

#### 4. Aufgabenblatt zur Mathematik II

**Aufgabe 14** (*Monotonie und Konvergenz*) (4)

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  sei rekursiv definiert durch  $a_0 = \frac{3}{2}$  und

$$a_{n+1} = (a_n - 1)^2 + 1, \quad n \geq 0.$$

Zeige, dass  $1 \leq a_n \leq \frac{3}{2}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt und dass die Folge monoton und konvergent mit Grenzwert 1 ist.

**Aufgabe 15** (*Konvergenz von Folgen*) (3)

Untersuche die folgenden Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  auf Konvergenz und gib gegebenenfalls den Grenzwert an:

$$a_n = \left( \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{n^2}{3n^2 + 3} \right)^n, \quad b_n = 1 + \frac{\sin(n)}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 16** (*Bestimmte Divergenz*) (3)

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  bestimmt divergent gegen  $+\infty$  und  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Zeige, dass die Folge  $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Nullfolge ist.

**Aufgabe 17** (*Häufungspunkte*) (3)

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine konvergente Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$ . Die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  sei definiert durch  $b_n := (-1)^n a_n$ . Bestimme alle Häufungspunkte, den Limes inferior und den Limes superior dieser Folge und untersuche sie auf Konvergenz.