Mathematik II

Analysis

Bernhard Schmitt

Sommersemester 2015

Inhaltsverzeichnis

Literatur:

- Wolff/Hauck/Küchlin: Mathematik für Informatik und Bioinformatik, Springer Verlag; Zusätzliches Material auf Projektseite min.informatik.uni-tuebingen.de
- W.Dörfler, W.Peschke: Einführung in die Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag.
- H. Heuser: Analysis I, Teubner (viele Beispiele)

1 Reelle Zahlen

In der Analysis entwickelt man den richtigen Umgang mit dem Begriff "unendlich", der bei naiver Betrachtung sonst zu Schwierigkeiten wie dem Paradoxon von *Achilles und der Schildkröte* führen würde. Unsere reale Welt ist zwar groß, aber endlich und Elemente nach den Erkenntnissen der Physik nicht beliebig teilbar. Daher sind die Begriff "unendlich groß" oder "unendlich klein" bzw. "unendlich oft zerlegbar" eigentlich unrealistisch. Sie stellen aber eine sehr erfolgreiche Fiktion dar, die insbesondere zu wesentlich einfacheren Regeln führt als die Betrachtung kleiner, aber endlicher Größen (etwa Differenzen statt Differentiale). Dies gilt auch für die Informatik, obwohl Computer die reellen Zahlen durch Maschinenzahlen approximieren müssen. Die Gesamtmenge der verarbeiteten digitalen Information lag 2008 bei 10 Zettabyte (10^{22} Byte) und soll sich alle 2 Jahre verdoppeln. Aktuell wären das 10^{23} Byte, was doch schon "recht nahe an unendlich" liegt.

Grundlage der Analysis sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, deren Gesetzmäßigkeiten jedem durch dauernden Umgang (in der Schule) vertraut erscheinen. In der Mathematik leitet man die reellen Zahlen aber aus bestimmten Axiomen her. Denn die verschiedenen, wohlbekannten und "selbstverständlichen" Regeln beruhen auf unterschiedlichen Grundlagen. Bei den reellen Zahlen kommt zu den arithmetischen Regeln (*Körperaxiome*) die gerichtete Struktur (*Anordnungsaxiome*) dazu. Für die Definition irrationaler Zahlen wie $\sqrt{2}$ (die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = 2$) wird aber außerdem die *Vollständigkeit* benötigt. In dem umfassendsten Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist dann jede quadratische Gleichung lösbar, dagegen gibt es aber keine Anordnung mehr.

Hierarchie der Zahlen	Anordnung	algebraisch abgeschlossen
	$\mathbb{N}$	
Ring	$\mathbb{Z}$	
Körper	$\mathbb{Q}$	
vollständig	$\mathbb{R}$	
		$\mathbb{C}$

1.1 Einige Grundlagen

Zunächst werden einige Grundbegriff aus der Mathematik 1 wiederholt (meist ohne Beweise). Zu zwei Mengen M, N ist das *cartesische Produkt* die Menge aller *Paare* (a, b) von Elementen aus M und N:

$$M \times N := \{(a, b) : \ a \in M, \ b \in N\}.$$

Der Begriff verallgemeinert sich leicht auf cartesische Produkte mit mehr als 2 Mengen. Ein zentraler Begriff läßt sich damit definieren.

Definition 1.1.1 *Eine* Abbildung $f : M \to N$ *zwischen nichtleeren Mengen* M, N *ist eine Teilmenge* $F \subseteq M \times N$*, wobei jedes* $a \in M$ *in genau einem Paar* $(a, b) \in F$ *als erste Komponente* *auftritt. Man nennt M den* Definitionsbereich *und N den* Wertebereich *der Abbildung. Das Element $b = f(a)$ heißt das* Bild *von a, Schreibweise auch $f : a \mapsto b$. Mit $Abb(M, N)$ bezeichnet man die Menge aller Abbildungen $f : M \to N$.*

Die Menge $F \subseteq M \times N$ nennt man zur Unterscheidung von der Vorschrift f auch den *Graph* der Abbildung.

Beispiel 1.1.2 a) Abbildungen zwischen Zahlmengen nennt man auch *Funktionen*, in einfachen Fällen kann man sie als Vorschrift, wie etwa $f(x) = x^2$ angeben. Wichtig bei Defin. 1.1.1 ist aber, dass auch Definitions- und Wertebereich erklärt werden müssen, z.B.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

b) Für Bytes (Binärworte) $a = (a_7, a_6, \ldots, a_0)$, $a_i \in \{0, 1\} =: \mathbb{B}$, sind die einfache Verschiebung $S : \mathbb{B}^8 \to B^8$, $a \mapsto (a_0, a_7, \ldots, a_1)$ und die zyklische Verschiebung $Z : \mathbb{B}^8 \to B^8$, $a \mapsto (a_0, a_7, \ldots, a_1)$ Abbildungen.

c) Für $M = N$ ist $id_M : M \to M$, $a \mapsto a$ die *Identität* (identische Abbildung) von M.

Bei einer Abbildung gehört zu jedem Element a aus dem Definitionsbereich *genau ein Bild*element $b = f(a)$. Umgekehrt kann aber ein Bildelement b verschiedene *Urbilder* a_1, a_2 mit $f(a_1) = b = f(a_2)$ besitzen. Die genannten Begriffe bezieht man auch auf ganze Teilmengen von M bzw. N.

Definition 1.1.3 *Bei einer Abbildung $f : M \to N$ seien $A \subseteq M$ bzw. $B \subseteq N$ Teilmengen. Das* Bild von A unter f *ist $f(A) := \{f(a) : a \in A\}$ und das* Urbild von B unter f *ist $f^{-1}(B) := \{a \in M : f(a) \in B\}$*

Die Schreibweise f^{-1} bedeutet dabei nicht, dass eine Umkehrabbildung existiert. Die Existenz einer Umkehrabbildung ist ein schwierigeres Problem, das gleich behandelt wird. Wichtige Eigenschaften von Abbildungen betreffen die Fragen, ob der Wertebereich N mit Bildern $f(a)$ "ausgeschöpft" wird bzw. die Anzahl der Urbilder eines Bildpunktes.

Definition 1.1.4 *Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt*

- injektiv*, wenn* $\quad f(a_1) = f(a_2) \;\Rightarrow\; m_1 = m_2 \quad \forall m_1, m_2 \in M$,
- surjektiv*, wenn* $\quad f(M) = N$,
- bijektiv *(eine "Bijektion"), wenn f injektiv und surjektiv ist.*

Bei den Byte-Shifts aus Beisp. 1.1.2 ist S nicht injektiv, da Bytes mit verschiedenem a_0 das gleiche Bild haben können, der zyklische Shift Z ist dagegen sogar bijektiv. Für die Begriffe gilt auch folgende, übersichtliche Charakterisierung über Urbildmengen $f^{-1}(b)$:

$$\left.\begin{array}{r} Injektivität: \\ Surjektivität: \\ Bijektivität: \end{array}\right\} \text{jedes } b \in N \text{ hat } \left\{\begin{array}{c} \textit{höchstens} \\ \textit{mindestens} \\ \textit{genau} \end{array}\right\} \text{ein Urbild.}$$

Offensichtlich hängen diese Eigenschaften auch von der Festlegung von Definitions- und Wertebereich ab, wenn man M oder N abändert, bekommt man auch eine andere Abbildung. Z.B.

definiert man mit $K \subseteq M$ die *Einschränkung* von f auf K durch

$$f|_K : K \to N, \text{ mit } f|_K(a) = f(a)\, \forall a \in K.$$

Bemerkung: Durch eine geeignete Einschränkung läßt sich evtl. Injektivität erreichen, z.B. ist in $\mathbb{R}$ die Quadrat-Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ nicht injektiv, die Einschränkung $f|_{R_\geq}$ auf die nichtnegativen Zahlen $\mathbb{R}_\geq := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ aber sehr wohl (s.u.).
Bemerkung: Bei **endlichen** Mengen gleicher Mächtigkeit $|M| = |N|$ gibt es einen engen Zusammenhang zwischen Injektivität und Surjektivität, auch *Schubladenprinzip* genannt. Wenn man k Objekte auf k Schubladen verteilt, und in jeder Schublade liegt höchstens ein Objekt (Injektivität), dann ist auch jede Schublade belegt (Surjektivität). Bei unendlichen Mengen gilt das nicht mehr, wie man an der Verdopplung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ sieht.

Zur Einführung des Begriffes Umkehrabbildung ist es erforderlich, Abbildungen hintereinander auszuführen. Dies ergibt eine neue Verknüpfung von Abbildungen, welche assoziativ ist.

Definition 1.1.5 *Zu Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ heißt die Abbildung*

$$g \circ f : M \to P, \quad (g \circ f)(a) := g(f(a))$$

die Komposition *von g und f.*

Satz 1.1.6 *Die Komposition ist eine* assoziative *Verknüpfung, für Abbildungen $f : M \to N$, $g : N \to P$ und $h : P \to Q$ gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : M \to Q$.*

$$M \xrightarrow[f]{} N \xrightarrow[g]{} P \xrightarrow[h]{} Q$$
$$M \xrightarrow[g \circ f]{} P \xrightarrow[h]{} Q$$
$$M \xrightarrow[f]{} N \xrightarrow[h \circ g]{} Q$$
$$M \xrightarrow[h \circ g \circ f]{} Q$$

Beweis Für beliebiges $a \in M$ gilt

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) &= h(g(f(a))) \\ (h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) &= h(g(f(a))). \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung einer Abbildung f macht deren Wirkung rückgängig, d.h. ihre Komposition mit f ist die Identität.

Satz 1.1.7 *Bei einer Abbildung $f : M \to N$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) f ist bijektiv.

b) Für jedes $b \in N$ gibt es genau ein $a \in M$ mit $f(a) = b$.

c) Es gibt eine Abbildung $g : N \to M$ mit $g \circ f = id_M$ und $f \circ g = id_N$.

Die Abbildung g im Satz ist eindeutig bestimmt und wird daher einfacher $f^{-1} := g$ genannt, die *Umkehrabbildung*. Beim bijektiven zyklischen Shift Z nach rechts aus Beispiel 1.1.2 ist die Umkehrabbildung natürlich der zyklische Shift links, $Z^{-1} : (a_7, \ldots, a_0) \mapsto (a_6, \ldots, a_0, a_7)$. Bei bijektiven Abbildungen tritt also kein Informationsverlust auf, sie sind daher ein gängiges Mittel in Mathematik und Informatik, um Arbeitstechniken zwischen Mengen übertragen zu können.

Abbildungen $M \to N$ wurden als Teilmengen des cartesischen Produkts $M \times N$ eingeführt. Allgemein bezeichnet man Teilmengen $R \subseteq M \times N$ mit nichtleeren Mengen M, N auch als (zweistellige) *Relationen*, vor allem, wenn sie bestimmte Eigenschaften erfüllen. Für die reellen Zahlen wird die Ordnungsrelation "$\leq$" mit $M = N = \mathbb{R}$ eine zentrale Rolle spielen. Eine andere, wichtige Klasse von Relationen sind Äquivalenzrelationen in einer Menge M, d.h. $R \subseteq M \times M$. Ähnlich wie bei der Anordnung schreibt man für ein Paar, das die Relation erfüllt, meist nicht $(a, b) \in R$, sondern setzt das Symbol für die Relation zwischen die Komponenten, in der allgemeinen Version hier mit dem Symbol "$\sim$".

Definition 1.1.8 *Die Relation "$\sim$" auf der Menge $M \neq \emptyset$ heißt* Äquivalenzrelation*, wenn für beliebige Elemente $a, b, c \in M$ gilt*

Reflexivität	$a \sim a$
Symmetrie	$a \sim b \;\Rightarrow\; b \sim a$
Transitivität	$a \sim b,\, b \sim c \;\Rightarrow\; a \sim c$

Diese Axiome führen dazu, dass eine Äq-Relation die Menge M in disjunkte Teilmengen zerlegt. Man nennt daher

$$[a] := \{b \in M : \, a \sim b\}$$

die *Äquivalenzklasse* des Elements $a \in M$ und jedes $b \in [a]$ (also auch a selbst) einen *Repräsentanten* dieser Klasse. Die genannten Eigenschaften werden als Satz formuliert.

Satz 1.1.9 *Auf der Menge $M \neq \emptyset$ sei "$\sim$" eine Äquivalenzrelation. Dann folgt*

a) für beliebige $a, b \in M$ gilt entweder $[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$,

b) M ist die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen.

Beispiel 1.1.10 a) Die Gleichheit "$=$" ist natürlich eine einfache Äq-Relation: $a \sim b \iff a = b$, insbesondere auch, wenn sich Gleichheit nur auf Einzelaspekte bezieht (gleiches Geburtsjahr, Äq-Klassen=Jahrgänge).

b) Jede Abbildung $f : M \to N$ definiert auf M eine Äq-Relation durch die Gleichheit der Bilder, $a \sim_f b \iff f(a) = f(b)$. Die Äquivalenzklassen dieser Relation sind gerade die verschiedenen Urbildmengen, $[a] = f^{-1}(f(a)) = \{b \in M : \; f(b) = f(a)\}$. Beim einfachen Shift S aus Beisp. 1.1.2 sind die Äquivalenzklassen durch die 7 führenden Bit bestimmt, $[(a_7, \ldots, a_0)] = \{(a_7, \ldots, a_!, 0), (a_7, \ldots, a_1, 1)\}$.

Strukturen von Verknüpfungen

Zahlen kann man durch Addition und Multiplikation verknüpfen, aber die Frage, ob auch die dazu umgekehrten Operationen immer möglich sind, ist in den Zahlmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ unterschiedlich zu beantworten. Da manche Eigenschaften bei Addition und Multiplikation analog sind, führt man den umfassenden Begriff "Gruppe" ein.

Definition 1.1.11 *Eine* Gruppe *ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $* : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a * b$ mit folgenden Gesetzen für alle $a, b, c \in G$:*

Assoziativität	$(a * b) * c = a * (b * c)$
Neutrales Element	*es existiert e mit $a * e = a$*
Inverses Element	*es existiert b mit $a * b = e$*

Gilt auch das Kommutativgesetz, $a * b = b * a$, nennt man G eine abelsche Gruppe*.*

Gruppen sind nicht leer, da sie das neutrale Element e enthalten. Dieses ist auch "linksneutral", $e * a = a \,\forall a \in G$ und eindeutig bestimmt, denn, wenn e_1 und e_2 beide neutral sind, gilt $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$. Auch dass inverse Element b mit $a * b = b * a = e$ ist eindeutig und wird daher a^{-1} (oder $-a$ bei Addition) genannt. Bei einer Gruppe nennt man die Menge meist zusammen mit der Verknüpfung: $(G, *)$.

Beispiel 1.1.12 a) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe, aber nicht $(\mathbb{N}, +)$. In den reellen Zahlen gibt es sogar 2 Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ zu Addition und Multiplikation. Diese Gruppen sind abelsch.

b) Die Menge aller bijektiven Abbildungen $Bij(M) = \{f \in Abb(M, M) : f \text{ bijektiv}\}$ ist eine Gruppe mit der Komposition $\circ$ als Verknüpfung und i.a. nicht abelsch. Das neutrale Element ist die Identität, das inverse Element zu f deren Umkehrabbildung f^{-1} nach Satz 1.1.7.

c) Es gibt auch endliche Gruppen, z.B. bildet $\mathbb{B}$ mit der XOR-Verknüpfung ("entweder-oder") eine Gruppe mit zwei Elementen und der Verknüpfungstafel

XOR	0	1
0	0	1
1	1	0

1.2 Körperaxiome

Die Menge der reellen Zahlen besitzt die zwei Verknüpfungen Addition und Multiplikation, wobei sowohl $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je eine abelsche Gruppe bilden. Das Distributivgesetz verbindet beide. Dies ist die grundlegende Struktur, $\mathbb{R}$ ist ein sogenannter Körper:

Definition 1.2.1 *Ein* Körper *ist eine Menge $K \neq \emptyset$ mit zwei Verknüpfungen*

$$+ : K \times K \to K, \quad (a, b) \mapsto a + b, \qquad \textit{die "Addition"},$$
$$\cdot : K \times K \to K, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b, \qquad \textit{die "Multiplikation"},$$

für die folgende Gesetze gelten, jeweils für alle $a, b, c \in K$,

	Addition	*Multiplikation*
Assoziativität	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Kommutativität	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Neutrales Element	*es exist. 0 mit $a + 0 = a$*	*es exist. 1 mit $a \cdot 1 = a$*
Inverses Element	*es exist. $-a$ mit $a + (-a) = 0$*	*für $a \neq 0$ exist. a^{-1} mit $a \cdot a^{-1} = 1$*
Distributivgesetz	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	

Subtraktion $b - a = b + (-a)$ und Division $b/a = b \cdot a^{-1}$ entsprechen gerade der Addition mit dem additiv Inversen $(-a)$ bzw. der Multiplikation mit dem multiplikativ Inversen a^{-1}. Die verschiedenen Zahlmengen unterscheiden sich darin, welche Art von Gleichungen lösbar sind. Die inversen Elemente sind jeweils die (eindeutigen) Lösungen der einfachen Gleichungen

$$a + x = 0 \quad \text{bzw.} \quad a \cdot y = 1.$$

Wegen $0 \cdot y = 0$ ist die rechte Gleichung natürlich nur für $a \neq 0$ lösbar, Division durch Null ist unmöglich. Der Punkt für die Multiplikation wird üblicherweise nicht geschrieben.

Weiterführende Bezeichnungen (wobei $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$):

1. Durch induktive Anwendung bekommt man die Potenzen

   $$a^0 := 1, \quad a^{n+1} := a^n \cdot a, \quad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

   deren Definition man für $a \neq 0$ mit a^{-1} auf Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ ausdehnen kann,

   $$a^{-n} := (a^{-1})^n,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

   Mit den Körperaxiomen folgen dann auch die bekannten Rechenregeln für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m, n \in \mathbb{Z}$,

   $$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^n b^n = (ab)^n \tag{1.2.1}$$

2. Für Summen und Produkte mit vielen Operanden a_k, $k = m, \ldots, n$, $n \geq m$, werden Summen- und Produktzeichen eingeführt, ebenfalls mit induktiver Definition,

   $$\begin{array}{lll} \displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k : & \displaystyle\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m, & \displaystyle\sum_{k=m}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \\ \displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k : & \displaystyle\prod_{k=m}^{m} a_k := a_m, & \displaystyle\prod_{k=m}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) a_{n+1} \end{array}$$

   Für "leere" Summe bzw. Produkt definiert man $\sum_{k=1}^{0} a_k := 0$, $\prod_{k=1}^{0} a_k := 1$. Die Namen der Summations- bzw. Produktindizes ("interne Variable") und die Reihenfolge sind wegen Assoziativität und Kommutativität dabei unerheblich,

   $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}.$$

3. Doppelsummen: Auch das Distributivgesetz kann induktiv auf eine allgemeine Anzahl von Operanden erweitert werden, es gilt

   $$\Big(\sum_{j=1}^{m} a_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) = \sum_{j=1}^{m} a_j \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_j\Big) b_k = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_j b_k.$$

Die Reihenfolge der Summation ist dabei egal, wie man anhand folgender Tabelle nachprüft:

$$
\begin{array}{rrcr|c}
a_1b_1 & +a_1b_2 & +\ldots & +a_1b_n & a_1\sum\limits_{k=1}^n b_k \\
+a_2b_1 & +a_2b_2 & +\ldots & +a_2b_n & +a_2\sum\limits_{k=1}^n b_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_mb_1 & +a_mb_2 & +\ldots & +a_mb_n & +a_m\sum\limits_{k=1}^n b_k \\
\hline
=\sum\limits_{j=1}^m a_jb_1 & +\sum\limits_{j=1}^m a_jb_2 & +\ldots & +\sum\limits_{j=1}^m a_jb_n & =\Big(\sum\limits_{j=1}^m a_j\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^n b_k\Big)
\end{array}
$$

Eine weitere induktive Definition führt auf die *Fakultät* und die *Binomial-Koeffizienten*:

Definition 1.2.2 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ wird die* Fakultät *$n!$ definiert durch*

$$0! := 1, \quad n! = n \cdot (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ hat der Binomialkoeffizient *den Wert*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \text{ für } k \le n, \qquad \binom{n}{k} := 0 \text{ für } k > n.$$

Die Zahlen habe eine mengentheoretische Bedeutung. Wenn man bijektive Selbstabbildungen einer n-elementigen Menge M betrachtet, kann man oBdA ("ohne Beschränkung der Allgemeinheit") die Menge $N := \{1, 2, \ldots, n\}$ verwenden, indem man die Elemente von M durchnummeriert. Diese bijektiven Abbildungen nennt man auch *Permutationen*.

Satz 1.2.3 *Sei M eine Menge mit $|M| = n \in \mathbb{N}$ Elementen.*

a) Die Anzahl der bijektiven Abbildungen von M ist $n!$, kurz $|Bij(M)| = n!$.

b) Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M ist $\binom{n}{k}$.

Für $n = 0$ ist $M = \emptyset$ und enthält natürlich sich selbst. Daher setzt man $\binom{0}{0} = 1$ und muss entsprechend $0! = 1$ definierten, damit die Binomial-Formel allgemein gilt.
Beweis OBdA wird $M = N$ betrachtet.

a) Eine Abbildungung $f \in Bij(N)$ läßt sich auch als n-Wort $(f(1), \ldots, f(n))$ angeben, für $n = 1$ gibt es nur $1 = 1!$ solches Wort (Induktionsanfang). Nun sei $n > 1$ beliebig und die Behauptung gelte für $n-1$ (Induktionsvoraussetzung). Man hat nun n Möglichkeiten, das Bild $f(1) =: m \in N$ festzulegen. Danach ist der Wert m verbraucht und für die Bilder von $2, \ldots, n$ stehen nur $n-1$ mögliche zur Verfügung, also mit $(n-1)!$ möglichen Wahlen. Die Gesamtzahl aller Möglichkeiten ergibt sich durch Multiplikation: $|Bij(N)| = n \cdot (n-1)!$. Dies ist gerade die Formel aus Defin. 1.2.2.

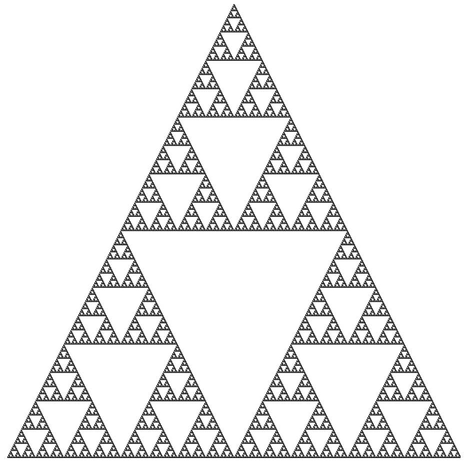
b) Analog zum Teil a) hat man für die Wahl von k Elementen eines k-Wortes $(a_1, \ldots, a_k)$ mit $a_k \in N$ und verschiedenen Komponenten zunächst $n(n-1)\cdots(n-k+1) = n!/(n-k)!$

Möglichkeiten. Da bei einer Menge die Reihenfolge unerheblich ist, führen je $k!$ solcher Worte auf die selbe Teilmenge. Daher ist die Gesamtzahl verschiedener Teilmengen

$$\frac{n\cdot(n-1)\quad\cdots\quad(n-k+1)}{1\cdot\quad 2\quad\quad\cdots\quad\quad k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad \blacksquare$$

Man ordnet die Binomialkoeffizienten als *Pascal-Dreieck* an (Färbung: Zahl un-/gerade)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$



Nach Definition gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} := 1$ und es folgen die Identitäten

$$\begin{aligned}
&a) & \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k}, \\
&b) & \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},\ k \geq 1, \\
&c) & \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} &= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Die Regel a) liest man an der Defiition ab, Regel b) folgt durch Übergang zum Hauptnenner,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},$$

und Regel c) folgt daraus induktiv (unsauber: rückwärts einsetzen entlang der blauen Linie)

$$\binom{n+1}{k+1} \overset{b)}{=} \binom{n}{k} + \underbrace{\binom{n}{k+1}}_{b)} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \underbrace{\binom{n-1}{k+1}}_{b)} = \ldots$$

bis der letzte Summand aufgrund der Regel $\binom{k}{k+1} = 0$ verschwindet.

Satz 1.2.4 *Für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \textbf{(Binomischer Satz)}, \\
a^n - b^n &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.
\end{aligned}$$

Beweis a) duch Induktion, der Anfang bei $n = 1$ ist trivial, $a + b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a + b$.
Für $n \geq 1$ folgt induktiv und mit Indexverschiebung in der 3. Zeile:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{IV}{=} a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \qquad (j = k+1) \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}}_{(1.2.2,b)}\Big)a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

b) Wegen $a^0 b^0 = 1$ stimmt die Formel für $n = 1$. Für $n \geq 1$ gilt induktiv

$$\begin{aligned}
a^{n+1} - b^{n+1} &= a^n(a-b) + b(a^n - b^n) = a^n(a-b) + (a-b)b\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k} \\
&= (a-b)\Big(a^n + \sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-k}\Big) = (a-b)\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Spezialfälle des Satzes:

$$\begin{array}{lrlll}
a) & a = b = 1: & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n & = 2^n & \\
 & -a = b = 1: & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1+1)^n & = 0 & \\
 & n = 3: & a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 & = (a+b)^3 & \\
b) & b = 1, a \neq 1: & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a^k & = \dfrac{a^n - 1}{a-1} & \text{(geometrische Summe).}
\end{array}$$

Die Körperaxiome legen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ noch nicht eindeutig fest, weitere bekannte Beispiele sind die Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Außerdem gibt es viele interessante *endliche* Zahlkörper.

Beispiel 1.2.5 Mit den Rechenregeln für gerade und ungerade Zahlen ist $Z_2 := \{0, 1\} = \mathbb{B}$ ein sehr einfacher Körper. Analog ist $\mathbb{Z}_3 := \{0, 1, 2\}$ ein Körper mit den Additions- und Multiplikations-Tafeln

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & 0 & 1 & 2 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 & 0 \\
2 & 2 & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
\cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 0 & 2 & 1
\end{array}.$$

Offensichtlich widerspricht die Rechenregel $1+2=0$ der aus $\mathbb{R}$ gewohnten "Ordnung". Diese ist eine weitere wichtige Struktur der reellen Zahlen.

1.3 Die Anordnung der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen sind der Größe nach geordnet, sie lassen sich daher als Punkte auf der reellen *Zahlengeraden* interpretieren. Diese Anordnung wird jetzt formell eingeführt.

Definition 1.3.1 *Die Relation "$\leq$" auf $\mathbb{R}$ heißt* (vollständige) Ordnung*, wenn für beliebige Elemente $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt*

Reflexivität	$a \leq a$
Antisymmetrie	$a \leq b$ *und* $b \leq a \;\Rightarrow\; a = b$
Transitivität	$a \leq b,\, b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$
Vergleichbarkeit	$a \leq b$ *oder* $b \leq a$

Des weiteren definiert man die strenge Ungleichung

$$a < b \;:\Longleftrightarrow\; a \leq b \text{ und } a \neq b,$$
$$a \geq b :\Longleftrightarrow b \leq a, \qquad a > b :\Longleftrightarrow b < a.$$

Die Sprechweisen sind offensichtlich, man sagt a *kleiner gleich* b für "$a \leq b$" oder b *ist eine obere Schranke für* a und a *(echt) kleiner als* b für "$a < b$" . Umgekehrten heißt "$a \geq b$" a *größer gleich* b, und "$a > b$" a *größer* b. Zahlen $a > 0$ sind *positiv*, die mit $a < 0$ *negativ*. Die Vergleichbarkeit ist bei der strengen Ordnung "$<$" zu modifizieren, für je zwei Elemente $a,b \in \mathbb{R}$ gilt *genau eine* der drei Beziehungen

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b. \tag{1.3.1}$$

Interessant wird die Ordnung dadurch, dass sie zu den beiden Verknüpfungen in $\mathbb{R}$ passt.

Verträglichkeitsaxiome mit Addition und Multiplikation (1.3.2)

Translationsinvarianz	$a \leq b \;\Rightarrow\; a + c \leq b + c \,\forall c \in \mathbb{R}$
Dehnungsinvarianz	$a \leq b,\, 0 \leq c \;\Rightarrow\; ac \leq bc.$

Rechenregeln für $a,b,c \in \mathbb{R}$:

(1.3.3)

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c,$
- $a < b, c \leq d \Rightarrow a + c < b + d$
- $a < b, 0 < c \Rightarrow ac < bc,$
- $0 \leq a \leq b, 0 \leq c \leq d \Rightarrow 0 \leq ac \leq bd,$
- $0 \leq a < b, 0 < c \leq d \Rightarrow 0 \leq ac < bd,$
- $a \leq b, c < 0 \Rightarrow ac \geq bc,$!!
- $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc,$!!
- $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1},$
- $0 < a < b, n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < a^n < b^n,$
- $a^2 \geq 0;$ sowie $a^2 > 0 \iff a \neq 0.$

Beweis a) Die Translationsinvarianz zeigt die schwache Version, $a < b \Rightarrow a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$, der Fall $a + c = b + c$ führt aber zum $\mathcal{W}$.

b) Nach a) folgt $a + c < b + c$, dann $c \leq d \Rightarrow b + c \leq b + d$.

c)

d+e) Aus $0 \leq a, 0 \leq c$ folgt $0 \leq ac$; außerdem $a \leq b, 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc \overset{0 \leq b}{\Rightarrow} ac \leq bd$. Bei e) folgt schon aus $ac < bc \leq bd$ die Ungleichheit.

f+g) Wegen $c < 0 \iff 0 < (-c)$ folgt $-ac = a(-c) \leq b(-c) = -bc \iff bc \leq ac$. Für $a < b$ führt Gleichheit $ac = bc$ zum $\mathcal{W}$.
h) Für $a > 0$, also $a \neq 0$ existiert $a^{-1} \neq 0$. Wäre $0 > a^{-1}$, folgte aus g), dass $0 = 0 \cdot a^{-1} > a \cdot a^{-1} = 1$ ist. Dies widerspricht aber g), denn ($1 < 0, 1 < 0 \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1 > 0$).$\mathcal{W}$
Durch Multiplikation von $a < b$ mit $a^{-1}b^{-1} > 0$ folgt dann $b^{-1} < a^{-1}$.

i)

j) Der Fall $a \geq 0$ ist abgedeckt, aus g) folgt für $a < 0 =: b$, $c := a < 0$, dass $ac = a^2 > 0b = 0$. Die letzte Äquivalenz gilt wegen des $\mathcal{W}$ zu $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$. ■

Einfache Folgerungen der Regeln sind $1 = 1^2 > 0$ und dass das arithmetische Mittel zwischen den gemittelten Werten liegt,

$$a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b. \tag{1.3.4}$$

Das Rechnen mit Ungleichungen ist eine wichtige Beweistechnik der Analysis. Sehr oft werden komplizierte Ausdrücke durch einfachere abgeschätzt, für die man dann bestimmte Aussagen kennt. Ein erstes, wichtiges Beispiel ist

Satz 1.3.2 (Bernoulli-Ungleichung) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq -1$ gilt*

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

mit Gleichheit genau in den Fällen

$$a = 0 \quad \textit{oder} \quad n \in \{0, 1\}.$$

Beweis durch Induktion über n. Für $n = 0$ und $n = 1$ sind $(1 + a)^0 = 1 = 1 + 0$ und $(1 + a)^1 = 1 + 1 \cdot a$. Auch im trivialen Fall $a = 0$ gilt immer Gleichheit. Für $n \geq 1$ und $a \neq 0$, $1 + a \geq 0$ ist

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na) = 1 + (n + 1)a + na^2 > 1 + (n + 1)a.$$

Für $n + 1 > 1$ und $a \neq 0$ gilt insbesondere keine Gleichheit. ■
Ein einfacher Spezialfall der Bernoulli-Ungleichung ist $2^n \geq n + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind *Intervalle*, also Abschnitte der reellen Achse. Die Frage, ob Randpunkte zum Intervall gehören, führt zu insgesamt 4 Typen mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,

$$\begin{aligned} (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \\ (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\} && \text{links halboffenes Intervall} \\ [a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\} && \text{rechts halboffenes Intervall} \\ [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Die obigen Rechenregeln sind insofern auch Regeln für Intervall-Zugehörigkeit, etwa in

$$x \in (a,b),\ c > 0 \ \Rightarrow \ cx \in (ac, bc),$$

$$0 < a,\ x \in (a,b) \ \Rightarrow \ x^{-1} \in (b^{-1}, a^{-1}).$$

Die Ungleichungsbeziehung wird auf Mengen ausgeweitet, indem die entsprechenden Relationen für alle Elemente der Menge(n) gefordert werden. Für Mengen $M, N \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ bedeutet, z.B.

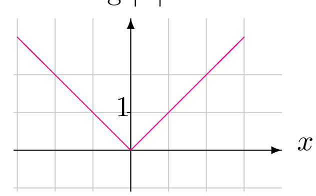
$$\begin{aligned} M \leq a &\iff x \leq a \ \forall x \in M \\ M \leq N &\iff x \leq y \ \forall x \in M,\ y \in N. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Bei Intervallen gilt daher beispielsweise $[a,b] \leq b$, $a < (a,b]$, $[a,b] \leq [c,d]$ für $b \leq c$.

Eine zentrale Arbeitstechnik der Analysis sind Größenabschätzungen "nach oben". Damit man dabei Größen unabhängig vom Vorzeichen betrachten kann, verwendet man den Betrag, der in $\mathbb{R}$ die Rolle einer Norm spielt.

Definition 1.3.3 *Der* Betrag *(Absolutbetrag) einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist*

$$|a| := \left\{ \begin{array}{cl} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0 \end{array} \right\}.$$



Maximum *und* Minimum *von Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man durch*

$$\max\{a,b\} := \begin{cases} a, & a \geq b, \\ b, & a < b, \end{cases} \quad , \quad \min\{a,b\} := \begin{cases} b, & a \geq b, \\ a, & a < b, \end{cases} .$$

Die Definition für Maximum und Minimum lässt sich induktiv auf eine beliebige (endliche) Anzahl von Elementen erweitern, $\max\{a_1, \ldots, a_n\} := \max\{\max\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}, a_n\}$. Es gelten die einfachen Rechenregeln:

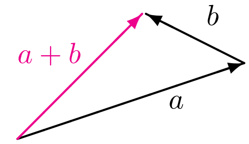
$$|a| = \max\{a, -a\} \geq 0, \quad -|a| \leq a \leq |a|, \quad |a|^2 = a^2,$$

$$\begin{aligned} \max\{a,b\} &= -\min\{-a,-b\} = \tfrac{1}{2}(a + b + |a-b|), \\ \min\{a,b\} &= -\max\{-a,-b\} = \tfrac{1}{2}(a + b - |a-b|). \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Von weitergehender Bedeutung sind die Eigenschaften des folgenden Satzes, sie entsprechen denen der allgemeinen Norm-Definition (im $\mathbb{K}^n$/Mathe-1).

Satz 1.3.4 *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

a) $|a| = 0 \iff a = 0,$



b) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,

c) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ *(Dreieckungleichung).*

In einem Dreieck kann keine Seite länger als die Summe der anderen sein.

Beweis a) und b) direkt aus Definition.

c) da $-a, a \leq |a|$ und $-b, b \leq |b|$ ist, gilt wegen $|x| = \max\{-x, x\}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} -(a+b) & = -a-b & \leq |a|+|b| \\ a+b & & \leq |a|+|b| \\ -(a-b) & = -a+b & \leq |a|+|b| \\ a-b & & \leq |a|+|b| \end{array}\right\} \Rightarrow |a \pm b| \leq |a|+|b|.$$

Die *umgekehrten Dreieckungleichungen* folgen daraus mit

$$|a| = |(a+b) - b| \leq |a+b| + |b| \quad \Rightarrow \quad |a| - |b| \leq |a+b|$$
$$|b| = |(b+a) - a| \leq |a+b| + |a| \quad \Rightarrow \quad |b| - |a| \leq |a+b|. \quad \blacksquare$$

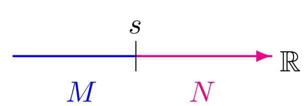
1.4 Vollständigkeit

Aufgrund der Anordnung liegt die Analogie einer "Zahlengeraden" nahe, welche die Körperaxiome mit einer weiteren Struktur ergänzt. Allerdings erfüllt auch der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen diese beiden Axiome, er weist jedoch Lücken auf. Denn in $\mathbb{Q}$ gibt es keine Zahl $x = p/q$ mit teilerfremden $p, q \in \mathbb{N}$ so, dass $x^2 = 2$, d.h., $p^2 = 2q^2$ (denn 2 ist Teiler von p^2, also auch von $p = 2k \;\Rightarrow\; 2q^2 = 4k^2 \;\Rightarrow\; q$ gerade, hat also Teiler mit p gemein: $\mathcal{W}$) Für $\mathbb{R}$ ist zusätzlich das Vollständigkeitsaxiom einzubringen. Dieses kann auf unterschiedliche Weise formuliert werden, hier wird das "Schnittaxiom" verwendet. Dazu seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$ beide nicht leer:

Vollständigkeitsaxiom	$M \cup N = \mathbb{R},\ M < N \;\Rightarrow\; \exists_1 s:\ M \leq s \leq N.$

(1.4.1)

Das Axiom bedeutet, dass es zwischen den beiden Teilen einer zerschnittenen reellen Achse *genau eine* Schnittzahl s gibt. Diese gehört dann als "Randpunkt" natürlich entweder zum Intervall M oder N.



Definition 1.4.1 $\mathbb{R}$ *ist ein vollständiger, angeordneter Körper.*

Im Folgenden wird eine Verallgemeinerung der Schnittzahl eindeutig charakterisiert. Dazu werden die folgenden, naheliegenden Begriffe eingeführt.

Definition 1.4.2 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge.*

a) Ein $s \in R$ heißt obere Schranke *(untere Schranke) von M, wenn $M \leq s$ $(M \geq s)$.*

b) M heißt nach oben beschränkt *(nach unten beschränkt), wenn eine obere (untere) Schranke für M existiert.*

c) M heißt beschränkt, *wenn M nach oben und unten beschränkt ist.*

Beispiel 1.4.3 Die Menge der positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_+ := \{x :\in \mathbb{R} : x > 0\}$ ist nicht beschränkt, da keine obere Schranke existiert. Nach unten ist sie dagegen durch jede negative Zahl beschränkt: $a < 0 \;\Rightarrow\; a \le \mathbb{R}_+$. Auch die 0 ist noch untere Schranke, $0 \le \mathbb{R}_+$, sie hat eine besondere Bedeutung als *größte untere Schranke*.

Definition 1.4.4 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer.*

a) Ein $s \in \mathbb{R}$ heißt Infimum *(oder* größte untere Schranke*) von M, $s = \inf M$, wenn*

$$s \le M, \qquad \textit{und wenn } t \le M \;\Rightarrow\; t \le s,$$

also s untere Schranke von M ist und jede andere untere Schranke kleiner als s ist.

b) Ein $s \in \mathbb{R}$ heißt Supremum *(oder* kleinste obere Schranke*) von M, $s = \sup M$, wenn*

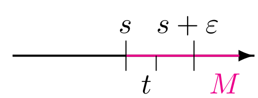
$$s \ge M, \qquad \textit{und wenn } t \ge M \;\Rightarrow\; t \ge s,$$

also s obere Schranke von M ist und jede andere obere Schranke größer als s ist.

Ergänzungen: a) Für alle Intervalltypen sind die Intervallgrenzen das Infimum bzw. Supremum, $a = \inf[a,b] = \inf(a,b]$ und $b = \sup[a,b] = \sup[a,b)$. Wenn das Infimum zur Menge gehört, nennt man es *Minimum*, $s = \inf M \in M$: $s = \min M$. Analog heißt das Supremum dann *Maximum*, $s = \sup M \in M$: $s = \max M$.

b) Im Vorgriff auf eine Standardtechnik der Analysis können die Zusatzbedingungen ("größte" bzw. "kleinste") bei Infimum bzw. Supremum auch mit Hilfe einer (beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ formuliert werden:

$$s = \inf M \iff s \le M \text{ und } \forall \varepsilon > 0 \exists t \in M: \; s \le t < s + \varepsilon.$$



$$s = \sup M \iff s \ge M \text{ und } \forall \varepsilon > 0 \exists t \in M: \; s - \varepsilon < t \le s. \tag{1.4.2}$$

c) Für $M = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ gilt $1 < x \le 2 \forall x \in M$. Dabei ist $2 = \max M$ in M enthalten. Tatsächlich ist $1 = \inf M$, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es das Element mit $n := \lfloor 1 + 1/\varepsilon \rfloor \ge 1/\varepsilon$ so, dass

$$1 \le 1 + \frac{1}{n} \le 1 + \varepsilon.$$

Nicht jede beschränkte Menge hat ein Maximum (maximales Element), es gilt aber

Satz 1.4.5 *In $\mathbb{R}$ besitzt jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum.*

Beweis Sei $a \in A \neq \emptyset$ und $A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann gibt es also obere Schranken und die Menge derselben, $N := \{x : x \ge A\}$ ist nicht leer, $A \le N$. Mit $M := \mathbb{R} \setminus N$ ist dann $M < N$, außerdem ist $M \neq \emptyset$, da jedes $c < a$ in M liegt. Daher ist $M \cup N = \mathbb{R}$ ein Schnitt und es existiert ein eindeutige Schnittzahl s mit $M \le s \le N$.

⋄ Fall $A \cap N = \{s\} \neq \emptyset$: hier ist $s = \max A = \sup A$.

⋄ Fall $A \cap N = \emptyset$: es gilt $A \subseteq M < N$, insbesondere $a < s \le N \forall a \in A$. Daher ist $s \in N$, also $s = \min N = \sup A$. ∎

Damit läßt sich auch eine anscheinend triviale Aussage bestätigen.

Satz 1.4.6 (Archimedisches Prinzip) *Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nb > a$.*

Beweis Wenn kein solches $n \in \mathbb{N}$ existierte, wäre die Menge $M := \{nb : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt. Dann existiert nach S.1.4.5 das Supremum $s := \sup M$. Nach (1.4.2) gibt es zu $\varepsilon := b$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$s - b < n_0 b \le s \;\Rightarrow\; s < (n_0 + 1)b \le s. \lightning \quad \blacksquare.$$

Das Archimedes-Prinzip folgt nicht aus den Körper- und Anordnungsaxiomen alleine. Es wird auch benötigt, um das Wachstum der Potenzen a^n, $n \in \mathbb{N}$ zu klassifizieren.

Satz 1.4.7 *Es sei $a \in \mathbb{R}$.*

a) Für $a > 1$ gilt: $\forall K > 0\, \exists n \in \mathbb{N}$: $a^n > K$.

b) Für $0 < a < 1$ gilt: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N}$: $a^n < \varepsilon$.

Beweis a) Für $a > 1$ ist $b = a - 1 > 0$, und somit nach S. 1.3.2 $a^n = (1 + b)^n \ge 1 + nb$. Da nach S. 1.4.6 ein n existiert mit $nb > K - 1$, folgt die Behauptung.

b) Hier ist $1 < 1/a = 1 + b$ mit $b > 0$ nach (1.3.3) und wie in a) daher $1/a^n \ge 1 + nb$. Die entsprechende Bedingung $n \underbrace{b\varepsilon}_{>0} > 1 - \varepsilon$ ist nach S. 1.4.6 erfüllbar. ■

Die Aussage bedeutet, dass die Potenzen a^n für $a > 1$ "über alle Grenzen wachsen" bzw. für $0 < a < 1$ "beliebig klein werden". Analoge Betrachtungen sind ein Hauptthema der Analysis.

Da das Supremum kein Element der Menge sein muss, kann dieser Begriff auch im uneigentlichen Sinn auf unbeschränkte Mengen erweitert werden, indem man für diese *unendlich* (∞ ist ein Symbol und keine Zahl, gehört nicht zu $\mathbb{R}$!) als Supremum bezeichnet:

$$\begin{aligned} \sup M &:= +\infty, \quad \text{wenn } M \text{ nicht nach oben beschränkt ist,} \\ \inf M &:= -\infty, \quad \text{wenn } M \text{ nicht nach unten beschränkt ist.} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Also entspricht das Archimedes-Prinzip der Aussage $\sup \mathbb{N} = \infty$. Mit (1.4.3) kann man die Definition (1.3.5) der Intervalle um die (halb-) offenen Sonderfälle

$$(-\infty, b], \quad (0, \infty) = \mathbb{R}_+, \quad (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

erweitern. Nimmt man also $\pm\infty$ als *uneigentliche* Sonderfälle dazu, läßt sich Satz 1.4.5 in diesem Sinn vereinfachen:

Jede nichtleere Menge besitzt Supremum und Infimum.

Der Satz 1.4.5 bietet erstmals die Möglichkeit, die Quadratwurzel zu definieren.

Satz 1.4.8 *Zu $a \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$, ist $\sqrt{a} := \sup\{x : x^2 \le a\}$. Es gilt $\sqrt{a} \ge 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$.*

Beweis Die Menge $M := \{x : x^2 \le a\}$ ist nach oben durch $\max\{1, a\}$ beschränkt, denn die Annahme $x > \max\{1, a\}$ führt mit (1.3.3) sofort zum Widerspruch bei $x^2 \le a$. Wegen $0 \in M$ existiert also $s := \sup M \ge 0$. Es wird nun $s^2 = a$ im nichttrivialen Fall $a > 0$ dadurch gezeigt, dass in (1.3.1) die Ungleichungsfälle nicht gelten.

- Fall $s^2 < a$: für $0 < \varepsilon \le 1$ folgt

$$(s+\varepsilon)^2 = s^2 + \varepsilon(2s+\varepsilon) \le s^2 + \varepsilon(2s+1) < a$$

für $\varepsilon < \min\{(a-s^2)/(2s+1), 1\}$, also ist auch $s+\varepsilon \in M$ und s nicht Supremum.

- Fall $s^2 > a$: da s Supremum von M ist, existiert für jedes $0 < \varepsilon < s$ ein Element $y \in M$ mit $y > s - \varepsilon > 0 \;\Rightarrow$

$$y^2 > (s-\varepsilon)^2 = s^2 - 2\varepsilon s + \varepsilon^2 > s^2 - 2\varepsilon s.$$

Nun ist aber für $\varepsilon < (s^2-a)/(2s)$ der letzte Ausdruck $> a$ und mit $y^2 > a$ folgt ein Widerspruch zu $y \in M$.
Damit bleibt nur der letzte Fall $s^2 = a$ übrig, der die letzte Behauptung verifiziert. ■

Als Alternative zur abstrakten Existenzaussage für die Wurzel wird jetzt ein später oft genutztes und auch praktisch anwendbares Konstruktionsverfahren eingeführt. Dazu schließt man die gesuchte Zahl $\hat{x}$, hier mit $\hat{x}^2 = a > 0$, in ein Start-Intervall ein, das anschließend halbiert wird. Danach entscheidet man, ob die linke oder rechte Hälfte diese Zahl enthält und wiederholt den Prozess. Dies ist das sogenannte *Bisektionsverfahren*. Das Startintervall, das $\sqrt{a}$ enthält, sei $[x_0, y_0]$, etwa $[0,1]$ für $a \le 1$ und $[1,a]$ für $a > 1$. Man verfeinert es iterativ für $k = 0, 1, \ldots$. Da das Verfahren später auch in anderen Situationen eingesetzt und eine zentrale Technik von allgemeinerer Bedeutung werden soll, wird die Methode mit einer Entscheidungsfunktion ("Lösung links von")

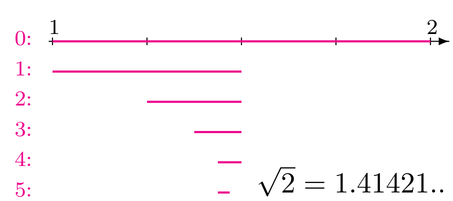
$$\mathit{Lsglinksvon}(m) := \begin{cases} \text{wahr}, & \text{wenn } \hat{x} < m, \ \text{(d.h. hier } m^2 > a), \\ \text{falsch}, & \text{wenn } \hat{x} \ge m, \ \text{(d.h. hier } m^2 \le a), \end{cases}$$

formuliert. Das *Bisektionsverfahren* definiert Intervalle für $k = 0, 1, 2, \ldots$ iterativ durch

$$m_k := \frac{1}{2}(x_k + y_k), \quad [x_{k+1}, y_{k+1}] := \begin{cases} [x_k, m_k] & \text{wenn } \mathit{Lsglinksvon}(m_k), \\ [m_k, y_k] & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.4.4}$$

Als Java-Programm für $a = 2$ ohne Indizes, auftretende Intervalle:

```
double x = 1.0;
double y = 2.0;
while(y-x>1.0E-8){
  double m = (x+y)/2;
  if (m*m>2.0) {y = m;}
          else {x = m;}
}
println("Wurzel in ("+x+","+y+")");
```



Unabhängig von der Art der Entscheidung in *Lsglinksvon* liefert dieses Verfahren eine eindeutig bestimmte Zahl $\hat{x} \in \mathbb{R}$. Diese Tatsache wird hier aus der Vollständigkeit hergeleitet, kann aber auch als gleichwertiges Axiom dienen.

Satz 1.4.9 *Das Bisektionsverfahren (1.4.4) erzeugt eine Intervallschachtelung* $[x_k, y_k] \subseteq \mathbb{R}$, $x_k \leq y_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ *mit*

$$[x_{k+1}, y_{k+1}] \subseteq [x_k, y_k] \subseteq \ldots \subseteq [x_0, y_0].$$

Der Durchschnitt aller Intervalle definiert einen eindeutigen Punkt

$$\bigcap_{k\geq 0}[x_k, y_k] = \{\hat{x}\}, \quad \hat{x} = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}_0\} = \inf\{y_k : k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Beweis Da nach (1.3.4) gilt $m_k \in [x_k, y_k]$, ist die Schachtelungseigenschaft klar, da $[x_k, m_k]$, $[m_k, y_k] \subseteq [x_k, y_k]$, $k \in \mathbb{N}_0$. Ausgeschrieben gilt die Ungleichungskette

$$x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq x_{k+1} \leq \ldots \leq y_{k+1} \leq y_k \leq \ldots \leq y_1 \leq y_0.$$

Außerdem gilt $m_k - x_k = y_k - m_k = \frac{1}{2}(y_k - x_k)$ und daraus folgt induktiv

$$y_{k+1} - x_{k+1} = \frac{1}{2}(y_k - x_k) = 2^{-k-1}(y_0 - x_0), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4.5}$$

Sei nun $s := \inf\{y_k : k \in \mathbb{N}_0\}$. Wir zeigen jetzt, dass auch $s = \sup X$ für $X := \{x_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ ist. Zunächst ist s obere Schranke von X aufgrund obiger Ungleichungskette. Zusätzlich ist nach Definition 1.4.4 nachzuweisen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ rechts von $s - \varepsilon$ (mindestens) ein Element von X liegt. Nach Satz 1.4.7 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein k so, dass $(\frac{1}{2})^k(y_0 - x_0) < \varepsilon$ ist. Für dieses gilt wegen (1.4.5)

$$s - \varepsilon \leq y_k - \varepsilon = x_k + \underbrace{(\frac{1}{2})^k(y_0 - x_0) - \varepsilon}_{<0} < x_k \leq s.$$

Also ist s auch Supremum von X, das gesuchte $\hat{x} = s$. Die Annahme, dass der Durchschnitt aller Intervalle $[x_k, y_k]$ mehr als den Punkt $\hat{x}$ enthält, lässt sich mit (1.4.5) auf gleiche Weise zum Widerspruch bringen. ∎

Die Bisektion hat aus Sicht der Informatik auch eine weitere Bedeutung: beginnt man mit einem Startintervall der Länge eins und ganzzahligen Intervallgrenzen, erzeugt das Verfahren gerade die *binäre Zahldarstellung* von $\hat{x}$ ($\rightarrow$ §2.2.20).

Nach Definition der Quadratwurzel können jetzt komplexe Zahlen diskutiert werden.

Der Betrag im Komplexen

Beim Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen betrachtet man Zwei-Tupel $(a, b) \in \mathbb{R}$ mit den Rechenregeln $(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$

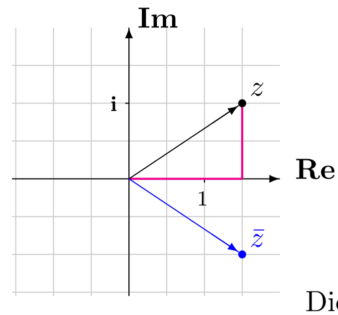
$$\begin{array}{rcll} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) & := & (a_1 + a_2, b_1 + b_2) & \text{Addition} \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) & := & (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) & \text{Multiplikation} \end{array} \tag{1.4.6}$$

Durch die Identifikation $a \in \mathbb{R} \iff (a, 0) \in \mathbb{C}$ wird $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, die Null $(0, 0)$ und die Eins $(1, 0)$ machen $\mathbb{C}$ tatsächlich zu einem Körper ($\rightarrow$ Mathematik-1), den man geometrisch als *Gaußsche Zahlenebene* darstellen kann. Zu $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ heißt $\mathbf{Re}\, z := a$ *Realteil* und

$\mathbf{Im}\, z := b$ *Imaginärteil*. Durch Einführung der *imaginären* Einheit $\mathbf{i} = (0,1)$ mit $\mathbf{i}^2 = (-1,0) = -1$ entsprechen die Rechenregeln (1.4.6) gerade denen aus $\mathbb{R}$ bei Identifikation

$$a + \mathbf{i}b := (a,b) \in \mathbb{C}, \qquad a,b \in \mathbb{R}.$$

Die zu $z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$ *konjugierte* Zahl bekommt man durch Spiegelung an der reellen Achse:



$$\bar{z} := a - \mathbf{i}b = (a, -b).$$

Die komplexe Addition (1.4.6) wirkt wie eine Vektoraddition, es gelten die Regeln $z + \bar{z} = 2\,\mathbf{Re}\, z$, $z - \bar{z} = 2\mathbf{i}\,\mathbf{Im}\, z$. Die Konjugation verträgt sich auch mit den Verknüpfungen:

Satz 1.4.10 *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

a) $$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

b) $$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$$

c) $$\bar{z} \cdot z = (\,\mathbf{Re}\, z)^2 + (\,\mathbf{Im}\, z)^2.$$

Beweis a) ist trivial, b) und c) rechnet man nach mit $z_j = a_j + \mathbf{i}b_j$,

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a_1 - \mathbf{i}b_1)(a_2 - \mathbf{i}b_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + \mathbf{i}(-a_1b_2 - a_2b_1) = \overline{(z_1 \cdot z_2)}.$$

$$\bar{z} \cdot z = (a - \mathbf{i}b)(a + \mathbf{i}b) = a^2 + b^2 + \mathbf{i}(ab - ba) = (\,\mathbf{Re}\, z)^2 + (\,\mathbf{Im}\, z)^2. \quad \blacksquare$$

Daher kann mit der Quadratwurzel aus Satz 1.4.8 die "Euklidnorm" in $\mathbb{C}$ als Betrag definiert werden,

$$|z| := \sqrt{(\,\mathbf{Re}\, z)^2 + (\,\mathbf{Im}\, z)^2} = \sqrt{z\bar{z}}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1.4.7}$$

In der Graphik oben entspricht $|z| = |\bar{z}|$ der geometrischen Länge des Vektors, offensichtlich gilt $|\,\mathbf{Re}\, z| \le |z|$ und $|\,\mathbf{Im}\, z| \le |z|$. Im Zusammenhang mit den Verknüpfungen in $\mathbb{C}$ gilt $1/z = \bar{z}/|z|^2$ und Satz 1.3.4 überträgt sich unverändert:

Satz 1.4.11 *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ist*

a) $$|z| = 0 \iff z = 0$$

b) $$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

c) $$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

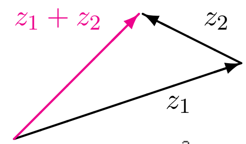
Beweis a) Für $z = a + \mathbf{i}b$ ist $0 = |z| \iff 0 = |z|^2 = \underbrace{a^2}_{\ge 0} + \underbrace{b^2}_{\ge 0} \Rightarrow a = b = 0$, also $z = 0$.

b) Mit $z_j = a_j + \mathbf{i}b_j$, $j = 1, 2$ ist

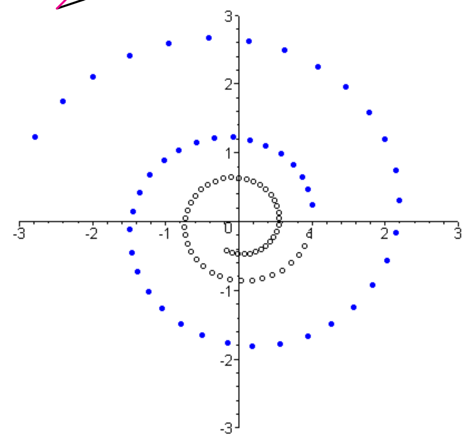
$$\begin{aligned} |z_1z_2|^2 &= (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \\ &= a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = |z_1|^2|z_2|^2. \end{aligned}$$

c) Es muss nur die rechte Ungleichung gezeigt werden, der Rest folgt wie in S. 1.3.4.

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= \overline{(z_1+z_2)}(z_1+z_2) = |z_1|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 + |z_2^2| \\ &= |z_1|^2 + 2\,\mathbf{Re}\,(\bar{z}_1 z_2) + |z_2^2| \overset{b)}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2^2| = (|z_1|+|z_2|)^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Geometrisch entspricht die komplexe Addition $z_1 + z_2$ der Addition der zugehörigen Vektoren (a_1, b_1) und (a_2, b_2).



Bei der komplexen Multiplikation multiplizieren sich nach S.1.4.11 nur die Beträge. Außerdem addieren sich die Winkel zur reellen Achse ("Argument"). Die Potenzen z^n, $n \in \mathbb{N}$, einer komplexen Zahl z liegen daher auf einer Spirale (blaue Scheiben: $z = 1 + \frac{1}{4}\mathbf{i}$, Kreise: $z = 0.96 - \frac{1}{5}\mathbf{i}$).

Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ gibt es in $\mathbb{C}$ keine vollständige Ordnung, mit der Betragsabbildung $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ können aber viele Größenabschätzungen von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ übertragen werden.

2 Konvergenz

Ein grundlegendes Werkzeug für den Umgang mit "dem Unendlichen" sind Folgen, insbesondere solche, die einen *Grenzwert* besitzen.

2.1 Folgen

Definition 2.1.1 *Eine* Folge *reeller Zahlen ist eine Abbildung*

$$a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a(n) := a_n.$$

Bei einer Folge gehört also zu jedem Indexwert $n \in \mathbb{N}_0$ ein reeller Wert a_n. Schreibweisen: $(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (a_n)$, manchmal ist ein anderer (unbeschränkter!) Indexbereich angebracht: $(a_n)_{n \geq k} = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$.

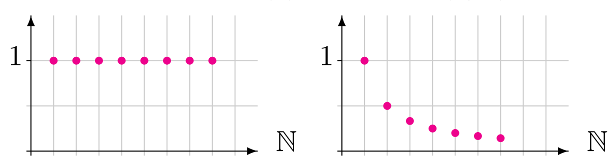
Folgen beschreibt man am einfachsten explizit, durch Angabe der Folgenelemente.

Beispiel 2.1.2

a)	$a_n = a \ \forall n \in \mathbb{N}_0$:	$(a_n) = (a) = (a, a, \ldots)$	(konstante Folge)
b)	$a_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$:	$(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$	(harmonische Folge)
c)	$a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$:	$(a_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$	(alternierende Folge, vgl.:)
d)	$a_n = b^n$, $n \in \mathbb{N}_0$:	$(a_n) = (1, b, b^2, b^3, \ldots)$, $b \in \mathbb{R}$ bel.	(geometrische Folge)
e)	$b_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$:	$(b_n) = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$.	

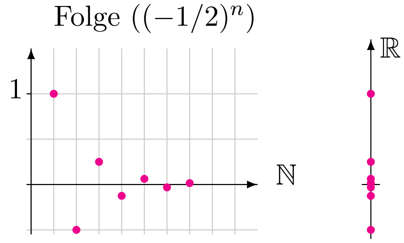
Zur graphischen Darstellung von reellen Folgen kann man den *Graph* über $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ malen,

konstante Folge (1) Folge $(1/n)$



oder die Folgenelemente auf der reellen Achse markieren (rechts).

Folge $((-1/2)^n)$



Im Fall der konstanten Folge (a) ist das eindimensionale Diagramm wenig aufschlußreich, es reduziert sich auf einen einzigen Punkt a. Für die Folgen aus Beisp.2.1.2 b) und e) gilt offensichtlich der Zusammenhang $b_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - a_n$ aus b), also $(b_n) = (1) - (a_n)$.

Bemerkung: Die Menge aller (reellen) Folgen

$$\mathcal{F} := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} : a_n \in \mathbb{R}\} \qquad \text{"Folgenraum"}$$

ist ein *Vektorraum* über $\mathbb{R}$ mit der Addition und skalaren Multiplikation

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n), \quad \lambda(a_n) := (\lambda a_n), \quad (a_n), (b_n) \in \mathcal{F}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mit der komponentenweisen Multiplikation $(a_n) \cdot (b_n) := (a_n b_n)$ ist $\mathcal{F}$ sogar ein *kommutativer Ring* mit Einselement $(1) = (1, 1, \ldots)$.

Eine weitere, sehr wichtige Klasse von Folgen sind die *Iterationsfolgen*, welche nicht explizit, sondern durch eine rekursive Vorschrift definiert werden.

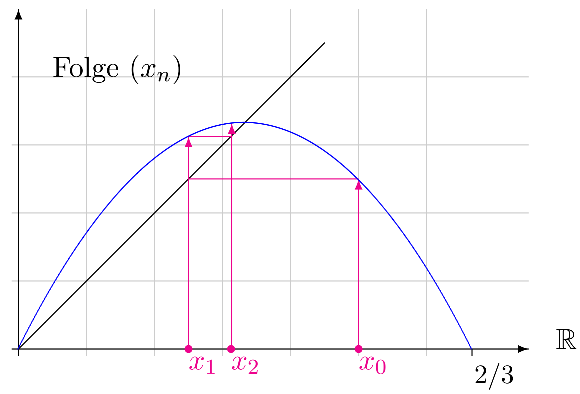
Beispiel 2.1.3 Zu $a > 0$ und $0 < ax_0 < 2$ sei

$$x_{n+1} := x_n(2 - ax_n), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.1.1}$$

Für $a = 3$ und $x_0 = \frac{1}{2}$ bekommt man die Folge

$$(x_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{85}{256}, \frac{21845}{65536}, \ldots) =$$

$$(0.5, 0.25, 0.3125, 0.33203125, 0.333282, \ldots).$$



Das Diagramm veranschaulicht den Vorgang am Graph der Parabel $x(2-ax)$. Deren Wert an der Stelle x_0 wird an der Winkelhalbierenden auf die x-Achse zurückgespiegelt und ergibt x_1. Die Wiederholung liefert die Folge.

Anscheinend nähern sich die Folgenelemente dem Wert $\frac{1}{3} = \frac{1}{a}$ an. Um dies zu prüfen wird die Kontrollfolge $y_n := 1 - ax_n$ bei der Rekursion (2.1.1) betrachtet. Es gilt

$$y_{n+1} = 1 - ax_{n+1} = 1 - ax_n(2 - ax_n) = 1 - 2ax_n + a^2x_n^2 = (1 - ax_n)^2 = y_n^2.$$

Offensichtlich folgt $y_1 = y_0^2$, $y_2 = y_1^2 = y_0^4$, $y_3 = y_2^2 = y_0^8$, etc. . Die Frage der "Annäherung" von x_n an $\frac{1}{3}$ bzw. y_n an null wird später präzisiert ($\to$ Konvergenz).

Bemerkung: Die Folge wurde auf den ersten "Elektronenrechnern" als Verfahren zur Berechnung des Kehrwerts $1/a$ einer Zahl verwendet. Dazu kann man es auch heute noch einsetzen in Langzahlarithmetiken (beliebiger Genauigkeit). Außerdem kann man durch Übertragung auf Matrizen $X_{n+1} := 2X_n - X_nAX_n$ die Inverse A^{-1} einer regulären Matrix A berechnen.

In mehreren Beispielen näherten sich die Folgenelemente einem speziellen "Limes", sie sind konvergent. Dieser Begriff wird jetzt präzisiert.

Definition 2.1.4 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ heißt* konvergent *gegen den* Grenzwert *$a \in \mathbb{R}$ (Limes), wenn*

$$\text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert } N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0 \text{ so, dass } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N(\varepsilon). \tag{2.1.2}$$

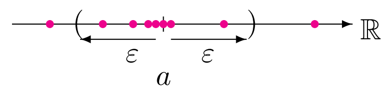
$$\textit{kurz:} \qquad \forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon): \quad |a_n - a| < \varepsilon \, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Man schreibt dann $a_n \to a \, (n \to \infty)$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Eine Folge heißt divergent, *wenn sie gegen kein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.*

Insbesondere beinhaltet die Angabe eines Limes $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ die Konvergenz von (a_n). Die Schreibweise $N(\varepsilon)$ deutet an, dass N erst nach Festlegung von ε bestimmt werden muss, also von ε abhängt ("Frage-Antwort-Protokoll").

Bemerkung: Gleichbedeutend mit (2.1.2) ist die Formulierung

In jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, von a liegen *fast alle* Folgenelemente, d.h., alle bis auf endlich viele.



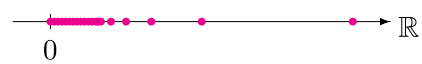
Eine wichtige Folgerung dieser Variante ist, dass eine Änderung der Folge in *endlich vielen Elementen* keinen Einfluss auf die Konvergenz hat (s.u.). Eine Schwierigkeit bei der Anwendung der Konvergenz-Definition ist aber, dass der Grenzwert a bekannt sein muss ("Raten"). Jetzt werden die Folgen aus Beispiel 2.1.2 betrachtet, zur expliziten Angabe der Zahl $N(\varepsilon)$ wird dabei die Bezeichnung $\lfloor x \rfloor := \min\{n \in \mathbb{N} : x \le n\}$ verwendet.

Beispiel 2.1.5 a) Der Grenzwert der konstanten Folge (a) ist natürlich der Wert a,

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad |a_n - a| = 0 < \varepsilon \ \forall n \ge 0 =: N(\varepsilon).$$

b) Die Folge mit $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ ist eine *Nullfolge*, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Denn die Definition ist anwendbar mit

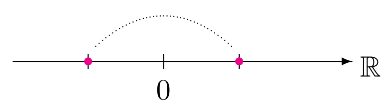
$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \ \forall n \ge N(\varepsilon) := \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1.$$



c) Behauptung: $((-1)^n)$ divergiert.

Zum Beweis wählt man $\varepsilon := 1/2$. Für jeden möglichen Grenzwert a folgt

$$\begin{aligned} &\text{Fall } a \ge 0 : \quad |a_{2k+1} - a| = |-1-a| \ge 1 \ge \varepsilon,\ k \in \mathbb{N}_0,\\ &\text{Fall } a < 0 : \quad |a_{2k} - a| = |1-a| > 1 \ge \varepsilon,\ k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$



das Kriterium (2.1.2) ist also jeweils für unendlich viele Indizes verletzt.

d) Die geometrische Folge ist sehr wichtig, für sie gilt

$a_n = b^n$	$\lvert b\rvert < 1$	$b = 1$	$b = -1$	$\lvert b\rvert > 1$
Behauptung:	$\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 1$	divergiert	divergiert

Die beiden mittleren Fälle wurden bei a) und c) abgehandelt, die Behauptung zu den anderen folgt aus Satz 1.4.7: Für $|b| < 1$ existiert zu $\varepsilon > 0$ demnach ein N mit $|b|^N < \varepsilon$. Damit gilt

$$|b^n - 0| = |b|^n \le |b|^N < \varepsilon \ \forall n \ge N.$$

Andererseits kann für $|b| > 1$ kein $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert sein. Denn es gibt dann ein N mit $|b|^N > |a| + 1$ und mit $\varepsilon = 1$ ist

$$|b^n - a| \ge |b|^n - |a| \ge |b|^N - |a| > 1 \ \forall n \ge N.$$

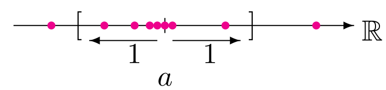
e) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, denn für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \ \forall n \ge \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor =: N(\varepsilon).$$

Voraussetzung für die Konvergenz einer Folge (a_n) ist offensichtlich ihre Beschränktheit. Die Begriffe übernimmt man aus Defin. 1.4.2 durch Betrachtung der Menge $\{a_0, a_1, \ldots\}$.

Satz 2.1.6 *Jede konvergente Folge ist beschränkt, der Limes ist eindeutig.*
Gilt also für eine Folge (a_n), dass $a_n \to a\,(n \to \infty)$ und $a_n \to a'\,(n \to \infty)$, folgt $a = a'$.

Beweis a) Beschränktheit: Für die Folge (a_n) sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $N(1) \in \mathbb{N}_0$ mit $|a_n - a| < 1\,\forall n \geq N(1)$, daher ist



$$|a_n| \leq |a| + |a_n - a| < |a| + 1\,\forall n \geq N(1),$$

$$\Rightarrow\ |a_n| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\} =: M\,\forall n \in \mathbb{N}_0.$$

b) Angenommen, es gelte $a \neq a'$. Dann ist $\varepsilon := |a - a'|/2 > 0$ und es existieren

$$\begin{aligned} N \in \mathbb{N}_0 &: \ |a_n - a| < \varepsilon\,\forall n \geq N,\\ N' \in \mathbb{N}_0 &: \ |a_n - a'| < \varepsilon\,\forall n \geq \bar{N}. \end{aligned}$$

Für $n \geq \hat{N} = \max\{N, N'\}$ gelten dann beide Ungleichungen und ein Widerspruch folgt aus

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < 2\varepsilon = |a - a'|. \quad \blacksquare$$

Nicht jede beschränkte Folge ist aber konvergent, denn die divergente alternierende Folge $((-1)^n)$ ist beschränkt durch 1.

Bei konvergenten Folgen übertragen sich die elementaren Rechenregeln für Summen und Produkte auf ihre Limites. Dies vereinfacht auch die Untersuchung der Konvergenz.

Satz 2.1.7 *Es seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n b_n)$ konvergent und es gilt*

a) $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b.$

b) $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b.$

c) $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = ab.$

d) für $b \neq 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $b_n \neq 0 \forall n \geq n_0$. Dann ist die Quotientenfolge $(a_n/b_n)_{n\geq n_0}$ wohldefiniert und konvergiert

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq n_0}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis Der Beweis wird für die Fälle a) und d) geführt. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ teilt man dabei die Abweichung für die Einzelfolgen geeignet auf.

a) Für Summe und Differenz benötigt man die Grenzen $N(\varepsilon/2)$: zu $\varepsilon > 0$ existieren

$$\begin{aligned} N_1 \in \mathbb{N}_0 &: \ |a_n - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,\forall n \geq N_1,\\ N_2 \in \mathbb{N}_0 &: \ |b_n - b| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,\forall n \geq N_2. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$, dass

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

d) Wegen $|b| > 0$ existiert ein n_0 mit $|b_n - b| < |b|/2$, $n \geq n_0$, daher ist $|b_n| = |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b| \geq |b|/2$. Nach Satz 2.1.6 existiert ein $M > 0$ mit $|a_n| \leq M \,\forall n \geq n_0$. Damit gibt es zu $\varepsilon > 0$ jeweils

$$\begin{array}{l} N_1 \geq n_0 : \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon|b|}{2} \,\forall n \geq N_1, \\ N_2 \geq n_0 : \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4M} \,\forall n \geq N_2. \end{array}$$

Und für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ folgt dann

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{1}{b}(a_n - a) - \frac{a_n}{b_n b}(b_n - b)\right| \leq \frac{1}{|b|}|a_n - a| + \frac{2M}{b^2}|b_n - b| < \frac{1}{|b|}\frac{\varepsilon|b|}{2} + \frac{2M}{b^2}\frac{\varepsilon b^2}{4M} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Die einfachste Anwendung mit je einer konstanten Folge $(b_n) = (a)$ bzw. $(b_n) = (\lambda)$ liefert die Aussagen:

$$a_n \to a \, (n \to \infty) \iff (a_n - a) \text{ ist Nullfolge, d.h. } \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Vielfache von Nullfolgen sind also auch Nullfolgen.

Bemerkung: Satz 2.1.7 zeigt gerade, dass die Teilmenge der konvergenten Folgen

$$\mathcal{F}_{konv} := \{(a_n) \in \mathcal{F} : \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert}\}$$

ein Unter-Vektorraum (sogar ein Teilring) des Folgenraums $\mathcal{F}$ ist.

Beispiel 2.1.8 a) Für das Besipiel $a_n = \frac{n}{n+1}$ lässt sich der Grenzwert auch kürzer bestimmen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

b) Beh.: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 99}{n^2 - 3} = 2$, denn für $n > 1$ ist $1 - 3/n^2 > 0$ und

$$\frac{2n^2 + 99}{n^2 - 3} = \frac{2 + 99/n^2}{1 - 3/n^2} \longrightarrow \frac{2}{1} = 2 \ (n \to \infty).$$

c) Die Konvergenz der in Beispiel 2.1.3 rekursiv durch $x_{n+1} := x_n(2 - ax_n)$ definierten Iterationsfolge wird jetzt untersucht. Für die Fehler $z_n := x_n - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}(1 - ax_n) = -\frac{1}{a}y_n$ folgt aus der alten Beziehung $y_{n+1} = y_n^2$, dass

$$z_{n+1} = -\frac{1}{a}y_{n+1} = -\frac{1}{a}y_n^2 = -a\left(\frac{y_n}{a}\right)^2 = -az_n^2 \leq 0. \tag{2.1.3}$$

Als erste Folgerung erkennt man, dass wegen $a > 0$ gilt $z_n \leq 0 \,\forall n \geq 1$, die Folge (z_n) ist also nach oben durch null und daher (x_n) nach oben durch $1/a$ beschränkt. Analog zur Betrachtung von (y_n) vermutet man die

Behauptung: $z_n = -\frac{1}{a}(az_0)^{2^n}$, $n \geq 1$.
Induktions-Beweis: für $n = 1$ entspricht das gerade (2.1.3). Für $n \geq 1$ gilt tatsächlich

$$z_{n+1} = -az_n^2 = -a\Big(-\frac{1}{a}(az_0)^{2^n}\Big)^2 = -\frac{a}{a^2}(az_0)^{2\cdot 2^n} = -\frac{1}{a}(az_0)^{2^{n+1}}.$$

Die Folge (x_n) konvergiert, wenn (z_n) Nullfolge ist. Nach Satz 1.4.7 werden für $|az_0| < 1 \iff x_0 \in (0, \frac{2}{a})$ die Folgenelemente $|z_n|$ also beliebig klein für großes n, wegen $2^n \geq n+1$ gilt $|z_n| \leq \frac{1}{a}(az_0)^{n+1} = a^n z_0^{n+1} \to 0$. Wie an den Zahlen im Beispiel 2.1.3 zu sehen war, konvergiert die Folge (x_n) auch sehr schnell. Für $|az_0| > 1$ tritt allerdings das Gegenteil ein, die Fehler wachsen unbegrenzt.

In dem Beispiel wurde schon eine wichtige Technik verwendet, der Vergleich einer unbekannten Folge mit einer bekannten. Ein wichtiger Punkt im folgenden Satz ist, dass im Limes immer nur die schwache Ungleichung gilt.

Satz 2.1.9 *(Vergleichssatz) Die reellen Folgen (a_n), (b_n) seien konvergent. Falls*

$$\left.\begin{array}{l} a_n < b_n \\ a_n \leq b_n \end{array}\right\} \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis durch Widerspruch. Falls $a = \lim a_n > b = \lim b_n$ wäre, wäre $\varepsilon := (a-b)/2 > 0$. Dann existieren N_1, N_2 mit $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \, \forall n \geq N_1$ und $-\varepsilon < b_n - b < \varepsilon \, \forall n \geq N_2$. Dann ergibt sich aber für $n \geq \max\{n_0, N_1, N_2\}$ ein Widerspruch durch

$$a_n > a - \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b + \varepsilon > b_n. \lightning \quad \blacksquare$$

Die Grenzwertbildung ist also verträglich mit der Anordnung, allerdings kann die strenge Ungleichung im Grenzübergang verloren gehen.

Konvergenzkriterien für Folgen

Bei der Betrachtung von Folgen kann man die Konvergenz bekannter Folgen verwenden.

Satz 2.1.10 *Für reelle Folgen (a_n), (b_n), (c_n) gilt Folgendes.*

a) Endliche Abänderung: es gelte $a_n \to a \,(n \to \infty)$ und $b_n = a_n \forall n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} b_n = a$.

b) Dominanz: (b_n) sei Nullfolge, *d.h. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Wenn*

$$|a_n| \leq |b_n| \, \forall n \geq n_0 \;\Rightarrow\; a_n \to 0 \; (n \to \infty).$$

c) Schachtelung: es gelte $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \geq n_0$, und (a_n), (b_n) seien konvergent. Wenn

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: a \;\Rightarrow\; c_n \to a \; (n \to \infty).$$

d) Wenn $a_n \to 0 \,(n \to \infty)$ und (b_n) beschränkt $\;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.

Beweis a) Das $N(\varepsilon)$ für (a_n) ist für (b_n) durch $\max\{n_0, N(\varepsilon)\}$ zu ersetzen.

b) Zu $\varepsilon > 0$ existiert N mit $|b_n| < \varepsilon \,\forall n \geq N$. Dann gilt n.V. auch $|a_n| \leq |b_n| < \varepsilon \,\forall n \geq \max\{N, n_0\} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

c) Nach Voraussetzung gilt $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n \to 0\,(n \to \infty)$, nach Teil b) also $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$. Die Regeln aus S.2.1.7 liefern daher

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = a + 0 = a.$$

d) ∎

Beispiel 2.1.11 Für $p \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ nach Satzteil b), denn es ist $0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n} \to 0\,(n \to \infty)$.

Nach Satz 2.1.6 ist jede konvergente Folge beschränkt. Für eine spezielle Klasse von Folgen gilt sogar die Umkehrung.

Definition 2.1.12 *Eine reelle Folge (a_n) heißt*

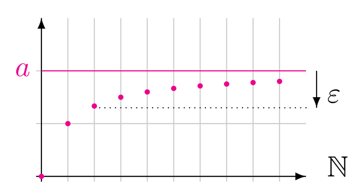
	monoton wachsend, wenn	$a_{n-1} \leq a_n \,\forall n \in \mathbb{N}$,
streng	*monoton wachsend, wenn*	$a_{n-1} < a_n \,\forall n \in \mathbb{N}$,
	monoton fallend, wenn	$a_{n-1} \geq a_n \,\forall n \in \mathbb{N}$,
streng	*monoton fallend, wenn*	$a_{n-1} > a_n \,\forall n \in \mathbb{N}$.

(a_n) heißt (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

Der nächste Satz ist das erste Konvergenzkriterium, welches *ohne Kenntnis des Grenzwerts* auskommt.

Satz 2.1.13 *Eine monotone und beschränkte reelle Folge ist konvergent.*

monotone Folge (a_n)



Beweis Es wird nur der monoton wachsende Fall behandelt, wir zeigen dafür, dass $a_n \to a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Nach Definition des Supremums existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Element a_N mit $a - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_N \leq a$. Wegen der Monotonie gilt dann aber auch

$$a - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_N \leq a_n \leq a < a + \frac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow\; |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \;\forall n \geq N,$$

also Konvergenz gegen a. ∎

Der Satz wird im folgenden Beispiel zur Definition der *Euler-Zahl* e genutzt.

Beispiel 2.1.14 Eine wichtige Anwendung des Satzes betrifft die Folge

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Obere Schranke $a_n < 3$. Nach dem binomischen Satz 1.2.4 ist

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k k!} \\ &< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots < 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - 2^{-n}}{1 - 1/2} < 3.\end{aligned}$$

b) Monotones Wachstum, durch äquivalente Umformungen:

$$\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{n-1} = a_{n-1} \le a_n = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n \quad \iff$$

$$\frac{n-1}{n}\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^n \le \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n \quad \iff$$

$$1 - \frac{1}{n} \le \Big(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\Big)^n = \Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^n = \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)^n.$$

Die letzte Ungleichung gilt tatsächlich nach Satz 1.3.2 (Bernoulli-Ungleichung). Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.1.13 erfüllt, der Limes der Folge ist die wichtige *Eulersche Zahl*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n =: \mathbf{e} = 2.71828..., \tag{2.1.4}$$

die Basis der später intensiv diskutierten Exponentialfunktion.

Für nicht monotone, beschränkte Folgen gilt im allgemeinen keine Konvergenz. Das Verhalten kann man aber durch Betrachtung von Teilfolgen genauer untersuchen.

Definition 2.1.15 *Zu einer reellen Folge (a_n) und einer Folge aufsteigender Indizes $n_k \in \mathbb{N}_0$ mit $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ heißt*

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots) \quad \text{Teilfolge } \textit{von } (a_n).$$

Ein Punkt $b \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt *der Folge (a_n), wenn eine gegen b konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ existiert,*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b.$$

Beispiel 2.1.16 a) Die alternierende Folge $(a_n) = ((-1)^n)$ hat offensichtlich zwei konvergente Teilfolgen zu $n_k = 2k$, $k \ge 0$ mit $(a_{2k}) = ((-1)^{2k}) = (1) \to 1\,(n \to \infty)$ und zu $n_k = 2k+1$, $k \ge 0$ mit $(a_{2k+1}) = ((-1)^{2k+1}) = (-1) \to -1\,(n \to \infty)$. Also besitzt die Folge die beiden Häufungspunkte ± 1.

b) Die divergente Folge mit $a_n = \frac{2n}{1+n+(-1)^n n}$ besitzt nur einen Häufungspunkt, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$, während $(a_{2k+1}) = (4k+2)$ unbeschränkt ist.

Der Begriff Häufungspunkt ist allgemeiner als "Grenzwert":

Satz 2.1.17 *Es sei (a_n) eine konvergente reelle Folge. Dann gilt*

a) Jede Teilfolge konvergiert gegen den Limes, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ist der einzige *Häufungspunkt der Folge (a_n).*

Beweis a) Es sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert N: $|a_n - a| < \varepsilon\,\forall n \ge N$. Dazu sei K ein Index mit $n_K \ge N$, also folgt $n_k \ge N \forall k \ge K$. Dann gilt auch

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon\,\forall k \ge K, \text{ also } \quad a_{n_k} \to a\,(k \to \infty).$$

b) Analog zum Beweis von Satz 2.1.6. ■

Eine wichtige Konsequenz der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist der folgende Satz.

Satz 2.1.18 (Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis Die Folge (a_n) sei beschränkt. Dann existieren $K, L \in \mathbb{R}$ mit $K \le a_n \le L \, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Im Folgenden wird durch Bisektion eine Intervallschachtelung $[x_k, y_k]$, $k \in \mathbb{N}_0$, konstruiert und eine konvergente Teilfolge mit $a_{n_k} \in [x_k, y_k]$.

a) Das Bisektionsverfahren beginnt mit $[x_0, y_0] := [K, L]$, damit gilt offensichtlich

$$a_n \in [x_0, y_0] \, \forall n \ge n_0 := 0.$$

b) Nun wird für jedes $k \ge 0$ iterativ definiert mit $m_k := \frac{1}{2}(x_k + y_k)$:

$$[x_{k+1}, y_{k+1}] := \begin{cases} [x_k, m_k], & \text{wenn für unendlich viele } n \text{ gilt } a_n \in [x_k, m_k], \\ [m_k, y_k], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann existiert ein $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_{k+1}} \in [x_{k+1}, y_{k+1}]$.

c) Nach Konstruktion sind die Intervalle geschachtelt, vgl. Satz 1.4.9, es gilt insgesamt

- $[x_{k+1}, y_{k+1}] \subseteq [x_k, y_k]$, also $x_0 \le x_k \le x_{k+1} < y_{k+1} \le y_k \le y_0$, $k \in \mathbb{N}_0$,
- $a_{n_j} \in [x_k, y_k] \; \forall j \ge k$,
- $y_k - x_k = 2^{-k}(y_0 - x_0) \to 0 \, (k \to \infty)$.

Daher sind die beiden Folgen (x_k), (y_k) monoton und beschränkt, nach Satz 2.1.13 also konvergent, und

$$\lim_{k\to\infty} x_k =: a = \lim_{k\to\infty} y_k, \quad \text{da} \quad \lim_{k\to\infty} (y_k - x_k) = 0.$$

Wegen der Schachtelung $x_k \le a_{n_k} \le y_k$ konvergiert nach Satz 2.1.10 c) die Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, der daher Häufungspunkt von (a_n) ist. ■

Bemerkung: Die äußersten Häufungspunkte einer beschränkten Folge beschreiben den Bereich, in dem sich die Folge konzentriert. Daher heißt der

$$\begin{array}{rll} \text{kleinste Häufungspunkt:} & \liminf\limits_{n\to\infty} a_n & \textit{Limes inferior}, \\ \text{größte Häufungspunkt:} & \limsup\limits_{n\to\infty} a_n & \textit{Limes superior}. \end{array}$$

Tatsächlich gilt für jedes $\varepsilon > 0$, dass

$$a_n \in [\liminf a_n - \varepsilon, \limsup a_n + \varepsilon] \quad \text{für fast alle } n. \tag{2.1.5}$$

Für $p \in \mathbb{N}$ ist (n^{-p}) eine Nullfolge, also konvergent, und offensichtlich der Kehrwert der divergenten Folge (n^p), die "gegen unendlich strebt". Das Symbol ∞ (ist keine Zahl!) wird daher in eingeschränkter Form als *uneigentlicher* Grenzwert zugelassen. Allerdings verwendet man eine andere Sprechweise, da für das Symbol ∞ nur ein Teil der üblichen Rechenregeln gelten.

Definition 2.1.19 *Eine reelle Folge* (a_n) *heißt* bestimmt divergent *gegen* $+\infty$ *(bzw.* $-\infty$*), wenn*

$$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists N \in \mathbb{N}: \quad a_n > K \, \forall n \ge N \; (\textit{bzw. } a_n < K \, \forall n \ge N).$$

Schreibweisen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *oder* $a_n \to \infty\,(n \to \infty)$, *bzw.*
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *oder* $a_n \to -\infty\,(n \to \infty)$.

Bestimmt divergente Folgen sind offensichtlich unbeschränkt, aber nicht jede unbeschränkte Folge ist bestimmt divergent.

Beispiel 2.1.20 a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$ für $p \in \mathbb{N}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - 2^n) = -\infty$,

c) Die Folge $((-n)^n)$ ist nicht bestimmt divergent, sie ist divergent, da sie abwechselnd positive und negative Werte annimmt.

Für die uneigentlichen Grenzwerte $\pm\infty$ (Symbole!) gilt ein eingeschränkter Satz von Rechenregeln, etwa

$$\begin{array}{lcl} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty & \Rightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = 0 \\ a_n > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n \to 0 & \Rightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = +\infty \\ a_n < 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n \to 0 & \Rightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = -\infty \end{array}$$

p-te Wurzeln in $\mathbb{R}$

Aus der Existenz des Supremums wurde in Satz 1.4.8 die Existenz der Quadratwurzel hergeleitet, um den komplexen Betrag definieren zu können. Für die allgemeine Wurzel $\sqrt[p]{a}$, $a \ge 0$, $p \in \mathbb{N}$, wird ein konstruktiver Weg beschritten. Die im folgenden Satz eingeführten Folgen dienen zur (auch praktischen) Berechnung der eindeutigen positiven Lösung der Gleichung $x^p = a > 0$.

Satz 2.1.21 *Zu* $a \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{N}$ *wird mit* $x_0 > 0$, $x_0^p \ge a$ *eine Folge iterativ definiert durch*

$$x_{n+1} := \frac{p-1}{p}\, x_n + \frac{a}{p x_n^{p-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann konvergiert (x_n) *monoton fallend gegen* $b > 0$ *mit* $b^p = a$. *Man nennt* $b =: \sqrt[p]{a} = a^{1/p}$ *die* p*-te Wurzel von* a.

Beweis durch Induktion.

a) Zunächst folgt $x_n > 0\,\forall n \in \mathbb{N}_0$, die Folge ist nach unten beschränkt.

b) es ist $x_n^p \ge a$, denn mit der Bernoulli-Ungleichung S.1.3.2 gilt

$$x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{a - x_n^p}{p x_n^p}\right) \;\Rightarrow\; x_{n+1}^p = x_n^p \Big(1 + \underbrace{\frac{a - x_n^p}{p x_n^p}}_{\ge -1/p}\Big)^p \ge x_n^p \left(1 + \frac{a - x_n^p}{x_n^p}\right) = a.$$

c) Die Monotonie folgt aus b), denn

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^p}{p x_n^{p-1}} \le 0.$$

d) Nach S.2.1.13 konvergiert daher (x_n), also sei $b := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dann folgt

$$b = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n - \frac{a - x_n^p}{p x_n^{p-1}}\right) = b - \frac{a - b^p}{p b^{p-1}} \iff b^p = a.$$

e) Eindeutigkeit: Gilt auch für $c > 0$ die Gleichung $c^p = a$, folgt aus S.1.2.4

$$0 = b^p - c^p = (b-c)\sum_{k=0}^{p-1} \underbrace{b^k c^{p-k-1}}_{>0} \;\Rightarrow\; b - c = 0. \quad \blacksquare$$

Mit diesem Satz kann man die Definition der Potenz a^r, $a \geq 0$, auf rationale Exponenten ausdehnen:

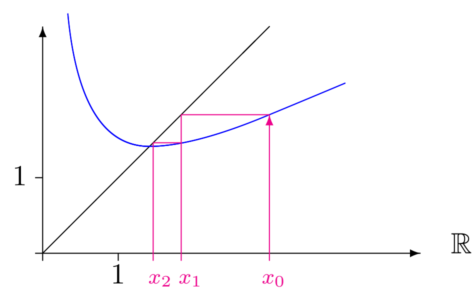
$$r = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}: \quad a^r = a^{q/p} := \sqrt[p]{a^q}, \quad a > 0. \tag{2.1.6}$$

Auch für diese Definition verifiziert man leicht die üblichen Rechenregeln ($a^r a^s = a^{r+s}$, $a^{-r} = 1/a^r$, $(a^r)^s = a^{rs}$, $a^r b^r = (ab)^r$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $r, s \in \mathbb{Q}$). Aus dem Beweisteil e) des Satzes folgt für $y^p - x^p > 0$ übrigens die Monotonieaussage

$$0 < x < y \quad \iff \quad \sqrt[p]{x} < \sqrt[p]{y}. \tag{2.1.7}$$

Beispiel 2.1.22 Die im Satz 2.1.21 verwendete Folge konvergiert sehr schnell gegen $\sqrt[p]{a}$. Für $\sqrt{2}$ erhält man mit $x_0 = 2$ die gezeigten Werte, die exakten Ziffern sind unterstrichen.

n	x_n
0	2.0
1	$\underline{1}.5$
2	$\underline{1.41}66666..$
3	$\underline{1.414215}686..$
4	$\underline{1.41421356237}46..$



Rechts ist der Ablauf der Iteration analog zu Beisp.2.1.3 skizziert mit $x_0 = 3$. Im Gegensatz zum Bisektionsverfahren aus (1.4.4) bekommt man nicht langsam eine (Binär-) Stelle nach der anderen. Hier verdoppelt sich die Zahl der exakten Ziffern mit jedem Schritt. Für $p = 2$ liest man das leicht an der Vorschrift ab, sie entspricht dem *Heron-Verfahren*

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

und für die Folge der relativen Fehler $(x_n - b)/b$, $b = \sqrt{a}$ gilt für $x_0 \geq b$:

$$\frac{x_{n+1} - b}{b} = \frac{1}{b}\Big(\frac{x_n^2 + b^2}{2x_n} - b\Big) = \frac{(x_n - b)^2}{2bx_n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x_n - b}{b}\right)^2, \; n \geq 0.$$

Der neue relative Fehler $x_{n+1}/b - 1$ ist kleiner als das Quadrat des Vorgängers $(x_n/b - 1)^2$. Im Beispiel wird aus $x_3 - b \cong 10^{-5}$ daher $x_4 - b \cong 10^{-10}$.

Das folgende Beispiel macht eine Aussage zu zwei gegensätzlichen Effekten, einer immer höhereren Wurzel aus einer größer werdenden Zahl. Sie wird später benötigt.

Beispiel 2.1.23 Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{2.1.8}$$

Wir betrachten $\sqrt[n]{n} =: 1 + a_n$. Für $n > 1$ ist dann $a_n \geq 0$ und die Definition und die Binomische Formel (S.1.2.4) führen auf:

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \;\Rightarrow\; a_n^2 \leq \frac{2}{n(n-1)}(n-1) = \frac{2}{n}.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es natürlich ein N mit $2/N < \varepsilon^2$ und für $n \geq N$ ist daher $a_n \leq \sqrt{2/n} < \varepsilon$, also gilt $a_n \to 0$.

Bemerkung: Für $a > 0$ und $p \in \mathbb{N}$ gilt nach Definition immer $\sqrt[p]{a} > 0$. Die eindeutige(!) Definition der p-ten Wurzel muss man unterscheiden von der Betrachtung aller Lösungen der Gleichung $x^p = a$, hier ist ist $\sqrt[p]{a}$ nur eine von mehreren (genau p komplexen) Lösungen. Nur in diesem Sinne ist die Schreibweise $x^2 = a \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{a}$ angebracht. Für ungerades p kann man die Definition der Wurzel auch auf den Fall $a < 0$ übertragen mit $\sqrt[p]{a} = -\sqrt[p]{-a}$.

Cauchy-Folgen

Der Satz 2.1.13 enthielt erstmals ein spezielles Kriterium für die Konvergenz, das *ohne Kenntnis des Grenzwerts* auskam. Folgende Definition ist allgemein einsetzbar.

Definition 2.1.24 (Cauchy-Folge) *Eine Folge* (a_n) *heißt* Cauchy-Folge*, wenn gilt*

$$\text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert } N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0 \text{ so, dass } |a_m - a_n| < \varepsilon \text{ für alle } m, n \geq N(\varepsilon). \tag{2.1.9}$$

$$\textit{kurz:} \qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon): \quad |a_m - a_n| < \varepsilon\, \forall m, n \geq N(\varepsilon).$$

Der Unterschied zur Konvergenzdefinition besteht also darin, dass die ε-Bedingung nicht mit dem (meist unbekannten) Grenzwert a, sondern für beliebige *Paare* von Folgengliedern gilt, wenn beide Indizes genügend groß sind. Dabei darf aber insbesondere die Indexdifferenz $|m - n|$ beliebig groß werden.

Beispiel 2.1.25 Die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$ ist Cauchyfolge, mit $N(\varepsilon) := \lfloor 2/\varepsilon \rfloor$ gilt

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left|\frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{m(n+1) - n(m+1)}{(m+1)(n+1}\right| = \frac{|m-n|}{(m+1)(n+1)} \\ &\leq \frac{m+n+2}{(m+1)(n+1)} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Jede konvergente Folge (Grenzwert a) ist auch Cauchyfolge, denn die Differenz $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a|$ wird beliebig klein für große m, n. Die Umkehrung gilt aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$:

Satz 2.1.26 *Jede Cauchy-Folge in* $\mathbb{R}$ *ist konvergent.*

Beweis Cauchyfolgen sind beschränkt, denn etwa zu $\varepsilon := 1$ existiert ein N so, dass $|a_N - a_m| < \varepsilon = 1\, \forall m \geq N$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$|a_n| \leq \max\{|a_0|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}.$$

Nach dem Satz 2.1.18 von Bolzano-Weierstraß gibt es daher eine konvergente Teilfolge $a_{n_k} \to a\,(k \to \infty)$. Wir zeigen jetzt, dass dann auch $a_n \to a\,(n \to \infty)$.

Denn zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $K(\varepsilon)$ so, dass $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$, $k \geq K(\varepsilon)$ gilt und ein $N(\varepsilon)$ so, dass $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$ für $m, n \geq N(\varepsilon)$. Da die Indizes n_k streng wachsen, existiert einer mit $m := n_k > N(\varepsilon)$. Damit folgt jetzt die Konvergenz, denn für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_m| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Das Cauchy-Kriterium aus Satz 2.1.26 wurde im wesentlichen (über Satz 2.1.18 etc.) mithilfe des Vollständigkeitsaxioms bewiesen. Es ist aber keine einfache Folgerung desselben, sondern äquivalent damit, d.h. man kann Satz 2.1.26 im Prinzip als Ersatz für das Vollständigkeitsaxiom benutzen. In $\mathbb{C}$ und im $\mathbb{R}^n$, wo keine vollständige Anordnung mehr existiert, ist die Definition der Vollständigkeit über die Aussage von Satz 2.1.26 sogar vorzuziehen. Da bei vielen Folgen und *Reihen* ($\to$§2.2) der Grenzwert unbekannt ist, weist man Konvergenz oft über das Cauchy-Kriterium nach.

Komplexe Folgen

Da auch $\mathbb{C}$ ein Körper ist, kann man komplexe Folgen (z_n) als Abbildungen $\mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{C}$ definieren mit Folgenelementen $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Die entscheidenden Konvergenzaussagen für reelle Folgen wurden mit dem *Betrag* formuliert und können daher auch ins Komplexe übertragen werden, da auch der komplexe Betrag nach S.1.4.11 die Eigenschaften einer Norm bzw. Metrik besitzt.

Definition 2.1.27 *Eine komplexe Folge (z_n), $z_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$ heißt*

$$\begin{aligned} \textit{konvergent gegen } z \in \mathbb{C} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N : |z_n - z| < \varepsilon \, \forall n \geq N, \\ \textit{Cauchy-Folge} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N : |z_n - z_m| < \varepsilon \, \forall m, n \geq N. \end{aligned}$$

Damit sind alle die Sätze und Kriterien übertragbar, welche den Betrag, aber nicht die Anordnung verwenden. Allerdings gehören zu einer komplexen Folge (z_n) mit $a_n := \mathbf{Re}\, z_n$, $b_n := \mathbf{Im}\, z_n$ auch die reellen Folgen (a_n) und (b_n) der Real- und Imaginärteile, es ist $(z_n) = (a_n + \mathbf{i} b_n) = (a_n) + \mathbf{i}(b_n)$. Hier lässt sich ein einfacher Zusammenhang zur Konvergenz im Reellen herstellen:

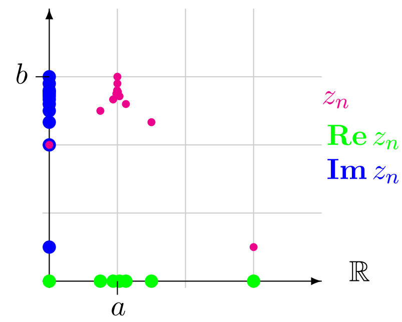
Satz 2.1.28 *Für eine komplexe Folge (z_n) und $z \in \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) (z_n) konvergiert gegen z, also $z_n \to z\,(n \to \infty)$,

b) die reellen Folgen der Real- und Imaginärteile konvergieren, $\mathbf{Re}\, z_n \to \mathbf{Re}\, z\,(n \to \infty)$ und $\mathbf{Im}\, z_n \to \mathbf{Im}\, z\,(n \to \infty)$.

c) die reelle Folge $(|z_n - z|)$ ist Nullfolge.

Beweis Sei $a_n = \mathbf{Re}\, z_n$, $b_n = \mathbf{Im}\, z_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.



a) $\Rightarrow$ b): Für $z_n \to z\,(n \to \infty)$ sei $z = a + \mathbf{i}b$ der Limes und $N(\varepsilon)$ der Wert aus Defin.2.1.27 zu $\varepsilon > 0$. Wegen $|a_n - a| \leq |z_n - z|$ und $|b_n - b| \leq |z_n - z|$ gilt dann auch

$$|a_n - a| \leq |z_n - z| < \varepsilon\, \forall n \geq N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = a$$
$$|b_n - b| \leq |z_n - z| < \varepsilon\, \forall n \geq N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

b) $\Rightarrow$ a): Für $a_n \to a$, $b_n \to b\,(n \to \infty)$ existieren zu $\varepsilon > 0$ Indizes N_1, N_2 mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq N_1 \text{ und } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq N_2.$$

Aus der Dreieckungleichung S.1.4.11 c) folgt dann für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$

$$|z_n - z| = |a_n - a + \mathbf{i}(b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

c) entspricht der Defin.2.1.27 a). ■

Wegen $|\bar{z}_n - \bar{z}| = |\overline{z_n - z}| = |z_n - z|$ gilt auch die neue Regel

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \bar{z}_n = \bar{z} = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}.$$

Wegen Satz 2.1.28 konvergiert in $\mathbb{C}$ jede *Cauchy-Folge*, daher nennt man auch den Körper $\mathbb{C}$ *vollständig*. Mit S.2.1.28 lassen sich alle die Sätze für komplexe Folgen direkt übertragen, welche nicht die Anordnung von $\mathbb{R}$ verwenden, den Begriff Beschränktheit bezieht man bei komplexen Folgen auf die Betragsfolge $(|z_n|)$. Eine Übersicht:

gilt für komplexe Folgen	nicht anwendbar	Beschreibung
Satz 2.1.6		Limes eindeutig
Satz 2.1.7		Rechenregeln für Limites
	Satz 2.1.9	Vergleichssatz
Satz 2.1.10 a) b) d)	Satz2.1.10 c)	Konvergenzkriterien
	Satz 2.1.13	monotone Konvergenz
Satz 2.1.17		Teilfolgen, Häufungspunkte
Satz 2.1.18		Bolzano-Weierstraß
	Satz 2.1.21	Wurzeln
Satz 2.1.26		Konvergenz v.Cauchyfolgen

2.2 Unendliche Reihen

Reihen sind spezielle Folgen, die durch Summation entstehen. Da hier aber besondere Eigenschaften und Kriterien gelten, ist eine eigenständige Betrachtung interessant. Man kann sogar behaupten, dass Reihen die wichtigsten Beispiele für Folgen sind. Die folgende Diskussion bezieht sich auf reelle und komplexe Reihen ($a_k \in \mathbb{K}$), wenn keine Anordnungsargumente verwendet werden. Bei Monotonieaussagen wird explizit nur der reelle Fall formuliert.

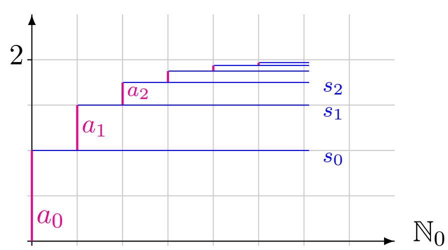
Definition 2.2.1 *Zu einer gegebenen Folge* (a_n), $a_n \in \mathbb{K}$, *nennt man die Folge* (s_n) *der* Partialsummen $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ *(unendliche)* Reihe *und bezeichnet sie mit* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$. *Wenn diese Folge* (s_n) *konvergiert, heißt der Grenzwert* $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ Wert *bzw.* Summe *der Reihe, bezeichnet durch*

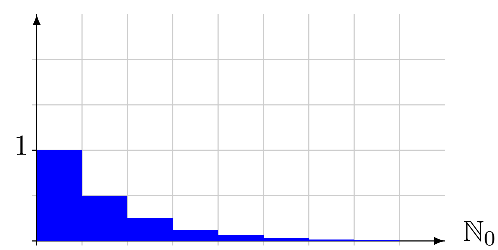
$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Bemerkung: Umgekehrt gehört zu einer gegebenen Folge (s_n) eine Reihe mit $a_n := s_n - s_{n-1}$, $n \geq 1$ und $a_0 := s_0$. Denn es gilt ("Teleskopsumme")

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = s_0 + (s_1 - s_0) + \ldots + (s_n - s_{n-1}).$$

Die beiden Graphiken zeigen mögliche Darstellungsweisen für Reihen (mit $a_k \geq 0$), links als Folge, rechts wird für jedes a_k ein Kästchen der Breite eins gezeichnet, die Summe entspricht der Gesamtfläche, das Beispiel ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$:





Beispiel 2.2.2 Die *geometrische Reihe* mit $q \in \mathbb{C}$ ist unter folgender Einschränkung konvergent,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Denn für $|q| < 1$ ist $1 - q \neq 0$ und für die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ gilt

$$|s_n - \frac{1}{1-q}| = \frac{1}{|1-q|}\Big|(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k - 1\Big| = \frac{|1 - q + q - q^2 + \ldots - q^{n+1}|}{|1-q|} = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}.$$

Nach Satz 1.4.7 existiert für $\varepsilon > 0$ aber ein N, ab dem der letzte Ausdruck $< \varepsilon$ ist. Die geometrische Reihe besitzt eine fundamentale Bedeutung für *Potenzreihen*.

Die im Beispiel betrachtete Folge (q^n) ist unter der Einschränkung $|q| < 1$ eine Nullfolge. Dies ist ein wichtiges notwendiges (nicht hinreichendes!) Kriterium für Reihenkonvergenz.

Satz 2.2.3 *Wenn die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *in* $\mathbb{K}$ *konvergiert, ist* (a_k) *Nullfolge.*

Beweis Zu $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\varepsilon > 0$ sei N so, dass $|s_n - s| < \varepsilon/2$ für $n \geq N$. Dann folgt für $n \geq N+1$, dass

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq |s_n - s| + |s_{n-1} - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also gilt $a_n \to 0\,(n \to \infty)$. ■

Ein allgemeines, hinreichendes Kriterium für Konvergenz ist das Cauchy-Kriterium. Der Beweis ist ein einfache Übertragung der Definition 2.1.24 mit $m = n + p > n$.

Satz 2.2.4 (Cauchy-Kriterium) *Die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *in* $\mathbb{K}$ *ist genau dann konvergent, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon),\ p \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel 2.2.5 a) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ divergiert nach Satz 2.2.3.

b) Die *harmonische Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert. Denn das Cauchy-Kriterium ist verletzt, für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=n+1}^{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Dies zeigt, dass $a_k = \frac{1}{k} \to 0\,(k \to \infty)$ nicht hinreichend für Konvergenz ist.

c) Für $m > 1$ konvergiert aber die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$, denn für $m = 2$ lässt sich S.2.2.4 mit einer Teleskopsumme anwenden, $n > 1, p \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^2} &\leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=n}^{n+p} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) \\
&= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \ldots - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+p} < \varepsilon
\end{aligned}$$

für $n \geq 2 + \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$. Der Reihenwert ist übrigens bekannt, es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934\ldots$$

Für konvergente Reihen gelten viele der früheren Gesetze ebenfalls. Ein wichtiger Unterschied besteht aber bei Abänderung: schon die Änderung eines einzigen Gliedes ändert zwar nicht die Konvergenzeigenschaften (Satz 2.2.4), aber den *Wert* der Reihe!

Satz 2.2.6 *Es seien* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen in* $\mathbb{K}$ *und* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Dann gilt*

a)
$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

b) für $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ *gilt*
$$a_k \le b_k \,\forall k \in \mathbb{N}_0 \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k \le \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Beweis folgt aus S. 2.1.7 (bei Real- und Imaginärteil) und S. 2.1.9. ■

Beispiel 2.2.7 Kürzlich wurde gezeigt, dass die harmonische Reihe mit $a_k = \frac{1}{k}$ divergiert, da die Koeffizienten a_k "zu langsam" gegen null gehen ($\sum_k k^{-2}$ konvergiert). Bei wechselnden Vorzeichen gilt dies nicht mehr, die *alterniernde harmonische Reihe* konvergiert,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 0.693147\ldots \quad (= \ln 2),$$

(o.Bew.). Allerdings ist die Konvergenz nicht sehr robust, sie und der Reihenwert hängen nämlich von der Reihenfolge der Summanden ab! Für solche "gerade so" konvergenten Reihen sind bestimmte Rechenregeln nicht anwendbar. Dafür wird ein schärferes Konvergenzkriterium benötigt.

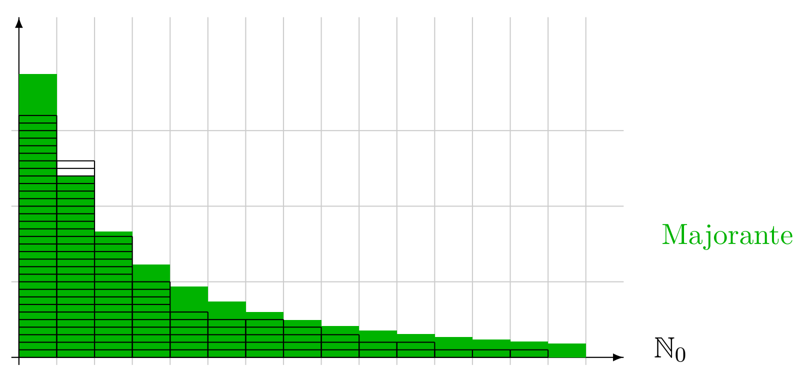
Definition 2.2.8 *Die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{K}$, *heißt* absolut konvergent, *wenn die reelle Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *konvergiert.*

Satz 2.2.9 *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Dieser Satz ist ein Spezialfall des folgenden, er zeigt, dass absolute Konvergenz tatsächlich das einschränkendere Kriterium ist. Reelle Reihen mit nichtnegativen Gliedern konvergieren nach Satz 2.1.13 genau dann, wenn sie beschränkt sind, da die Partialsummen s_n monoton wachsen. Daher erfordert absolute Konvergenz einfach die Beschränktheit der Betragsreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$. Diese kann man auch durch Vergleich mit anderen, bekannten Reihen nachweisen.

Satz 2.2.10 (Majoranten-Kriterium)

Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *mit* $b_k \in \mathbb{R}$, $b_k \ge 0 \,\forall k \in \mathbb{N}_0$ *eine konvergente reelle Reihe und* $|a_k| \le b_k \;\forall k \ge k_0$, *dann konvergiert auch* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{K}$, *absolut.*



Beweis Nach dem Cauchy-Kriterium existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \geq k_0$ so, dass $\sum_{k=n}^{n+p} b_k < \varepsilon$ $\forall n \geq N, p \in \mathbb{N}$. Daraus folgt aber die Behauptung für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, da nach Voraussetzung

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\Big| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p} b_k < \varepsilon \ \forall n \geq N,\ p \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt natürlich auch eine *Schranke* für den Reihenwert, für $n_0 = 0$ etwa

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Die wichtigste Majorante ist die reelle *geometrische Reihe* mit $b_k = q^k$ für $0 < q < 1$. Die beiden Beziehungen $\sqrt[k]{b_k} = q$ bzw. $b_{k+1}/b_k = q$ führen auf folgende Standard-Konvergenzkriterien:

Satz 2.2.11 *Wenn zu einer Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ ein $q < 1$, $q \in \mathbb{R}$, und ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ existieren so, dass eine der folgenden Bedingungen gilt,*

$$\begin{array}{llll} (i) & \sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad \forall k \geq k_0, & & (\text{"Wurzelkriterium"}) \\ (ii) & a_k \neq 0 \text{ und } \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \quad \forall k \geq k_0, & & (\text{"Quotientenkriterium"}), \end{array}$$

dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Zusatz: Falls umgekehrt $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ oder $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ ist für unendlich viele k, divergiert die Reihe, da (a_k) keine Nullfolge ist.

Beweis (i) Die Voraussetzung ist äquivalent mit $|a_k| \leq q^k =: b_k$, $k \geq k_0$, also ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ eine konvergente Majorante.

(ii) Die Quotientenvoraussetzung bedeutet $|a_{k+1}| \leq q|a_k|$, $k \geq k_0$, also induktiv $|a_{k_0+k}| \leq q^k|a_{k_0}|$ für $k \in \mathbb{N}$. Jetzt ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine Majorante mit

$$(b_0, \ldots, b_{k_0}) = (|a_0|, \ldots, |a_{k_0}|), \quad b_k := |a_{k_0}|q^{k-k_0},\ k > k_0. \quad \blacksquare$$

Beispiel 2.2.12 a) Mäßig wachsende Vorfaktoren zerstören nicht die Konvergenz der geometrischen Reihe, für $p \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^p x^k \quad \begin{cases} \text{absolut konvergent für} & |x| < 1, \\ \text{divergent für} & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Denn für $|x| < 1$ gilt beim Wurzelkriterium zu $a_k = k^p x^k$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k^p |x|^k} = \sqrt[k]{k^p}|x| = (\sqrt[k]{k})^p |x|.$$

Da nach (2.1.8) aber $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$ ist, existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$(\sqrt[k]{k})^p \leq \frac{1}{2}(1+\frac{1}{|x|}) \;\Rightarrow\; \sqrt[k]{k^p|x|^k} \leq \frac{1+|x|}{2} < 1 \;\forall k \geq k_0.$$

Für $|x| \geq 1$ ist dagegen $|k^p x^k| \geq 1$, also (a_n) keine Nullfolge.

b) Die Exponentialreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für $a_k = x^k/k!$ liefert das Quotientenkriterium

$$\Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| = \Big|\frac{x^{k+1}k!}{(k+1)!x^k}\Big| = \frac{|x|}{k+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall k \geq k_0 := \lfloor 2|x| \rfloor.$$

Insbesondere ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ (a_k) eine Nullfolge $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x^k}{k!} = 0$.

c) Für Quotienten- und Wurzelkriterium gibt es aber eine Grauzone, in denen sie keine Entscheidung liefern. Nach Beisp.2.2.5 ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \begin{cases} \text{divergent für} & p = 1, \\ \text{konvergent für} & p \geq 2. \end{cases}$$

Es gilt aber nach (2.1.8) bei $a_k = 1/k^p$ für jedes $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 1 > \quad & \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^p} && \to 1 \ (k \to \infty), \\ 1 > \quad & \Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| = \Big(\tfrac{k}{k+1}\Big)^p && \to 1 \ (k \to \infty). \end{aligned}$$

Da die Ausdrücke durch kein $q < 1$ von eins weg beschränkt sind, ist für kein p eine Entscheidung möglich.

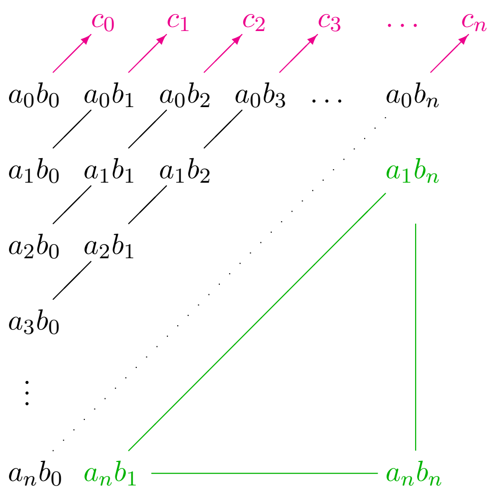
Bei den Rechenregeln für Reihen in Satz 2.2.6 fehlte das Produkt. Denn zur Umordnung von Summanden wird absolute Konvergenz benötigt.

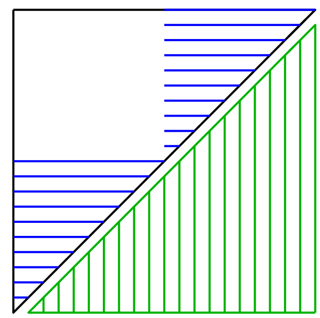
Satz 2.2.13 (Cauchy-Produkt von Reihen)

Die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ seien absolut konvergent, es sei $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$. Dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\Big).$$

Bemerkung: Tatsächlich taucht in der rechten Summe jedes der Produkte $a_j b_k$, $j, k \in \mathbb{N}_0$ genau einmal auf (schwarze Werte):





Beweis a) Die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ wird über die Beschränkheit der Betragsreihe gezeigt, die erste Doppelsumme kann durch Hinzunahme der oben grün markierten Größen vereinfacht werden:

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} |a_{k-j}||b_j| \leq \Big(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} |b_k|\Big) \leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\Big).$$

b) Also existiert der Grenzwert $C := \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$. Damit ist noch die Konvergenz $C = \lim\limits_{n\to\infty} A_nB_n$ nachzuweisen mit den Partialsummen $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Dazu vergleicht man mit $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$:

$$\begin{aligned} |C_n - A_nB_n| &= \Big|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}b_j - \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k\Big| \\ &= \Big|\sum_{\substack{0\leq j,k\leq n \\ j+k>n}} a_kb_j\Big| \leq \sum_{\substack{0\leq j,k\leq n \\ j+k>n}} |a_k||b_j| =: r_n. \end{aligned}$$

Der Indexbereich zu r_n ist oben vertikal schraffiert. Wegen $j+k>n$ gilt entweder $j>n/2$ oder $k>n/2$. Daher kann man den Wert von r_n durch Hinzunahme der horizontal schraffierten Terme vergrößern:

$$\begin{aligned} r_n &\leq \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ n/2<j\leq n}} |a_k||b_j| + \sum_{\substack{0\leq j\leq n \\ n/2<k\leq n}} |a_k||b_j| \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} |a_k|}_{beschr.} \underbrace{\sum_{j>n/2}^{n} |b_j|}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{k>n/2}^{n} |a_k|}_{\to 0} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} |b_j|}_{beschr.} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Denn alle Summen sind wegen der absoluten Konvergenz beschränkt, und die Abschnitte $\sum_{k>n/2}^{n} |a_k|$, $\sum_{j>n/2}^{n} |b_j|$ nach dem Cauchykriterium S.2.2.4 sogar Nullfolgen ($n\to\infty$). Aus Satz 2.1.10 d) folgt damit

$$|C_n - A_n B_n| \le r_n \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

Beispiel 2.2.14 Für das Quadrat der Reihe mit $a_k = b_k = \frac{1}{k!}$ gilt

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{S.1.2.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Potenzreihen

Potenzreihen sind ein wichtiges Hilfsmittel der Analysis, da sich die meisten (Standard-) Funktionen in dieser Form darstellen lassen.

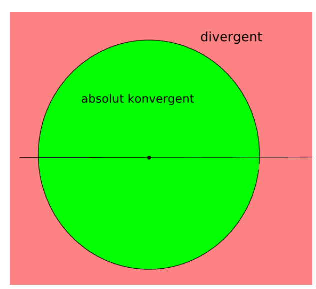
Definition 2.2.15 *Die zu einer Zahlenfolge (a_n) gehörige* Potenzreihe *ist*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{K}.$$

Der Bereich für die Variable x, in dem Potenzreihen konvergieren, hat eine sehr einfache Struktur. Wenn nämlich $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ in einem Punkt $x_0 \neq 0$ konvergiert, ist $(a_n x_0^n)$ eine Nullfolge, also beschränkt, $|a_n x_0^n| \le M \,\forall n \in \mathbb{N}_0$. Dann hat man aber für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x|/|x_0| < 1$ die *Majorante*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \Big|\frac{x}{x_0}\Big|^n \le M \sum_{n=0}^{\infty} \Big|\frac{x}{x_0}\Big|^n = \frac{M|x_0|}{|x_0| - |x|} < \infty. \tag{2.2.1}$$

Daher ist der Konvergenzbereich eine Kreisscheibe (im Komplexen), im Reellen also ein offenes Intervall. Diese Beobachtung führt auf den Begriff *Konvergenzradius*.



Satz 2.2.16 *Für jede Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *existiert ein* Konvergenzradius $r \ge 0$ *mit folgenden Eigenschaften:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \begin{cases} \textit{konvergiert absolut für alle} & |x| < r, \\ \textit{divergiert für} & |x| > r. \end{cases}$$

Beweis Die Aussage folgt mit (2.2.1) aus der Definition

$$r := \sup\{|x| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert}\}. \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Auf dem Kreisrand $|x| = r$ kann keine Aussage gemacht werden. Im Satz sind insbesondere auch die Fälle $r = 0$ (nirgends konvergent, außer x_0) und $r = \infty$ (überall konvergent) zugelassen.

Den genauen Wert des Konvergenzradius ermittelt man mit Wurzel- oder Quotienten-Kriterium. Dazu ist Satz 2.2.11 auf die Folge $(a_n x^n)$ anzuwenden. Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x| \quad \text{bzw.} \quad \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|x|,$$

also z.B. der Anforderung $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| < 1$ erhält man den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2.2.2}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{2.2.3}$$

falls bei den Quotienten mit $a_{n+1} \neq 0$ der Limes existiert. Die Fälle $r = 0$ und $r = \infty$ sind wieder zugelassen.

Beispiel 2.2.17 a) Nach (2.1.8) hat für jedes $p \in \mathbb{Z}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n : \text{ Konvergenzradius } r = 1.$$

Denn sowohl Wurzel- als auch Quotientenkriterium liefern

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^p = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = (\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1}))^p = 1.$$

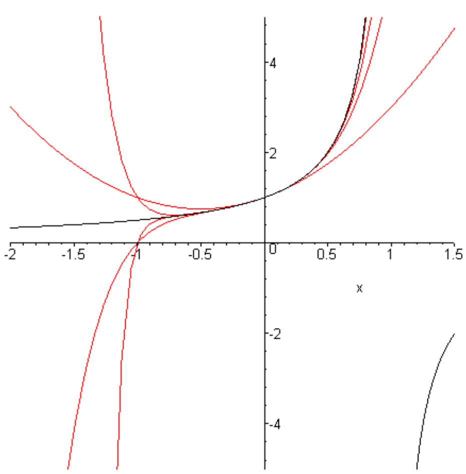
b) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ konvergiert wegen $r = 0$ nur in $x = 0$, denn

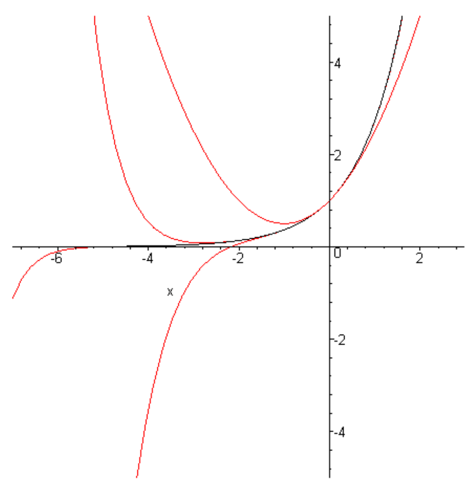
$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0\,(n \to \infty).$$

c) Nach Beispiel 2.2.12 konvergiert die Exponentialreihe überall, $r = \infty$, da im Quotienten-Kriterium mit $a_n = 1/n!$ gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1) \to \infty.$$

Das unterschiedliche Konvergenzverhalten bei der geometrischen Reihe ($a_n \equiv 1$) und der Exponentialreihe ($a_n = 1/n!$) sieht man in den folgenden Graphiken, welche jeweils den Verlauf der Summenpolynome s_2, s_5, s_8, s_{15} zeigen. Links, bei der geometrischen Reihe, wachsen die Polynome außerhalb von $[-1, 1]$ sehr stark an, während sie rechts die Exponentialreihe überall immer besser approximieren:





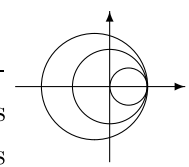
Bemerkung: Offensichtlich konvergiert die Potenzreihe nahe bei $x = 0$ am besten, insbesondere in einem Kreis um $x = 0$. Will man einen anderen Ort $x_0 \in \mathbb{K}$ bevorzugen, wählt man diesen als *Entwicklungspunkt* und betrachtet allgemeinere Potenzreihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad y \in \mathbb{K}. \tag{2.2.4}$$

Deren Konvergenzbereich ist jetzt eine Kreisscheibe $\{x : |x - x_0| < r\}$ mit Zentrum x_0. Durch Substitution $y = x - x_0$ erhält man natürlich die Gestalt aus Defin. 2.2.15. Allerdings kann der Konvergenzradius stark von x_0 abhängen. Als Beispiel wird die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ (Konvergenzradius 1 bei $x_0 = 0$) betrachtet.

Beispiel 2.2.18 Mit $x = x_0 + y$, $x_0 \neq 1$, erhält man für $|y| = |x - x_0| < |1 - x_0|$ die Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x_0-y} = \frac{1}{1-x_0} \frac{1}{1 - \frac{y}{1-x_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^{n+1}}.$$



Diese Reihe mit den Koeffizienten $b_n = (1 - x_0)^{-n-1}$ hat nach dem Wurzelkriterium den Konvergenzradius $r = 1 - x_0$. Dieser ist also für $x_0 \in (0, 1)$ kleiner als eins, für $x_0 \in (-1, 0)$ dagegen sogar größer als der der geometrischen Reihe. Es überrascht nicht, dass alle offenen Kreisscheiben (Mittelpunkt x_0, Radius $1 - x_0$) den Pol in $x = 1$ gerade nicht mehr enthalten.

Die Anordnung der Summanden im Cauchy-Produkt Satz 2.2.13 sortiert gerade die Koeffizienten nach x-Potenzen.

Satz 2.2.19 *Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ besitze den Konvergenzradius r und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ den Konvergenzradius s. Dann gilt für $|x| < \min\{r, s\}$:*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\Big) x^n.$$

Der Konvergenzradius der rechten Produktreihe ist also mindestens $\min\{r, s\}$.

Eine sehr wichtige Rolle spielt die schon mehrfach betrachtete Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{K}, \tag{2.2.5}$$

sie hat den Konvergenzradius $r = \infty$. Nach Beispiel 2.2.12 b) konvergiert sie absolut für beliebige $x \in \mathbb{C}$. Die Genauigkeit der n-ten Partialsumme kann man über das *Restglied*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_{n+1}(x)$$

abschätzen, es gilt

$$|r_{n+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für } n \geq 2|x| - 2. \tag{2.2.6}$$

Zum Nachweis dieser Abschätzung wird der Reihenrest betrachtet

$$\begin{aligned}|r_{n+1}(x)| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x|^k}{k!}\\ &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\Big(1+\frac{|x|}{n+2}\Big(1+\frac{|x|}{n+3}\Big(1+\frac{|x|}{n+4}+\ldots\Big)\Big).\end{aligned}$$

Da für $|x| \le (n+2)/2$ jeder der Quotienten in der Klammer durch $\frac{1}{2}$ beschränkt ist, kann diese durch die geometrische Reihe mit Wert $1/(1-\frac{1}{2}) = 2$ abgeschätzt werden.

Die Schranke (2.2.6) zeigt die "schnelle" Konvergenz der Exponentialreihe für $n > |x|$. Für die Analysis spielt dieser Aspekt eine geringe Rolle, für die tatsächliche (numerische) Berechnung von $\exp(x)$ aber schon.

Beispiel 2.2.20 Numerischer Vergleich der folgenden Grenzwertaussagen zur Euler-Zahl, Beispiel 2.1.14

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n. \tag{2.2.7}$$

Die Grenzwerte sind wirklich gleich, denn für $s_n(x) := \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ und $b_n := (1+1/n)^n$ gilt

$$\begin{aligned}0 \;\le\; & s_n(1) - b_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!n^k}\\ =\; & \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\underbrace{\Big(1-(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\Big)}_{\ge 0}\\ \le\; & \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\Big(1-(1-\frac{1}{n})^{k-1}\Big) \overset{S.1.3.2}{\le} \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\Big(1-(1-\frac{k-1}{n})\Big)\\ \le\; & \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{k!} \le \frac{1}{n}\exp(1) \quad \to 0\,(n\to\infty).\end{aligned}$$

Zur Berechnung ist es günstig, die Produktform von x^k und $k!$ auszunutzen,

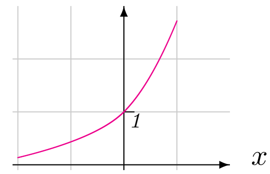
$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = 1+\frac{x}{1}\Big(1+\frac{x}{2}\Big(1+\frac{x}{3}\Big(1+\ldots+\frac{x}{n}\Big)\ldots\Big)\Big),$$

bei a_n berechnet man die Teilfolge $a_{2^k} = (1+2^{-k})^{2^k}$ durch wiederholtes Quadrieren. Die Anzahl der gültigen Ziffern (unterstrichen) zeigt die Überlegenheit der Reihe

$$\begin{aligned}s_{10}(1) = \;& \underline{2.71828181}01.. &&= e - 3\cdot 10^{-8},\\ a_{1024} = a_{2^{10}} = \;& \underline{2.71}69.. &&= e - 10^{-3}.\end{aligned}$$

Die grundlegenden Eigenschaften der Exponentialreihe enthält

Satz 2.2.21 *Für die Exponentialreihe (2.2.5) gelten mit $y, z \in \mathbb{K}$ folgende Regeln:*



a) $\exp(y+z) = \exp(y)\exp(z)$ *(Funktionalgleichung)*

b) $\exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) > 1 \ \forall x \in \mathbb{R}_+$

c) $\exp(nz) = \big(\exp(z)\big)^n \ \forall n \in \mathbb{Z},$

$u.a.\ \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)},\ \exp(n) = e^n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Beweis a) Das Cauchyprodukt aus Satz 2.2.13 liefert $\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}x^{n-k}y^k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

nach dem binomischen Satz 1.2.4.

b) exp kann denn Wert null nicht annehmen, da exp wegen a) sonst identisch null wäre. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt daher immer $0 < \exp(x/2)^2 = \exp(x)$. Für $x > 0$ sind alle Summanden in (2.2.5) positiv, also ist dann $\exp(x) > 1$.

c) folgt induktiv aus a) mit geeigneten y, z. ∎

Binäre Zahldarstellung

In natürlicher Weise beschreibt man Zahlen durch die Angabe ihrer (Dezimal-)Stellen, bei der Eulerzahl etwa $e = 2.71828...$ Dieses ist tatsächlich die Kurzform einer unendlichen Reihe, sogar einer Potenzreihe zur Basis $b = 10$.

Definition 2.2.22 *Zu $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, ist ein b-*adischer Bruch *eine Reihe der Form*

$$\pm\sum_{k=-m}^{\infty} a_k b^{-k} \quad = \pm\Big(\sum_{j=0}^{m} a_{-j}b^j + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{b^k}\Big) \tag{2.2.8}$$

mit Koeffizienten $a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $a_{-m} \neq 0$ für $m > 0$. Bei gewähltem b schreibt man

$$\pm a_{-m}a_{-m+1}\ldots a_{-1}a_0\,.\,a_1a_2\ldots$$

Die übliche Schreibweise mit $b = 10$ ist ein Dezimalbruch, für Computer sind Dualbrüche mit $b = 2$ besser geeignet. Da die Koeffizienten a_k (Stellen) beschränkt sind durch $0 \leq a_k \leq b-1$ ist im Wurzelkriterium $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} \leq 1$ und daher liegt $b^{-1} \leq \frac{1}{2}$ innerhalb des Konvergenzradius. Daher ist ein b-adischer Bruch stets konvergent und stellt eine reelle Zahl dar. Die Umkehrung wird nur für den Fall $b = 2$ gezeigt mithilfe des Bisektionsverfahrens: jede reelle Zahl ist als dyadischer Bruch darstellbar.

Satz 2.2.23 *a) Jeder b-adische Bruch ist konvergent in $\mathbb{R}$.*

b) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein b-adischer Bruch (2.2.8).

Beweis a) Die Reihe $\sum_{k=-m}^{\infty}(b-1)b^{-k}$ ist konvergente Majorante, da $b^{-1} \le \frac{1}{2} < 1$.

b) Nur für $b = 2$ und (oBdA) $x > 0$. Nach Satz 1.4.7 existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le x < 2^{m+1}$ und m sei die kleinste dieser Zahlen. Für $m > 0$ ist dann also $x \in [2^m, 2^{m+1})$ und daher $a_m = 1$ die höchste (Binär-) Stelle, für $m = 0$ kann aber auch $a_0 = 0$ sein, wenn $x < 1$ ist. Induktiv gilt nun mit

$$x_n := \sum_{k=-m}^{n} a_k 2^{-k} \le x$$

für den Rest $0 \le x - x_n < 2^{-n}$. Daher ist die Stelle $a_{n+1} \in \{0, 1\}$ eindeutig bestimmt durch die Bedingungen

$$a_{n+1}2^{-n-1} \le x - x_n < (a_{n+1} + 1)2^{-n-1}. \quad \blacksquare$$

Bemerkung: a) Das Vorgehen im Beweis enstpricht dem Bisektionsverfahren (1.4.4) mit Startintervall $[0, 2^{m+1}]$. Da in jedem Schritt nur zwei Fälle für a_{n+1} möglich sind, kann man die letzte Bedingung im Beweis auch so formulieren:

$$a_{n+1} = \begin{cases} 0, & x - x_n < 2^{-n-1} \\ 1, & x - x_n \ge 2^{-n-1} \end{cases}$$

b) Der Satz enthält nur die Existenz, denn zur Eindeutigkeit der Zahldarstellung muss man periodische b-adische Brüche mit $a_k = b - 1 \forall k \ge k_0$ ausschließen, im Dezimalsystem ist

$$0.99\bar{9}... = 1.$$

Bemerkung: Bei unendlich großen Mengen gibt es Einiges, was dem üblichen Empfinden widerspricht. Im Endlichen kann man nachweisen, dass zwei Mengen gleich groß sind, indem man die Elemente einander eindeutig zuordnet (eine bijektive Abbildung angibt). Im Unendlichen stellt man dabei aber fest, dass etwa die Mengen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \quad \mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \ldots\}, \quad 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

gleich mächtig sind, da man unschwer bijektive Abbildungen zwischen ihnen angeben kann. Man nennt eine Menge M *abzählbar*, wenn eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to M$ existiert, sie ist nicht mächtiger als $\mathbb{N}$. Mit Hilfe der b-adischen Entwicklung kann man nun aber mit einem einfachen Widerspruchsbeweis zeigen, dass $\mathbb{R}$ wirklich mächtiger als $\mathbb{N}$ ist, *überabzählbar*. Denn wenn z.B. die Zahlen in $[0, 1)$ abzählbar wären, könnte man sie der Reihe nach aufschreiben: $x_1, x_2, \ldots$. Dreht man aber in x_n die n-te Binärstelle um, erhält man eine weitere reelle Zahl aus $[0, 1)$, die sich von allen x_n unterscheidet. ↯

Maschinenzahlen

Die Arithmetik von Computern arbeitet mit Binärzahlen ($b = 2$), für Finanzanwendungen ist auch $b = 10$ noch üblich (BCD-Code) und es gab Rechner mit $b = 16$ (IBM). Wegen des begrenzten Speichers ist dabei aber immer nur eine *endliche Menge von Zahlen* darstellbar! Für ganze Zahlen $\subseteq \mathbb{Z}$ verwendet man üblicherweise eine feste Wortlänge ℓ (16,32,64 Bit), mit der ganze Zahlen im Intervall $(-2^{\ell-1}, 2^{\ell-1})$ darstellbar sind. Zur Darstellung negativer Zahlen ist das *Zweierkomplement* vorteilhaft, da dann die Addition ohne Fallunterscheidungen für positive und negative Zahlen ausgeführt werden kann. Beim Zweierkomplement stellt das höchstwertige Bit das Vorzeichen dar ($0 = +$, $1 = -$), negative Zahlen bekommt man durch stellenweises Invertieren der positiven Binärdarstellung und anschließende Addition von $1 = 0\ldots01$.

In der rechten Spalte ist die Zuordnung für $\ell = 3$-stellige Binärzahlen mit Vorzeichen zu sehen. Offensichtlich gibt es eine Asymmetrie, für die Zahl $-2^{\ell-1}$ gibt es kein positives Gegenstück, sie wird daher meist nicht (oder für Sonderzwecke) verwendet. Daher war im 8-Bit-ASCII-Code der Code $128_{10} = 10000000_2$ lange unbenutzt, und die Einführung des Euro-Zeichens führte in einigen Programmen zu Problemen wegen einer Sondernutzung durch Programierer.

7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000
-1	1111
-2	1110
-3	1101
-4	1100
-5	1011
-6	1010
-7	1001
-8	1000

Interessanter ist aber die Darstellung bzw. Approximation reeller Zahlen. Um dabei einen möglichst großen Bereich an Größenordnungen abzudecken (Physik: Lichtjahr$\cong 10^{16}$m, Elektron$\cong 10^{-19}$m), lehnt man sich an die Bruchdarstellung (2.2.8) an und speichert zunächst den höchsten Exponenten $m \in \mathbb{Z}$, also auch im Fall negativer Exponenten. Hier muss natürlich auch die Größe von m beschränkt werden. Dann hat (vgl. Bew. Satz 2.2.23) der höchste Koeffizient immer den Wert $a_{-m} = 1$ und wird daher nicht gespeichert (normalisierte Gleitpunktdarstellung). Danach wird nur eine feste Anzahl Stellen a_k berücksichtigt. Die Maschinenzahl

$$x \quad = \quad \pm 0.a_1a_2\ldots a_\ell \cdot b^m := \pm(a_1b^{-1} + a_2b^{-2} + \ldots + a_\ell b^{-\ell})b^m, \ |m| < E, \tag{2.2.9}$$

wird im gültigen IEEE-Standard 754 als *real*-Zahl (double precision) in 64 Bit gespeichert mit 11 Bit Exponent und 52(+1) Bit *Mantisse* $M = a_2\ldots a_\ell$. Der Exponent wird verschoben, mit der Binärdarstellung $m + E = m_{10}..m_1m_0$ ist die Darstellung

$$\pm 0.a_1a_2\ldots a_\ell \cdot b^m \quad \mapsto \quad \boxed{\pm m_{10}..m_4}\boxed{m_3..m_0\, a_2..a_5}\boxed{a_6...a_{13}}\cdots\boxed{\ldots a_\ell}$$

(Die Speicherung dieser 8 Byte in PCs erfolgt aber in umgekehrter Reihenfolge) Hier gilt also $\ell = 53, E = 1023$. Die Zahlgenauigkeit beträgt ca. 15 Dezimalstellen, die Größe der Zahlen ist durch $2^E \cong 10^{308}$ beschränkt.

Dieser Standard überdeckt daher etwa das reelle Intervall $[1, 2]$, in dem überabzählbar viele reelle Zahlen liegen, nur mit einem *endlichen* Gitter von Zahlen! Zusätzlich enthält der IEEE-Standard einige Codes mit Sonderbedeutung

$m = 0$	$M = 0$	± 0, null
$m = E$	$M = 0$	$\pm\infty$
$m = E$	$M > 0$	NaN (Not a Number)

Division einer positiven/negativen Zahl durch null ist also möglich und liefert $+\infty$ bzw $-\infty$, für unzulässige Operationen gibt es den Sondercode NaN einer ungültigen Zahl.

Folgen der endlichen Zahldarstellung: Die unmittelbare Folge ist natürlich, dass unendliche Binärbrüche (Eulerzahl e, aber auch $1/3$) durch *Rundung* approximiert werden müssen und daher zu Eingabefehlern führen. Gravierender ist aber vor allem der daraus folgende **Verlust der Assoziativität** vor allem bei der Addition, Summationsergebnisse hängen von der Reihenfolge der Summanden ab! Die damit verbunden Probleme werden im Gebiet Numerik behandelt.

Beispiel 2.2.24 Die drei 3-stelligen (dezimalen) Maschinenzahlen 0.123, $0.789 \cdot 10^2 = 78.9$, $-0.788 \cdot 10^2 = -78.8$ sollen addiert werden, was in unterschiedlicher Klammerung möglich ist. Die Zwischenergbnisse der mit $\tilde{+}$ bezeichneten Maschinenaddition werden auf 3 gültige Ziffern gerundet:

$$(0.123 \tilde{+} 78.9) \tilde{+} (-78.8) = \widetilde{79.023} \tilde{+} (-78.8) = 79.0 \tilde{+} (-78.8) = 0.200,$$

$$0.123 \tilde{+} (78.9 \tilde{+} (-78.8)) = 0.123 \tilde{+} 0.1 = 0.223.$$

Der Fehler in der ersten Form beträgt mehr als 10%, insbesondere ist die Operation also nicht assoziativ.

3 Funktionen einer Variablen

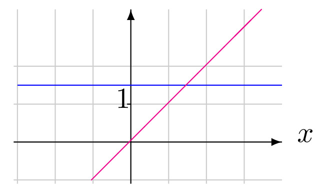
3.1 Stetigkeit

Funktionen sind Abbildungen von (Teilmengen von) $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Die besonders interessanten Funktionen sind dabei "glatt" in unterschiedlich starkem Ausmaß. Die Abstufungen werden in dieser Vorlesung präziser definiert.

Definition 3.1.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ heißt (reellwertige bzw. reelle)* Funktion*, D ihr* Definitionsbereich*. Der* Graph *von f ist die Menge*

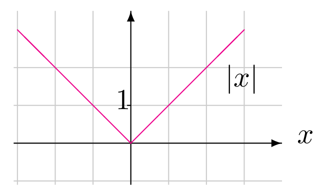
$$G_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in D,\, y = f(x)\}.$$

Der Graph dient zur graphischen Darstellung ("Visualisierung") des Funktionsverlaufs.



Beispiel 3.1.2 a) Zu $c \in \mathbb{R}$ sind

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto c \quad \text{eine konstante Funktion,} \\ id_{\mathbb{R}} :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \quad \text{die identische Funktion.} \end{aligned}$$

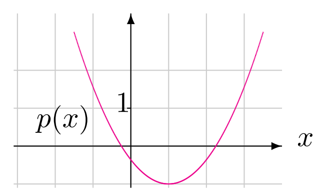


b) Betragsfunktion

$$abs : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|.$$

c) Polynomfunktion mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

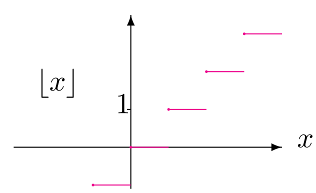
$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$



Für $a_n \neq 0$ heißt n der *Grad* des Polynoms.

d) Die Funktion "größte ganze Zahl" oder Gauß-Klammer

$$entier : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$$



hat Sprungstellen, der dort gültige Funktionswert wird mit einem Punkt markiert. Sie ist das Beispiel einer sog. Treppenfunktion.

Beispiel 3.1.3 Die Dirichlet-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

allerdings lässt sich nicht zeichnen, da sich rationale und irrationale Zahlen beliebig nahe kommen, durch die Sprünge ist sie extrem *unstetig*.

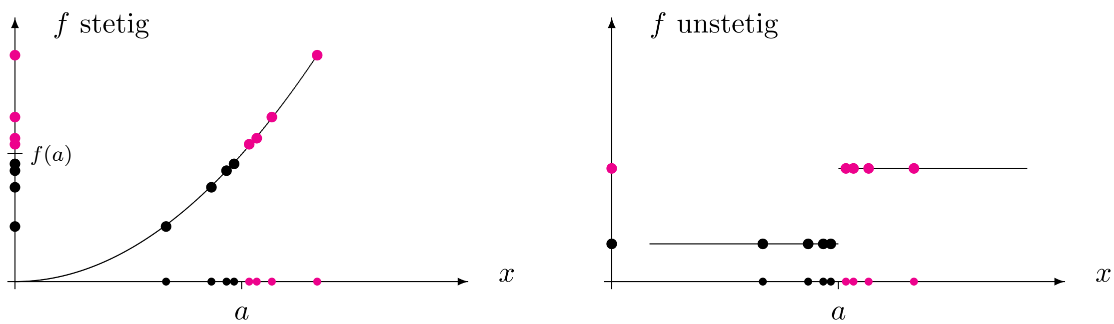
Die meisten Standardfunktionen weisen keine "Sprünge" auf, bei Annäherung an einen Punkt x aus verschiedenen Richtungen erhält man einen wohldefinierten Wert. Der entscheidende Punkt in der folgenden Definition ist, dass sich für alle beschriebenen Folgen (x_n) bei den Bildfolgen $(f(x_n))$ immer der gleiche Grenzwert ergibt.

Definition 3.1.4 *Es sei f eine reelle Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.*

f heißt stetig *im Punkt $a \in D$, wenn für alle gegen a konvergenten Folgen (x_n) aus D gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a).$$

f heißt stetig (auf einer Menge $M \subseteq D$), wenn f in jedem Punkt (von M) stetig ist.



In den Graphiken sind in schwarz und rot zwei verschiedene, jeweils monoton gegen a konvergente Folgen und die Bildfolgen auf der vertikalen Achse angedeutet. Bei der unstetigen Funktion haben die Bildfolgen unterschiedliche Grenzwerte.

Die praktische Konsequenz der Stetigkeit wurde in der Definition schon betont, man kann dann die Reihenfolge von Grenzwertbildung und Funktionsauswertung *vertauschen*, daher schreibt man auch kurz (ohne Bezug auf eine bestimmte Folge)

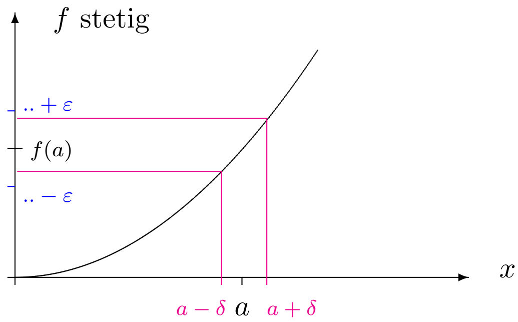
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

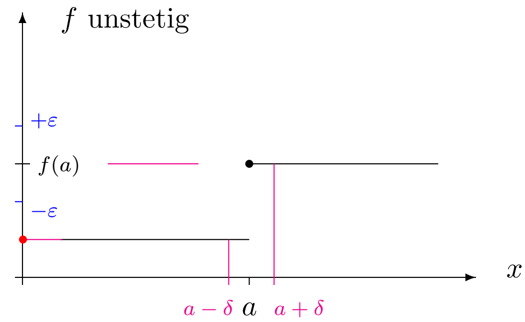
Bevor Beispiele von stetigen Funktionen und Operationen mit diesen behandelt werden, wird eine alternative Charakterisierung der Stetigkeit eingeführt, die Umgebungen von a und $f(a)$ verwendet.

Satz 3.1.5 *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $a \in D$, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Das Prinzip der Aussage ähnelt der Konvergenz-Definition 2.1.4, nach Vorgabe von ε ist ein $\delta(\varepsilon, a) > 0$ anzugeben so, dass alle Bilder der δ-Umgebung $U_\delta(a) := \{x : x \in D, |x - a| < \delta\}$ des Urbilds a in der ε-Umgebung des Bildes $f(a)$ liegen:

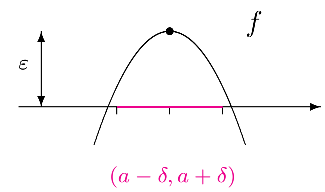




Beweis "$\Rightarrow$" durch Widerspruch: f sei also stetig und es gebe ein $\varepsilon_0 > 0$, zu dem kein entsprechendes δ existiert. Dann gibt es also für alle δ, etwa $\delta = 1/n$, ein Element $x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \delta = \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Betrachtet man diese (x_n) als Folge, gilt also $x_n \to a\,(n \to \infty)$, aber $f(x_n) \not\to f(a)$ und führt zu einem Widerspruch. $\lightning$

"$\Leftarrow$" Hier wird eine beliebige Folge (x_n) betrachtet mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Zu $\varepsilon > 0$ wird das zugehörige $\delta(\varepsilon) > 0$ bestimmt. Dazu gibt es einen Index $N(\delta)$ so, dass $|x_n - a| < \delta\,\forall n \geq N$. Nach Voraussetzung folgt dann, dass auch $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon\,\forall n \geq N$, also folgt aus $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ die Stetigkeit. ■

Eine später oft verwendete Folgerung des Satzes ist, dass zu einer Stelle a mit $f(a) \neq 0$ eine ganze Umgebung $U_\delta(a)$ existiert, in der f nicht verschwindet. Die Intervalllänge ist gerade 2δ zu $\varepsilon := |f(a)| > 0$:



$$|f(x)| \geq |f(a)| - |f(a) - f(x)| > |f(a)| - \varepsilon = 0\,\forall |x - a| < \delta.$$

Beispiel 3.1.6 a) Konstante Funktionen $f : x \mapsto c$ sind stetig, da $(f(x_n)) = (c)$ konvegiert ($\delta = 1$ in S. 3.1.5).

b) Die Identität $f = id_{\mathbb{R}}$ ist stetig, denn für $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = f(a)$ ($\delta = \varepsilon$ in S.3.1.5).

c) Der Betrag ist stetig, aus $x_n \to a$ folgt nach S.1.3.4 $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| \to 0\,(n \to \infty)$ (wieder $\delta = \varepsilon$ in S.3.1.5).

d) Wie in der Graphik oben skizziert, ist $f = \mathit{entier}$ nicht stetig in $a \in \mathbb{Z}$. Für $a = 0$ etwa ist $x_n = (-1)^n/(n+1)$ Nullfolge und das Bild die divergente Folge $\mathit{entier}(x_n) = ((-1)^n - 1)/2$ mit 2 verschiedenen Häufungspunkten.

e) Die Wurzel $f : x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig in $D = [0, \infty)$. Denn im Fall $a > 0$ folgt aus $x_n \geq 0$ und $x_n \to a$:

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} \to 0\,(n \to \infty),$$

bzw. $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ in S.3.1.5. Für $a = 0$ und $x_n \to 0$ gibt es ein N mit $x_n < \varepsilon^2 \forall n \geq N$. Für diese $n \geq N$ gilt $\sqrt{x_n} < \varepsilon$ (hier ist $\delta = \varepsilon^2$ zu wählen in S.3.1.5). Der Fall $\sqrt[p]{x}$ geht mit Hilfe von

Satz 1.2.4 b) analog.

f) Die Exponentialfunktion ist stetig.
Zur Folge $x_n \to a$ ist $y_n := x_n - a$ Nullfolge. Aus Satz 2.2.21 folgt

$$|\exp(x_n) - \exp(a)| = |\exp(y_n + a) - \exp(a)| = \exp(a)|\exp(y_n) - 1|.$$

Die Restgliedabschätzung (2.2.6) bei Grad 0 zeigt für $|y_n| \leq 1$, dass $|\exp(y_n) - 1| \leq 2|y_n| \to 0$ und daher (mit $\delta = \varepsilon/(2\exp(a))$ in S.3.1.5) folgt

$$|\exp(y_n + a) - \exp(a)| \leq 2\exp(a)|y_n| \to 0\,(n \to \infty).$$

Die Stetigkeit von Funktionen muss man nur selten einzeln überprüfen, da die gängigen Verknüpfungen von Funktionen stetig sind. Dabei handelt es sich zunächst wie bei den Folgen um Linearkombinationen ($\to$ "Funktionenraum"), sowie die Multiplikation und Division. Hinzu kommt aber auch die Verkettung bzw. Komposition. Alle Definitionen erfolgen *punktweise*.

Definition 3.1.7 *Folgende Verknüpfungen von Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ und Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ werden eingeführt.*

a) Für $D = E$ definiert man reelle Funktionen mit Definitionsbereich D,

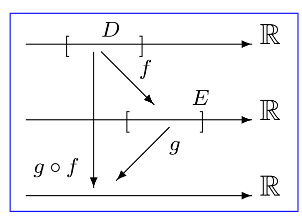
$$f \pm g,\ \lambda f,\ fg,\ \max\{f, g\},\ \min\{f, g\},$$

punktweise für bel. $x \in D$ durch:

$$\begin{array}{lcl} (f \pm g)(x) & := & f(x) \pm g(x) \\ (\lambda f)(x) & := & \lambda f(x) \\ (fg)(x) & := & f(x)g(x) \\ \max\{f, g\}(x) & := & \max\{f(x), g(x)\} \\ \min\{f, g\}(x) & := & \min\{f(x), g(x)\} \end{array}$$

b) für $E = D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ definiert man die Funktion

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R} \text{ durch } \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in D'.$$



c) Für $f(D) \subseteq E$ ist die Komposition *von f und g definiert*

$$g \circ f : D \to \mathbb{R},\ \text{durch} \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)),\ x \in D.$$

Alle diese Verknüpfungen sind stetig, wenn die einzelnen Funktionen dies sind.

Satz 3.1.8 *a) Wenn die Funktionen $f : D \in \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ stetig sind im Punkt $a \in D$, dann sind mit $\lambda \in \mathbb{R}$ auch die Funktionen $f + g$, $f - g$, λf, fg, $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ stetig in a. Für $g(a) \neq 0$ ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a.*

b) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$, $f(D) \subseteq E$ und $g : E \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $b := f(a) \in E$, dann ist die Komposition $g \circ f$ stetig in a.

Beweis a) Dieser Teil folgt aus den Rechenregeln für Folgen, Satz 2.1.7, da n.V. $f(x_n) \to f(a)$, $g(x_n) \to g(a)$ für jede Folge aus D mit $x_n \to a$.

b) Zu einer beliebigen Folge mit $x_n \to a$ ist n.V. die Bildfolge konvergent, $y_n := f(x_n) \to f(a) =: b \in E$. Für diese wiederum gilt n.V. $g(y_n) \to g(b)$. Also ist

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a). \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Teil a) des Satzes zeigt, dass der Raum $C(D)$ aller auf D stetigen Funktionen ein *Vektorraum* ist, ein linearer Unterraum des Raums aller Funktionen auf D.

Durch wiederholte Anwendung des Satzes sieht man, dass alle Polynome in $\mathbb{R}$ stetig sind. Dies gilt auch für *rationale Funktionen*

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}, \tag{3.1.1}$$

$m, n \in \mathbb{N}_0$ in allen Punkten a mit $q(a) \neq 0$.

Bei den rationalen Funktionen sind die Nullstellen von q aus dem Definitionsbereich D herauszunehmen. Dies gilt auch für Fälle wie $r(x) = (x^2-1)/(x-1)$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Die Funktion r lässt sich dennoch in $x = 1$ betrachten, da man sich dem Punkt 1 beliebig nähern kann. Dazu wird Begriff Häufungspunkt verallgemeinert.

Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Menge D, wenn eine Folge (a_n) existiert mit $a \neq a_n \in D \forall n \in \mathbb{N}_0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Häufungspunkte müssen nicht zur Menge D gehören, dennoch kann man in ihnen die Stetigkeit von f prüfen. Insbesondere kann man $\pm\infty$ als Häufungspunkte von $\mathbb{R}$ betrachten. Dazu werden jetzt einseitige und uneigentliche Grenzwerte von Funktionen eingeführt.

Definition 3.1.9 *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$.*

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Gibt es $b, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ so, dass für jede Folge (a_n) mit $a_n \in D$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und

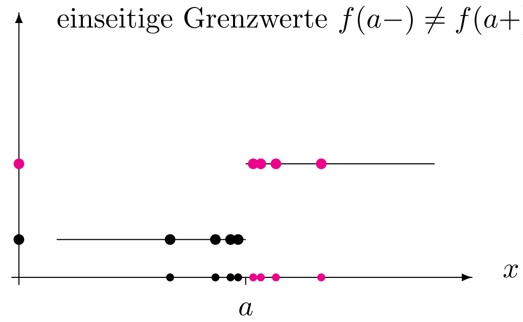
$$\left.\begin{array}{l} a_n < a \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = b \\ a_n > a \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = c \end{array}\right\} \text{ schreibt man } \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to a-} f(x) = b =: f(a-), \\ \lim_{x\to a+} f(x) = c =: f(a+). \end{array}\right.$$

$f(a-)$ heißt linksseitiger, $f(a+)$ rechtsseitiger Grenzwert.

b) D sei nicht nach unten (bzw. oben) beschränkt. Gibt es $b, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ so, dass für jede Folge (a_n) mit $a_n \in D$ und

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = b \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = c \end{array}\right\} \text{ schreibt man } \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to -\infty} f(x) = b, \\ \lim_{x\to\infty} f(x) = c. \end{array}\right.$$

Bei der Funktion $r(x) = (x^2-1)/(x-1) = x+1$ gilt offensichtlich $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = 2$, daher kann die Funktion nach $x = 1$ stetig fortgesetzt werden.



Die unstetige Funktion $entier(x) = \lfloor x \rfloor$ besitzt dagegen Sprungstellen, in jedem $n \in \mathbb{Z}$ gilt $entier(n-) = n-1$, aber $entier(n+) = n$. Bei der Sprungfunktion rechts sind die Bildfolgen $(f(a_n))$, $a_n < a$, und $(f(a_n))$, $a_n > a$, jeweils konstant, aber verschieden.

Bemerkung: Besitzt f in einer Stelle a mit $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq D$ für $\varepsilon > 0$ einseitige Grenzwerte, dann gilt

$$f \text{ stetig in } a \iff f(a-) = f(a+) = f(a).$$

Beispiel 3.1.10 a) Für das Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} p(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} p(x) &= \begin{cases} +\infty & n \text{ gerade} \\ -\infty, & n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

b) Für rationale Funktionen (3.1.1)

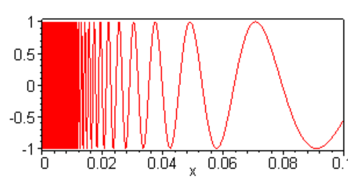
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m},$$

ist die Situation für $n > m$, $a_n \neq 0$ ähnlich zu Beispiel a). Für $n \leq m$, $b_m \neq 0$ gilt aber

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim_{x\to+\infty} r(x) &= 0, & n < m \\ \lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim_{x\to+\infty} r(x) &= \tfrac{a_m}{b_m}, & n = m. \end{aligned}$$

Im Unendlichen gibt es hier also einen einheitlichen Grenzwert.

c) Bei der Funktion mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ (genaue Diskussion des Sinus später) existieren in $a = 0$ weder links- noch rechtsseitige Grenzwerte. Denn in $a_n = 2/((2n+1)\pi) > 0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt $f(\pm a_n) = \pm(-1)^n$, diese Folge von Funktionswerten divergiert. Daher kann f in $a = 0$ auch nicht stetig fortgesetzt werden.

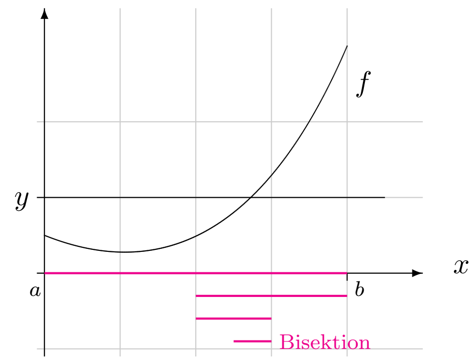


Stetigkeit im Intervall

Für Funktionen, die auf einem ganzen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ stetig sind, gibt es einige bemerkenswerte Eigenschaften. Zunächst scheint klar, dass eine stetige Funktion f, die im Intervall das Vorzeichen wechselt, $f(a)f(b) < 0$, dazwischen eine Nullstelle mit $f(x) = 0$ besitzt, da sie ja keinen "Sprung" über den Wert $y = 0$ hinweg machen kann. Man sieht sofort, dass diese Aussage auch für andere Werte y gilt.

Satz 3.1.11 (Zwischenwertsatz) *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, d.h., es gibt mindestens ein $c \in [a, b]$ mit $y = f(c)$.*

Beweis OBdA sei $f(a) < f(b)$. Zu einem beliebigen $y \in [f(a), f(b)]$ wird die Funktion $g(x) := f(x) - y$ betrachtet. Dann entspricht die gesuchte Stelle c einer Nullstelle von g, welche jetzt mit dem Bisektionsverfahren (1.4.4) bestimmt wird. Das Startintervall ist natürlich $[x_0, y_0] = [a, b]$ mit $g(a) \leq 0 \leq g(b)$ und die dazu benötigte Entscheidungsfunktion lautet



$$Lsglinksvon(m) := \begin{cases} \text{wahr}, & \text{wenn } g(m) > 0 \text{ d.h. } f(m) > y \\ \text{falsch}, & \text{wenn } g(m) \leq 0. \end{cases}$$

Damit liefert das Bisektionsverfahren nach Satz 1.4.9 eine Intervallschachtelung $[x_n, y_n]$ mit

$$g(x_n) \leq 0 \leq g(y_n) \text{ und } y_n - x_n = 2^{-n}(b - a) \to 0 \, (n \to \infty),$$

die einen einzigen Punkt $c = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ einschließt. Das Verfahren würde so aber auch eine Sprungstelle lokalisieren. Aus dem Vorzeichenwechsel und der Stetigkeit von f und g folgt aber

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) \geq 0 \;\Rightarrow\; g(c) = 0. \quad \blacksquare$$

Eine Kurzformulierung des Satzes lautet *Das stetige Bild eines Intervalls ist ein Intervall* und meint, dass das Bild $f([a, b])$ keine Lücken hat. Bei dieser Aussage sind sogar noch unbeschränkte Intervalle zugelassen, etwa in Form der Aussage

$$\exp(\mathbb{R}) = \exp((-\infty, \infty)) = (0, \infty).$$

Der nächste Satz präzisiert diese Aussage für beschränkte, abgeschlossenen Intervalle. Da diese Intervalle eine fundamentale Bedeutung besitzen, bekommen sie einen besonderen Namen.

Definition 3.1.12 *Eine nichtleere Menge M heißt* kompakt*, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Der folgende Satz zeigt, dass das *stetige Bild eines kompakten Intervalls ebenfalls kompakt* ist, $f([a, b]) = [C, D]$. Insbesondere ist f dann *beschränkt.*

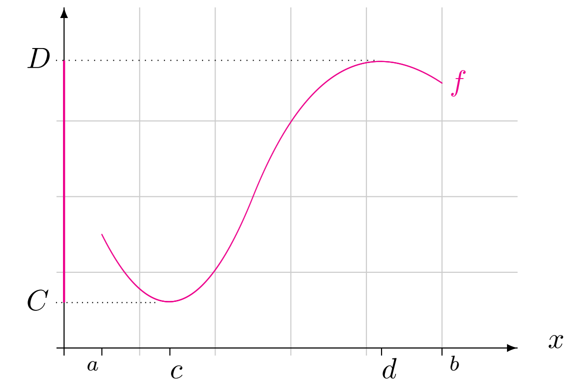
Satz 3.1.13 (Existenz von Maximum und Minimum) *Jede auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion nimmt ihr endliches Minimum und Maximum an, d.h., zu einer stetigen Funktion gibt es Stellen $c, d \in [a, b]$ mit*

$$f(c) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} > -\infty, \quad f(d) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} < \infty.$$

Beweis für das Maximum (oBdA): Definiere

$$D := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \qquad (\text{mglw. } \infty).$$

Dann existiert eine Folge (x_n), $x_n \in [a,b]$ mit $D = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Da die Folge (x_n) beschränkt ist, $|x_n| \le \max\{|a|,|b|\}$, gibt es nach dem Satz 2.1.18 von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}), $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: d \in [a,b]$. Aus der Stetigkeit folgt dann aber



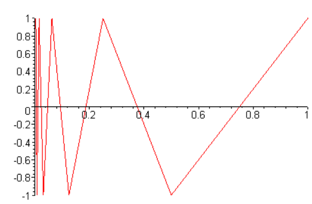
$$D = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(d) \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Der Satz gilt aber nicht bei offenen oder unbeschränkten Intervallen, z.B. ist $f(x) = 1/(1-x)$ zwar stetig auf $[0,1)$, besitzt dort aber kein endliches Supremum, $f([0,1)) = [1,\infty)$. Auf $(-\infty,0]$ ist f dann zwar beschränkt, nimmt aber das Infimum nicht an, $f((-\infty,0]) = (0,1]$.

Bei dieser Funktion $f(x) = 1/(1-x)$ sieht man auch, dass beim Nachweis der Stetigkeit der $\epsilon-\delta$-Zusammenhang immer ungünstiger wird, je näher man der Singularität bei $x = 1$ kommt. Dazu muss die Funktion noch nicht einmal unbeschränkt sein:

Beispiel 3.1.14 Auf dem halboffenen Intervall $(0,1]$ sei $x_n := 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, und für die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ gelte $f(x_n) = (-1)^n$. Dazwischen wird linear interpoliert, d.h., die Werte mit einer Geraden verbunden. Die explizite Darstellung

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2^{2k+1}(x - x_{2k}), & x \in (x_{2k}, x_{2k-1}], \\ -1 + 2^{2k+2}(x - x_{2k+1}), & x \in (x_{2k+1}, x_{2k}], \end{cases}$$



zeigt, dass im Teilintervall $(x_n, x_{n-1}]$ der Zusammenhang $\delta = 2^{-n-1}\varepsilon$ erforderlich ist, bei Annäherung an $x = 0$ also keine Untergrenze für das zu wählende δ existiert.

Dieses Problem wurde in der Schreibweise $\delta(\varepsilon, a)$ im Anschluss an Satz 3.1.5 berücksichtigt, δ hängt i.A. auch von der Stelle a ab wie im Beispiel. Bei Stetigkeit auf kompakten Intervallen tritt dies nicht auf, hier kann der Stetigkeitsbegriff verschärft werden.

Definition 3.1.15 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* gleichmäßig stetig *auf D, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in D,\ |x - y| < \delta.$$

Das hier geforderte $\delta = \delta(\varepsilon)$ ist überall in D das selbe, unabhängig von x oder y.

Satz 3.1.16 *Eine auf einem kompakten Intervall stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.*

Beweis durch $\mathcal{W}$: wenn f nicht glm stetig wäre, gäbe es ein $\varepsilon > 0$ so, dass zu jedem $\delta = 1/n$ Punkte $x_n, y_n \in [a,b]$ existieren mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{aber} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}.$$

Da (z.B.) (x_n) beschränkt ist, gibt es nach dem Satz 2.1.18 von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: c \in [a,b] \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = c.$$

Denn da $(x_n - y_n)$ Nullfolge ist, hat (y_{n_k}) den gleichen Grenzwert nach S. 2.1.7. Aus der Stetigkeit von f ergibt sich dann aber der Widerspruch

$$0 < \varepsilon \le \lim_{k\to\infty} \Big(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \Big) = f(c) - f(c) = 0. \lightning \quad \blacksquare$$

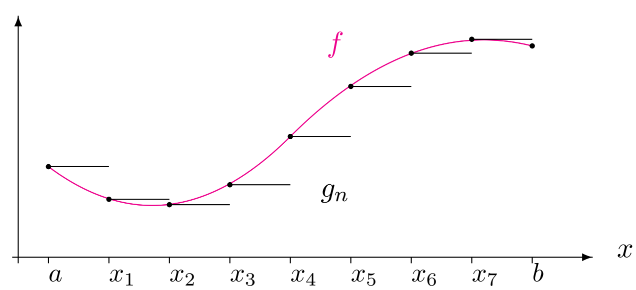
Gleichmäßig stetige Funktionen können durch eine sehr einfache Funktionenklasse, die Treppenfunktionen, gleichmäßig gut approximiert werden

Satz 3.1.17 *Es sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf dem kompakten Intervall* $[a,b]$*. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *so, dass die stückweise konstante Funktion* $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mit* $g_n(b) := f(b)$*, sowie Punkten* $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$*,* $k = 0, \ldots, n$*, und Werten*

$$g_n(x) := f(x_k) \text{ für } x \in [x_k, x_{k+1}),\; k = 0, \ldots, n-1,$$

die Funktion f *mit Abstand* ε *approximiert mit*

$$|f(x) - g_n(x)| < \varepsilon \;\forall x \in [a,b].$$



Beweis Wegen der Kompaktheit des Intervalls ist f sogar gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon > 0$ existiert daher $\delta > 0$ in Def.3.1.15. Nun wird $n \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $(b-a)/n < \delta$ ist und damit das g_n definiert. Für ein $x \in [a,b]$, das im Teil $[x_k, x_{k+1})$ liegt, gilt dann $|x - x_k| \le (b-a)/n < \delta$ und daher

$$|f(x) - g_n(x)| = |f(x) - f(x_k)| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Umkehrfunktionen

Die Umkehrung einer Abbildung $f : D \to M$ erfordert deren Injektivität, $x \ne x' \;\Rightarrow\; f(x) \ne f(x')$. Denn um zur Abbildung $x \mapsto f(x) = y$ eine eindeutige Umkehrabbildung f^{-1} definieren zu können, darf zu jedem Bildwert $y \in f(D)$ nur *genau ein Urbildwert* x mit $y = f(x)$ existieren. Nur dann ist die Zuordnung

$$f^{-1} : y \mapsto x, \quad f^{-1} \circ f = id_D$$

auch eine Abbildung (der "Exponent" -1 bezieht sich auf die Komposition als Verknüpfung und meint *nicht* den Kehrwert $1/f$!). Ein Kriterium für Injektivität ist bei reellen Funktionen strenge Monotonie.

Definition 3.1.18 *Eine reelle Funktion f heißt*

$$\left.\begin{array}{rl} \textit{monoton wachsend, wenn} & f(x) \le f(y) \\ \textit{streng monoton wachsend, wenn} & f(x) < f(y) \\ \textit{monoton fallend, wenn} & f(x) \ge f(y) \\ \textit{streng monoton fallend, wenn} & f(x) > f(y) \end{array}\right\} \textit{für alle } x, y \in D \textit{ mit } x < y.$$

Die Funktion heißt (streng) monoton, *wenn sie (streng)* monoton *wächst oder fällt.*

Beispiel 3.1.19 a) Die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, da nach S.1.2.4 für $y > x$ (mindestens einer der Werte ist dann nichttrivial) gilt

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2) = (y-x)\frac{y^2 + x^2 + (y+x)^2}{2} \ge (y-x)\frac{y^2+x^2}{2} > 0.$$

b) Die p-te Wurzel ist streng monoton auf $\mathbb{R}_+$ nach (2.1.7).

c) Die Exponentialfunktion ist streng monoton, für $y - x > 0$ gilt nach S. 2.2.21

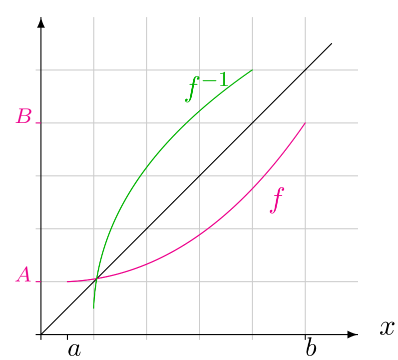
$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)(\exp(y-x) - 1) > 0.$$

Alle Funktionen im Beispiel besitzen eine stetige Umkehrfunktion auf $\mathbb{R}_+$ bzw. $\mathbb{R}$ (die Wurzel ist natürlich selbst schon eine). Im Satz gilt aber zunächst noch die Einschränkung auf kompakte Intervalle.

Satz 3.1.20 *Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ und dort* streng monoton *wachsend (bzw. fallend) und $A := f(a)$, $B := f(b)$. Dann bildet f das Intervall $[a,b]$* bijektiv *ab auf $[A,B]$ (bzw. $[B,A]$). Die* Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [A,B] \to \mathbb{R} \quad (\textit{bzw. } f^{-1} : [B,A] \to \mathbb{R})$$

mit $f^{-1}(f(x)) = x \,\forall x \in [a,b]$ ist wieder stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).



Den Graph $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion (grün) erhält man durch Spiegelung des ursprünglichen Graphen G_f (rot) an der Diagonalen G_{id}.

Beweis Es wird oBdA der wachsende Fall behandelt. Hier folgt aus

$$\begin{array}{lcl} a < x < b : & A = f(a) < f(x) < f(b) = B & \Rightarrow f : [a,b] \to [A,B], \\ x < x' : & f(x) < f(x') & \Rightarrow f \text{ injektiv}, \\ \text{Zwischenwertsatz} : & & \Rightarrow f \text{ surjektiv}. \end{array}$$

Damit ist die Existenz der Umkehrfunktion gesichert,

$$\varphi = f^{-1} : [A,B] \to [a,b],$$

die natürlich auch streng monoton wachsend und beschränkt ist. Abschließend ist die Stetigkeit von φ nachzuweisen, d.h.

$$\mathcal{Z}\mathcal{Z}\;:\quad \text{für jede Folge mit } y_n \to y\,(n\to\infty) \;\Rightarrow\; \varphi(y_n)\to\varphi(y).$$

Wenn das nicht der Fall wäre, gäbe es eine Folge $y_n \to y\,(n\to\infty)$ und $\varepsilon > 0$, aber unendlich viele n mit $|\varphi(y_n)-\varphi(y)| \geq \varepsilon$. Da aber $a \leq \varphi(y_n) \leq b$ gilt, existiert nach dem Satz 2.1.18 von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(\varphi(y_{n_k}))$, also

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(y_{n_k}) = c \quad \text{und } |\varphi(y_{n_k})-\varphi(y)| \geq \varepsilon\,\forall k\in\mathbb{N}_0.$$

Daher ist auch $|c-\varphi(y)| \geq \varepsilon$. Nun folgt aus der Stetigkeit von f und der Umkehridentität $f(\varphi(y_{n_k})) = y_{n_k}$, dass

$$f(c) = \lim_{k\to\infty} f(\varphi(y_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y.$$

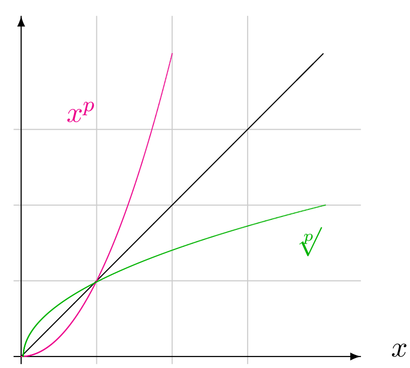
Anwendung von φ hierauf liefert $0 = |\varphi(f(c))-\varphi(y)| = |c-\varphi(y)| \geq \varepsilon > 0$ ↯ ∎

Beispiel 3.1.21 Die p-te Wurzel $p\in\mathbb{N}$ ist natürlich die Umkehrfunktion der p-ten Potenz

$$f : [0,\infty) \to [0,\infty),\; x \mapsto f(x) = x^p.$$

Denn f ist streng monoton wachsend

$$0 \leq x < z \;\Rightarrow\; 0 \leq x^p < x^{p-1}z < \ldots < z^p.$$



Außerdem gilt $f(0) = 0$ und $f(x) \to \infty\,(x\to\infty)$ nach Beispiel 3.1.10, also ist $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bijektiv. Die Umkehrfunktion existiert (Erweiterung auf nicht-kompakte Intervalle analog zum nächsten Satz) und ist stetig

$$f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty), \quad y \mapsto f^{-1}(y) = \sqrt[p]{y},$$

vgl. S.2.1.21

Für ungerades $p = 2k+1$ gilt $(-x)^p = -x^p$. Dann ist sogar $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijektiv und daher also $f^{-1} = \sqrt[p]{}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Nach Beispiel 3.1.19 ist auch die Exponentialfunktion streng monoton und besitzt daher eine Umkehrfunktion, den (natürlichen) Logarithmus, der zur Definition der allgemeinen Potenzfunktion a^x erforderlich ist.

Satz 3.1.22 *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend, die Abbildung* $\exp : \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ *bijektiv. Ihre Umkehrfunktion existiert und ist stetig. Sie heißt* Logarithmus*,*

$$\log : (0,\infty) \to \mathbb{R},$$

es gilt $\log\exp(x) = x\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp(\log y) = y\forall y\in\mathbb{R}_+$. *Der Logarithmus ist streng monoton wachsend und erfüll mit* $\log 1 = 0$, $\log e = 1$ *die Funktionalgleichung*

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}_+ \tag{3.1.2}$$

Beweis a) Zur Monotonie von exp vgl. Beispiel 3.1.19, $\exp(y) = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \ldots > 1$ für $y > 0$.

b) Zum Nachweis muss Satz 3.1.20 auf unbeschränkte Intervalle ausgedehnt werden, auf endliche Intervalle $\exp : [-n, n] \to [\exp(-n), \exp(n)]$, $n \in \mathbb{N}$ ist er anwendbar. Also ist log auf $[\exp(-n), \exp(n)]$ streng monoton und stetig. Es gilt aber für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n) > 1 + n \to \infty, \quad \exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} < \frac{1}{n+1} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Sei nun $a \in \mathbb{R}_+$ beliebig und (x_k) eine Folge mit $\mathbb{R}_+ \ni x_k \to a \, (k \to \infty)$. Für $n \geq \sup\{x_k + 1/x_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ gilt $x_k \in [\frac{1}{n+1}, n+1] \subseteq [\exp(-n), \exp(n)]$. Also gilt auch $\log x_k \to \log a \, (k \to \infty)$. Daher ist log stetig auf ganz $\mathbb{R}_+$.

c) Die Funktionalgleichung folgt aus der von exp, S.2.2.21. Für $\xi = \log x$, $\eta = \log y$ ist $x = \exp(\xi)$, $y = \exp(\eta)$ und mit $\exp(\xi + \eta) = \exp(\xi)\exp(\eta)$ erhält man

$$\log x + \log y = \xi + \eta = \log(\exp(\xi)\exp(\eta)) = \log(xy). \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Nach Satz 2.2.21 gilt $\exp(x)^n = \exp(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$. Da nun zu jedem $a \in \mathbb{R}_+$ das $b = \log(a)$ bekannt ist mit $a = \exp(b)$, definiert man daher die allgemeine Exponentialfunktion a^x, $a > 0$ (allgemeine Potenz) durch

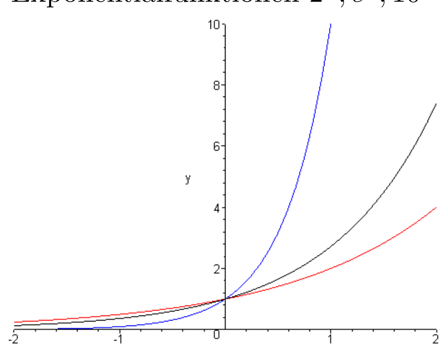
$$\exp_a : x \mapsto a^x := \exp(x \log a) = e^{x \log a}, \quad \text{Spezialfall} \quad \exp(x) = e^x. \tag{3.1.3}$$

Diese ist als Verkettung $\exp_a = \exp \circ f$, $f(x) = x \log(a)$ auch stetig nach Satz 3.1.8 und erfüllt die bekannten Rechenregeln ($a, b \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$)

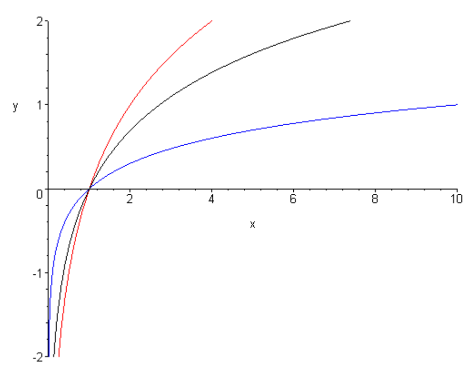
$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

Die Graphen verschiedener Fälle:

Exponentialfunktionen $2^x, e^x, 10^x$



Logarithmen $\mathrm{ld} x, \ln x, \lg x$



Für $a \neq 1$ ist a^x streng monoton (wachsend für $a > 1$, fallend für $0 < a < 1$). Daher existiert auch zu allgemeinen Basiswerten $a > 0$, $a \neq 1$, die Umkehrfunktion. Zu $y = a^x > 0$ gehört der allgemeine Logarithmus

$$x = \log_a y = \frac{\log y}{\log a}.$$

Logarithmen zu verschiedenen Werten a unterscheiden sich nur um den konstanten Faktor $1/\log a$. Kurzbezeichnungen:

generisch	natürlicher Logar.	Zehner-Logarithmus	Logarithmus dualis
$\log x$	$\ln x = \log x$	$\lg x = \log_{10} x = \dfrac{\log x}{\log 10}$	$\mathrm{ld} x = \log_2 x = \dfrac{\log x}{\log 2}$

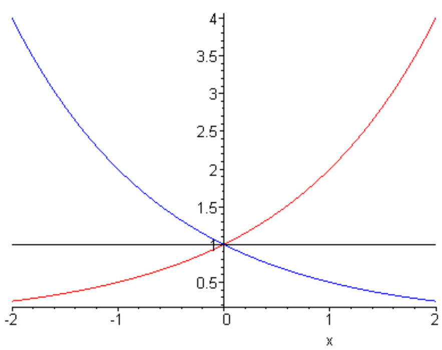
Interessant ist ein Vergleich des Wachstums von Exponentialfunktion, Logarithmus und Polynomen in den kritischen Punkten $x = 0$, $x = \infty$.

Satz 3.1.23 *Mit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gelten folgende Grenzwerte*

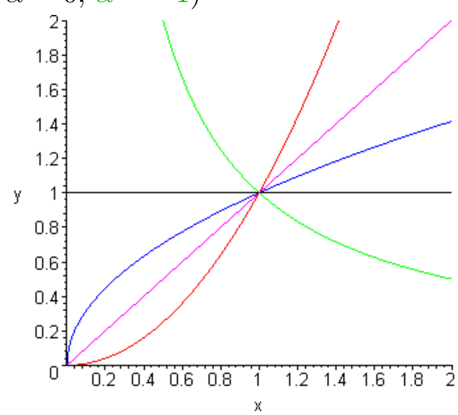
bei	x^α	e^x/x^α	$x^\alpha e^{-x}$	$\ln x$	$x^\alpha \ln x$	$x^{-\alpha} \ln x$
$\lim_{x\to 0+}$	0	∞	0	$-\infty$	0	$-\infty$
$\lim_{x\to +\infty}$	∞	∞	0	∞	∞	0

Kurzformulierung bei $x \to \infty$: e^x wächst stärker als jede Potenz x^α, $\alpha > 0$,
$\ln x$ wächst schwächer als jede Potenz x^α, $\alpha > 0$

Exponentialfunktionen a^x ($a = 2$, $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$)



Potenzen x^α ($\alpha = 2$, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0$, $\alpha = -1$)



Beweis der nichttrivialen Grenzwerte in S.3.1.23:

a) Der ln wächst streng monoton. Zu beliebigem K gilt für $x > e^K$ auch $\ln x > K \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$. Mit (3.1.2) folgt mit $y = 1/x \in \mathbb{R}_+$ daher auch

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = \lim_{y\to\infty} \ln \frac{1}{y} = -\lim_{y\to\infty} \ln y = -\infty.$$

b) $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$: bei $x \to 0+$ und $\alpha > 0$ folgt aus a), dass

$$\lim_{x\to 0+} \alpha \ln x = -\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0+} e^{\alpha \ln x} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0.$$

Analog gilt $\lim_{x\to\infty} e^{\alpha \ln x} = \lim_{y\to\infty} e^y = \infty$.

c) e^x/x^α: Für $x > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k > \frac{1}{n!} x^n$. Eine Wahl $n > \alpha + 1$ zeigt

$$x > 1: \qquad \frac{e^x}{x^\alpha} > \frac{e^x}{x^{n-1}} > \frac{x}{n!} \to \infty \,(x \to \infty).$$

Für $x = 0$ ist $e^0 = 1$, der Quotient e^x/x^α unbeschränkt. Weiter gilt $x^\alpha e^{-x} = 1/(e^x x^{-\alpha})$.

d) $x^{\pm\alpha}\ln x$: ist die Folge $x_n \in \mathbb{R}_+$ bedingt divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, dann auch $y_n := \alpha \ln x_n \to \infty\,(n\to\infty)$ und $z_n := 1/x_n \to 0$. Es folgt aus c)

$$x_n^{-\alpha}\ln x_n = \frac{1}{\alpha}e^{-y_n}y_n \to 0\,(n\to\infty), \quad z_n^\alpha \ln z_n = \frac{-\ln x_n}{x_n^\alpha} \to 0. \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Wegen S.3.1.23 setzt man für $\alpha \in \mathbb{R}_+$: $0^\alpha := 0$, die Potenzfunktion

$$[0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^\alpha, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist damit stetig auf $[0,\infty]$. Man beachte aber auch, dass $x^0 = 1 \forall x \in \mathbb{R}$ gilt, der Grenzübergang $\alpha \to 0$ ist daher in $x = 0$ unzulässig!

<u>Landau-Symbole</u> Für Wachstumsvergleiche bei reellen Funktionen wie in Satz 3.1.23 gibt es eine bequeme Schreibweise mit Landau-Symbolen $\mathcal{O}(..)$, $o(..)$. Diese werden auch bei der Komplexitätsanalyse von Algorithmen benutzt. Dazu sei a ein Häufungspunkt des Definitionsbereichs $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktionen (z.B. ∞ bei $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$) und $f, g:\ D \to [0,\infty)$.

$$\begin{aligned} f(x) = \mathcal{O}(g(x))\,(x\to a) \quad &\iff \quad \exists M > 0:\ f(x) \le Mg(x) \text{ für } x \to a, \\ f(x) = o(g(x))\,(x\to a) \quad &\iff \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Man sagt dazu "f ist groß-Oh-von g" (f beschränkt durch g) bzw "f ist klein-oh-von g". Die Schreibweise $f(x) \le Mg(x)\,(x\to a)$ meint, dass die Ungleichung in einer Umgebung von a gilt, bei $a = \infty$ also für genügend große $x \in D$. Die Beschänktheit einer Funktion f in einer Umgebung von a kann man so kurz durch $f(x) = \mathcal{O}(1)\,(x\to a)$ beschreiben. Auch ein Teil der Aussagen aus S.3.1.23 lässt sich umformulieren ($\alpha \in \mathbb{R}_+$)

$$\begin{aligned} x \to 0+: \quad & x^\alpha = o(1), \quad x^\alpha \ln x = o(1), \\ x \to \infty: \quad & x^\alpha = o(e^x), \quad \ln x = o(x^\alpha). \end{aligned}$$

Bemerkung: In der Numerik und Informatik ist der Komplexität (Laufzeit) eines Algorithmus ein wesentliches Merkmal für seine Effizienz. Die erforderliche Anzahl von Operationen $T(n)$ in Abhängigkeit von einer Problemgröße $n \in \mathbb{N}$ beschreibt den Zeitaufwand und damit in schwierigen Fällen auch die maximal lösbare Problemgröse. Bei einfachen Algorithmen, wie Sortierverfahren, ist der Laufzeitunterschied zwischen Verfahren mit $O(n^2)$ und $O(n\log n)$-Aufwand zwar merklich, aber heutzutage nicht mehr so entscheidend. Bei schwierigen Problemen reichen die Laufzeiten $T(n)$ von *polynomiellem* $\mathcal{O}(n^\alpha)$ bis zu *exponentiellem* Wachstum $\mathcal{O}(2^n)$ für $n \to \infty$ (Handlungsreisender, Rucksackproblem) und markieren den Unterschied zwischen den Komplexitätsklassen P und NP. Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene Funktionen T und Größenordnungen n die Zahlwerte $T(n)$, sowie die Problemgröße $n_{\max}$, die auf dem z.Z.schnellsten Rechner (33-PetaFLOP, Tianhe-2) in 1 Stunde lösbar ist (d.h. mit 10^{20} Operationen). Mit Verfahren von exponentiellem Aufwand sind nur sehr kleine Probleme lösbar. Auf diesem Argument beruhen Sicherheitsüberlegungen in der Kryptographie.

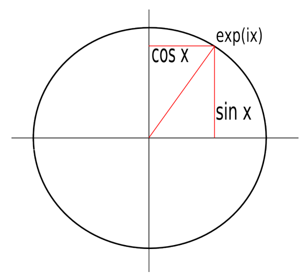
	$n=$	10	100	10^3	10^6	10^9	$n_{\max}$
	$n \lg n$	10	200	3000	$6 \cdot 10^6$	10^{10}	10^{19}
Auf-	n^2	100	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{10}
wand	n^3	1000	10^6	10^9	10^{18}	10^{27}	10^7
	2^n	1000	10^{30}	10^{301}	xxx	xxx	66
	$n!$	$4 \cdot 10^6$	10^{158}	10^{2568}	xxx	xxx	22

Trigonometrische Funktionen

Mit der imaginären Einheit $\mathbf{i}$ bildet die Funktion $x \mapsto e^{\mathbf{i}x}$ die reelle Achse $\mathbb{R}$ ab auf den Einheitskreis in der komplexen Ebene, wobei $e^{\mathbf{i}0} = 1$ ist. Denn die Exponentialreihe liefert für das konjugierte Argument

$$e^{\bar{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{(z^n)}}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{e^z} \;\Rightarrow\; |e^{\mathbf{i}x}|^2 = e^{\mathbf{i}x}\overline{e^{\mathbf{i}x}} = e^{\mathbf{i}x}e^{-\mathbf{i}x} = e^0 = 1,$$

$x \in \mathbb{R}$. Die bekannte geometrische Definition der trigonometrischen Funktionen stimmt daher mit folgender Definition überein.



Definition 3.1.24 *Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man Sinus und Cosinus*

$$\cos x := \mathbf{Re}\,(e^{\mathbf{i}x}), \quad \sin x := \mathbf{Im}\,(e^{\mathbf{i}x}) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$e^{\mathbf{i}x} = \cos x + \mathbf{i}\sin x \qquad \textit{(Eulersche Formel)}$$

Rechenregeln:

Satz 3.1.25 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

a) $$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x}), \quad \sin x = \tfrac{1}{2\mathbf{i}}(e^{\mathbf{i}x} - e^{-\mathbf{i}x})$$

b) $$\cos(-x) = \cos x, \quad (\cos \textit{ ist eine gerade Funktion})$$
$$\sin(-x) = -\sin x \quad (\sin \textit{ ist ungerade Funktion})$$

c) $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

d) $$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} \cos x - \cos y &= -2 \sin \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2} \end{aligned}$$

Beweis a) entspricht Definition, da $\overline{e^{\mathbf{i}x}} = e^{-\mathbf{i}x}$.

b) direkt in a) ablesbar.

c) Für $z = e^{\mathbf{i}x}$ ist $1 = |z|^2 = (\mathbf{Re}\,z)^2 + (\mathbf{Im}\,z)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

d) Folgt aus S.2.2.21, $e^{\mathbf{i}(x+y)} = e^{\mathbf{i}x}e^{\mathbf{i}y}$,

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + \mathbf{i}\sin(x+y) &= (\cos x + \mathbf{i}\sin x)(\cos y + \mathbf{i}\sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + \mathbf{i}(\sin x \cos y + \cos x \sin y), \end{aligned}$$

durch Vergleich von Real- und Imaginärteil.

e) Analog mit $u := \frac{1}{2}(x+y)$, $v := \frac{1}{2}(x-y)$, also $x = u+v$, $y = u-v$:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{i}x} - e^{\mathbf{i}y} &= \cos x - \cos y + \mathbf{i}(\sin x - \sin y) = e^{\mathbf{i}u}e^{\mathbf{i}v} - e^{\mathbf{i}u}e^{-\mathbf{i}v} = e^{\mathbf{i}u}(e^{\mathbf{i}v} - e^{-\mathbf{i}v}) \\ &= (\cos u + \mathbf{i}\sin u)(2\mathbf{i}\sin v) = -2\sin u \sin v + 2\mathbf{i}\cos u \sin v. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Aus der Exponentialreihe (2.2.5) erhält man direkt

Satz 3.1.26 *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt die absolut konvergente Reihenentwicklung*

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots \end{aligned}$$

Beweis Das Quotienten-Kriterium liefert auch hier den Konvergenzradius ∞, daraus folgt die absolute Konvergenz für jedes $x \in \mathbb{R}$. Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil bestätigt man die Behauptung,

$$\begin{aligned} \cos x + \mathbf{i}\sin x &= e^{\mathbf{i}x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{i}^m x^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{i}^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{i}^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Auch in den Reihen zeigt sich, dass der Cosinus eine gerade Funktion ist, $\cos(-x) = \cos x$, da nur gerade Exponenten auftreten. Der Sinus ist ungerade, $\sin(-x) = -\sin x$.

Beispiel 3.1.27 Für den Sinus gilt

$$|\sin x| \le |x| \, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Nur der Fall $0 < x \le 1$ ist zu prüfen, durch geeignete Klammerung der Reihe sieht man

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!}\underbrace{(1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5})}_{\ge 0} - \frac{x^6}{7!}\underbrace{(1 - \frac{x^2}{8 \cdot 9})}_{\ge 0} + \ldots \le 1,$$

und der Grenzwert ist 1 für $x \to 0$.

Eine direkte Folgerung der letzten Sätze ist

Satz 3.1.28 *Die trigonometrischen Funktionen*

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \cos x, \quad \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sin x,$$

sind gleichmäßig stetig stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Beweis Nach S.3.1.25 ist $|\cos x| \le 1$, $|\sin x| \le 1$ und nach Teil e) dieses Satzes folgen

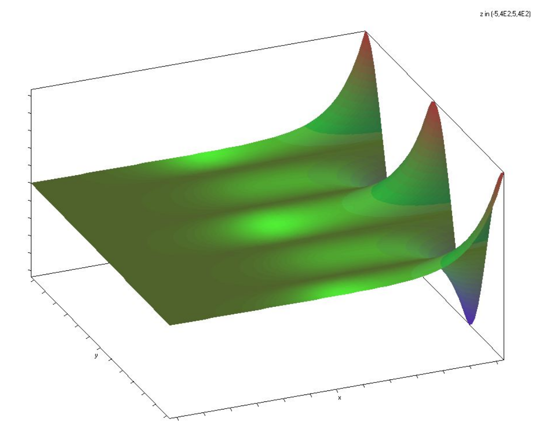
$$\begin{aligned} |\cos x - \cos a| &= 2|\sin\frac{x+a}{2}||\sin\frac{x-a}{2}| \le 2|x-a|/2, \\ |\sin x - \sin a| &= 2|\cos\frac{x+a}{2}||\sin\frac{x-a}{2}| \le 2|x-a|/2, \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung aus Beispiel 3.1.27 stammt. Mit der Wahl $\delta = \varepsilon/2$ erkennt man die glm Stetigkeit. ■

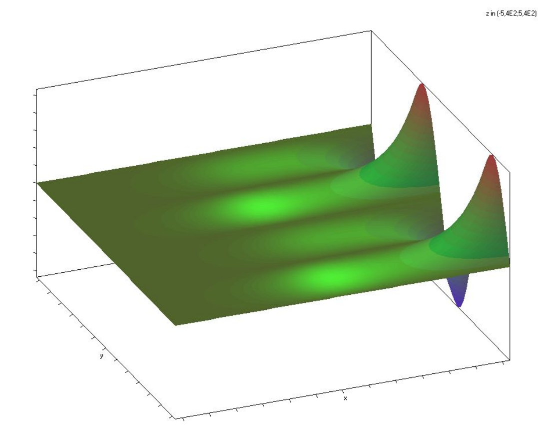
<u>Exponentialfunktion im Komplexen</u>: Aus der *Euler-Formel* erhält man direkt die einfache allgemeine Darstellung

$$e^z = e^{x+\mathbf{i}y} = e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y), \quad z = x + \mathbf{i}y,\ x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.1.5}$$

Hierbei legt $x = \mathbf{Re}\, z$ den Betrag fest, $|e^z| = e^x$, denn $|e^z|^2 = \overline{e^z}e^z = e^{x-\mathbf{i}y}e^{x+\mathbf{i}y} = e^{2x}$.



Realteil e^z,
$z \in [-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi]$



Imaginärteil e^z,
$z \in [-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi]$

$\boxed{\pi}$

Gezeigt wird jetzt, dass Cosinus und Sinus periodische Funktionen sind, deren Periodenlänge 2π gleich dem Umfang des Einheitskreises ist. Dabei ist π als kleinste positive Nullstelle von $\cos(x/2)$ definiert (Existenz s.u.). Mit $\cos(2x) = \mathbf{Re}\, e^{\mathbf{i}2x} = \mathbf{Re}\,(e^{\mathbf{i}x})^2 = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ folgt daraus $\cos\pi = 2\cdot 0 - 1 = -1$ und $\sin^2\pi = 1 - \cos^2\pi = 0$. Der Satz 3.1.25 d) liefert schließlich

$$\begin{array}{c} \cos(x+\pi) = \cos x\cos\pi - \sin x \cdot 0 = -\cos x \\ \sin(x+\pi) = \sin x\cos\pi + \cos x \cdot 0 = -\sin x \end{array}, \tag{3.1.6}$$

was endlich die 2π-Periodizität zeigt

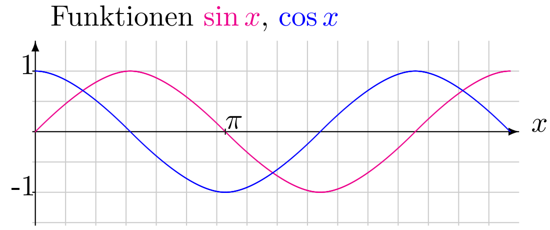
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Für die Nullstellen gilt

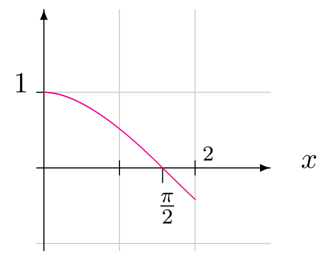
$$\sin x = 0 \iff x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}), \quad \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}),$$

und spezielle Werte sind

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\sin x$	0	1	0	-1	0



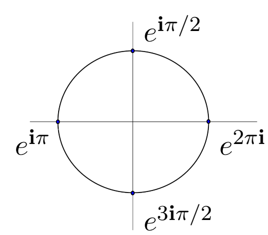
Die Existenz der Nullstelle π ist über einen Vorzeichenwechsel von $\cos(x/2)$ nachzuweisen. Tatsächlich ist $\cos 0 = e^0 = 1$ und man kann einfach zeigen, dass $\cos 2 < 0$ gilt. Dies liefert das Startintervall $\pi \in [0,4]$ für eine numerische Berechnung von π mit dem Bisektionsverfahren aus Satz 1.4.9. Dabei muss für die Entscheidung *Lsglinksvon* nur das Vorzeichen (!) des jeweiligen Werts $\cos m_k$ eindeutig bekannt sein. Dazu braucht man den Cosinus nicht exakt zu berechnen, sondern man muss nur die cos-Reihe so weit auswerten, bis das Vorzeichen feststeht. Dies ist mit den Restglied-Abschätzungen der Exponentialfunktion (2.2.6) möglich, die natürlich auch für $\cos x = \mathbf{Re}\,\exp(\mathbf{i}x)$ gelten.



Die Zahl $\pi = 3.14159265358\ldots$ ist eine sog. *transzendente* Zahl und wegen ihrer grundlegenden Bedeutung interessiert man sich z.B. auch für die tatsächliche Ziffernabfolge. Dazu gibt es schneller konvergente Verfahren als die Bisektion, die Darstellung von π ist z.Z. auf 1 Billion Dezimalstellen genau bekannt. Vermutlich ist π eine sog. *normale Zahl*, in deren Binärdarstellung jede Bitfolge irgendwann einmal auftritt (ASCII-Code "wiki" an Position 889 Mill.).

Bei der Exponentialfunktion im Komplexen erhält man aus obiger Tabelle die speziellen Werte

e^0	$e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$	$e^{\mathbf{i}\pi}$	$e^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{2}}$	$e^{2\pi\mathbf{i}}$
1	$\mathbf{i}$	-1	$-\mathbf{i}$	1



Der mittlere Fall gilt als "schönste Formel der Mathematik", welche die 5 wichtigsten Zahlen miteinander verknüpft:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Tangens:

Der Quotient von Sinus und Cosinus ergibt den Tangens mit dem Definitionsbereich $D_t := \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \forall k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\tan : D_t \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{3.1.7}$$

Die Regeln aus S.3.1.25 übertragen sich auf den Tangens.

Satz 3.1.29 *a)* $\tan(x+\pi) = \tan x,\ x \in D_t$.

b) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ *für* $x, y, x+y \in D_t$.

c) $\tan$ *ist streng monoton wachsend in* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty, \ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$

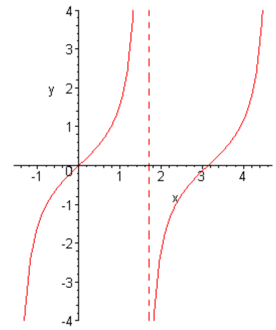
Beweis a) Die π-Periodizität folgt aus (3.1.6).

b) Aus S.3.1.25 folgt

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\sin y}{\cos y}}.$$

c) Für $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$ ist $y - x \in (0, \pi)$ und daher

$$\tan y - \tan x = \frac{\sin y \cos x - \sin x \cos y}{\cos y \cos x} = \frac{\sin(y-x)}{\cos y \cos x} > 0.$$



d) Für eine Folge (x_n) sei $0 \le x_n < \frac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n = 1$ und $\cos x_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n = 0$. Damit ist $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{y} = +\infty$. Den rechtsssseitigen Grenzwert erhält man aus $\tan(\pi - x) = -\tan x$. ■

<u>Arcusfunktionen</u>

werden die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen genannt. Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen kann es natürlich keine *eindeutige* Umkehrung geben. Aber nach Einschränkung der Definitionsbereiche sind folgende Funktionen

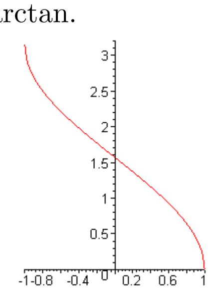
$$\left.\begin{array}{lll} \cos|_{[0,\pi]}: & [0,\pi] & \to [-1,1], \\ \sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}: & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \to [-1,1], \\ \tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}: & (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) & \to \mathbb{R}, \end{array}\right\} \text{streng monoton, stetig und bijektiv.}$$

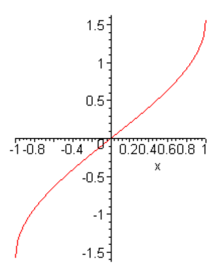
Mit Satz 3.1.20 (beim Tangens modifiziert wie S.3.1.22) folgt die Existenz der folgenden, stetigen und streng monotonen Umkehrfunktionen.

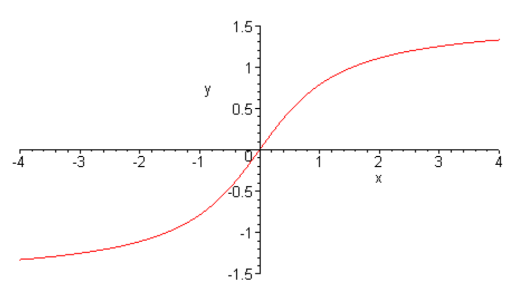
Definition 3.1.30

$$\begin{aligned} \arccos &:= \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}: & [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad & \cos(\arccos(x)) = x \ \forall x \in [-1,1], \\ \arcsin &:= \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}: & [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad & \sin(\arcsin(x)) = x \ \forall x \in [-1,1], \\ \arctan &:= \left(\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad & \tan(\arctan(x)) = x \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Arcusfunktionen treten u.a. bei der Integration auf. Die Graphen sind die von arccos, arcsin und arctan.

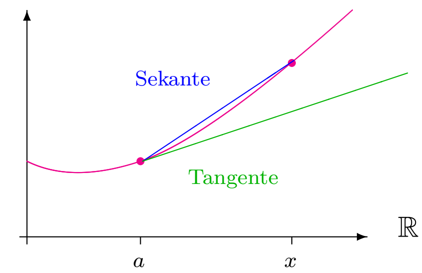






3.2 Differenzierbarkeit

Der Wert einer im Punkt a stetigen Funktion ändert sich nur allmählich, wenn man sich von der Stelle a weg bewegt. Etwas präziser kann man sich für das genaue Ausmaß der Änderung $f(x)-f(a)$ interessieren. Dazu betrachtet man die Sekante an die Funktion, d.h., die Gerade durch zwei Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ ihres Graphen.



Die Steigung der Sekante ist der Differenzenquotient $(f(x)-f(a))/(x-a)$. Wenn man den Punkt $x \to a$ bewegt, erhält man bei "glatten" Funktionen eine Grenzgerade, die Tangente.

Definition 3.2.1 *Zur Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $a \in D$. f heißt* differenzierbar *im Punkt a, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D \setminus \{a\}}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f'(a)$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Der Limes $f'(a)$ heißt Ableitung *von f in a. Die Funktion f heißt* differenzierbar *(auf D), wenn sie in jedem Punkt von D diffbar ist.*

Bemerkung: Die Definition setzt voraus, dass Folgen (x_n) mit $x_n \neq a$, $x_n \to a\,(n \to \infty)$ existieren, also a ein Häufungspunkt von D ist.

Differenzierbarkeit in a heißt, dass sich f in einer Umgebung von a durch eine lineare Funktion (hier: eine Gerade, die Tangente) gut approximieren lässt. Diese quotientenfreie Charakterisierung folgt jetzt, sie kann übrigens auf wesentlich allgemeinere Situationen (mehrere Variable, Operatoren) übertragen werden:

Satz 3.2.2 *Zur Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Dann sind äquivalent:*

a) f ist differenzierbar in a.

b) es existiert $c \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $R : D \to \mathbb{R}$ mit $R(a) = 0$ so, dass

$$f(x) = \underbrace{f(a) + c \cdot (x-a)}_{Tangente} + R(x)(x-a), \quad x \in D.$$

Der Wert c im Satz ist dann die Ableitung von f in a, d.h. $c = f'(a)$.

Beweis b) $\Rightarrow$ a):

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{(c+R(x))(x-a)}{x-a} = c + R(x) \to c = f'(a)\,(x \to a).$$

a) $\Rightarrow$ b): Für die Funktion

$$R(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$$

gilt wegen der Diffbarkeit $\lim_{x\to a} R(x) = R(a) = 0$. Also ist R stetig und es gilt auch die Gleichung in b). ■

Korollar Wenn f diffbar in $a \in D$ ist, ist f auch stetig in a.
Beweis Aus S. 3.2.2 b) folgt

$$|f(x) - f(a)| = |f'(a) + R(x)||x - a| \to 0 \, (x \to a). \quad ■$$

Die Umkehrung gilt nicht, die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist zwar stetig (Beisp.3.1.6), aber in $a = 0$ *nicht differenzierbar*. Bei Annäherung von links und rechts bekommt man zwei verschiedene Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1 \quad \neq \quad \lim_{x\to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{x}{x} = +1.$$

Es gibt sogar stetige, aber nirgends diffbare Funktionen. Jetzt werden die Ableitungen einiger Standardfunktionen berechnet.

Beispiel 3.2.3 a) Konstante Funktion $f : x \mapsto d \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to a} \frac{d-d}{x-a} = 0 = f'(a)$.

b) Lineare Funktion $f : x \mapsto cx$, $c \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to a} \frac{cx-ca}{x-a} = c = f'(a)$.

c) Monom $f : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Nach S.1.2.4 gilt

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} = n a^{n-1}.$$

d) Exponentialfunktion $f : x \mapsto \exp(x) = e^x$: $\boxed{\exp' = \exp}$ denn

$$\exp'(a) = \lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \lim_{x\to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^a = \exp(a),$$

da $|(e^h - 1)/h - 1| = |r_2(h)/h| \leq h \to 0 \, (h \to 0)$ nach (2.2.6). Die einfache Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ zeichnet sich dadurch aus, dass sie mit ihrer Ableitung übereinstimmt.

e) $\sin'(a) = \cos a$, denn mit $h := (x - a)/2$, S.3.1.25 und Bsp.3.1.27 gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = 2\frac{\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = \lim_{h\to 0} \cos(a + h)\frac{\sin h}{h} = \cos a.$$

f) $\cos'(a) = -\sin a$, analog.

Differentiationsregeln für die Ableitungen zusammengesetzter Funktionen:

Satz 3.2.4 *Die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien diffbar in $a \in D$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, λf, $f \cdot g$ diffbar in a. Für $g(a) \neq 0$ ist f/g diffbar in a. Im Einzelnen gilt:*

$$\begin{aligned}
(f + g)'(a) &= f'(a) + g'(a), \\
(\lambda f)'(a) &= \lambda f'(a), \\
(f \cdot g)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) && \textit{Produktregel} \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} && \textit{Quotientenregel}
\end{aligned}$$

Beweis Die Regel für λf ist ein Spezialfall der Produktregel. Da f und g auch stetig sind, sieht man wie bei den Regeln für Folgen, dass

$$\begin{aligned}
\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \to f'(a)+g'(a)\ (x\to a),\\
\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&\to \quad f'(a) \qquad g(a)+f(a) \qquad g'(a) \quad (x\to a),\\
\frac{1}{g}: \qquad \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} &= \frac{-1}{g(x)g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \to \quad \frac{-g'(a)}{g^2(a)}\ (x\to a)
\end{aligned}$$

Also ist $(1/g)'(a) = -g'(a)/g^2(a)$ und die Produktregel liefert den allgemeinen Fall

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\frac{1}{g}+f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g}-\frac{fg'}{g^2}. \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Die beiden ersten Regeln zeigen, dass die Menge aller diffbaren Funktionen ein Vektorraum ist und die Differentiation dort eine lineare Abbildung $f \mapsto f'$ (aber kein Endomorphismus).

Anwendung auf weitere spezielle Funktionen:

Beispiel 3.2.5 a) Negative Potenzen $n \in \mathbb{N}$: $q_n : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^n}$. Aus der Quotientenregel folgt

$$q_n' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Diese Regel ist analog zu Beisp. 3.2.3c), zusammen folgt also

$$(x^m)' = mx^{m-1} \quad \forall m \in \mathbb{Z},\ (x \neq 0 \text{ für } m < 0).$$

b) Tangens: $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, nach Quotientenregel:

$$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Eine weitere wichtige Regel betrifft die Verkettung/Komposition von Funktionen.

Satz 3.2.6 (Kettenregel) *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei diffbar in $a \in D$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ diffbar in $b := f(a) \in E$. Dann ist auch die Verkettung $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ diffbar in a und es gilt*

$$(g\circ f)'(a) = g'(b)f'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

Beweis Nach S. 3.2.2 ist

$$g(y) = g(b) + (g'(b) + R(y))(y - b),\ \ y \in E$$

mit $R(b) = 0$. Damit gilt für $y = f(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} &= \frac{g(b)+(g'(b)+R(f(x)))(f(x)-f(a))-g(b)}{x-a}\\
&= \Big(g'(b)+\underbrace{R(f(x))}_{\to 0}\Big)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
&\to \ g'(f(a))\cdot f'(a) \quad (x\to a),
\end{aligned}$$

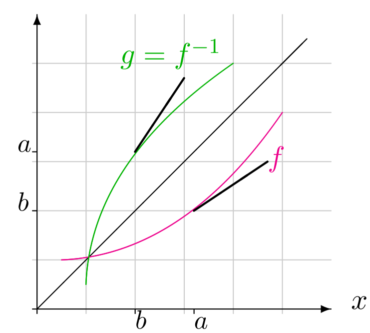
aufgrund der Diffbarkeit und Stetigkeit von f. ■

Beispiel 3.2.7 $h(x) := \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$: $h = g \circ f$ mit $g = \sin$ und $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Aus $\sin' = \cos$ und $f'(x) = -1/x^2$ folgt die Unbeschränktheit der Ableitung:

$$h'(x) = \sin'(\frac{1}{x})f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}.$$

Eine wichtige Verkettung ist die, welche implizit die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ definiert, $g \circ f = id_D$. Da die Ableitung der Identität $(id)' = 1$ ist, folgt aus $g'f' = 1$ die gefährlich eingängige Regel $(f^{-1})' = (f')^{-1}$. Gefährlich deswegen, weil sich das -1 auf ganz unterschiedliche Operationen bezieht, einerseits auf die Umkehrung der Komposition, andererseits auf die der Multiplikation.



Satz 3.2.8 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Es sei $f : D \mapsto f(D) \subseteq \mathbb{R}$ streng monoton und in $a \in D$ diffbar. Für $f'(a) \neq 0$ ist die Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ diffbar in $b := f(a)$ und ihre Ableitung hat den Wert*

$$g'(b) = \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Beweis Nach S.3.1.20 ist $g = f^{-1}$ stetig und streng monoton. Ist (y_n) eine Folge mit $y_n \neq b$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, dann gilt für $x_n := g(y_n)$ auch $x_n \neq a = g(b)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ wegen der Stetigkeit von g. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$ ■

Die wichtigsten Umkehrfunktionen sind Wurzel und Logarithmus.

Beispiel 3.2.9 a) Der Logarithmus $\ln = \exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist diffbar, da die Exponentialfunktion streng monoton ist. Mit $y = \exp x$ bzw. $x = \ln y$ folgt

$$\ln' y = \frac{1}{\exp x} = \frac{1}{\exp\,\ln y} = \frac{1}{y}.$$

b) Zu $p \in \mathbb{N}$ ist $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^p$ streng monoton und die Umkehrung ist die p-te Wurzel $g = \sqrt[p]{\ }$. Aus der Regel $f' = px^{p-1}$ folgt daher in $y = x^p$:

$$\left(\sqrt[p]{\ }\right)'(y) = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{px^{p-1}} = \frac{1}{py^{(p-1)/p}} = \frac{1}{p}y^{\frac{1}{p}-1}.$$

Mit $r = 1/p$ entspricht dies der von den Monomen bekannten Regel $\boxed{(y^r)' = ry^{r-1}}$, die jetzt allgemein bewiesen wird. Zu $r \in \mathbb{R}$ sei

$$f_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^r = \exp(r\ln x)$$

die allgemeine Potenzfunktion. Aus der Kettenregel folgt tatsächlich

$$f_r'(x) = \exp'(r\ln x)\cdot r\ln'(x) = \exp(r\ln x)\frac{r}{x} = x^r\frac{r}{x} = rx^{r-1}.$$

c) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton, nach Beisp.3.2.5 ist die Ableitung $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x \geq 1 > 0$. Daraus folgt für den Arcustangens

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Bemerkung zu Differentialen: Eine traditionelle Schreibweise für die Ableitung eine Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ an der Stelle a, welche die Herkunft aus dem Grenzübergang von Differenzenquotienten betont, ist

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} f(x) \quad \text{bzw. klarer } f'(a) = \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=a}.$$

Die linke Schreibweise kann wegen der Doppelbedeutung von x mißverständlich sein, sicherer ist die Zusatzangabe der Auswertungsstelle a. In dieser Form führen die Kettenregel S.3.2.6 für $g(y)$ mit $y = f(x)$ und der Satz 3.1.20 über die Umkehrfunktion mit $f(x) \equiv y$, $x = f^{-1}(y)$ auf die einfachen Merkregeln (sehr mit Vorsicht zu behandeln!)

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Höhere Ableitungen: Differentiation erzeugt aus einer diffbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ eine neue Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$. Wenn diese wieder diffbar ist, kann man höhere Ableitungen von f betrachten.

Definition 3.2.10 *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt k-mal diffbar, $k \in \mathbb{N}$, wenn die Funktion $f^{(k-1)} : D \to \mathbb{R}$ diffbar ist (mit $f^{(0)} := f$). Dann definiert man die k-te Ableitung von f induktiv durch*

$$f^{(k)} : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f^{(k)}(x) := \left(f^{(k-1)}\right)'(x).$$

f heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ stetig ist. Andere Schreibweisen: $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k}$.

Beispiel 3.2.11 a) Aus Beisp.3.2.3 folgt induktiv für $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp^{(n)} = \exp, \quad \cos^{(2n)} = (-1)^n \cos, \quad \sin^{(2n)} = (-1)^n \sin.$$

b) Für $k, n \in \mathbb{N}$ und $p_n : x \mapsto x^n$ gilt $p_n'(x) = nx^{n-1}$, $p_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ und induktiv

$$p_n^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} x^n = (x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}. \tag{3.2.1}$$

Eine symmetrischere Darstellung dieser Regel ist $\left(\frac{x^n}{n!}\right)^{(k)} = \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$.

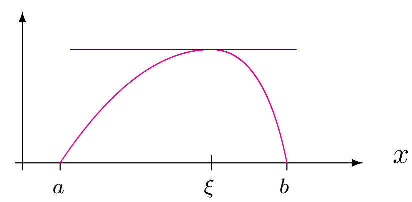
Analog zum Vektorraum $C[a,b]$ aller stetigen Funktionen definiert man den Unterraum

$$C^n[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} |\, f^{(n)} \text{ existiert und ist stetig}\} \subseteq C[a,b].$$

Mittelwertsatz und Extrema

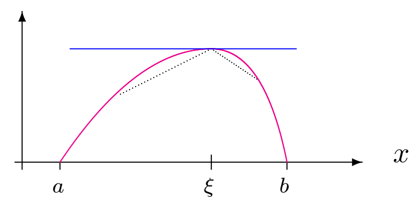
Bei differenzierbaren Funktionen liegt zwischen zwei Nullstellen der Funktion immer eine Nullstelle der Ableitung.

Satz 3.2.12 (Satz von Rolle) *Es sei f stetig in $[a,b]$, $a < b$, und differenzierbar in (a,b) und es gelte $f(a) = f(b) = 0$. Dann existiert eine Stelle*



$$\xi \in (a,b): \quad f'(\xi) = 0.$$

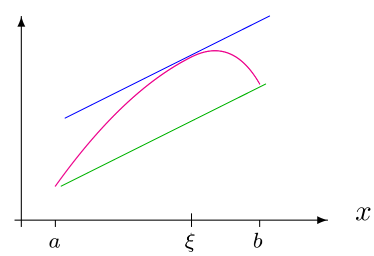
Beweis Da das Intervall kompakt ist und f stetig, existieren nach Satz 3.1.13 Stellen ξ, η, wo die Extrema angenommen werden, $f(\xi) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und $f(\eta) = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Wenn $f(\xi) = f(\eta) = 0$ gilt, ist die Funktion überall null und die Behauptung gilt mit beliebigem $\xi \in (a,b)$. Sei nun $f(\xi) > 0$ (oBdA, sonst betrachte $-f$). Dann ist gilt $a < \xi < b$.



ZZ $f'(\xi) = 0$: Nach Definition gilt $f(\xi) \geq f(x)\,\forall x \in [a,b]$ und wir betrachten zwei Folgen $(x_n), (y_n)$ aus $[a,b]$ mit $\xi > x_n \to \xi$, $\xi < y_n \to \xi$. Dann folgt wegen der Differenzierbarkeit in ξ die Behauptung aber aus

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n} = f'(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(\xi)}{y_n - \xi} \leq 0. \quad \blacksquare$$

Die Verbindungsgerade zwischen Nullstellen verläuft horizontal in der x-Achse, also parallel zur Tangente in der Extremalstelle ξ aus dem Satz. Als direkte Verallgemeinerung des Satzes erhält man bei beliebigen Funktionswerten in a und b eine Zwischenstelle, in der die Funktion die gleiche Steigung hat wie die *Sekante* zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ (Im Bild: Sekante und Tangente). Später wird aber eine erweiterte Variante benötigt, die den Zuwachs von zwei Funktionen vergleicht.



Satz 3.2.13 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Es seien f, g stetig in $[a,b]$, $a < b$, und differenzierbar im offenen Intervall (a,b). Weiter sei g streng monoton wachsend auf $[a,b]$ und $g'(x) > 0\,\forall x \in (a,b)$. Dann existiert eine Zwischenstelle*

$$\xi \in (a,b): \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Bemerkung: Im Spezialfall $g(x) \equiv x$ erhält man die einfache Form des Satzes:

$$\exists \xi \in (a,b): \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad \text{bzw.} \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{3.2.2}$$

Beweis Nach Voraussetzung ist $g(b) > g(a)$. Der Satz folgt direkt aus S.3.2.12, indem man eine geeignete Funktion von f subtrahiert. Die Differenz

$$d(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

verschwindet in den Randpunkten $d(a) = d(b) = 0$ und ist offensichtlich diffbar. Nach S.3.2.12 existiert also eine Zwischenstelle mit $0 = d'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$. ■

Die Lage der Stelle $\xi \in (a,b)$ ist zwar nicht bekannt, durch die Betrachtung von $\inf\{f'(\xi) : x \in (a,b)\}$ und $\sup\{f'(\xi) : x \in (a,b)\}$ kann man aber den Verlauf der Funktion f abschätzen.

Beispiel 3.2.14 Zu $1 \le x < y$ existiert $\xi \in (x,y) \subseteq (1,\infty)$ mit

$$\ln y - \ln x = \ln'(\xi)(y-x) = \frac{y-x}{\xi} \begin{cases} \le (y-x) \\ > 0 \end{cases}$$

Daher ist der Logarithmus glm stetig im Intervall $[1,\infty)$ (obere Ungleichung: zu $\varepsilon > 0$ ist $\delta = \varepsilon$ wählbar) und monoton wachsend (untere Ungleichung).

Wie im Beispiel kann man aus lokalen Eigenschaften der Ableitung globale Eigenschaften der Funktion herleiten, z.B. die *Monotonie*:

Satz 3.2.15 *Mit $a < b$ sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diffbar. Dann gilt*

$$\begin{array}{llcl} a) & f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) & \iff & f \text{ ist konstant} \\ b) & f'(x) \ge 0 \quad \forall x \in (a,b) & \iff & f \text{ ist monoton wachsend} \\ & f'(x) \le 0 \quad \forall x \in (a,b) & \iff & f \text{ ist monoton fallend} \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} c) & f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) & \Rightarrow & f \text{ ist streng monoton wachsend} \\ & f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) & \Rightarrow & f \text{ ist streng monoton fallend} \end{array}$$

Beweis "$\Leftarrow$" alle Fälle: betrachte Vorzeichen im Differenzenquotienten.

"$\Rightarrow$" Für $x, y \in [a,b]$ und $y > x$ zeigt der Mittelwertsatz 3.2.13:

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)\underbrace{(y-x)}_{>0}, \quad \xi \in (x,y).$$

a) $f'(\xi) = 0 \;\Rightarrow\; f(y) = f(x)$.

b) $f'(\xi) \ge 0 \;\Rightarrow\; f(y) \ge f(x)$, sowie $f'(\xi) \le 0 \;\Rightarrow\; f(y) \le f(x)$.

c) $f'(\xi) > 0 \;\Rightarrow\; f(y) > f(x)$, etc. ■

Vorsicht: c) gilt nur in einer Richtung! Die Funktion $x \mapsto x^3$ ist streng monoton wachsend, ihre Ableitung $3x^2$ wird aber null in $x = 0$.

Mit diesem Satz folgt leicht die Monotonie vieler Standardfunktionen, $\exp'(x) = e^x > 0$, $\ln'(x) = 1/x > 0\,(x > 0)$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 1$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, etc.

Eine weitere direkte Anwendung des Mittelwertsatzes 3.2.13 ist die korrekte Auswertung von undefinierten Grenzwerten der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$. Die Regel wird beispielhaft für linksseitige Grenzwerte bzw. uneigentliche $x \to \infty$ formuliert (Def.3.1.9).

Satz 3.2.16 (Regel von de l'Hospital) *Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, und $g(x) \ne 0$, $g'(x) \ne 0$ für $x \in (a,b)$. Im Grenzübergang gelte einer der Fälle*

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to b-} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} g(x) = 0, \quad \textit{oder} \\ \lim\limits_{x\to b-} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} g(x) = \infty. \end{array}$$

Wenn dann der (evtl. uneigentliche) Grenzwert $\lim_{x\to b-} f'(x)/g'(x)$ *existiert, existiert auch*

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis -Skizze für den ersten Fall. Die Funktionen f und g werden in b als stetig betrachtet mit $f(b) = g(b) = 0$. Nach S.3.2.13 existiert dann zu $x \in (a, b)$ ein $\xi \in (x, b)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Für $x \to b-$ gilt auch $\xi \to b-$. ∎

Beispiel 3.2.17 Nach vorheriger(!) Überprüfung der Voraussetzungen zeigt de l'Hospital

a) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{(dlH)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

b) $\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{(dlH)}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0.$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{(dlH)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

<u>Lokale Extrema</u> Die Existenz der Extrema stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen wurde in S.3.1.13 nachgewiesen, jetzt folgt die Methode zur *Berechnung* dieser Werte.

Definition 3.2.18 *Die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *besitzt im Punkt* $c \in D$ *ein* lokales Maximum (lokales Minimum)*, wenn ein* $\delta > 0$ *existiert so, dass*

$$f(x) \le f(c)\,\forall x \in D : |x - c| < \delta \quad (f(x) \ge f(c)\,\forall x \in D : |x - c| < \delta).$$

Der Oberbegriff für beide Fälle ist lokales Extremum*. Die Stelle* c *heißt* isoliertes lokales Extremum*, wenn strenge Ungleichungen gelten,*

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{entweder} & f(x) < f(c) \\ \textit{oder} & f(x) > f(c) \end{array}\right\} \forall x \in D : 0 < |x - c| < \delta.$$

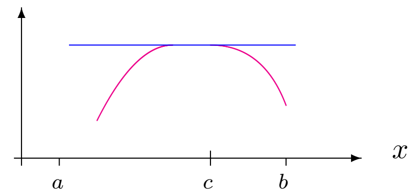
Globale Maxima/Minima (vgl. S.3.1.13) sind immer auch lokale. Für die "W"-Funktion $p(x) = (x^2 - 1)^2$ etwa ist $c = 0$ nur ein isoliertes lokales Maximum, da nach Beisp.3.1.10 gilt $p(x) \to \infty\,(x \to \infty)$. Extrema von Funktionen kann man über die Ableitungen finden:

Satz 3.2.19 *Mit* $a < b$ *sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $c \in (a, b)$.

a) Hat f *in* c *ein lokales Extremum und ist* f *diffbar in* c*, gilt* $f'(c) = 0$.

b) Es sei f *zweimal diffbar auf* (a, b) *und es gelte*

$$f'(c) = 0, \quad f''(c)\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \quad f \text{ hat isoliertes lokales Minimum in } c, \\ < 0 & \Rightarrow \quad f \text{ hat isoliertes lokales Maximum in } c. \end{cases}$$

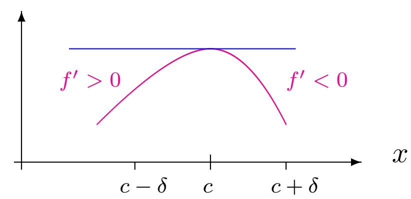


Beweis a) Wie im Satz 3.2.12 von Rolle betrachtet man Punkte $x, y \in [a,b]$ mit $x < c < y$ und einem lokalen Maximum c (oBdA):

$$0 \le \lim_{x\to c-} \underbrace{\frac{f(c)-f(x)}{c-x}}_{\ge 0} = f'(c) = \lim_{y\to c+} \underbrace{\frac{f(y)-f(c)}{y-c}}_{\le 0} \le 0.$$

b) Sei $f'(c) = 0$ und beispielsweise

$$f''(c) = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = -d < 0.$$



Dann existiert zu $\varepsilon := d/2 > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = \frac{f'(x)}{x-c} < -\frac{d}{2} < 0 \text{ für } 0 < |x-c| < \delta.$$

Je nach Vorzeichen von $x - c$ bedeutet dies mit Satz 3.2.15 folgendes

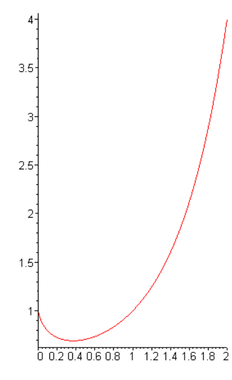
$$\begin{cases} f'(x) > 0, & c-\delta < x < c \quad \Rightarrow \; f \text{ streng monoton wachsend in } [c-\delta, c] \\ f'(x) < 0, & c < x < c+\delta \quad \Rightarrow \; f \text{ streng monoton fallend in } [c, c+\delta]. \end{cases}$$

$\Rightarrow \; f(c) > f(x) \, \forall x \in [c-\delta, c+\delta] \setminus \{c\}$. ■

Bemerkung: Satz 3.2.19b) ist nur ein hinreichendes Kriterium für ein isoliertes lokales Extremum. Das Polynom $p : x \mapsto x^4$ hat in $x = 0$ ein isoliertes und globales Minimum, es gilt aber $p'(0) = p''(0) = 0$.

Beispiel 3.2.20 Eine für $x > 1$ sehr schnell wachsende Funktion ist

$$f : \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^x.$$



Aus der Definition $x^x = \exp(x \ln x)$ folgt $x^x > 0$. Mit Produkt- und Kettenregel bekommt man die Ableitungen $(x \ln x)' = \ln x + \frac{x}{x}$ und

$$f'(x) = (x^x)' = (x \ln x)' \exp(x \ln x) = (\ln x + 1) x^x.$$

Die einzige Nullstelle von f' ist die des Vorfaktors. Es gilt $\ln c \overset{!}{=} -1$ $\iff c = 1/e$ und der zugehörige Funktionswert ist $f(1/e) = (e^{-1})^{1/e} = e^{-1/e} = 0.6922...$ Aus der Form von f' folgt wegen $x^x > 0$ in $(0,\infty)$:

$$f'(x) \left\{ \begin{array}{ll} < 0 & \text{für } x \in (0, \frac{1}{e}) \\ = 0 & \text{für } x = \frac{1}{e} \\ > 0 & \text{für } x \in (\frac{1}{e}, \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \min_{x\in\mathbb{R}_+} f(x) = f(\frac{1}{e}).$$

Also ist $f(1/e)$ globales Minimum der Funktion. Da nach S.3.1.23 gilt $\lim_{x\to 0+} x \ln x = 0$, existiert der Grenzwert $f(0) = e^0 = 1$ und bestätigt die Definition von 0^0 in §1.1. Allerdings ist

$\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty$. Fazit, für $x \in [0, \infty)$ gilt:

$$x^x \geq e^{-1/e} > 0, \quad 0^0 = \lim_{x\to 0+} x^x = 1.$$

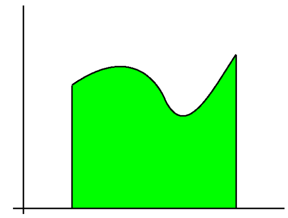
Die Bestimmung von **globalen Extrema**

$$\min\{g(x) : x \in [a, b]\}, \qquad \max\{g(x) : x \in [a, b]\}. \tag{3.2.3}$$

wie in Beisp.3.2.20 ist eine der wichtigsten Anwendungen von Satz 3.2.19. Dazu muss man zunächst die Randwerte $g(a), g(b)$ überprüfen und dann alle lokalen Extrema, die man als Nullstellen $g'(c) = 0$ der Ableitung $f = g'$ findet. Zur praktischen Berechnung dieser Nullstellen benutzt man Iterationsverfahren, welche in einem Spezialfall in S.2.1.21 verwendet wurden.

3.3 Integration

Das Ziel bei der Integration ist ein sinnvolle Definition des Flächenbegriffs, wenn eine Fläche durch eine "krumme" Linie begrenzt wird. Dazu approximiert man die Fläche beliebig genau durch einfache Objekte, nämlich Rechtecke, und zeigt dann, dass dies zu einem Flächenbegriff mit guten Eigenschaften führt.



Definition 3.3.1 *Zu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, heißt eine endliche Menge $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [a, b]$ eine* Unterteilung *bzw.* Zerlegung von $[a, b]$*, wenn gilt*

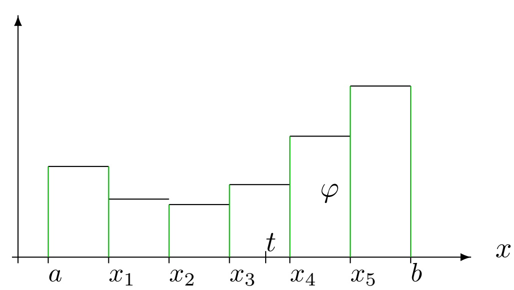
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung Z von $[a, b]$ und Werte $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt so, dass*

$$\varphi(x) = c_k \, \forall x \in (x_{k-1}, x_k), \; k = 1, \ldots, n.$$

φ ist also konstant auf den offenen Teilintervallen, die Werte $\varphi(x_k)$ können beliebig definiert werden. Die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$ heißt $\mathcal{T}[a, b]$.

Die in der Definition von $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$ auftretende Zerlegung Z heißt eine Zerlegung bzgl. φ. Jede Zerlegung $Z^* \supseteq Z$ (z.B. $Z^* = Z \cup \{t\}$ im Bild) ist ebenfalls eine Zerlegung bzgl. φ. Zu einer zweiten Zerlegung $Z' = \{t_0, \ldots, t_m\}$ von $[a, b]$ wird die Vereinigung $Z' \cup Z$ so verstanden, dass gemeinsame Punkte nur einmal verwendet werden. Dann ist auch $Z' \cup Z$ Zerlegung bzgl. φ.



Der Integralwert einer Treppenfunktion lässt sich leicht durch die Fläche der (grünen) Säulen definieren. Für negative Funktionswerte $c_k < 0$ (Säulen "nach unten") zählt die Fläche negativ.

Definition 3.3.2 *Für die Funktion $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$ wird mit den Bezeichnungen aus Defin.3.3.1 das* Integral *definiert durch*

$$\int_a^b \varphi(x) \, dx := \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}).$$

Man überlegt sich leicht, dass diese Definition insofern sinnvoll ist, als der Wert nicht von der gewählten Zerlegung abhängt. Denn zu zwei Zerlegungen Z, Z' bzgl. φ ist auch $Z^* = Z \cup Z'$ eine solche und man rechnet direkt nach, dass man auf allen drei Zerlegungen den gleichen Integralwert bekommt. Für das Treppenintegral gelten einfache Rechenregeln. Den Vergleich von Funktionen $\varphi \leq \psi$ definiert man punktweise, $\varphi(x) \leq \psi(x) \forall x \in [a, b]$.

Satz 3.3.3 *Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\varphi + \psi$, $\lambda\varphi$, $|\varphi| \in \mathcal{T}[a,b]$ und es gilt*

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda\varphi(x)\,dx &= \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx, \\
\int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))\,dx &= \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx, \\
\varphi \le \psi &\Rightarrow \int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx, \\
\Big|\int_a^b \varphi(x)\,dx\Big| &\le \int_a^b |\varphi(x)|\,dx \le (b-a)\|\varphi\|_{[a,b]}.
\end{aligned}$$

Beweis a) ist trivial, ansonsten betrachtet man zur Zerlegung Z bzgl. φ und Z' bzgl. ψ wieder die Vereinigung $Z^* = Z \cup Z' = \{x_0, \dots, x_m\}$, die eine Zerlegung für beide Funktionen ist. Die Funktionswerte von φ, ψ dort seien c_k, d_k. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))\,dx &= \sum_{k=1}^m (c_k + d_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^m c_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^m d_k(x_k - x_{k-1}) \\
&= \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx
\end{aligned}$$

und für $\varphi \le \psi$, also $c_k \le d_k$, auch

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^m c_k \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\ge 0} \le \sum_{k=1}^m d_k(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Die Betragsabschätzung folgt aus der Dreieckungleichung. ∎

Bemerkung: Der Beweis nutzte die Tatsache, dass $\mathcal{T}[a,b]$ ein linearer Unterraum des Vektorraums aller Funktionen auf $[a,b]$ ist, da $\lambda\varphi$, $\varphi+\psi$ ebenfalls in $\mathcal{T}[a,b]$ liegen. Die Rechenregeln des Satzes bedeuten, dass auch die Integration eine lineare Abbildung $\mathcal{I}: \mathcal{T}[a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)\,dx$ und beschränkt ist.

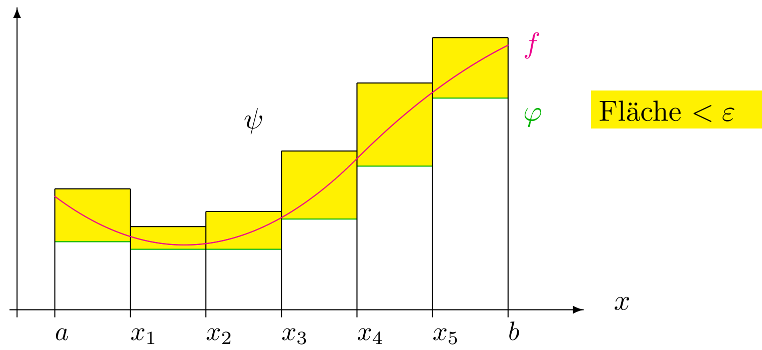
Für allgemeine Funktionen definiert man den Integralwert durch Approximation mit Folgen von Treppenfunktionen. Dabei darf aber der Grenzwert nicht von der gewählten Folge abhängen. Insbesondere sollte sich bei Approximation durch Treppenfunktionen von unten und oben der gleiche Wert ergeben. Dies ist eine echte Voraussetzung, sie ist nicht für alle Funktionen erfüllt.

Definition 3.3.4 *Eine beschränkte Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* Riemann-integrierbar *(kurz R-integrierbar), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ existieren so, dass gilt*

$$\varphi \le f \le \psi \quad \textit{und} \quad \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon.$$

Die Menge aller auf $[a,b]$ R-integrierbaren Funktionen heißt $R[a,b]$. Für $f \in R[a,b]$ definiert man den Integralwert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \inf\{\int_a^b \psi(x)\,dx : \psi \in \mathcal{T}[a,b],\, \psi \ge f\}.$$



Den Wert aus der Definition ist das sog. *Oberintegral*. Bei R-integrierbaren Funktionen ist diese Definition robust, denn das *Unterintegral* bei Approximation von unten hat den selben Wert.

Satz 3.3.5 *Für $f \in R[a,b]$ gilt auch*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{\int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \in \mathcal{T}[a,b],\ \varphi \le f\}.$$

Beweis Sei I das Infimum aus Def.3.3.4. Wegen $f \in R[a,b]$ existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Funktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$, $\varphi \le f \le \psi$ mit $\int_a^b \psi(x)\,dx \ge I$ und

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx > \int_a^b \psi(x)\,dx - \varepsilon \ge I - \varepsilon.$$

Also ist I auch Supremum der Unterintegrale. ■

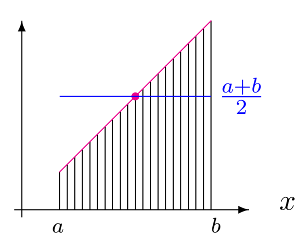
Beispiel 3.3.6 a) Die identische Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist R-integrierbar. Denn mit einer gleichförmigen Zerlegung $Z = \{x_k : k = 0, \dots, n\}$, $x_k = a + (b-a)k/n$ bekommt man einschließende Treppenfunktionen $\varphi_n \le f \le \psi_n$ mit

$$\left.\begin{array}{r} \varphi_n(x) := x_{k-1} \\ \psi_n(x) := x_k \end{array}\right\} \text{ für } x \in (x_{k-1}, x_k),\ 1 \le k \le n,$$

da f monoton wächst. Für Unter- und Oberintegral erhält man daher

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx &= \sum_{k=1}^n \Big(a + (b-a)\frac{k-1}{n}\Big)\frac{b-a}{n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^n (k-1) \\ &= ab - a^2 + \frac{(b-a)^2(n-1)}{2n} = \frac{1}{2}(b^2-a^2) - \frac{(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_n(x)\,dx &= \sum_{k=1}^n \Big(a + (b-a)\frac{k}{n}\Big)\frac{b-a}{n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^n k \\ &= ab - a^2 + \frac{(b-a)^2(n+1)}{2n} = \frac{1}{2}(b^2-a^2) + \frac{(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$



Daher gilt $\int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx = \frac{(b-a)^2}{n} \to 0\,(n \to \infty)$, also ist $f \in R[a,b]$ und der Integralwert ist die Trapezfläche

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2) = (b-a)\frac{a+b}{2}.$$

b) Die Dirichlet-Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x):=\begin{cases}1 & \text{für } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{für } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

ist nicht R-integrierbar. Denn für $\varphi,\psi\in\mathcal{T}[0,1]$, $\varphi\le f\le\psi$ gilt wegen der gleichmäßigen Verteilung der reellen und rationalen Zahlen auf jedem Teilintervall $\varphi\le 0$, $\psi\ge 1$. Also ist auch $\int_0^1(\psi(x)-\varphi(x))\,dx\ge 1$. Dies widerspricht der Definition für jedes $\varepsilon\le 1$.

Auch das Riemann-Integral ist eine lineare, beschränkte Abbildung $R[a,b]\to\mathbb{R}$:

Satz 3.3.7 *Seien $f,g\in R[a,b]$ und $\lambda\in\mathbb{R}$. Dann sind auch $f+g$, λf, $|f|\in R[a,b]$ und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_a^b\lambda f(x)\,dx &= \lambda\int_a^b f(x)\,dx,\\ \int_a^b(f(x)+g(x))\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx,\\ f\le g &\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx,\\ \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &\le \int_a^b|f(x)|\,dx\le(b-a)\|f\|_{[a,b]}.\end{aligned}$$

Beweis Gezeigt wird nur der aufwändigste Fall $f+g$: Nach Def.3.3.4 existieren zu $\varepsilon>0$ Funktionen $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2\in\mathcal{T}[a,b]$ mit

$$\begin{aligned}\varphi_1\le f\le\psi_1,\quad \textstyle\int_a^b(\psi_1(x)-\varphi_1(x))\,dx<\frac{\varepsilon}{2},\\ \varphi_2\le g\le\psi_2,\quad \textstyle\int_a^b(\psi_2(x)-\varphi_2(x))\,dx<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Daher gilt $\varphi_1+\varphi_2\le f+g\le\psi_1+\psi_2$ und

$$\begin{aligned}&\int_a^b(\psi_1(x)+\psi_2(x))\,dx-\int_a^b(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))dx\\ &=\int_a^b(\psi_1(x)-\varphi_1(x))\,dx+\int_a^b(\psi_2(x)-\varphi_2(x))\,dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

also $f+g\in R[a,b]$. Eine ähnliche Ungleichungskette zeigt anlog, dass sich Oberintegral $\int_a^b(\psi_1(x)+\psi_2(x))dx$ und Unterintegral $\int_a^b(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))dx$ um weniger als ε unterscheiden. ■

Da stetige Funktionen auf dem kompakten Interval $[a,b]$ nach Satz 3.1.17 sogar gleichmäßig stetig sind, sind sie auch R-integrierbar, $C[a,b]\subseteq R[a,b]$.

Satz 3.3.8 *Auf $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ stetige Funktionen sind R-integrierbar.*

Beweis Sei $f\in C[a,b]$ und $\varepsilon>0$. Nach Satz 3.1.17 existiert zu $\varepsilon':=\varepsilon/(4(b-a))$ eine Treppenfunktion g mit

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon'\ \Rightarrow\ \varphi:=g-\varepsilon'\le f\le\psi:=g+\varepsilon'.$$

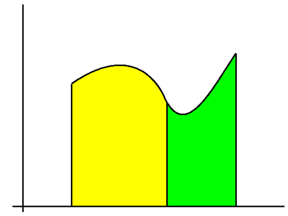
Dabei sind natürlich auch $\varphi,\psi\in\mathcal{T}[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b(\psi(x)-\varphi(x))\,dx=2\varepsilon'\int_a^b dx=2\varepsilon'(b-a)=\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon.\quad ■$$

Aber auch viele unstetige Funktionen sind R-integrierbar, etwa monotone. Das Integral ist auch additiv in Bezug auf Teilintervalle.

Satz 3.3.9 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $a < \xi < b$. Dann gilt*

$$f \in R[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad \Big\{ f \in R[a,\xi] \text{ und } f \in R[\xi,b] \Big\}.$$



Für $f \in R[a,b]$ ist dann auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\xi f(x)\,dx + \int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Beweis -Prinzip: Zerlegungen der Teilintervalle $[a,\xi]$, $[\xi,b]$ können zu einer Zerlegung des Gesamtintervalls $[a,b]$ vereinigt werden und umgekehrt. ■

Um den Satz 3.3.9 mit beliebigen $a,\xi,b \in \mathbb{R}$ anwenden zu können, definiert man für

$$a \le b: \quad \int_a^a f(x)\,dx := 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.3.1}$$

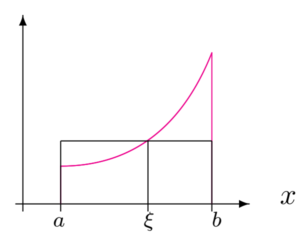
Beim Trapez erhielt man in Beisp.3.3.6 die Fläche als Produkt von Intervalllänge und der mittleren Höhe $(a+b)/2$. Eine entsprechende Aussage gilt allgemeiner.

Satz 3.3.10 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Es seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \ge 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Speziell $g \equiv 1$: Das Integral hat den gleichen Wert wie die Fläche des Rechtecks mit Höhe $f(\xi)$ in einem geeigneten $\xi \in [a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$



Beweis Nach S.3.1.13 werden die Extrema $m := \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und $M := \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ angenommen.

Wegen $g \ge 0$ und S.3.3.7 gilt daher

$$mg \le fg \le Mg \;\Rightarrow\; m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Somit gilt $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx$ für ein $\mu \in [m,M]$.Wegen der Stetigkeit wird dieser Zwischenwert nach S.3.1.11 auch angenommen, $\exists\,\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$. ■

Der Hauptsatz

Man kann die Integration als Umkehrung der Differentiation ansehen, wenn man die Integralfläche als Funktion der oberen Integrationsgrenze betrachtet. Damit muss man Integrale nicht mehr wie in Beispiel 3.3.6 mühsam über Zerlegungen berechnen, sondern kann dies durch Umkehrung von Ableitungsregeln tun.

Satz 3.3.11 *Die zu $f \in R[a,b]$ definierte Funktion*

$$F:\,[a,b]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt = F(x)\qquad \textit{ist stetig.}$$

Beweis Insbesondere ist f auf $[a,b]$ beschränkt $|f|\le M$. Für $x, x+h\in[a,b]$ gilt

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Durch Betragsabschätzung (S.3.3.7) folgt, dass für $|h|<\delta:=\varepsilon/M$ gilt

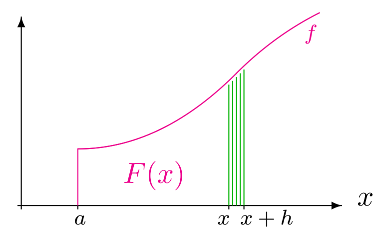
$$|F(x+h)-F(x)| = |\int_x^{x+h} f(t)\,dt| \le \int_x^{x+h} |f(t)|dt \le M|x+h-x| = M|h| < \varepsilon.$$

Somit ist F stetig. ■

Wenn der Integrand f stetig ist, ist die Funktion F sogar differenzierbar ("Integration glättet"). D sei im Folgenden ein beliebiges Intervall, das mehr als einen Punkt enthält.

Satz 3.3.12 (Hauptsatz der Differential-Integral-Rechnung)
Es sei $a\in D$ und $f:\,D\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $x\mapsto F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar und ihre Ableitung ist $F'=f$.

Beweis Für $x, x+h\in D$ gilt nach (3.3.2) und dem Mittelwertsatz 3.3.10 für den Zuwachs (schraffiert)



$$\begin{aligned} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \\ &= f(\xi_h)\frac{x+h-x}{h} = f(\xi_h), \end{aligned}$$

mit $\xi_h\in[x,x+h]$ für $h>0$ bzw. $\xi_h\in[x+h,h]$.

Für $h\to 0$ gilt daher auch $\xi_h\to 0$ und wegen der Stetigkeit von f gilt die Behauptung

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x).\quad ■$$

Für die Beziehung zwischen f und F verwendet man folgende Bezeichnung.

Definition 3.3.13 *Sind Funktionen $f, F\,:\,D\to\mathbb{R}$ gegeben und ist F differenzierbar, sowie $F'=f$, dann heißt F* Stammfunktion *von f.*

Bemerkung: Stammfunktionen sind *nicht eindeutig* definiert, zu $a\in D$ ist nach S.3.3.12

$$F:\ x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion, aber auch $G(x)=\int_b^x f(t)\,dt$ mit $b\in D$. Beide unterscheiden sich aber nur durch eine *Integrationskonstante*

$$G(x)-F(x) = \int_b^x f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_b^a f(t)\,dt =: C,$$

welche bei der Ableitung verloren geht: $f(x) = G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. Aus Bequemlichkeit lässt man bei der Stammfunktion oft die Grenzen weg und schreibt sie salopp als *unbestimmtes Integral*

$$F(x) = \int f(x)\,dx,$$

muss dabei aber an die "vergessene" Integrationskonstante denken.

Die Stammfunktion erlaubt eine einfache Berechnung des bestimmten Integrals, da bei Differenzbildung die Integrationskonstante wegfällt:

Satz 3.3.14 *Sei F Stammfunktion der stetigen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Dann gilt für $a, b \in D$:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b.$$

Beweis Auch $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist Stammfunktion mit $G' = f$, also ist $G' - F' = 0$ und daher $G(x) - F(x) = C$ nach S.3.2.15. Damit folgt

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt. \quad \blacksquare$$

Beispiel 3.3.15 Da $\sin' = \cos$ ist, gilt

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Elementare Stammfunktionen auf einem Intervall D:

$f(x) = F'(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$	D
x^a, $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\mathbb{R}\,(a \in \mathbb{N})$, $[0,\infty)\,(a > 0)$, $(0,\infty)\,(a < 0)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$
a^x, $a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a}a^x$	$\mathbb{R}$
$e^{\lambda x}$, $\lambda \neq 0$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$(k + \frac{1}{2})\pi \notin D \forall k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$k\pi \notin D \forall k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1})$	$\mathbb{R}$ bei $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(1,\infty)$ bei $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

Als elementare Funktionen bezeichnet man rationale Funktionen, exp, cos sin und deren Umkehrfunktionen, sowie endliche Verknüpfungen davon. Die Differentiation erzeugt aus elementaren Funktion wieder eine elementare. Dies gilt aber nicht mehr bei der Integration.

Integrationsregeln

Es gibt einfache Funktionen, die keine elementare Stammfunktion besitzen, etwa $\int e^{-x^2}\,dx$. Es gibt auch keine feste (deterministische) Methode zur Integration, selbst wenn eine elementare Stammfunktion existiert. Es erfordert Kunstfertigkeit, mit den folgenden Regeln eine Stammfunktion zu konstruieren.

Satz 3.3.16 (Partielle Integration) *Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig, g stetig differenzierbar und $F = \int f(x)\,dx$, dann gilt für $a, b \in D$:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b F'(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Beweis Nach der Produktregel S.3.2.4 gilt

$$(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$$

und $(Fg)'$ ist stetig. Nach S.3.3.14 folgt die Behauptung

$$F(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b \Big(F'(x)g(x) + F(x)g'(x)\Big)dx. \quad \blacksquare$$

Partielle Integration (Produktregel) ist auch anwendbar, wenn scheinbar kein Produkt vorliegt.

Beispiel 3.3.17 Beim Integral $\int \ln x\,dx$ setzt man $g(x) := \ln x$ und $f(x) := 1$! Dann ist $F(x) = \int 1\,dx = x$ und für $x > 0$ folgt

$$\int_1^x 1 \cdot \ln t\,dt = t\ln t\Big|_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t}\,dt = (t\ln t - t)_1^x = x\ln x - x + 1.$$

Zur Probe prüft man $(x\ln x - x + 1)' = \ln x + \frac{x}{x} - 1 = \ln x$.

Die Umkehrung der Kettenregel ist die folgende, wichtige Regel.

Satz 3.3.18 (Substitutionsregel) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sowie $\varphi([a, b]) \subseteq D$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Beweis Es sei $F : D \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, also $F' = f$. Dann gilt für die Komposition $F \circ \varphi$ nach der Kettenregel S.3.2.6

$$\Big(F \circ \varphi\Big)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \;\Rightarrow$$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (F \circ \varphi)(t)\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Bei der Substitution ist wieder die Schreibweise mit Differentialen hilfreich, mit

$$x = \varphi(t) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \text{ oder } dx = \varphi'(t)\,dt \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{ccc} \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} & f(x) & dx \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \int_a^b & f(\varphi(t)) & \varphi'(t)dt \end{array} \right.$$

Viele Integrale können nur durch geeignete Substitutionen berechnet werden.

Beispiel 3.3.19 Die hier jeweils zur Substitution verwendete Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist/sei stetig diffbar:

a) $\int\limits_a^b f(t+c)\,dt = \int\limits_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx,$ $\qquad x = \varphi(t) = t+c,\ \varphi' = 1.$

$\int\limits_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int\limits_{ac}^{bc} f(x)\,dx,$ $\qquad x = \varphi(t) = ct,\ \varphi' = c,\ dx = c\,dt.$

b) $\int\limits_a^b tf(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2} f(x)\,dx,$ $\qquad x = \varphi(t) = t^2,\ \varphi' = 2t,\ dx = 2t\,dt.$

c) $\int\limits_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \ln\left|\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\right|,$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x},\ \varphi' \neq 0,\ dx = \varphi'(t)\,dt.$

d) $\int\limits_a^b \tan t\,dt = \int_a^b \frac{\sin t}{\cos t}dt = -\ln\cos t\Big|_a^b,$ $\qquad x = \varphi(t) = \cos t,\ [a,b] \subseteq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$

e) $2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi$ (=Kreisfläche) $\qquad x = \varphi(t) = \cos t,\ dx = -\sin t\,dt,$

Es gilt $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t \geq 0$ in $[0,\pi]$ $\Rightarrow$

$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_{\pi}^{0} \sin t(-\sin t)\,dt = \int\limits_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 2t)dt = \frac{\pi}{2}.$

Rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \mathrm{Grad}\, p < \mathrm{Grad}\, q.$$

Die Grad-Einschränkung ist problemlos möglich, da für $\mathrm{Grad}\, p \geq \mathrm{Grad}\, q$ ein echtes Polynom r mit $\mathrm{Grad}\, r < \mathrm{Grad}\, q$ abgespalten werden kann mit

$$p = \tilde{p}\cdot q + r \ \Rightarrow \quad f = \frac{p}{q} = \frac{r}{q} + \tilde{p}.$$

Zur Integration muss man rationale Funktionen in einfache Brüche zerlegen. Dabei schreibt man den Nenner als Produkt von Linearfaktoren mit verschiedenen Nullstellen x_k der Vielfachheit m_k. Diese Darstellung existiert nach dem Fundamentalsatz der Algebra.

Satz 3.3.20 (Partialbruchzerlegung) *Es seien p, q Polynome mit $\mathrm{Grad}\, p < n := \mathrm{Grad}\, q$ und es gelte*

$$q(x) = (x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_k)^{m_k},$$

wobei die Nullstellen $x_j \in \mathbb{C}$ von q paarweise verschieden seien und $m_j \in \mathbb{N}$ mit $m_1 + \ldots + m_k = n$. Dann existieren Koeffizienten $c_{jl} \in \mathbb{C}$ so, dass für $x \neq x_j$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} \quad &= \quad \frac{c_{11}}{x-x_1} + \frac{c_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1,m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} \\ &\quad + \frac{c_{21}}{x-x_2} + \frac{c_{22}}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{c_{2,m_2}}{(x-x_2)^{m_2}} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{c_{k1}}{x-x_k} + \frac{c_{k2}}{(x-x_k)^2} + \ldots + \frac{c_{k,m_k}}{(x-x_k)^{m_k}}.\end{aligned}$$

Beweis Induktion nach n, für $n=1$ ist p konstant, also $f(x)=\frac{c}{b(x-x_1)}$.

Für Grad $q=n$ sei ξ eine Nullstelle von q mit $q(x)=(x-\xi)^m g(x)$ und $g(\xi)\neq 0$, Grad $g=n-m$. Es wird die Funktion $h(x):=p(x)-g(x)p(\xi)/g(\xi)$ betrachtet. Für sie gilt offensichtlich $h(\xi)=0$ und durch Polynomdivision kann daher die Darstellung $h(x)=\tilde h(x)(x-\xi)$ bestimmt werden mit Grad$\tilde h<\max\{Grad\,p, Grad\,g\}\leq n-1$. Es folgt

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{h(x)+g(x)p(\xi)/g(\xi)}{(x-\xi)^m g(x)}=\frac{p(\xi)/g(\xi)}{(x-\xi)^m}+\frac{\tilde h(x)}{(x-\xi)^{m-1}g(x)}.$$

Der Nenner im zweiten Term besitzt nur Grad$\leq n-1$, hier ist die Induktionsvoraussetzung einsetzbar. ■

Rationale Funktionen besitzen elementare Stammfunktionen, da für alle im Satz 3.3.20 auftretenden Terme $g(x)$ Stammfunktionen $G(x)$ existieren. Man muss auch bei einem reellen Polynom q dabei zwar komplexe Nullstellen $\xi=\alpha+\mathbf{i}\beta\notin\mathbb{R}$ $(\beta\neq 0)$ in Kauf nehmen, allerdings treten diese immer in konjugierten Paaren auf, da gilt

$$q(\xi)=q(\alpha+\mathbf{i}\beta)=0\ \Rightarrow\ 0=\overline{q(\xi)}=q(\bar\xi)=q(\alpha-\mathbf{i}\beta).$$

Für die einzelnen Summanden sind 3 Fälle zu unterscheiden

$$\begin{array}{llll}
g(x)=\dfrac{1}{(x-\xi)^m}, & m>1 & \Rightarrow & G(x)=\dfrac{-1}{(m-1)(x-\xi)^{m-1}},\\
g(x)=\dfrac{1}{x-\xi}, & \xi\in\mathbb{R} & \Rightarrow & G(x)=\ln|x-\xi|,\\
g(x)=\dfrac{1}{x-(\alpha+\mathbf{i}\beta)}, & \beta\neq 0, & & (\xi=\alpha+\mathbf{i}\beta\notin\mathbb{R})\\
\quad\;=\dfrac{x-\alpha+\mathbf{i}\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, & & \Rightarrow & G(x)=\frac12\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)+\mathbf{i}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta}.
\end{array}$$

Beispiel 3.3.21 $p(x)=x^5+1$, $q(x)=x^4-x^3-x+1$. Da Grad $p=5>$Grad $q=4$ ist, kann man einen Polynomanteil durch Division abspalten:

$$\begin{array}{llll}
(x^5 & & +1) & :(x^4-x^3-x+1)=x+1=\tilde p(x)\\
x^5 & -x^4-x^2+x & & \\
\hline
 & x^4+x^2-x & +1 & \\
 & x^4-x^3-x & +1 & \\
\hline
 & x^3+x^2 & =:r(x) &
\end{array}$$

Die Nullstellen von q sind $x_1=1$ (mit $m_1=2$) und $x_{2/3}=\frac12(-1\pm\mathbf{i}\sqrt3)$, d.h., $x_3=\bar x_2$, also ist

$$q(x)=(x-1)^2(x^2+x+1)=(x-1)^2(x-x_2)(x-\bar x_2)$$

$$\Rightarrow\qquad\frac{r(x)}{q(x)}=\frac{c_{11}}{x-1}+\frac{c_{12}}{(x-1)^2}+\frac{c_{21}}{x-x_2}+\frac{c_{31}}{x-x_3}$$

Die Koeffizienten c_{jl} bekommt man durch Multiplikation mit den einzelnen Nennern und der Auswertung in x_j, etwa

$$h(x):=(x-1)^2\frac{r(x)}{q(x)}=\frac{x^3+x^2}{x^2+x+1}=c_{11}(x-1)+c_{12}+(x-1)^2\Big(\dots\Big).$$

$\Rightarrow h(1) = c_{12} = \frac{2}{3}$, $h'(1) = c_{11} = 1$, analog $c_{31} = \overline{c_{21}} = \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{9}$. Insgesamt folgt

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \tilde{p}(x) + \frac{r(x)}{q(x)} = x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3(x-1)^2} - \frac{1}{9}\frac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{x + \frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{9}\frac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{x + \frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Also besitzt f die Stammfunktion

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| - \frac{2}{3(x-1)} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2})\Big),\; x \neq 1.$$

Uneigentliche Integrale

Auch "unendlich ausgedehnte" Flächen können einen endlichen Grenzwert besitzen. Bei der Integration kann dieser Fall bei unbeschränkten Integranden oder bei unendlich langen Intervallen auftreten. Auf diese *uneigentlichen* Fälle wird die Integration verallgemeinert.

Definition 3.3.22 *Es sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ (dabei ist $b = \infty$ zugelassen) und $f \in R[a,\beta]\,\forall a < \beta < b$. Wenn der (endliche!) Grenzwert*

$$\lim_{\substack{\beta<b\\ \beta\to b}} \int_a^\beta f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

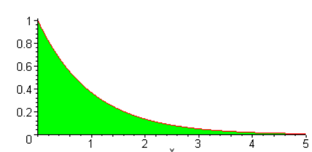
existiert, heißt $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent. Wenn die Grenze a oder beide kritisch sind und die Grenzwerte existieren, definiert man analog

$$\lim_{\substack{\alpha>a\\ \alpha\to a}} \int_\alpha^b f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\substack{\alpha>a\\ \alpha\to a}} \int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\substack{\beta<b\\ \beta\to b}} \int_c^\beta f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx,\;\; a < \alpha < c < \beta < b.$$

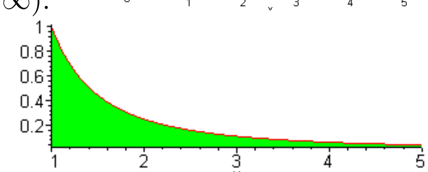
Die Definition im letzten Fall hängt natürlich nicht von der Wahl von c ab. Für $f \in R[a,b]$ reduziert sich die Definition auf das normale Integral. Andernfalls heißt f *uneigentlich* R-integrierbar.

Beispiel 3.3.23 a) $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$.



Denn mit $\beta > 0$ ist $\int_0^\beta e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\beta = 1 - e^{-\beta} \to 1\,(\beta \to \infty)$.

b) Genau für $s > 1$ konvergiert $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$.

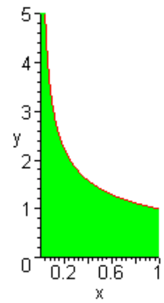


Denn für $\beta > 1$ und $s > 1$ gilt

$$\int_1^\beta \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\Big[\frac{1}{x^{s-1}}\Big]_1^\beta = \frac{1}{1-s}\big(\frac{1}{\beta^{s-1}} - 1\big) \to \frac{1}{s-1}\,(\beta \to \infty).$$

Dagegen ist für $s = 1$: $\int_1^\beta \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^\beta = \ln\beta \to \infty\,(\beta \to \infty)$.

c) Genau für $s < 1$ konvergiert $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}$.



Für $s < 1$ und $0 < \alpha < 1$ gilt nämlich

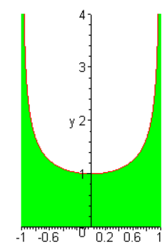
$$\int_\alpha^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{x^{s-1}}\right]_\alpha^1 = \frac{1}{1-s}(1-\alpha^{s-1}) \to \frac{1}{1-s}\ (\alpha \to 0).$$

Für $s = 1$ dagegen ist $\int_\alpha^1 \frac{dx}{x}\, dx = \ln|x|\Big|_\alpha^1 = -\ln\alpha \to \infty\,(\alpha \to 0)$.

d) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^s}$ divergiert für jedes $s \in \mathbb{R}$.

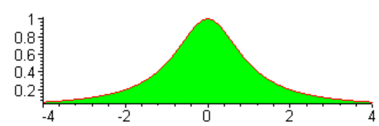
Beispiel 3.3.24 Weitere konvergente uneigentliche Integrale:

a) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi$. Mit $\varepsilon > 0$ ist



$$\begin{aligned}\int_{-1/\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_1^{1/\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\arcsin(-1+\varepsilon) + \arcsin(1-\varepsilon)\\ &\to -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi\ (\varepsilon \to 0).\end{aligned}$$

b) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}\, dx = \pi$. Für $\alpha \to -\infty$, $\beta \to \infty$ gilt



$$\int_\alpha^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\beta \frac{dx}{1+x^2} = \arctan\alpha + \arctan\beta \to 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

Eine elegante Anwendung von uneigentlichen Integralen betrifft langsam konvergente Reihen, bei denen Wurzel- und Quotientenkriterium (S.2.2.11) wegen $q = 1$ keine Entscheidung liefern.

Satz 3.3.25 (Integralkriterium für Reihen) *Es sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend und $f \geq 0$. Dann gilt*

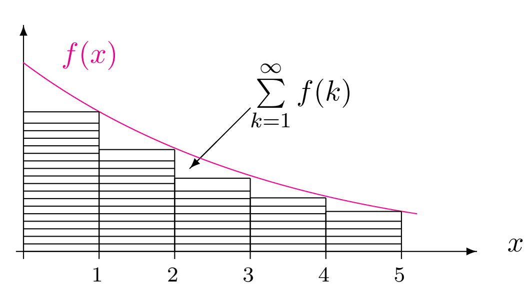
$$\sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ konvergent} \iff \int_1^\infty f(x)\, dx \text{ konvergent.}$$

Im Konvergenzfall gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ die Restgliedabschätzung

$$\int_{m+1}^\infty f(x)\, dx \leq \sum_{k=m+1}^\infty f(k) \leq \int_m^\infty f(x)\, dx.$$

Beweis Da f fällt, erhält man Schranken für Integrale über Intervalle der Länge eins durch den Funktionswert am linken (obere Schranke) bzw. am rechten Rand (untere Schranke)

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)\, dx \leq f(k-1), \quad k > 1.$$



Durch Summation bekommt man für $m < n$

$$\int_{m+1}^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=m+1}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n} f(x)\,dx.$$

Wenn das Integral also konvergiert, ist es eine konvergente Majorante für die Reihe,

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \le \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$

Wenn aber die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert, ist $s := \sup\{\int_1^\beta f(x)\,dx : \beta > 1\}$ endlich, zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $b > 1$ mit $\int_1^\beta f(x)\,dx > s - \varepsilon\,\forall \beta > b$. Daher ist $\int_1^\infty f(x)\,dx = s$. ■

Aus Beisp.3.3.23 folgt daher (x^{-s} fällt für $s > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert} \quad \iff \quad s > 1.$$

Wenn im Integranden eines (uneigentlichen) Integrals weitere Parameter auftreten, ist auch der Integralwert noch eine Funktion dieser Parameter. Ein wichtiges Beispiel ist

Definition 3.3.26 (Gamma-Funktion)

$$\Gamma: \ (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

Die Funktion ist wohldefiniert, da das Integral für $x > 0$ sowohl bei $t = 0$ als auch $t = \infty$ konvergiert. Es sei $0 < T$:

a) $e^{-t} \le 1,\ t \ge 0 \ \Rightarrow\ \int_0^T t^{x-1} e^{-t}\,dt \le \int_0^T t^{x-1}\,dt$ konvergiert nach Beisp.3.3.23.

b) Wegen $\lim_{t\to\infty} t^{x+1} e^{-t} = 0$ existiert $T > 0$ so, dass $t^{x+1} e^{-t} \le 1\,\forall t \ge T \ \Rightarrow$ für $t \ge T$ ist

$$t^{x-1} e^{-t} \le \frac{1}{t^2} \ \Rightarrow\ \int_{t_0}^{t_1} t^{x-1} e^{-t}\,dt \le \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_1} \le \frac{1}{T} \quad \text{für } T \le t_0 < t_1.$$

Für $T > 1/\varepsilon$ kann der Integralabschnitt daher kleiner werden als jedes $\varepsilon > 0$: $\int_T^\infty$ konvergiert.

Die Gamma-Funktion hat eine große Bedeutung, da sie die *Fakultät* $n!$ interpoliert.

Satz 3.3.27

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis a) Partielle Integration mit $0 < \varepsilon < \beta$ zeigt

$$\int_\varepsilon^\beta t^x e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^\beta + x \int_\varepsilon^\beta t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

Der Grenzübergang $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^x = 0$ und $\lim_{\beta\to\infty} \beta^x e^{-\beta} = 0$ (S.3.1.23) zeigt die Behauptung.

b) Für $n = 1$ ist nach Beisp.3.3.23a $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$ und aus a) folgt induktiv $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$. ■

Das schnelle Wachstum der Fakultät erkennt man auch daran, dass die Summanden $x^n/n!$ der Exponentialfunktion eine Nullfolge bilden. Präziser ist folgende Aussage, welche bei Aufwandsabschätzungen von Algorithmen hilfreich ist.

Satz 3.3.28 (Stirling-Formel) *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$n! = c_n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \text{mit } c_n \in [1, \exp \frac{1}{12n}].$$

Der relative Fehler der Formel (mit $c_n = 1$) wird schnell klein mit wachsendem n, er liegt unter 1% für $n \geq 10$ und unter 10^{-3} für $n \geq 100$.

3.4 Reihen von Funktionen

Die Exponentialfunktion und damit die trigonometrischen Funktionen wurden als Potenzreihen eingeführt. Stetigkeit und Differenzierbarkeit wurden dann aus speziellen Eigenschaften dieser Funktionen gefolgert. In diesem Abschnitt wird eine Methode hergeleitet, mit der man Reihenentwicklungen beliebiger, glatter Funktionen berechnen kann, welche man auch differenzieren und integrieren darf. Voraussetzung dafür ist aber ein belastbarer Konvergenzbegriff für Reihen von Funktionenfolgen $f_n(x)$ (z.B. Polynomen $f_n(x) = x^n$).

Gleichmäßige Konvergenz

Definition 3.4.1 *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n : D \to \mathbb{C}$.*

a) Die Folge (f_n) konvergiert punktweise *gegen f, wenn*

$$\forall x \in D\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}_0 : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\, \forall n \geq N(x, \varepsilon).$$

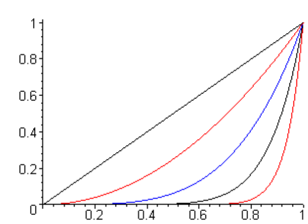
b) Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig *gegen f, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0 : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\, \forall n \geq N(\varepsilon)\, \forall x \in D.$$

In der Reihenfolge der Quantoren und der Schreibweise von $N(\ldots)$ ist der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Begriffen zu erkennen. Bei punktweiser Konvergenz kann das N außer von ε auch von der betrachteten Stelle x abhängen. Bei gleichmäßiger Konvergenz gilt $N(\varepsilon)$ einheitlich für alle $x \in D$, dies ist daher der strengere Begriff. Unterschiede zwischen den Begriffen erkennt man an folgendem Beispiel.

Beispiel 3.4.2 Für $n \in \mathbb{N}$ und $D = [0, 1]$ bilden die Monome

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$$

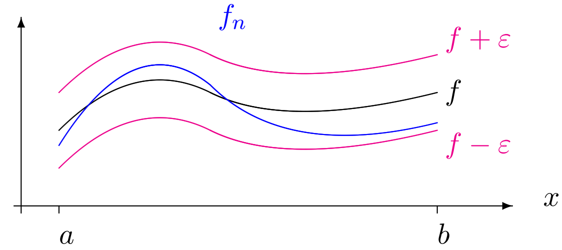


eine stetige Funktionenfolge. Nach S.1.4.7 gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{array} \right\} =: f(x).$$

Die Konvergenz gegen f gilt nur punktweise, für $x = 1$ ist $f_n(1) = f(1) \forall n \in \mathbb{N}$ und für $x < 1$ und $\varepsilon > 0$ ist $N := 1 + \lfloor \log \varepsilon / \log x \rfloor$ zu wählen, das wegen $\log 1 = 0$ bei Annäherung an die Stelle $x = 1$ immer größer wird. Es liegt also keine glm Konvergenz vor. Insbesondere ist die Grenzfunktion unstetig.

Nur bei der schärferen Anforderung gleichmäßiger Konvergenz überträgt sich z.B. die Stetigkeit von den f_n auf die Grenzfunktion. Denn glm Konvergenz bedeutet insbesondere, dass sich alle Funktionen f_n, $n \geq N(\varepsilon)$ in einem "ε-Schlauch" um f bewegen. Im Beispiel b) ragt für $\varepsilon < 1$ jede Funktion f_n dagegen irgendwo aus dem ε-Schlauch um die Nullfunktion heraus.



Satz 3.4.3 *Die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ seien stetig, die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$. Dann ist auch f stetig.*

Beweis Man führt die Stetigkeit von f auf die einer Funktion f_N mit genügend großem Index zurück. Dazu sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gilt

$$\begin{array}{lll} \text{glm. Konvergenz} & \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: & |f_N(y) - f(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \forall y \in D, \\ f_N \text{ stetig in } x & \Rightarrow \exists \delta > 0: & |f_N(x) - f_N(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \forall y \in D,\, |x-y| < \delta. \end{array}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von f, denn für alle $y \in D$ mit $|y - x| < \delta$ gilt

$$\begin{array}{rcccl} |f(x) - f(y)| \leq & |f(x) - f_N(x)| & +|f_N(x) - f_N(y)| & +|f_N(y) - f(y)| & \\ < & \frac{1}{3}\varepsilon & +\frac{1}{3}\varepsilon & +\frac{1}{3}\varepsilon & = \varepsilon. \quad \blacksquare \end{array}$$

Dieser Satz ist ein erstes Ergebnis zur *Vertauschung von Limites*, nur bei glm Konvergenz darf der folgende Schritt gemacht werden:

$$\lim_{y\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \lim_{y\to x} f(y) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{y\to x} f_n(y)$$

Die gleichmäßige Schranke $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in D$ schreibt man einfacher mit folgender Supremumnorm.

Definition 3.4.4 *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $D \neq \emptyset$ und $f : D \to \mathbb{K}$ beschränkt. Dann wird die* Supremumnorm *von f definiert durch*

$$\|f\|_D := \sup\{|f(x)| : x \in D\}.$$

Die Supremumnorm erfüllt tatsächlich alle Normeigenschaften in dem Vektorraum der auf D beschränkten Funktionen. Damit bedeutet $\|f - f_n\|_D < \varepsilon$, dass f_n sich in dem "ε-Schlauch" um f befindet (vgl. Bild für den reellen Fall) und die glm Konvergenz entspricht der üblichen Konvergenz, wenn man den Abstand zwischen den Objekten f_n und f mit der $\|.\|_D$-Norm misst:

$$f_n \to f\ (n \to \infty) \text{ glm in } D \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_n - f\|_D \to 0\ (n \to \infty). \tag{3.4.1}$$

Auch daher liegt im Beisp.3.4.2 keine glm Konvergenz vor, denn $\|f_n - f\|_{[0,1]} = 1 \forall n$.

Mit dieser Norm läßt sich das Majorantenkriterium auch auf Reihen von Funktionen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ (z.B. Potenzreihen) übertragen, denn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_D$ ist eine reelle Zahlenreihe. Die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ wird wieder auf die Konvergenz der Partialsummen $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ zurückgeführt.

Satz 3.4.5 (Weierstraßsches Majorantenkriterium)

Zu $f_k : D \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, *konvergiere die reelle Zahlenreihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_D$. *Dann konvergiert die Funktionen-Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ *absolut und gleichmäßig auf* D *(gegen eine Funktion* $F : D \to \mathbb{C}$*).*

Beweis a) Es gilt $|f_k(x)| \le \|f_k\|_D$, $x \in D$. Wegen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_D < \infty$ konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ nach dem Majorantenkriterium S.2.2.10 für jedes $x \in D$ und definiert eine Funktion

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

b) Die Konvergenz $s_n \to F\,(n \to \infty)$ ist glm, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein N mit $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_D < \varepsilon \;\forall n \ge N$. Damit gilt tatsächlich für $x \in D$

$$|s_n(x) - F(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_D < \varepsilon \,\forall n \ge N. \quad \blacksquare$$

Beispiel 3.4.6 Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx$ ist stetig. Denn mit $f_k(x) := \frac{1}{k^2} \cos kx$ ist $\|f_k\| = \frac{1}{k^2}$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_k\| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le 2 < \infty$ (Bsp.2.2.5 c). Daher konvergiert die Reihe gleichmäßig nach S.3.4.5 und wegen S.3.4.3 ist F stetig.

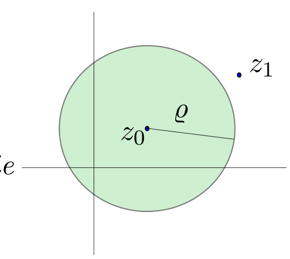
Viel wichtiger ist aber folgende Anwendung mit Monomen $f_k(z) = c_k(z - z_0)^k$.

Satz 3.4.7 *Zu einer komplexen Folge* (c_k) *und dem Entwicklungspunkt* $z_0 \in \mathbb{C}$ *konvergiere die Potenzreihe*

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

in einem Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ *mit* $z_1 \ne z_0$. *Dann konvergiert die Reihe in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe*

$$K_\varrho(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le \varrho\} \text{ mit } 0 < \varrho < |z_1 - z_0|$$



sogar absolut und gleichmäßig und ist dort eine stetige Funktion. Auch die folgende Potenzreihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf $K_\varrho(z_0)$.

$$g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}$$

Beweis a) Hier ist $f_k(z) = c_k(z - z_0)^k$. Wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z_1)$ konvergiert, ist $(f_k(z_1))_k$ Nullfolge, also insbesondere beschränkt, $|f_k(z_1)| \le M \,\forall k \in \mathbb{N}_0$. Wie in (2.2.1) folgt für $z \in D := K_\varrho(z_0)$, also $|z - z_0| \le \varrho < |z_1 - z_0|$, dass

$$\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \le \frac{\varrho}{|z_1 - z_0|} =: q < 1 \;\Rightarrow\; |f_k(z)| = |c_k(z - z_0)^k| = \underbrace{|c_k(z_1 - z_0)^k|}_{\le M} \underbrace{\left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^k}_{\le q^k} \le M q^k$$

Also ist $\|f_k\|_D = \sup\{|f_k(x)| : z \in D\} \le Mq^k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_D \le M \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = M/(1-q)$ eine konvergente Majorante für $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$. Diese Reihe konvergiert daher nach S.3.4.5 absolut und glm und wegen S.3.4.3 ist f daher stetig.

b) Die Summanden $g_k(z) := kc_k(z-z_0)^{k-1}$ bilden $g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k$ und wie in a) folgt

$$\|g_k\|_D \le kMq^{k-1} =: \alpha_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist

$$\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = \frac{(k+1)Mq^k}{kMq^{k-1}} = (1+\frac{1}{k})q \le \frac{1+q}{2} < 1$$

für genügende große $k > 2q/(1-q)$. Also konvergiert auch hier die Majorante $\sum_k \alpha_k$ und daher auch $\sum_k g_k$ abslout und glm in D. ■

Bemerkung: Der Satz lässt sich insbesondere auf jede *reelle* Reihe $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ mit $c_k, x_0 \in \mathbb{R}$ anwenden. Wenn diese in $x_0 \ne x_1 \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann auch in einer ganzen *komplexen* Kreisscheibe und dann ist $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-x_0)^k$ eine *komplexe Fortsetzung* der reellen Funktion f.

Gleichmäßige Konvergenz ist die entscheidende Voraussetzung für weitere Limesvertauschungen bei Integration und Differentiation.

Satz 3.4.8 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Beweis Nach S.3.4.3 ist f stetig, also $f \in R[a,b]$. Es folgt

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le (b-a)\|f_n - f\|_{[a,b]} \to 0\ (n\to\infty).$$ ■

Die Aussage gilt nicht bei nur punktweiser Konvergenz oder unbeschränkten Intervallen!

Für die Differentiation von Funktionenfolgen (f_n) ist glm Konvergenz der *Ableitungen* zu fordern, die glm Konvergenz von (f_n) reicht nicht aus (z.B. $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$)!

Satz 3.4.9 *Die Folge (f_n) stetig differenzierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiere punktweise gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die Folge (f_n') der Ableitungen sei gleichmäßig konvergent in $[a,b]$. Dann ist f differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad x \in [a,b].$$

Formulierung der Aussage als *Limes-Vertauschung*:

$$\lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}=\lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}.$$

Beweis Nach S.3.4.3 ist $f^*(x) := \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ stetig, der Hauptsatz 3.3.12 zeigt damit

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\Big(f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,dt\Big)\overset{S.3.4.8}{=} f(a)+\int_a^x f^*(t)\,dt.$$

Da f^* stetig ist, ist f differenzierbar und die Ableitung $f'=f^*$. ■

Die Voraussetzungen der Sätze 3.4.8 und 3.4.9 wurden für reelle Potenzreihen schon in Satz 3.4.7 verifiziert (Anwendung auf Partialsummen). Potenzreihen sind in ihrem Konvergenzintervall beliebig oft gliedweise differenzierbar und integrierbar:

Satz 3.4.10 *Sei $x_0\in\mathbb{R}$ und (c_k) eine reelle Folge. Die Potenzreihe $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ besitze den Konvergenzradius $r>0$. Dann ist f im Intervall (x_0-r, x_0+r) beliebig oft differenzierbar, und die Potenzreihen der Ableitungen*

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-x_0)^{k-1},\quad f^{(m)}(x)=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{k!}{(k-m)!}c_k(x-x_0)^{k-m},$$

$m\in\mathbb{N}$, besitzen den gleichen Konvergenzradius r.

Im Entwicklungspunkt x_0 selbst führt diese Aussage zum nächsten Thema:

$$f^{(n)}(x_0)=n!\,c_n \qquad\Longleftrightarrow\qquad c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0). \tag{3.4.2}$$

Taylor-Entwicklung

Differenzierbarkeit einer Funktion $f: D\to\mathbb{R}$ in $x_0\in D$ bedeutet nach Satz 3.2.2, dass sie sich durch eine lineare Funktion $c_0+c_1(x-x_0)$ approximieren lässt (mit $c_0=f(x_0)$, $c_1=f'(x_0)$), wobei $\lim_{x\to x_0}(f(x_0)-c_0+c_1(x-x_0))=0$ ist. Versucht man nun, f noch besser zu approximieren durch ein Polynom der Form

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^3+\ldots,$$

sieht man z.B. durch Betrachtung der zweiten Ableitung im Entwicklungspunkt x_0,

$$(f(x)-c_0-c_1(x-x_0)-c_2(x-x_0)^2+\ldots)''|_{x=x_0}=f''(x_0)-2c_2, \tag{3.4.3}$$

dass $c_2=\frac{1}{2}f''(x_0)$ zu wählen ist, vgl. (3.4.2). Allgemein gilt:

Satz 3.4.11 (Satz von Taylor)
Es sei $f: D\to\mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diffbar auf dem Intervall D und $x_0\in D$ fest gewählt. Dann

existiert für jedes $x \in D$ ein $\xi \in (x, x_0)$ bzw. $\xi \in (x_0, x)$ so, dass

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_{n+1}(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \\ r_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Die erste Formel für r_{n+1} heißt Integral-Restglied, die zweite Lagrange-Restglied.

Beweis Der Beweis folgt induktiv durch partielle Integration des Integralrestglieds:

$$\begin{aligned} n = 0: \quad f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx \quad \text{nach S.3.3.12} \\ n \to n+1: \quad r_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \\ &= -\Big[f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Big]_{t=x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x}\Big(f^{(n)}(t)\Big)'\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \\ &= f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \end{aligned}$$

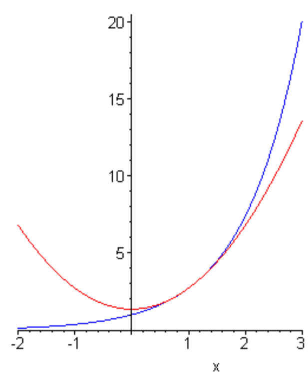
Da $g(t) := (x-t)^n \geq 0$ in $[x_0, x]$ (oBdA Fall $x_0 < x$) existiert nach dem Mittelwert-Satz 3.3.10 ein $\xi \in [x_0, x]$ mit

$$r_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad \blacksquare$$

Die Summe im Satz heißt *Taylor-Polynom vom Grad n*,

$$x \mapsto T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

es "schmiegt sich" im Punkt x_0 so eng an f an, dass die ersten n Ableitungen beider in x_0 übereinstimmen. Im Bild ist das Taylorpolynom (rot)



$$T_2(x; 1) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2$$

für die Exponentialfunktion (blau) gezeigt. Satz 3.4.11 beschreibt den Fehler $r_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x; x_0)$ des Taylorpolynoms genau. Obwohl die Stelle ξ bei r_{n+1} nicht bekannt ist, läßt sich dennoch für eine Umgebung von x_0 eine Fehlerschranke angeben, indem man den Maximalwert von $|f^{(n+1)}(\xi)|$ abschätzt. Dazu kann man die in Defin.3.4.4 eingeführte Supremumnorm verwenden. Mit dieser gilt für $U := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D$ also, dass

$$|f(x) - T_n(x; x_0)| \leq |x - x_0|^{n+1}\frac{\|f^{(n+1)}\|_U}{(n+1)!} \quad \forall x \in U. \tag{3.4.4}$$

Wegen $\exp^{(n+1)} = \exp$ bekommt man etwa für $\delta = \frac{1}{2}$, dass $\|\exp^{(3)}\|_U \le e^{3/2} \le \frac{9}{2}$ und daher

$$|e^x - T_2(x;1)| \le |x-1|^3 \frac{9}{2\cdot 3!} = \frac{3}{4}|x-1|^3 \quad \text{für } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}].$$

Für $|x-1| \le \frac{1}{2}$ ist der Fehler daher durch $\frac{3}{32} \le \frac{1}{10}$ beschränkt, für $|x-1| \le \frac{1}{10}$ ist er sogar kleiner als $1/1000$.

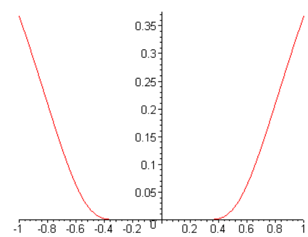
Taylor-Reihen Wenn die Funktion f in (einem Teil von) D *beliebig oft diffbar* ist, kann man Taylorpolynome beliebig hohen Grades bilden und somit auch die Taylor-*Reihe* mit Entwicklungspunkt x_0

$$T_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{3.4.5}$$

Da die Werte $f^{(k)}(x_0)/k! =: b_k$ feste reelle Zahlen sind, handelt es sich hier natürlich um eine Potenzreihe der Form (2.2.4). Diese konvergiert nach S.2.2.16 im Reellen in einem Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$, dessen Radius r mit Wurzel- oder Quotientenkriterium bestimmt werden kann. Für $r > 0$ stellt dann (3.4.5) nach S.3.4.7) in diesem Intervall eine stetige Funktion dar. Aber

Vorsicht: Taylorreihe (3.4.5) und Funktion f können verschieden sein!
Beispiel 3.4.12 Bei der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



besitzen die Ableitungen Darstellungen der Form

$$f^{(k)}(x) = p_k(\frac{1}{x})\, e^{-1/x^2}$$

mit Polynomen p_k. Nach S.3.1.23 gilt aber für alle $k \in \mathbb{N}$: $\lim_{x\to 0} f^{(k)}(x) = 0$. Daher ist diese Taylorreihe die Nullfunktion $T_f(x) \equiv 0$ und für $x \ne 0$ daher verschieden von f.

Für die Konvergenz der Taylorreihe *gegen* f muss klar sein, dass das Restglied (3.4.4) verschwindet für $n \to \infty$.

Satz 3.4.13 *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *beliebig oft differenzierbar. Mit* $x_0 \in [a,b]$ *und* $\varrho := \max\{x_0 - a, b - x_0\}$ *gelte* $\frac{1}{n!}\varrho^n \|f^{(n)}\|_{[a,b]} \to 0\,(n \to \infty)$. *Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad x \in [a,b],$$

und die Konvergenz der Reihe ist gleichmäßig in $[a,b]$.

Beweis Mit (3.4.4) folgt aus der Voraussetzung für $x \in [a,b]$:

$$|f(x) - T_n(x;x_0)| \le |x-x_0|^{n+1}\frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \le \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\| \to 0\,(n\to\infty).$$

Dies zeigt die glm Konvergenz, vgl. (3.4.1). ■

Bemerkung: a) Die Voraussetzung des Satzes besagt mit (2.2.2) gerade, dass das Intervall $[a, b]$ im Konvergenzintervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ der Reihe enthalten ist.

b) Wenn eine Funktion f durch eine Potenzreihe definiert ist, dann stimmt diese nach Satz 3.4.10 (glm Konv.) und (3.4.2) mit der Taylorreihe überein.

Die durch Reihen definierten Standardfunktionen bekommt man gerade wieder über die Taylorreihen zurück:

1. Exponentialfunktion: $\exp^{(k)}(x_0) = \exp(x_0) = e^{x_0} \;\Rightarrow$

   $$T_{\exp}(x) = e^{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} = e^{x_0} e^{x - x_0} = e^x,$$

   Konvergenzradius $r = \infty$. Mit $\xi = \theta x + (1 - \theta)x_0$, $0 < \theta < 1$, und Restglied:

   $$e^x = e^{x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} + e^{\xi} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

2. Sinus, Cosinus: $\sin^{(2k)}(x_0) = (-1)^k \sin x_0$, $\sin^{(2k+1)}(x_0) = (-1)^k \cos x_0$, etc $\;\Rightarrow$

   $$\begin{aligned} T_{\sin}(x) &= \sin x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k)!}(x - x_0)^{2k} + \cos x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x - x_0)^{2k+1} \\ &= \sin x_0 \quad \cos(x - x_0) \quad + \cos x_0 \quad \sin(x - x_0), \end{aligned}$$

   vgl. Satz 3.1.25, Konvergenzradius $r = \infty$.

3. Logarithmus: $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$: aus $f'(x) = x^{-1}$ folgt für $k \in \mathbb{N}$, dass $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k - 1)!\, x^{-k}$:

   $$\ln x = \ln(1 + y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x - 1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} y^k,$$

   der Konvergenzradius ist $r = 1$. Man kann sogar noch Konvergenz im Punkt $x = 2$ nachweisen.

4. Arcustangens: Auch ohne Berechnung der Ableitungen erhält man die Taylorreihe, weil arctan die Stammfunktion ist von

   $$g(x) := \frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k, \quad |x| < 1 \;\Rightarrow$$

   $$\arctan x = \int_0^x g(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k + 1} = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

   mit Konvergenzradius $r = 1$. Die Integration ist erlaubt aufgrund der Sätze 3.4.7 und 3.4.8.

5. Binomialreihe: Diese verallgemeinert für die allgemeine Potenz $(1+x)^p$ mit Exponent $p \in \mathbb{R}$ die Binomische Formel S.1.2.4 Es gilt tatsächlich die einheitliche Reihendarstellung

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n, \quad |x| < 1,$$

mit Konvergenzradius $r = 1$. Dazu erweitert man die Definition der Binomialkoeffizienten auf reelle Argumente:

$$\binom{p}{n} := \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,\, p \in \mathbb{R}, \tag{3.4.6}$$

in Zähler und Nenner stehen jeweils n Faktoren. Für $p \in \mathbb{N}$ gilt dann $\binom{p}{n} = 0$ für $n > p$ und die Reihe wird zur Binomialsumme aus S.1.2.4. Allgemein erhält man tatsächlich für die Ableitungen $((1+x)^p)' = p(1+x)^{p-1}$, und $((1+x)^p)'' = p(p-1)(1+x)^{p-2}$ und induktiv analog zu (3.2.1), dass

$$\frac{1}{n!}((1+x)^p)^{(n)} = \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}(1+x)^{p-n} = \binom{p}{n} \text{ in } x = 0.$$

Für negative Exponenten $p = -m$ kann man die Darstellung umformulieren zu

$$(1+x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} (-x)^n.$$

Denn für $p = -m$ gilt

$$\begin{aligned} \binom{-m}{n} &= \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(m+n-1)\cdots(m+1)m}{n!} = (-1)^n \binom{m+n-1}{n}. \end{aligned}$$

Für $p = -\frac{1}{2}$ gilt speziell

$$\binom{p}{n} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \cdots \frac{2n+1}{2} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1) \; \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)}{2^n \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)} = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

Daher gilt für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^5 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^n. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Analog zum Vorgehen beim Arcustangens bekommt man daraus als Stammfunktionen die Reihen von arcsin und Arsinh,

$$\arcsin x = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1}, \quad |x| < 1,$$

$$\operatorname{Arsinh} x = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(2^k k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1}, \quad |x| < 1.$$

A Anhang

Bezeichnungen:

Bez.	Beschreibung	im Text
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$	
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen	Defin.1.4.1
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen	vgl.(1.4.6)
$\mathbb{K}$	wahlweise der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$	
$C[a, b]$	Vektorraum der stetigen Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$	nach Satz 3.1.8
$C^k[a, b]$	Vektorraum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$	S. 74
$R[a, b]$	Vektorraum aller R-integrierbaren Funktionen	Def.3.3.4
$\mathcal{T}[a, b]$	Vektorraum der Treppenfunktionen	Defin 3.3.1
$\mathcal{F}$	Vektorraum aller Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$	S. 20
$U_r(a)$	Umgebung eines Punktes a in $\mathbb{K}$, $U_r(a) = \{x : \|x - a\| < r\}$	
$K_r(a)$	Kreis um einen Punktes a in $\mathbb{K}$, $K_r(a) = \{x : \|x - a\| \leq r\}$	

Funktionstafeln, mit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, KR=Konvergenzradius:

Funktion	Reihe	KR	Ableitung	Stammfunktion
x^n	x^n	∞	nx^{n-1}	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$(1+x)^n$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$	∞	$n(1+x)^{n-1}$	$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}$
$(1+x)^a$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$	1	$a(1+x)^{a-1}$	$\frac{1}{a+1}(1+x)^{a+1}$
$\dfrac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$	1	$\frac{-1}{(1+x)^2}$	$\ln\|1+x\|$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$	1	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$	$\arctan(x)$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$	1	$\frac{2x}{(1-x^2)^2}$	$\mathrm{Artanh}(x)$
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$	∞	e^x	e^x
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	∞	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	∞	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$	$\frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2 x$	$-\ln\|\cos x\|$
$\sinh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	∞	$\cosh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$	∞	$\sinh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$	$\frac{\pi}{2}$	$1 - \tanh^2 x$	$\ln\cosh x$
$\ln x$	$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1-x)^k$	1	$\frac{1}{x}$	$x\ln x - x$
$\arcsin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2(2k+1)} x^{2k+1}$	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	1	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\mathrm{Arsinh}\, x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{(2^k k!)^2(2k+1)} x^{2k+1}$	1	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x\,\mathrm{Arsinh}\, x - \sqrt{1+x^2}$
$\mathrm{Artanh}\, x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$	1	$\frac{1}{1-x^2}$	$x\,\mathrm{Artanh}\, x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$
$u(x)v'(x)$	Cauchy-Produkt		$u'v' + uv''$	$uv - \int(u'v)$

Index