Philipps-Universität Marburg **Wintersemester 2015/16**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, Dr. B. Küster

Übungen zur Linearen Optimierung
12. Aufgabenblatt

Hinweis: Wenn an einer Stelle ein Index aus mehreren möglichen ausgewählt werden muss, dann soll immer der kleinstmögliche Index gewählt werden.

Aufgabe 1 Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem (4)

$$\begin{array}{rcl} \min\ x_1 + x_2 + x_3 & & \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 & \geq & 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 & \leq & -2 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq & -1 \\ x_i & \geq & 0 \end{array}$$

nach geeigneter Umformung mit dem dualen Simplexverfahren.

Aufgabe 2 Das bereits um Schlupfvariablen erweiterte lineare Optimierungsproblem (5)

$$\min\ x_1 + x_2$$
$$\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & \eta_1 & & & & & = & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & & & - & \eta_2 & & & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & & & - & \eta_3 & = & 1 \end{array}$$
$$x_i, \eta_j \geq 0$$

besitzt die Optimallösung $\bar{x}_J = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})^T$ mit $J = \{1, 2, 5\}$ und $\gamma_K = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})^T$, $K = \{3, 4\}$. Betrachten Sie folgende Problemmodifikationen:

(i) Die Zielfunktion wird zu „$\min x_1$" abgeändert.

(ii) Es wird die zusätzliche Ungleichung $-4x_1 + 2x_2 \geq -1$ eingeführt.

Überprüfen Sie jeweils, ob $\bar{x}$ auch für das modifizierte Problem optimal ist. Berechnen Sie gegebenenfalls mit einem geeigneten Verfahren die neue Optimallösung.

Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis benutzen: Die Inverse der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & -1/8 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1 & 0 & 1/2 \\ 5/4 & 0 & -1 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 Präzisieren Sie die Aussagen aus der Vorlesung zum parametrischen Problem (2)

$$W(t) := \min\{c^T x : x \in X(t)\}, \;\; X(t) := \{x : Ax = b + t\tilde{b}, x \geq 0\},$$

mit $t \in \mathbb{R}$. Dabei sei angenommen, dass das Problem für $t = t_1$ eine Lösung besitzt (also konsistent und beschränkt ist). Zeigen Sie:

(i) Wenn $x(t_1) \in X(t_1)$ und $x(t_2) \in X(t_2)$ gilt, dann gilt

$$sx(t_1) + (1-s)x(t_2) \in X(st_1 + (1-s)t_2), \;\; s \in [0,1].$$

Also ist das Problem auf dem Intervall $[t_1, t_2]$ konsistent.

(ii) Das Problem ist beschränkt für alle $t \in \mathbb{R}$ (aber eventuell nicht konsistent).

Achtung: Die Vorlesung am Donnerstag, den 28.01. wurde auf Freitag, den 29.01. 10:15-12:00 im Raum +1/0110 verschoben. Die Abgabe dieses Übungsblattes ist sowohl am Donnerstag, 28.01. von 11:45-12:00 im Café Leonardo, als auch am Freitag, 29.01. vor der Vorlesung möglich.