Philipps-Universität Marburg **Wintersemester 2015/16**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, B. Küster

Übungen zur Linearen Optimierung
8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv definit ($A = A^\mathsf{T}$, $x^\mathsf{T}Ax > 0 \; \forall \, x \neq 0$) und (6)

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : x^\mathsf{T}Ax \leq 1\}.$$

a) Zeigen Sie, dass E konvex und kompakt ist.

b) Zeigen Sie: Die Ecken von E sind genau die Punkte $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T Ay = 1$.

c) Allgemein ist für eine konvexe, kompakte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ die *Stützfunktion* zu M definiert durch

$$\sigma_M(x) := \max\{x^T u : u \in M\}.$$

Zeigen Sie, dass die Stützfunktion zu E gegeben ist durch

$$\sigma_E(x) = \sqrt{x^T A^{-1}x}.$$

Hinweis: Verwenden Sie b) und das Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren. Sollten Sie dieses nicht aus anderen Vorlesungen kennen, so können Sie es in praktisch jedem Analysis II Buch nachschlagen. Auch der Wikipedia-Artikel *Lagrange-Multiplikator* ist hilfreich.

Aufgabe 2 Zu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, und $b \in \mathbb{R}^m$ sei das Polyeder $X := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ (2) gegeben. Zu einer Indexmenge $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ bezeichne $M_J := \{x \in X : {a^{(j)}}^T x = b_j, j \in J\}$. Zeigen Sie: Für alle $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ ist M_J eine Randfläche von X oder $M_J = \emptyset$.

Aufgabe 3 Betrachten Sie das Polyeder $X := \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \geq b\}$ mit (3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle regulären 3×3-Untermatrizen von A und alle Ecken von X.

b) Es sei $y(t) := (-t, -t + \frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T, t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ für die gilt

$$y(t) \in X \iff t \in [a, b],$$

und zeigen Sie, dass $Y := \{y(t) : t \in [a, b]\}$ eine Kante von X ist.

Abgabe: Donnerstag, 10.12.15, vor der Vorlesung.