  befördert werden kann. Innere Quellen und Senken gibt es nicht. Zur Formulierung führt man eine neue(!) (Rücklauf-) Kante  $k_0 = (s, q)$  von  $s$  nach  $q$  ein, mit  $d_0 = \infty$  und betrachtet  $G' := G(P, L')$ ,  $L' = L \cup \{k_0\}$ . Ein Vektor  $x' = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{m+1}$  im Graph  $G'$  heißt *zulässiger Fluß*, wenn in allen Ecken die Erhaltungsgleichungen eingehalten werden und  $x \leq d$  gilt. Da der Gesamtfluß durch  $G'$  durch die Kante  $k_0$  zurückfließt, entspricht dem maximalen Fluß eine Lösung des Problems

$$\max\{x_0 : Ax - (e_q - e_s)x_0 = 0, 0 \leq x \leq d\} =: W. \tag{FP}$$

Dabei ist  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  wieder die Inzidenzmatrix von  $G$ ,  $W$  der Wert des Flusses.

Eine fundamentale Rolle beim Flußproblem spielt der Begriff *Schnitt*. Zerschneidet man das Netz in zwei Teile so, dass Quelle und Senke in verschiedenen Hälften liegen, muß die gesamte Flußmenge durch die zerschnittenen Kanten fließen. Deren Gesamt-Kapazität beschränkt natürlich den maximalen Fluß.



**Definition 6.2.8** *Es sei  $G(P, L)$  ein Digraph mit Quelle  $q$ , Senke  $s$  und Kapazitäten  $d$ . Eine Zerlegung  $P = (Q, S)$  mit  $P = Q + S$ ,  $q \in Q$ ,  $s \in S$  heißt Schnitt. Der Wert des Schnitts ist  $d(Q, S) = \sum_{k_i \in L^+(Q)} d_i$ .*

In Verallgemeinerung der früheren Definition enthält  $L^+(Q) = \{k : \alpha(k) \in Q, \omega(k) \notin Q\}$  die  $Q$  verlassenden Kanten. Aus der ersten Überlegung zum Begriff Schnitt folgt die (nachzuweisende) Schranke  $W \leq d(Q, S)$  für jeden Schnitt. Diese Eigenschaft ist aber auch eine direkte Folge der Dualitätstheorie. Mit dualen Variablen  $u$  (zu Ecken),  $v$  (zu Kanten) sind die Restriktionen des dualen Programms von (FP):  $u^\top(e_s - e_q) \geq 1$ ,  $u^\top A + v^\top \geq 0$ ,  $v \geq 0$ . Setzt man die Bedeutung von  $A$  ein, lautet das duale Programm

$$\begin{aligned} \min d^\top v : \quad & u_i - u_\ell + v_j \geq 0, \quad k_j = (i, \ell) \in L, \\ & u_s - u_q \geq 1, \\ & v_j \geq 0, \quad k_j \in L. \end{aligned}$$

Jedem Schnitt  $(Q, S)$  kann man die folgenden dual zulässigen Vektoren  $u, v$  zuordnen:

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{für } p_i \in S \\ 0 & \text{für } p_i \in Q \end{cases} \quad v_j = \begin{cases} 1 & \text{für } k_j \in L^+(Q) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für diese gilt auch  $d(Q, S) = d^\top v$  und die Schranke  $W \leq d(Q, S) = d^\top v$  folgt direkt aus Satz 3.1.1. Außerdem sind die Probleme lösbar, da primal und dual zulässige Punkte existieren. Die Hauptfolgerung zu Flüssen wird aber die Aussage **Maximal-Fluß**  $\equiv$  **Minimal-Schnitt** (v. Ford-Fulkerson) sein. Für die Formulierung sind folgende Begriffe hilfreich. Zu einem zulässigen Fluß  $\bar{x}$  heißen Kanten  $k_i$  leer für  $\bar{x}_i = 0$  und gesättigt, wenn  $\bar{x}_i = d_i$  gilt. Ein Kantenzug  $z = (p_{i_0} = q, k_{i_1}, \dots, p_{i_r} = s)$  von  $q$  nach  $s$  heißt *Zugewinnweg* zu  $x$ , wenn keine Vorwärtskante gesättigt und keine Rückwärtskante leer ist, also

$$\begin{aligned} x_{i_j} &< d_{i_j}, & k_{i_j} &= (p_{i_{j-1}}, p_{i_j}), \\ x_{i_j} &> 0, & k_{i_j} &= (p_{i_j}, p_{i_{j-1}}). \end{aligned}$$

Auf einem Zugewinnweg sind  $\theta^+ = \min\{d_i - x_i : k_i \text{ Vorwärtskante}\}$ ,  $\theta^- = \min\{x_i : k_i \text{ Rückwärtskante}\}$  positiv, es gibt also eine Kapazitätsreserve  $\theta := \max\{\theta^-, \theta^+\} > 0$ . Wie beim Transportproblem kann daher der Fluß  $x(t)$  gemäß (6.2.2) bis zum Grenzwert  $t = \theta$  zulässig vergrößert werden (zusammen mit der Rückflußkante  $k_0$  wird aus  $z$  ein Zyklus). Die Ergebnisse faßt folgender Satz zusammen.

**Satz 6.2.9** *a) Ein zulässiger Fluß  $\bar{x}$  ist genau dann maximal, wenn kein Zugewinnweg von  $q$  nach  $s$  existiert.*

*b) Der Wert eines zulässigen Flusses von  $q$  nach  $s$  ist beschränkt durch den Wert jedes Schnittes. Der Wert eines Maximal-Flusses  $\bar{x}$  ist gleich dem eines Minimal-Schnitts  $(Q, S)$ , und*

$$\bar{x}_0 = d(Q, S) \iff \begin{cases} x_j = d_j, & \text{für } k_j \in L^+(Q), \\ x_j = 0, & \text{für } k_j \in L^+(S). \end{cases}$$

Für ganzzahlige Kapazitäten  $d \in \mathbb{Z}_+^n$  ist auch der Maximalfluß ganzzahlig. Durch die Konstruktion eines Zugewinnwegs  $z$  kann ein nicht-maximaler Fluß verbessert werden. Dazu ist der gesamte Graph zu durchsuchen, hier ist eine *Breitensuche* angebracht, bei der man von jedem Knoten aus alle Nachbarn untersucht. Diese Art der Graph-Traversal kann leicht mit Hilfe einer Schlange (*first in, first out*) organisiert werden. Beginnend mit  $Q = \{q\}$  vergrößert man schrittweise den Schnitt  $(Q, S)$ ,  $S = P \setminus Q$ , um Knoten  $u$ , zu denen ein Zugewinnweg  $q \rightarrow u$  existiert. Die zugehörige Fluß-Reserve  $\theta$  trägt man als Markierung  $f : P \mapsto \mathbb{R}$  der Ecke  $u$  ein, diese Markierung dient auch zur Identifikation von  $Q$ . Am 'Rand' von  $Q$  gibt es dann eine Knotenmenge  $U \subseteq Q$ , die noch zu überprüfen ist. Diese Menge  $U$  wird tatsächlich in einer Schlange verwaltet. Die Suche nach dem Zugewinnweg terminiert spätestens, wenn man bei der Senke  $s$  ankommt. Um dann den Weg rückwärts rekonstruieren zu können, trägt man die zur Ecke  $u$  führende Kante in einer Markierung  $vor : L \mapsto \mathbb{Z}$  ein. Zur Vereinfachung wird  $P = \{1, \dots, m\}$  gesetzt. Der Algorithmus von *Ford-Fulkerson* zur Bestimmung eines maximalen Flusses lautet:

- |  |   |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>0. <math>x</math> sei zulässiger Fluß;</li> <li>1. <math>Q := \{q\}; U := \{q\}; f_j := -1 \forall j \in P \setminus Q, f_q := \infty.</math></li> <li>2. wähle Ecke <math>u \in U</math>; setze <math>U := U \setminus \{u\}</math>;<br/>für alle <math>k_j \in L(u) \setminus Q</math> {<br/>wenn <math>k_j = (u, p)</math> und <math>x_j &lt; d_j</math> {<br/><math>f_p := \min(d_j - x_j, f_u); vor_p := +j; Q := Q \cup \{p\}; U := U \cup \{p\};</math><br/>wenn <math>k_j = (p, u)</math> und <math>x_j &gt; 0</math> {<br/><math>f_p := \min(x_j, f_u); vor_p := -j; Q := Q \cup \{p\}; U := U \cup \{p\};</math><br/>}<br/>}<br/>3. wenn <math>U = \emptyset</math>: STOP maximal!</li> <li>4. wenn <math>s \in Q</math> {<br/><math>u := s; \theta := f_s;</math><br/>solange <math>u \neq q</math> {<br/><math>j :=  vor(u) ;</math><br/>wenn <math>vor(u) &gt; 0</math> {<math>x_j := x_j + \theta; u := \alpha(k_j);</math>}<br/>wenn <math>vor(u) &lt; 0</math> {<math>x_j := x_j - \theta; u := \omega(k_j);</math>}<br/>}<br/>}<br/>weiter mit Schritt 1.</li> </ol> | <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <p>aus <math>Q</math> führende Kanten<br/>ungesättigte V-Kante</p> <p>nichtleere R-Kante</p> <p>Zugewinnweg exist.<br/>Ende Zugewinnweg<br/>Kette zurücklaufen<br/>Kante Richtung <math>q</math><br/>ändere Fluß ↗<br/>ändere Fluß ↘</p> </div> |
|--|---|

Wenn das Verfahren in Schritt 3 endet, ist  $(Q, S)$ ,  $S = P \setminus Q \ni s$ , ein minimaler Schnitt. Zu den Knoten  $u \in Q$  existiert dann ein Zugewinnweg  $q \rightarrow u$ , zu denen aus  $S$  nicht. Der Algorithmus ist so nur bei ganzzahligem  $x$  und  $d$  endlich. Allerdings garantiert gerade die Verwaltung von  $U$  in einer Schlange seine Endlichkeit ([Edmonds-Karp]), die Laufzeit ist dann  $O(n^2m)$ .

## A Symbole, Abkürzungen

### Symbole

		Seite
$\mathbb{1}$	Vektor von Einsen $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)^\top$	10
$\text{aff}(M)$	affine Hülle einer Menge $M$	10
$\arg \min$	Argumentwert in einer Minimalstelle	13
$\mathbb{B}$	boolesche Menge $\mathbb{B} = \{0, 1\}$	2
$B_r(z)$	Kugel um $z$ mit Radius $r$	2
$\Delta_n$	Standardsimplex $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbb{1}^\top x = 1, x \geq 0\}$	12
$E(M)$	Menge der Ecken einer konvexen Menge $M$	15
$e_i$	Einheitsvektoren	10
$\text{keg}(M)$	konische Hülle einer Menge $M$ , von $M$ erzeugter Kegel	18
$\text{konv}(M)$	konvexe Hülle einer Menge $M$	12
$H(a, \alpha)$	Hyperebene mit Normalenrichtung $a \neq 0$	10
$H^+, H^-$	offener Halbraum in (bzw. entgegen) Normalenrichtung	10
$H^\oplus, H^\ominus$	entsprechende abgeschlossene Halbräume	10
$L(M)$	Linealraum einer Menge $M$	11
(LP1)..(LP3)	Standardformen linearer Programme	8
(LP*), (LP $i^*$ )	duale Programme	24
$O^+(M)$	Ausdehnungskegel einer konvexen Menge $M$	19
$p_M$	Projektion $p_M : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ auf eine konvexe Menge $M$	13
$\mathbb{R}_+^n$	positiver Kegel $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$	10

### Bezeichnungsweisen

Zu Mengen  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  wurden eingeführt:

$\bar{M}, \overset{\circ}{M}$	Abschluß und Inneres	
$M^*$	Polarkegel	20
$[x, y]$	Verbindungsstrecke von Punkten	11
$J(x), J^\pm(x)$	Stützindizes von $x$ : der $x_i$ , die nicht null, bzw. positiv/negativ	33
$x_J$	Teilvektor $x_J = (x_{j_1}, \dots, x_{j_k})^\top$ zu Indexmenge $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$	17
$A^{(J)}$	Untermatrix aus Zeilenvektoren $a^{(j)\top} = e_j^\top A$ zu Indexmenge $J \subseteq \{1, \dots, m\}$	17
$A_J$	Untermatrix aus Spaltenvektoren $a_j = Ae_j$ zu Indexmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$	33
$H, \bar{H}$	einfaches und erweitertes Simplex-Tableau, $H$ und $A_J^{-1}A$ enthalten die gleichen Elemente, die Zeilenindizes von $H$ sind aber $1, \dots, m$	39

## Index

- Anlaufrechnung, 60
- Ausdehnungskegel, 19–22, 36
- ausgeartet, 35, 36, 40
- baryzentrisch, 17
- Basis, 35, 59
  - Darstellung, 35
  - Lösung, 35, 59
- Baum, 57
  - aufspannend, 57–59
- Block-Elimination, 33
- Brachistochrone, 1
- Breitensuche, 63
- Cramersche Regel, 58
- Dekomposition, 53
- Digraph, 56
- dual
  - Lösung, 26, 28, 46, 47, 59
  - zulässig, 25, 46, 50, 51, 62
- Dualität, 62
- Ecke, 15–18, 21, 34
- Einheitssimplex, 12
- elementare Umformungen, 9
- Facette, 15
- Farkas - Lemma, 22, 25
- ganzzahlig, 2, 5, 7, 51, 58
- Gauß-Algorithmus, 30, 31
- Graph, 56, 58
- Hülle
  - affine, 10, 19
  - konische, 18
  - konvexe, 12
- Halbraum, 10
- Handlungsreisender (TSP), 5
- Hyperebene, 10
- inkonsistent, 25, 26, 43
- Inzidenzmatrix, 57, 59, 61
- Kante, 15, 21, 36
- Kegel, 9, 10, 35, 54
  - erzeugter, 19–21, 28
  - konvex, 18
  - Polar-, 20
  - spitz, 18, 19, 21
- kleinste-Index-Regel, 45, 49
- Kombination
  - konisch, 11, 18, 28
  - konvex, 11
- konvex
  - Hülle, 12
  - Kombination, 11
  - Menge, 11
- Kreisen, Simplex-Verfahren, 40, 45
- Lagrange-Multiplikator, 24
- Linealraum, 11, 18, 19
- LR-Zerlegung, 31, 32, 38, 48
  - Anpassung, 32
- Nachbarecke, 37
- Normalenvektor, 10
- Optimalität, 25
- Optimierungsaufgabe, 1
- orthogonal
  - strukturell, 26
- parametrische Optimierung, 49
- Permutation, 5, 32
- Permutations-Matrix, 32
- Pivot-Element, 31
- Polarkegel, 20–22
- Polyeder, 9, 17, 21, 54
- Polytop, 17, 21, 54
- Produktionsplanung, 3, 28

- Programm
  - duales, 24, 58, 62
  - lineares, 8, 24
  - primales, 24
- Projektion, 13
- Randfläche, 15, 16
- Rang-1-Änderung, 30, 37, 41
- reduzierte Gewinne, 36, 38, 41, 44–46, 54, 59
- Relaxation, 7
- Rundungsfehler, 30
- Schattenpreis, 28, 50, 59
- Schlupf
  - Variable, 9
  - komplementär, 27
- Schnittebene, 51
- Schur-Komplement, 33
- Schwerpunkt, 17
- Simplex, 17
- Simplex-Verfahren
  - duales, 48, 50, 51
  - primales, 38, 49, 50
  - revidiertes, 38, 54
  - Tableau-, 41
- Stütz-
  - Ebene, 14
  - Indizes, 34
  - Menge, 14
- Strafffunktion, 42
- Strahl, 36, 47
- Tour, 5
- Transportproblem, 5, 29, 44, 58
- TSP, 5, 52
- Ungleichung
  - zulässige, 14
- Variable
  - freie, 8, 25
  - vorzeichenbeschränkte, 8, 25
- Zeilenvertauschungen, 32
- Zielfunktion, 1–4, 21, 25, 26, 28, 36, 37, 40, 43, 47, 49, 50
- Zugewinnweg, 62
- zulässig
  - dual, 46, 50, 51
  - primal, 46, 49, 50
- Zyklus, 57, 59