Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2015**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, D. Lellek

11. Aufgabenblatt zur Mathematik II

Aufgabe 41 *(Integration mittels Treppenfunktionen)* (4*)
Berechne anhand der Definition, also mithilfe von Ober- und Untersummen, das Integral

$$\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x.$$

Tipp: Geometrische Summe.

Die folgenden Aufgaben sind in ähnlicher Form aus Altklausuren entnommen. Von diesen Aufgaben können **maximal 3** beliebige abgegeben und bewertet werden. Werden mehr Aufgaben abgegeben, werden nur die ersten 3 berücksichtigt. Die Themenauswahl ist nicht notwendigerweise vollständig. Die Aufgaben werden im Sondertutorium besprochen.

Aufgabe 42 Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: (4*)

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 43 Untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf Konvergenz, und berechne gegebenenfalls den Grenzwert für: (4*)

$$\text{(i) } a_n := \frac{3n+1}{5n-2}, \quad \text{(ii) } a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Aufgabe 44 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Beweise oder widerlege: (4*)

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$ konvergent $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Bitte wenden!

Aufgabe 45 Zeige, dass die Gleichung $\frac{1}{x} = \exp(x-2)$ eine Lösung in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ besitzt. (4*) Gibt es mehr als eine?

Aufgabe 46 Bestimme, falls existent, die Grenzwerte (4*)

$$\text{(i)} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\exp(x))}{x}, \quad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}.$$

Aufgabe 47 Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen: (4*)

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} x^n, \quad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n) x^n.$$

wenn

Aufgabe 48 Untersuche, an welchen Stellen die Funktion (4*)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x \exp(-\frac{1}{x^2}) & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

stetig, und wo sie differenzierbar ist. Bestimme, wo existent, die Ableitung. Finde alle lokalen und globalen Extrema der Funktion.

Aufgabe 49 (4*)

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^2$$

gilt. Zeige, dass f konstant ist.

(ii) Zeige mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|$.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind Bonusaufgaben, können aber klausurrelevant sein.
Abgabe: Freitag, 10.07.15, vor der Vorlesung.