

Volumina der Zariski-Kammern algebraischer Flächen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat)

vorgelegt dem

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

von

David Schmitz
aus Krefeld

Marburg,
Juli 2012

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg als Dissertation angenommen am 17. Juli 2012.

Erstgutachter: Prof. Dr. Thomas Bauer
Zweitgutachter: Prof. Dr. Georg Schumacher

Tag der mündlichen Prüfung: 31. August 2012

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	4
2 Kammervolumen	8
2.1 Das Volumen der Kammer Σ_P	10
2.2 Das Volumen der Nef-Kammer	14
2.3 Bestimmung der Kammervolumina	19
3 Del-Pezzo-Flächen	21
3.1 Volumina der Zariski-Kammern	22
3.2 Anzahl der Zariski-Kammern bestimmter Trägergrößen	25
4 Flächen mit big antikanonischem Bündel	30
4.1 Aufblasungen von Punkten auf einem glatten Kegelschnitt im \mathbb{P}^2	31
4.1.1 Volumina der Zariski-Kammern	34
4.2 Aufblasung des \mathbb{P}^2 in Punkten auf zwei Geraden	39
5 Verallgemeinerungen, Anwendungen und Ausblick	46
5.1 Verallgemeinerung 1: polarisierte Flächen	46
5.2 Seshadri-Kammer-Zerlegung des Nef-Kegels	48
5.3 Verallgemeinerung 2: höhere Dimensionen	51
Literaturverzeichnis	53
Anhang	55
English abstract	55
Danksagung	58
Erklärung	59
Lebenslauf	60

Einleitung

Der Kegel der big Divisoren auf einer projektiven Varietät ist in den letzten Jahren zunehmend in den Blickpunkt der Forschung gerückt seit asymptotische Methoden zur Verfügung stehen, die die Untersuchung von big Divisoren überhaupt erst möglich machen (vgl. [15]). Seit dem Beginn dieser Untersuchung sind wesentliche Fortschritte erreicht worden.

Insbesondere im Fall projektiver Flächen liegen interessante Ergebnisse vor. So zeigen Bauer, Küronya und Szemberg in [3], dass der Big-Kegel auf einer glatten projektiven Fläche eine lokal endliche Zerlegung in lokal-polyedrische Teilkegel besitzt, so dass alle Linearsysteme zu Divisoren im Innern eines Teilkegels den gleichen stabilen Basisort haben. In der zitierten Arbeit wurden weitere geometrische Charakterisierungen durch das Verhalten der Volumenfunktion sowie durch die Zariski-Zerlegung von Divisoren in den Teilkegeln angegeben. Aufgrund der letzteren Charakterisierung spricht man von der Zariski-Kammer-Zerlegung. Bauer, Küronya, Szemberg beschreiben ferner die geometrische Struktur der einzelnen polyedrischen Kammern in der Zerlegung. Zusätzlich zu dieser geometrischen Beschreibung der Kammerzerlegung gab es in der Folge Ergebnisse zu kombinatorischen Fragestellungen: In [2] wurde ein Algorithmus zur Bestimmung der Anzahl von Kammern in der Zerlegung angegeben, der in [5] noch eine Verbesserung erfuhr.

In dieser Arbeit soll diesen beiden Betrachtungsweisen ein weiterer Standpunkt hinzugefügt werden. Es handelt sich um einen metrischen Ansatz, dessen Ziel es ist, die Kammern der Zerlegung auf ihre „Größe“ hin zu untersuchen. Ausgehend von einer von Peyre ([25]) im arithmetischen Kontext eingeführten Invariante wird einem Kegel C im Néron-Severi Vektorraum $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ einer glatten projektiven Fläche X das Kegelvolumen $\text{Vol}(C)$ zugeordnet. Das Volumen einer Kammer in der Zariski-Kammer-Zerlegung lässt sich dann deuten als ein Maß dafür, wie weit Divisoren bewegt werden können ohne dass sich der stabile Basisort des zugehörigen Linearsystems ändert, beziehungsweise wie weit Divisoren verschoben werden müssen, um eine Veränderung des stabilen Basisorts zu erreichen.

Konkret wird das Kegelvolumen $\text{Vol}(C)$ definiert als das Volumen (bezüglich eines geeignet normierten Lebesgue-Maßes ds) des Durchschnitts

$$\overline{C} \cap (-K_X)^{\leq 1}$$

des Abschlusses von C mit dem Halbraum derjenigen Divisorenklassen, deren Schnittprodukt mit dem antikanonischen Divisor höchstens 1 ist. Das verwendete Maß ds ist am Gitter $N^1(X)$ der ganzzahligen Divisorenklassen normiert, und zwar so, dass das Fundamentalparallelotop des Gitters ds -Volumen 1 hat. Diese Normierung gewährleistet zusammen mit der Transformationsformel die Unabhängigkeit des Volumenbegriffs von

der Basiswahl. Die Menge $\overline{C} \cap (-K_X)^{\leq 1}$ ist nicht notwendigerweise kompakt, tatsächlich kommen Kegel mit unendlichem Volumen vor. Die beiden Hauptresultate dieser Arbeit geben notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass eine gegebene Kammer in der Zariski-Kammer-Zerlegung endliches Volumen hat. Sind diese Bedingungen erfüllt, so erlaubt die Anwendung der beiden Ergebnisse die explizite Berechnung der Kammerolumina. Das erste Theorem besagt, dass die Berechnung des Volumens einer beliebigen Kammer auf einer Fläche X zurückgeführt werden kann auf die Berechnung des Volumens einer bestimmten Kammer auf einer Fläche Y , die durch Kontraktion von (-1) -Kurven auf X hervor geht. Diese spezielle Kammer ist die Kammer derjenigen big Divisoren, die nef sind. Da wir bei der Volumenberechnung den Abschluss der Kammer betrachten, ist das Volumen dieser Kammer einfach das Volumen des Nef-Kegels $\text{Nef}(Y)$, der gerade ihr Abschluss ist. Wir ordnen jedem big und nef Divisor P wie folgt eine Kammer Σ_P in der Kammerzerlegung zu: Σ_P ist die Kammer derjenigen Divisoren, deren negativer Anteil in der Zariskizerlegung als Träger gerade die irreduziblen Kurven hat, die P nicht schneiden. Jede Kammer der Zerlegung ist ein Σ_P für einen big und nef Divisor P .

Theorem 1. *Es sei P ein big und nef Divisor auf einer glatten projektiven Fläche X mit Picardzahl ρ . Dann gilt entweder*

- *der Träger $\text{Null}(P)$ des negativen Anteils der Zariskizerlegung von Divisoren in Σ_P enthält eine Kurve C mit Selbstschnitt $C^2 < -1$ und*

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \infty,$$

oder

- *$\text{Null}(P)$ besteht aus s paarweise disjunkten (-1) -Kurven und es gilt*

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \frac{(\rho - s)!}{\rho!} \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_{\text{Null}(P)}(X))),$$

wo $\pi_{\text{Null}(P)} : X \rightarrow \pi_{\text{Null}(P)}(X)$ die Zusammenziehung der Kurven in $\text{Null}(P)$ bezeichnet.

Zentral für die Bestimmung der Volumina beliebiger Kammern ist also ein Zugriff auf das Volumen des Nef-Kegels auf Flächen, die aus Kontraktionen von (-1) -Kurven resultieren. Das zweite wichtige Resultat dieser Arbeit gibt einerseits ein Kriterium für die Endlichkeit des Nef-Kegel-Volumens an und liefert eine Formel zur Bestimmung im endlichen Fall.

Theorem 2. *Sei X eine glatte projektive Fläche mit Picardzahl ρ .*

- *$\text{Vol}(\text{Nef}(X))$ ist genau dann endlich, wenn $-K_X$ big ist.*
- *Ist dies der Fall und ist ferner X nicht-minimal, so existiert ein \mathbb{Q} -Divisor D auf X mit*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \frac{1}{\rho} \cdot \sum_E (D \cdot E) \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_E(X))),$$

wobei über sämtliche (-1) -Kurven E auf X summiert wird.

Die Volumina der Nef-Kegel auf minimalen Flächen lassen sich recht einfach direkt bestimmen (siehe Beispiel 2.2).

Die Resultate werden in den Kapiteln 3 und 4 zur Anwendung gebracht. In Ersterem bestimmen wir die Volumina der Zariski-Kammern auf Del-Pezzo-Flächen, in letzterem diejenigen der Zariski-Kammern auf gewissen Flächen, deren antikanonischer Divisor statt als ample nur als big vorausgesetzt ist. In Kapitel 5 beschäftigen wir uns mit möglichen Verallgemeinerungen des eingeführten Volumenbegriffs. Einerseits lässt sich der Halbraum $(-K_X)^{\leq 1}$ in der Definition (auf Kosten der Eindeutigkeit) durch den entsprechenden Halbraum $H^{\leq 1}$ zu einem beliebigen amplen Divisor H ersetzen und wir untersuchen den entstehenden Volumenbegriff. Andererseits lässt sich die Definition des Kegelvolumens auf einer Varietät X höherer Dimension n übertragen, indem der Halbraum $(-K_X)^{\leq 1}$ in der ursprünglichen Definition durch den Halbraum $((-K_X)^{n-1})^{\leq 1}$ ersetzt wird. Wir untersuchen in Kapitel 5 außerdem den Zusammenhang zwischen dem Volumen der Nef-Kammer und Seshadri-Konstanten. In der gesamten Arbeit arbeiten wir über den komplexen Zahlen.

Die Resultate der Kapitel 2 und 3 sind in Teilen bereits in [4] veröffentlicht.

Kapitel 1

Grundlagen

Wir fassen hier kurz die Resultate zusammen, die dieser Arbeit zugrunde liegen. Die wesentliche Grundlage ist die von Bauer, Küronya, Szemberg ([3]) gefundene Zerlegung des Big-Kegels einer glatten projektiven Fläche.

Zunächst einige Bezeichnungen (vgl. [21]): Es sei X eine glatte projektive Varietät der Dimension n . Wie üblich bezeichnen wir mit $N^1(X)$ die Néron-Severi-Gruppe der numerischen Äquivalenzklassen von Divisoren auf X und mit

$$N^1(X)_{\mathbb{R}} = N^1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

den Néron-Severi-Vektorraum. Wir studieren den Kegel $\text{Big}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$, der big Divisoren auf X . Ein ganzzahliger Divisor D ist big, falls sein *Volumen*

$$\text{vol}_X(D) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X(mD))}{m^n/n!}$$

positiv ist, das heißt falls die Dimension des Vektorraums der globalen Schnitte von $\mathcal{O}_X(mD)$ in m so schnell wie möglich wächst. Das Volumen eines \mathbb{Q} -Divisors B lässt sich dann aufgrund der Homogenität $\text{vol}_X(\lambda D) = \lambda^n \text{vol}_X(D)$ definieren als $\frac{1}{a^n} \text{vol}_X(aB)$, für eine positive ganze Zahl a so dass aB ein ganzzahliger Divisor ist. Die Volumenfunktion $\text{vol}_X : N^1(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich stetig nach $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ fortsetzen (vgl. [21, Section 2.2.C]). Wir betrachten außerdem den Vektorraum $N_1(X)_{\mathbb{R}}$, der von den numerischen Äquivalenzklassen von 1-Zykeln auf X erzeugt wird, und darin den *Mori-Kegel* $\overline{\text{NE}}(X)$. Dies ist der Abschluss des Kegels, der von den *effektiven* 1-Zykeln aufgespannt wird. Weiter bezeichnen wir mit $\text{Nef}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$ den zum Mori-Kegel $\overline{\text{NE}}(X)$ dualen Kegel der nef Divisoren auf X . Im Fall $n = 2$ sind natürlich Divisoren gerade 1-Zykel und wir unterscheiden nicht zwischen $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ und $N_1(X)_{\mathbb{R}}$.

Für einen big Divisor D betrachten wir die Linearsysteme $|mD|$ und deren Basisorte $\text{Bs}(|mD|)$. Man definiert den *stabilen Basisort* als Durchschnitt

$$\mathbb{B}(D) := \bigcap_{m>0} \text{Bs}(|mD|).$$

Offenbar ändert er sich nicht bei Multiplikation mit einer positiven ganzen Zahl, so dass der stabile Basisort ohne Weiteres auch für \mathbb{Q} -Divisoren definiert werden kann. Allerdings zeigt diese Invariante einige Pathologien (vgl. [16]), insbesondere können numerisch äquivalente Divisoren verschiedene stabile Basisorte besitzen. Dies lässt sich durch Übergang

zum *augmentierten* Basisort beheben. Dieser ist definiert als

$$\mathbb{B}_+(D) := \bigcap_{A \text{ ample } \mathbb{Q}\text{-Divisor}} \mathbb{B}(D - A),$$

hängt nur von der numerischen Äquivalenzklasse von D ab ([16, Proposition 1.4]) und ist auf natürliche Weise für \mathbb{R} -Divisoren definiert. Es zeigt sich, dass $\mathbb{B}_+(D)$ für einen beliebigen ample Divisor A für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ schon mit $\mathbb{B}(D - \varepsilon A)$ übereinstimmt ([16, Proposition 1.5]).

Bauer, Küronya, Szemberg betrachten zu einem \mathbb{R} -Divisor D auf einer glatten projektiven Fläche die *Stabilitätskammer*

$$\{ D' \in N^1(X)_{\mathbb{R}} \mid \mathbb{B}_+(D') = \mathbb{B}_+(D) \}$$

all jener \mathbb{R} -Divisoren D' , die den gleichen augmentierten Basisort wie D haben. Betrachten wir die Stabilitätskammern zu allen big Divisoren, erhalten wir offenbar eine Kammerzerlegung des Big-Kegels. Das Hauptresultat von [3] zeigt, dass diese Kammerzerlegung mit derjenigen übereinstimmt, die durch die Zariski-Zerlegung induziert ist. Ferner entsprechen die Kammern gerade den Gebieten, auf denen die oben definierte Volumenfunktion vol_X polynomial ist.

Theorem 1.1 (Theorem aus [3]). *Sei X eine glatte projektive Fläche. Dann existiert eine lokal endliche Zerlegung des Big-Kegels $\text{Big}(X)$ in lokal polyedrische Teilkegel, so dass gilt*

- *Der Träger des negativen Teils N_D in der Zariski-Zerlegung $D = P_D + N_D$ ist konstant auf jedem Teilkegel.*
- *Die Volumenfunktion vol_X ist auf jedem Teilkegel durch ein quadratisches Polynom gegeben.*
- *Alle \mathbb{Q} -Divisoren im Inneren jedes Teilkegels haben den selben stabilen Basisort.*

Aufgrund der ersten Charakterisierung der Teilkegel nennen wir die Zerlegung auch *Zariski-Kammer-Zerlegung* und die Teilkegel *Zariski-Kammern*. Die erste Charakterisierung liefert in der Arbeit [3] außerdem die wesentlichen Informationen zur Struktur der Zerlegung. Für einen Divisor D mit Zariski-Zerlegung $D = P_D + N_D$ betrachten wir die Mengen

$$\text{Null}(D) := \{ C \mid C \text{ irreduzible Kurve mit } DC = 0 \}$$

und

$$\text{Neg}(D) := \{ C \mid C \text{ irreduzible Komponente von } N_D \}.$$

Aufgrund der Eigenschaften der Zariski-Zerlegung gilt die Inklusion $\text{Neg}(D) \subset \text{Null}(P_D)$. Der Notation in [3] folgend definieren wir weiterhin für einen big und nef Divisor P die zugehörige Zariski-Kammer

$$\Sigma_P := \{ D \in \text{Big}(X) \mid \text{Neg}(D) = \text{Null}(P) \}.$$

Die Menge Σ_P ist tatsächlich ein konvexer Kegel und jede weitere Kammer $\Sigma_{P'}$ ist entweder disjunkt zu Σ_P oder stimmt mit ihr überein ([3, Lemma 1.6]). Die Vereinigung

der Kammern überdeckt den ganzen Big-Kegel, sie definiert folglich eine Kammerzerlegung. Dass diese Zerlegung die erste Charakterisierung aus dem Theorem erfüllt, ist nach Definition von Σ_P klar.

Aufwendiger ist dagegen der Nachweis, dass lokal endlich viele Kammern genügen und dass jede Kammer lokal polyedrisch ist. Für den zweiten Teil wird in [3] zunächst jedem big und nef Divisor P seine Seite im Nef-Kegel zugeordnet, nämlich

$$\text{Face}(P) := \text{Nef}(X) \cap \text{Null}(P)^\perp.$$

Ist P ampel, so ist $\text{Null}(P)$ die leere Menge und $\text{Face}(P)$ somit der ganze Nef-Kegel. Falls P big und nef aber nicht ampel ist, so bilden die Kurven in $\text{Null}(P)$ nach Hodge-Index-Satz einen Divisor mit negativ definiten Schnittmatrix, ihre Anzahl ist folglich kleiner als die Picardzahl ρ , insbesondere also endlich. Die Seite $\text{Face}(P)$ ist dann der Durchschnitt des Nef-Kegels mit endlich vielen Hyperebenen. Nach [3, Proposition 1.12] ist die Seite $\text{Face}(P)$ polyedrisch falls sie ganz im Big-Kegel enthalten ist. In diesem Fall ist $\text{Face}(P)$ einfach diejenige Seite mit minimaler Dimension unter den Seiten von $\text{Nef}(X)$, die P enthalten.

Die Autoren beweisen folgende explizite Darstellung des Inneren einer Kammer Σ_P :

Proposition 1.2 ([3], Proposition 1.1). *Das Innere der Kammer Σ_P ist gegeben durch*

$$\text{int}(\Sigma_P) = \text{rel. int. Face}(P) + \text{int}(V^{\geq 0}(\text{Null}(P))),$$

wo $V^{\geq 0}(\text{Null}(P))$ den von der Menge $\text{Null}(P)$ aufgespannten Kegel in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ bezeichnet.

Gehen wir auf beiden Seiten zum Abschluss über, so erhalten wir folgende Aussage, die wir später verwenden werden:

Korollar 1.3.

$$\overline{\Sigma}_P = \text{conv}(\text{Face}(P), \text{Null}(P)).$$

Macht man sich jetzt noch klar, dass der Nef-Kegel in der Umgebung eines big und nef Divisors P durch Schnitt mit endlich vielen Kurven (nämlich gerade denjenigen in $\text{Null}(P)$) gegeben ist ([3, Corollary 1.4]), so sieht man, dass die Kammer Σ_P ebenfalls lokal polyedrisch ist.

Für die lokale Endlichkeit der Zerlegung zeigen Bauer, Küronya, Szemberg, dass jeder big Divisor P eine Umgebung im Big-Kegel der Form

$$D + \text{Amp}(X)$$

für einen big Divisor D besitzt und dass eine solche Umgebung nur endlich viele verschiedene Kammern schneiden kann ([3, Proposition 1.15]).

Wir skizzieren der Vollständigkeit halber in aller Kürze die in [3] verfolgte Strategie zum Beweis der beiden alternativen Charakterisierungen der Zariski-Kammern:

Für einen big Divisor D mit Zariski-Zerlegung $D = P_D + N_D$ gilt nach [21, Corollary 2.3.22] die Identität

$$\text{vol}_X(D) = P_D^2,$$

und folglich

$$\text{vol}_X(D) = (D - N_D)^2.$$

Die Volumenfunktion ist also auf einer Kammer Σ_P durch ein quadratisches Polynom gegeben, denn dort ist der negative Anteil der Zariski-Zerlegung konstant (vgl. [3, Corollary 3.2]).

In [3, Proposition 2.5] wird gezeigt, dass für stabile \mathbb{Q} -Divisoren, also für solche Divisoren, für die die augmentierten Basisorte $\mathbb{B}_+(D+A)$, $\mathbb{B}_+(D)$ und $\mathbb{B}_+(D-A)$ für hinreichend kleines amples A übereinstimmen, die Identität

$$\text{Bs}(|D|) = \text{Neg}(D)$$

gilt. Zeigt man nun, dass die \mathbb{Q} -Divisoren im Inneren einer Zariski-Kammer stabil sind, so folgt, dass ihre stabilen Basisorte übereinstimmen müssen.

In der Arbeit [2] wird die Zariski-Kammer-Zerlegung unter einem kombinatorischen Blickwinkel betrachtet. Die Frage, in wie viele Kammern der Big-Kegel einer glatten projektiven Fläche zerfällt, wird algorithmisch beantwortet, wobei der benötigte Input die Schnittmatrix aller irreduziblen Kurven mit negativem Selbstschnitt benötigt wird. Der Algorithmus basiert auf folgender Beobachtung:

Proposition 1.4 ([2], Proposition 1.1). *Sei X eine glatte projektive Fläche. Es gibt eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{von der Nef-Kammer ver-} \\ \text{schiedene Zariski-Kammern} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{reduzierte Divisoren mit} \\ \text{negativ definiter Schnittmatrix} \end{array} \right\}$$

Insbesondere existiert zu einer Menge $\{C_1, \dots, C_r\}$ von irreduziblen Kurven, so dass die Schnittmatrix $(C_i \cdot C_j)_{i,j}$ negativ definit ist, ein big und nef Divisor P mit $\text{Null}(P) = \{C_1, \dots, C_r\}$. Wir werden diese Aussage in Kapitel 2 für die Konstruktion des Bezugsdivisors D in Theorem 2 aus der Einleitung verwenden.

Kapitel 2

Kammervolumen

Wie wir gesehen haben, ist die Zariski-Kammer-Zerlegung des Big-Kegels auf algebraischen Flächen recht ausführlich untersucht, sowohl was die geometrische Beschreibung der Kammern, als auch was kombinatorische Aspekte angeht. Ziel dieses Kapitels ist, diesem bekannten Bild einen metrischen Gesichtspunkt hinzuzufügen. Wir untersuchen die Kammern in der Zerlegung auf ihre „Größe“. Das Ziel besteht darin, einer gegebenen Kammer ihr Volumen zuzuordnen. Wie in der Einleitung erwähnt, kann man diese Zahl intuitiv so interpretieren, dass sie angibt „um wie viel“ ein Geradenbündel in der Kammer bewegt werden kann, ohne den stabilen Basisort, beziehungsweise den Träger des negativen Teils der Zariski-Zerlegung zu ändern. Als Ausgangspunkt bietet sich eine Invariante an, die von Peyre ([25]) eingeführt und in einer Reihe von Arbeiten von Derenthal ([10],[11], [12]) untersucht wurde. Sie misst die Größe des Nef-Kegels auf Del-Pezzo-Flächen und wird hier verallgemeinert für beliebige Kammern auf beliebigen Flächen.

Dem Vorhaben, Teilkegeln des Big-Kegels im Néron-Severi Vektorraum Volumina zuzuordnen, stehen zunächst zwei Hindernisse im Wege: Erstens ist ein Maß zu wählen, bezüglich dessen Volumina berechnet werden, und zweitens sind konvexe Kegel zunächst nicht meßbar bezüglich eines gewählten Maßes.

Bezüglich des ersten Hindernisses beachte man, dass der Néron-Severi Vektorraum tatsächlich auf kanonische Weise mit einem Lebesgue-Maß ds versehen werden kann, indem ds als am Gitter $N^1(X)$ auf Kovolumen 1 normalisiert gewählt wird, das heißt so, dass das Fundamentalparallelotop des Gitters bezüglich einer festen Basis Volumen 1 hat. Aus der Transformationsformel und der Tatsache, dass die Determinante einer Matrix, die eine Gitterbasis in eine Gitterbasis überführt, gleich ± 1 ist, folgt, dass der eingeführte Volumenbegriff unabhängig von der Wahl der Gitterbasis ist.

Betrachten wir nun konvexe Kegel in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$, so sind diese nach Definition unbeschränkt, haben also, sofern sie innere Punkte besitzen, bezüglich des Maßes ds unendliches Volumen. Diesem Problem kann Abhilfe geschaffen werden, indem wir statt des Kegels selbst einen kanonisch gewählten Kegelstumpf betrachten: Für einen konvexen Kegel B im Néron-Severi Vektorraum $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ betrachten wir die Menge

$$\mathcal{C}_B := \overline{B} \cap (-K_X)^{\leq 1},$$

wobei $(-K_X)^{\leq 1}$ den Halbraum der Divisorenklassen, deren Schnittprodukt mit dem antikanonischen Divisor höchstens 1 ist, bezeichne.

Definition 2.1. Das *Kegelvolumen* $\text{Vol}(B)$ von B ist das ds -Volumen der Menge \mathcal{C}_B .

Offensichtlich ist die Menge \mathcal{C}_B genau dann kompakt, und das Kammervolumen von B damit endlich, wenn jede Klasse in \overline{B} positives Schnittprodukt mit $(-K_X)$ hat.

Beispiel 2.2. a) Der Vektorraum $N^1(\mathbb{P}^2)_{\mathbb{R}}$ wird erzeugt von der Klasse $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ einer beliebigen Geraden auf \mathbb{P}^2 . Der antikanonische Divisor hat die Darstellung

$$-K_{\mathbb{P}^2} = 3L$$

und der Nef-Kegel auf \mathbb{P}^2 ist einfach der Strahl $\mathbb{R}^+ \cdot L$. Folglich ist das Polytop $\mathcal{C}_{\text{Nef}(\mathbb{P}^2)}$ die Strecke zwischen dem Ursprung und dem Punkt $\frac{1}{3}L$. Es gilt also für das Volumen

$$\text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^2)) = \frac{1}{3}.$$

b) Sei $X \rightarrow C$ eine Regelfläche über der Basiskurve C vom Geschlecht g . Für die folgenden wohlbekannten Resultate über Regelflächen verweisen wir auf [18, Section V.2]. Der Vektorraum $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ wird erzeugt von der Klasse einer Faser f und derjenigen eines festen Schnitts C_0 . Die Zahl $e := -C_0^2$ stellt eine Invariante von X dar und es gilt $e \geq -g$. Außerdem gilt

$$-K_X \equiv_{\text{num}} 2C_0 + (2 + e - 2g)f$$

und folglich $K_X^2 = 8(1 - g)$. Im Fall $e \geq 0$ wird der Mori-Kegel $\overline{\text{NE}}(X)$ von den Klassen f und C_0 aufgespannt, der Nef-Kegel $\text{Nef}(X)$ ist der derjenige Teilkegel, der von f und $C_0 + ef$ aufgespannt wird. Falls $2 + e - 2g > 0$ gilt, ist das Polytop $\mathcal{C}_{\text{Nef}(X)}$ also das Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2+e-2g}, \frac{e}{2+e-2g})$ bezüglich der Gitterbasis C_0, f . Es gilt dann

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 + e - 2g}.$$

Anderenfalls hat der Nef-Kegel unendliches Volumen. Die zweite Kammer in der Zariskikammerzerlegung, Σ_{C+ef} , hat genau dann endliches Volumen, wenn

$$0 < -K_X \cdot C = -2e + 2 + e - 2g$$

gilt, also genau dann, wenn $g = 0$ und $e \in \{0, 1\}$. In diesem Fall ist das zu berechnende Polytop $\mathcal{C}_{\Sigma_{C+ef}}$ das Dreieck mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(\frac{1}{2-e}, 0)$, $(\frac{1}{2+e}, \frac{e}{2+e})$ und für das Volumen der Kammer gilt somit

$$\text{Vol}(\Sigma_{C+ef}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2-e} \cdot \frac{e}{2+e}.$$

Im Fall $e < 0$, und damit $g > 0$, ist eine Divisorenklasse $aC_0 + bf$ nach [18, V. Proposition 2.21] genau dann ampel, wenn $a > 0$ und $b > \frac{1}{2}ae$ gelten. Wegen $f^2 = 0$ und $(2C_0 + ef)^2 = 0$ folgt daraus, dass

$$\overline{\text{NE}}(X) = \text{Nef}(X) = \mathbb{R}^+ \cdot (2C_0 + ef) + \mathbb{R}^+ \cdot f$$

gilt. Nun gilt $-K_X \cdot (2C + ef) = 4 - 4g \leq 0$, das Volumen des Nef-Kegels ist also im Fall $e < 0$ stets unendlich. In Theorem 2.10 werden wir dies von einem theoretischeren Standpunkt aus einsehen.

2.1. Das Volumen der Kammer Σ_P

Betrachten wir nun die zu einem big und nef Divisor P auf einer glatten projektiven Fläche X gehörige Kammer Σ_P in der Zariski-Zerlegung von $\overline{NE}(X)$. Aus dem Hodge-Index-Satz folgt, dass die Kurven E_1, \dots, E_r in $\text{Null}(P)$ eine negativ definite Schnittmatrix haben, insbesondere hat also jede Kurve E_i negativen Selbstschnitt. Jede der Kurven spannt einen extremalen Strahl des Mori-Kegels $\overline{NE}(X)$ auf und kann, sofern sie positiven Schnitt mit $-K_X$ hat, nach dem Contraction Theorem (siehe etwa [20, Theorem 3.7 (3)]) zu einem Punkt auf einer Varität mit zahmen Singularitäten zusammengezogen werden. Wir werden jedoch sehen, dass wir im Flächenfall in der glatten Kategorie bleiben können, da für unsere Zwecke nur (-1) -Kurven in $\text{Null}(P)$ kontrahiert werden müssen.

Für eine Menge S von disjunkten (-1) -Kurven betrachten wir die Kontraktionsabbildung

$$\pi_S : X \rightarrow Y$$

und die durch Zurückziehen definierte Abbildung

$$\pi_S^* : N_{\mathbb{R}}^1(Y) \rightarrow N_{\mathbb{R}}^1(X).$$

Da die Kurven in S als paarweise disjunkt vorausgesetzt sind, können wir π_S als sukzessive Zusammenziehung von (-1) -Kurven auffassen. Nach Castelnuovo's Contraction Theorem ist Y folglich wiederum eine glatte Fläche. Der Pullback einer festen Gitterbasis B von $N^1(Y)$ wird durch Hinzunahme der Kurven in S zu einer Gitterbasis B' von $N^1(X)$ erweitert. Die entsprechende Einbettung von $N_{\mathbb{R}}^1(Y)$ in $N_{\mathbb{R}}^1(X)$ ist eine Isometrie bezüglich der Basen B und B' . Dabei legen wir die natürliche Norm $\|\cdot\|_2$ zugrunde, die von dem durch die Basiswahl festgelegten Skalarprodukt induziert wird. Bei fester Wahl von B' als Gitterbasis hat dieses Skalarprodukt zusätzlich die folgende Eigenschaft: Für eine Kurve $E \in S$ stimmt die Hyperebene E^\perp der Divisorenklassen, die mit E Schnittprodukt 0 haben, mit der Hyperebene der zu E (bezüglich des Skalarprodukts) orthogonalen Vektoren überein. Wir schreiben S^\perp für den Durchschnitt der Hyperebenen E^\perp mit $E \in S$. Das folgende Resultat ist die Grundlage für die Berechnung von Kammervolumen.

Proposition 2.3. *Sei P ein big und nef Divisor auf einer glatten projektiven Fläche X , so dass $\text{Null}(P)$ aus (-1) -Kurven besteht. Es sei ferner $S = \{E_1, \dots, E_s\}$ eine Teilmenge von $\text{Null}(P)$. Dann gilt*

$$\overline{\Sigma}_P \cap S^\perp = \pi_S^*(\overline{\Sigma}_{\pi_{S*}P}),$$

mit anderen Worten: die Kammer von $\pi_{S}P$ auf $Y = \pi_S(X)$ wird isometrisch als Seite der Kammer von P eingebettet.*

Die Aussage der Proposition wird in Abbildung 2.1 illustriert: Sie zeigt den Querschnitt des Mori-Kegels der Fläche X , die durch Aufblasung der projektiven Ebene in zwei Punkten entsteht. Ihr Mori-Kegel wird von den Klassen der exzeptionellen Divisoren E_1, E_2 sowie der eigentlich transformierten C der Gerade durch die Aufblasungspunkte aufgespannt. Bezeichnen wir den Pullback $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ einer beliebigen Gerade in der Ebene mit L , so gehört C zur Klasse $L - E_1 - E_2$. Für $P = L$ und $S = \{E_1\}$ ist offenbar $\pi_S(X)$ die Aufblasung von \mathbb{P}^2 in einem Punkt mit exzeptionellem Divisor E_2 und $\pi_{S*}P = L$.

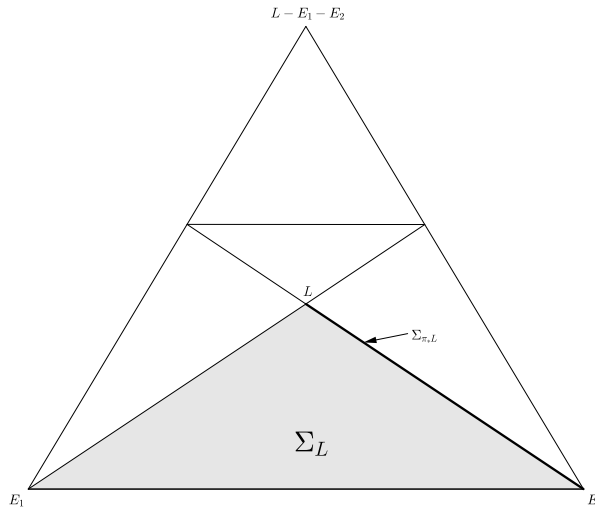


Abb. 2.1: Big-Kegel der Aufblasung des \mathbb{P}^2 in zwei Punkten

Für den Beweis der Proposition benötigen wir folgendes Lemma, das auch für sich genommen im Folgenden eine wesentliche Rolle spielen wird.

Lemma 2.4. *Für eine Menge S von paarweise disjunkten (-1) -Kurven $\{E_1, \dots, E_s\}$ auf einer glatten projektiven Fläche X gilt*

$$\text{Nef}(X) \cap S^\perp = \pi_S^*(\text{Nef}(\pi_S(X))).$$

Beweis. Die Kontraktionsabbildung π_S lässt sich zerlegen als

$$\pi_S : X = X_0 \xrightarrow{\pi_1} X_1 \xrightarrow{\pi_2} \dots \xrightarrow{\pi_s} X_s = Y,$$

wobei jedes π_i die Kontraktion der Bildkurve von E_i unter den vorherigen Kontraktionen darstellt. Jede der Flächen X_i ist glatt. Somit folgt die Aussage für beliebiges s induktiv aus der Aussage für $s = 1$. Sei also

$$\pi : X \rightarrow Y$$

die Kontraktion einer (-1) -Kurve E . Sie ist ein surjektiver Morphismus glatter Flächen; insbesondere ist jeder Divisor, der E nicht schneidet, also in E^\perp liegt, der Pullback eines Divisors D' auf Y . Die Projektionsformel liefert für einen beliebigen Divisor F die Identität

$$D \cdot F = D' \cdot \pi_*(F).$$

Setzen wir in obige Formel für F die irreduziblen Kurven auf X ein, so folgt, dass D genau dann nef ist, wenn D' nef ist, denn jeder irreduziblen Kurve C auf Y entspricht eine irreduzible Kurve auf X – ihre eigentlich transformierte C' . Die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich, denn der Pullback eines beliebigen Divisors auf Y schneidet E nicht, liegt also in E^\perp . Eine ähnliche Argumentation für den Fall $s = 1$ findet sich auch in [10, Proof of Theorem 3]. □

Beweis der Proposition. Nach der Argumentation zu Beginn des Beweises des Lemmas genügt es auch hier den Fall $S = \{ E \}$ zu zeigen. In Korollar 1.3 haben wir gesehen, dass $\bar{\Sigma}_P$ genau der konvexe Kegel ist, der von $\text{Face}(P)$ zusammen mit $\text{Null}(P)$ aufgespannt wird. Die Seite $\text{Face}(P)$ des Nef-Kegels, die zum big und nef Divisor P gehört (das heißt die minimal-dimensionale Seite, die P enthält) ist gegeben als Durchschnitt

$$\text{Face}(P) = \text{Nef}(X) \cap \text{Null}(P)^\perp$$

des Nef-Kegels mit dem Untervektorraum der Divisorenklassen, die mit den Kurven in $\text{Null}(P)$ Schnitt 0 haben. Schneiden wir den Abschluss der Kammer Σ_P mit der Hyperebene E^\perp , so wird der resultierende konvexe Kegel aufgespannt von $\text{Face}(P) \cap E^\perp$ und denjenigen Kurven in $\text{Null}(P)$, die E nicht schneiden. Da Σ_P als Zariskikammer vorkommt, ist die Schnittmatrix der Kurven in $\text{Null}(P)$ negativ definit. Folglich ist die einzige dieser Kurven, die mit E von 0 verschiedenes Schnittprodukt hat, E selbst. Somit gilt

$$\text{Null}(P) \cap E^\perp = \text{Null}(P) - \{ E \}.$$

Andererseits entspricht diese Menge gerade den Pullbacks derjenigen Kurven auf Y , die Schnitt 0 mit π_*P haben, also

$$\text{Null}(P) \cap E^\perp = \pi^*(\text{Null}(\pi_*P)).$$

Obiges Lemma identifiziert den Durchschnitt $\text{Nef}(X) \cap E^\perp$ via Pullback mit dem Nef-Kegel auf Y . Folglich gilt

$$\begin{aligned} \pi^*(\text{Face}(\pi_*P)) &= \pi^*(\text{Nef}(Y) \cap \text{Null}(\pi_*P)^\perp) \\ &= (\text{Nef}(X) \cap E^\perp) \cap (\text{Null}(P) - \{ E \})^\perp \\ &= \text{Face}(P). \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir die Identität

$$\bar{\Sigma}_P \cap E^\perp = \pi^*(\bar{\Sigma}_{\pi_*P}),$$

die zu zeigen war. □

Wir sind nun in der Lage, unser erstes Hauptresultat zu beweisen.

Theorem 2.5. *Es sei P ein big und nef Divisor auf einer glatten projektiven Fläche X mit Picardzahl ρ . Dann gilt entweder*

- *der Träger $\text{Null}(P)$ des negativen Anteils der Zariskizerlegung von Divisoren in Σ_P enthält eine Kurve C mit Selbstschnitt $C^2 < -1$ und*

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \infty,$$

oder

- $\text{Null}(P)$ besteht aus s paarweise disjunkten (-1) -Kurven und es gilt

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \frac{(\rho - s)!}{\rho!} \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_{\text{Null}(P)}(X))),$$

wo $\pi_{\text{Null}(P)} : X \rightarrow \pi_{\text{Null}(P)}(X)$ die Zusammenziehung der Kurven in $\text{Null}(P)$ bezeichnet.

Bemerkung. Die prima facie möglichen Alternativen für die Kurven in $\text{Null}(P)$ sind ausgeschlossen, da nach Hodge-Index-Satz die Schnittmatrix der Kurven in $\text{Null}(P)$ negativ definit ist.

Beweis. Man beachte, dass $\text{Null}(P)$ genau dann leer ist, wenn P schon ampel ist. Dann gilt offenbar $\Sigma_P = \text{Nef}(X)$ und die zweite Gleichung ist erfüllt. Nehmen wir also an, $\text{Null}(P)$ sei nicht-leer. Sei für den ersten Fall C eine irreduzible Kurve in $\text{Null}(P)$ mit $C^2 \leq -2$. Nach Adjunktionsformel gilt dann

$$-K_X \cdot C \leq 0.$$

Es gibt folglich kein positives Vielfaches der Klasse von C , das mit $-K_X$ Schnittprodukt 1 hat; mit anderen Worten: der von C in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ aufgespannte Strahl schneidet die Hyperebene $(-K_X)^{\perp}$ nicht. Da dieser Strahl aber im Abschluss der Kammer Σ_P enthalten ist, muss deren Kammervolumen unendlich sein.

Für den zweiten Fall seien $E_1, \dots, E_s \in \text{Null}(P)$ die paarweise disjunkten (-1) -Kurven, die $\text{Null}(P)$ bilden. Setzen wir $S := \{E_1, \dots, E_s\}$, so gilt nach Lemma 2.4

$$\begin{aligned} \text{Face}(P) &= \text{Nef}(X) \cap S^{\perp} \\ &= \pi_S^*(\text{Nef}(\pi_S(X))). \end{aligned}$$

Andererseits schneidet jede Divisorenklasse γ , die in S^{\perp} liegt, den antikanonischen Divisor $-K_X$ nach Projektionsformel genau so wie ihr Push-forward π_{S*} den antikanonischen Divisor auf $\pi_S(X)$. Insbesondere lassen sich die Mengen $\mathcal{C}_{\text{Nef}(X)} \cap S^{\perp}$ und $\mathcal{C}_{\text{Nef}(\pi_S(X))}$ durch Zurückziehen mit π_S^* miteinander identifizieren.

Es sei eine feste Gitterbasis $C_1, \dots, C_{\rho-s}$ von $N^1(\pi_S(X))$ gegeben. Durch Zurückziehen und Ergänzen mit den exzeptionellen Divisoren erhalten wir die Gitterbasis

$$\pi_S^*(C_1), \dots, \pi_S^*(C_{\rho-s}), E_1, \dots, E_s$$

von $N^1(X)$. Wir betrachten die Polytope

$$\begin{aligned} P_1 &:= \text{conv}(\mathcal{C}_{\text{Face}(P)}, E_1) \\ P_j &:= \text{conv}(P_{j-1}, E_j), \quad \text{für } 2 \leq j \leq s, \end{aligned}$$

wobei conv die konvexe Hülle bezeichne. Die P_j sind $(\rho - s + j)$ -dimensionale Pyramiden mit Grundfläche P_{j-1} und E_j als Spitze. Man beachte ferner, dass die Pyramide P_s gerade der zu messenden Menge \mathcal{C}_{Σ_P} entspricht. Das Volumen von P_j lässt sich wie folgt aus dem Volumen von P_{j-1} bestimmen: Nach Definition ist P_{j-1} enthalten im Untervektorraum

$E_j^\perp \cap \dots \cap E_s^\perp$. Ferner hat nach Basiswahl der Vektor E_j die Norm $\|E_j\|_2 = 1$. Wir erhalten somit die Identität

$$\text{Vol}(P_j) = \frac{1}{\rho + j - s} \text{Vol}(P_{j-1}).$$

Die s -malige Ausführung liefert dann

$$\text{Vol}(P_s) = \frac{1}{\rho + 1 - s} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \text{Vol}(\text{Face}(P)),$$

was äquivalent zu der zu beweisenden Identität

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \frac{(\rho - s)!}{\rho!} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_S(X)))$$

ist. □

2.2. Das Volumen der Nef-Kammer

Mit Hilfe des obigen Theorems lässt sich die Bestimmung des Volumens beliebiger Kammern Σ_P auf die Bestimmung gewisser Nef-Kegel-Volumina reduzieren. Im Folgenden beschäftigen wir uns mit dieser speziellen Kammer in der Kammerzerlegung. Die Fragen, die sich hier stellen, sind die Folgenden:

- Unter welchen Bedingungen an X ist $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$ endlich?
- Wie lässt sich $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$ in diesem Fall bestimmen?

Wir wenden uns zunächst der ersten Frage zu. Eine notwendige Bedingung für endliches Nef-Kegel-Volumen folgt unmittelbar aus der wohlbekannten Klassifikation glatter algebraischer Flächen (siehe etwa [6]): Hat die Nef-Kammer einer Fläche X endliches Volumen, so muss $\kappa(X) = -\infty$ gelten. Anderenfalls wäre nämlich der kanonische Divisor auf dem in diesem Fall eindeutig bestimmten minimalen Y Model von X nef mit Selbstschnitt

$$K_Y^2 \geq 0,$$

und folglich wäre das Produkt $-K_Y \cdot K_Y$ nicht-positiv. In diesem Fall läge der von K_Y erzeugte Strahl im Nef-Kegel, aber schneide die Hyperebene $(-K_Y)^{=1}$ nicht. Das Volumen der Nef-Kammer auf Y wäre also unendlich. Nun lässt sich nach Lemma 2.4 eine Seite von $\text{Nef}(X)$ mit $\text{Nef}(Y)$ identifizieren. Folglich hat mit Y auch X unendliches Nef-Kegel-Volumen.

Tatsächlich lässt sich ein notwendiges und hinreichendes Kriterium angeben: Das Volumen der Nef-Kammer auf X ist genau dann endlich, wenn der antikanonische Divisor $-K_X$ big ist. In diesem Fall nennen wir X eine *big antikanonische Fläche*. Für den Beweis dieses Resultats benötigen wir einige vorbereitende Sätze. Der erste ist folgende allgemeine konvex-geometrische Aussage über abgeschlossene Kegel und deren dualen Kegel.

Lemma 2.6. *Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Kegel, η eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf \mathbb{R}^n und*

$$C^* = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \eta(x, c) \geq 0 \text{ für alle } c \in C \}$$

der zu C bezüglich η duale Kegel. Dann sind die inneren Punkte von C^* charakterisiert durch

$$\text{int}(C^*) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \eta(x, c) > 0 \text{ für alle } c \in C - \{0\} \}.$$

Beweis. Die Menge auf der rechten Seite bezeichnen wir mit D . Wir zeigen zunächst die Inklusion $\text{int}(C^*) \subset D$. Angenommen es gäbe ein Element $x_0 \in \text{int}(C^*)$, dass nicht in D enthalten ist. Nach Definition von D gibt es dann ein von Null verschiedenes $c \in C$ mit $\eta(x_0, c) = 0$. Wir betrachten die folgende lineare Funktion

$$\begin{aligned} \eta_c : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \eta(x, c). \end{aligned}$$

Sie ist nicht konstant null, da η nicht-ausgeartet ist, hat aber eine Nullstelle in x_0 . Folglich nimmt η_c in jeder ε -Umgebung U von x_0 negative Werte an. Ist aber ε hinreichend klein gewählt, so ist U enthalten im Inneren von C^* . Folglich erfüllt jeder Punkt x von U die Ungleichung $\eta_c(x) \geq 0$. Das ist ein Widerspruch.

Wir haben folgende Inklusionskette

$$\text{int}(C^*) \subset D \subset C^*.$$

Folglich ist das Lemma bewiesen, wenn wir zeigen können, dass D eine offene Menge ist. Dazu wählen wir eine beliebige Norm und betrachten die 1-Kugel $S \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich dieser Norm. Ist $C \cap S$ leer, so ist schon $C = (0)$ der triviale Kegel. Dann gilt $D = C^* = \mathbb{R}^n$ und wir sind fertig. Ist im anderen Extremfall $D = \emptyset$, so sind wir wegen $\text{int}(C^*) \subset D$ ebenfalls fertig.

Seien also $S \cap C$ und D nicht-leer. Wir betrachten zu einem Element $d \in D$ die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_d : C \cap S &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \eta(x, d). \end{aligned}$$

Als stetige Funktion nimmt ψ_d auf der kompakten Menge $S \cap C$ ihr Minimum an. Dieses ist aufgrund der Definition von D strikt positiv. Folglich existiert eine Umgebung U von d , so dass für jedes Element $d' \in U$ gilt $\eta(x, d') > 0$ für jedes $x \in S \cap C$, und folglich für jedes $x \in C$. Die Menge D ist also offen. \square

Wenden wir das Lemma auf den Mori-Kegel $\overline{\text{NE}}(X)$ und seinen bezüglich des Schnittprodukts dualen Kegel $\text{Nef}(X)$ an. Wir haben einerseits nach Kleimans Theorem [21, Theorem 1.4.29] die Identität

$$\text{int}(\text{Nef}(X)) = \text{Amp}(X),$$

und andererseits gilt nach [21, Theorem 2.2.26]

$$\text{int}(\overline{\text{NE}}(X)) = \text{Big}(X).$$

Folglich impliziert das Lemma einerseits das sogenannte Kleimansche Kriterium für Ampleness

$$\text{Amp}(X) = \{ D \in N^1(X)_{\mathbb{R}} \mid D \cdot c > 0 \text{ für alle } c \in \overline{\text{NE}}(X) - \{0\} \}$$

und andererseits erhalten wir die für unsere weitere Überlegung wesentliche Charakterisierung

$$\text{Big}(X) = \{ D \in N^1(X)_{\mathbb{R}} \mid D \cdot C > 0 \text{ für alle } C \in \text{Nef}(X) - \{0\} \}.$$

Wir halten fest:

Proposition 2.7. *Ein Divisor D auf einer glatten projektiven Fläche X ist genau dann big, wenn für jeden vom Nulldivisor verschiedenen nef Divisor C das Schnittprodukt $D \cdot C$ echt positiv ist.*

Satz 2.8. *Sei X eine glatte projektive Fläche. Das Volumen der Nef-Kammer $\text{Nef}(X)$ ist genau dann endlich, wenn der antikanonische Divisor $-K_X$ big ist.*

Beweis. Das Volumen des Kegels $\text{Nef}(X)$ ist genau dann endlich, wenn der Durchschnitt

$$\mathcal{C}_{\text{Nef}(X)} = \text{Nef}(X) \cap (-K_X)^{\leq 1}$$

eine kompakte Menge ist, das heißt genau dann, wenn für jeden nef Divisor D eine positive reelle Zahl c existiert, so dass $cD \cdot (-K_X) = 1$ gilt. Nach Proposition 2.7 ist dies genau dann der Fall, wenn $-K_X$ big ist. \square

Wenden wir uns nun der Bestimmung endlicher Nef-Kammer-Volumina zu. Nach obiger Überlegung müssen wir nur Flächen mit big antikanonischem Divisor betrachten. Es wäre hilfreich für die Berechnung der Volumina, wenn wir Aussagen über die Struktur der Nef-Kammer auf solchen Flächen finden könnten. In [8, Lemma 6] wird gezeigt, dass für rationale Flächen mit big antikanonischem Divisor der Mori-Kegel $\overline{\text{NE}}(X)$ endlich erzeugt ist. Aufgrund der Dualität ist dann auch der Nef-Kegel $\text{Nef}(X)$ endlich erzeugt. Tatsächlich lässt sich der dort angegebene Beweis unverändert auf die nicht-rationale Situation übertragen:

Satz 2.9. *Ist X eine glatte projektive Fläche und $-K_X$ big, so sind die Kegel $\overline{\text{NE}}(X)$ und $\text{Nef}(X)$ rational polyedrisch.*

Bemerkung. Satz 2.9 impliziert zusammen mit Theorem 2.5, dass das Volumen einer beliebigen Kammer auf einer glatten projektiven Fläche entweder unendlich oder rational ist.

Beweis. Wir folgen dem Beweis aus [8]. Sei H ein ample Divisor auf X . Das *Cone Theorem* (vgl. etwa [20, Theorem 1.24]) besagt, dass für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ der Kegel

$$\overline{\text{NE}}(X) \cap (-K_X - \varepsilon H)^{\geq 0}$$

polyedrisch mit irreduziblen Kurven als Erzeugern ist. Wir haben

$$\overline{\text{NE}}(X) = \overline{\text{NE}}(X)_{(-K_X - \varepsilon H) \leq 0} + \sum \mathbb{R}_0^+ \cdot [C_i]$$

für endlich viele irreduzible Kurven C_i und folglich ist zu zeigen, dass der Kegel $\overline{\text{NE}}(X)_{(-K_X - \varepsilon H) \leq 0}$ ebenfalls von endlich vielen irreduziblen Kurven aufgespannt wird. Es

genügt dazu zu zeigen, dass der betrachtete Kegel überhaupt nur endlich viele irreduzible Kurven enthält, denn dann wird jeder extremale Strahl des Mori-Kegels $\overline{\text{NE}}(X)$ im Bereich $(-K_X - \varepsilon H)^{<0}$ von einer dieser Kurven aufgespannt.

Betrachten wir den augmentierten Basisort $\mathbb{B}_+(-K_X)$ von $-K_X$. Es sei

$$-K_X = P + N$$

die Zariski-Zerlegung von $-K_X$. Dann gilt nach [16, Example 1.11]

$$\mathbb{B}_+(-K_X) = \text{Null}(P).$$

Dies lässt sich alternativ über die Zariski-Kammer-Zerlegung einsehen: Entweder liegt $-K_X$ im Innern der Kammer Σ_P und $\mathbb{B}_+(-K_X) = \mathbb{B}(-K_X) = \text{Null}(P)$, oder $-K_X$ liegt auf dem Rand der Kammer und es gilt $\mathbb{B}(-K_X) = \text{Null}(P) - \{E_1, \dots, E_k\}$. Wegen $(-K_X - A) \cdot E_j < 0$ für einen beliebigen amplen Divisor A , sind die Kurven E_1, \dots, E_k im augmentierten Basisort $\mathbb{B}_+(-K_X)$ enthalten.

Für klein gewähltes ε stimmt nun der stabile Basisort $\mathbb{B}(-K_X - 2\varepsilon H)$ mit dem augmentierten Basisort $\mathbb{B}_+(-K_X)$ überein (nach [16, Proposition 1.5] oder einer zur obigen Überlegung analoge Argumentation).

Sei nun C eine irreduzible Kurve in $(-K_X - \varepsilon H)^{\leq 0}$. Dann gilt

$$C \cdot (-K_X - 2H) < 0,$$

das heißt C ist im stabilen Basisort $\mathbb{B}(-K_X - 2H) = \text{Null}(P)$ enthalten. Nun ist P big und nef, der Indexsatz impliziert also, dass die Kurven in $\text{Null}(P)$ negative Schnittmatrix haben. Folglich kann es höchstens $\rho - 1$ solcher Kurven geben. \square

Theorem 2.10. *Sei X eine glatte projektive nicht-minimale Fläche mit Picardzahl ρ . Es gilt entweder*

- $-K_X$ ist nicht big und

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \infty,$$

oder

- $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$ ist endlich und es existiert ein \mathbb{Q} -Divisor D auf X mit

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \frac{1}{\rho} \cdot \sum_E (D \cdot E) \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_E(X))),$$

wobei über sämtliche (-1) -Kurven E auf X summiert wird.

Bemerkung. Für minimale Flächen X lässt sich das Volumen der Nef-Kammer elementar bestimmen: Entweder $-K_X$ ist nicht big und $\text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \infty$ oder X ist eine Regelfläche. Die Kammervolumen auf Regelflächen haben wir bereits in Beispiel 2.2 bestimmt.

Beweis. Der erste Teil der Aussage und die Tatsache, dass die beiden Alternativen eine Dichotomie bilden, folgt unmittelbar aus Satz 2.8.

Für die zweite Aussage nehmen wir zunächst $\rho \geq 3$ an und zeigen die Existenz einer Divisorenklassen D auf X mit folgendem Schnittverhalten: Wir fordern, dass D Schnittprodukt 0 mit jeder irreduziblen Kurve C , deren Selbstschnitt kleiner als -1 ist, habe und dass ferner

$$-K_X \cdot D = 1$$

gelte. In einem zweiten Schritt zeigen wir, dass dieses Schnittverhalten schon die behauptete Formel für das Kegelvolumen impliziert.

Wir können den big Divisor $-K_X$ schreiben als Summe

$$-K_X = H + F$$

eines ample \mathbb{Q} -Divisors H mit einem effektiven \mathbb{Q} -Divisor F . Für eine irreduzible Kurve C mit Selbstschnitt

$$C^2 \leq -2$$

liefert die Adjunktionsformel die Ungleichung

$$-K_X \cdot C \leq 0$$

oder äquivalenterweise

$$H \cdot C \leq -F \cdot C.$$

Aus der Ampleness von H folgt somit, dass $F \cdot C$ echt negativ ist. Als effektiver Divisor besitzt F eine Zariski-Zerlegung

$$F = P_F + N_F$$

mit P_F nef und $N_F = \sum_{i=1}^s \alpha_i C_i$ effektiv mit negativ definiter Schnittmatrix. Offenbar muss die (irreduzible) Kurve C wegen $F \cdot C < 0$ eine Komponente von N_F , oder mit anderen Worten ein Element von $\text{Neg}(F)$ sein. Die Anzahl solcher Kurven ist folglich höchstens $\rho - 1$. Außerdem folgt aus der negativen Definitheit der Schnittmatrix von N_F , dass es eine Zariski-Kammer Σ gibt, so dass die Komponenten von N_F den Träger des negativen Teils der Zariski-Zerlegung der Divisoren in Σ bilden ([2, Proposition 1.1]). Es gibt also einen (ganzahligen) big und nef Divisor P mit $\text{Null}(P) = \text{Neg}(F)$. Insbesondere zeigt P das gewünschte Schnittverhalten bezüglich irreduzibler Kurven C mit Selbstschnitt kleiner als -1 : Jedes solche C liegt in $\text{Null}(P)$, es gilt also $C \cdot P = 0$. Für das Schnittprodukt mit $-K_X$ beachte man, dass aus der Bigness von $-K_X$ zusammen mit der Nefness von P schon $-K_X \cdot P > 0$ folgt. Wir erhalten also einen Divisor mit dem gewünschten Schnittverhalten, indem wir

$$D := \frac{P}{-K_X \cdot P}$$

setzen. Insbesondere ist D ein \mathbb{Q} -Divisor.

Nach Satz 2.9 ist $\text{Nef}(X)$ polyedrisch. Wir zeigen die behauptete Formel für das Nef-Kegel-Volumen durch Zerlegung des zu messenden Polytops $\mathcal{C}_X := \text{Nef}(X) \cap (-K_X)^{\leq 1}$ in Pyramiden mit Spitze D und den Facetten des Nef-Kegels als Grundflächen. Diese Facetten sind nach Dualität gegeben durch den Durchschnitt des Nef-Kegels mit den Hyperebenen C^\perp zu erzeugenden irreduziblen Kurven C des Mori-Kegels $\overline{\text{NE}}(X)$. Wegen $\rho \geq 3$ muss jede dieser Kurven negativen Selbstschnitt haben (vgl. etwa [9, Lemma 6.2]).

Man beachte, dass D aufgrund seiner speziellen Wahl in den Hyperebenen C^\perp für irreduzible Kurven C mit Selbstschnitt $C^2 \leq -2$ enthalten ist. Die entsprechenden Pyramiden P_C in der obigen Zerlegung des Nef-Kegels sind also Nullmengen bezüglich ds . Folglich haben wir allein die Pyramiden P_E über Facetten $E^\perp \cap \text{Nef}(X)$ mit (-1) -Kurven E zu betrachten. Die Vereinigung dieser Pyramiden ist wegen $D \in (-K_X)^{=1}$ genau $\text{Nef}(X)$:

$$\text{Nef}(X) = \bigcup_{E \text{ } (-1)\text{-Kurve}} P_E.$$

Nach Lemma 2.4 entsprechen für jede (-1) -Kurve E die Grundseiten der betrachteten Pyramiden $\mathcal{C}_X \cap E^\perp$ gerade dem Pullback via π_E^* der Polytope $\mathcal{C}_{\pi_E(X)}$. Die Zurückziehungsabbildung π_E^* ist isometrisch bezüglich fest gewählter Basen $L_1, \dots, L_{\rho-1}$ von $N^1(\pi_E(X))$ beziehungsweise $\pi_E^*(L_1), \dots, \pi_E^*(L_{\rho-1}), -E$ von $N^1(X)$. Es gilt also für das Volumen der Pyramide P_E die Formel

$$\text{Vol}(P_E) = \frac{1}{\rho} \text{dist}(D, E^\perp) \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_E(X))).$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass das Schnittprodukt $E \cdot D$ gerade dem Abstand $\text{dist}(D, E^\perp)$ entspricht. Bezüglich der obigen Basis $\pi_E^*(L_1), \dots, \pi_E^*(L_{\rho-1}), -E$ von $N^1(X)$ habe der Vektor D die Darstellung $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\rho-1}, \alpha)$. Man beachte, dass der Vektor $(0, \dots, 0, 1)$ Normalenvektor der Hyperebene E^\perp ist und dass der Absolutbetrag $|\alpha|$ folglich dem Abstand von D zu dieser Hyperebene entspricht. Andererseits folgt aber aus der Tatsache, dass für jedes i zwischen 1 und $\rho - 1$ die Identität $E \cdot \pi_E^*(E_j) = 0$ gilt, dass das Schnittprodukt $E \cdot D$ gerade α ist. Nun ist aber D nef gewählt, weswegen $C \cdot E \geq 0$ und folglich $\alpha = |\alpha|$ gilt.

Für den noch ausstehenden Fall $\rho \leq 2$ beachte man, dass die einzige nicht-minimale Fläche mit big antikanonischen Divisor (und folglich $\kappa = -\infty$) mit $\rho \leq 2$ die Aufblasung S_1 des \mathbb{P}^2 in einem Punkt ist. Der Mori-Kegel $\overline{\text{NE}}(S_1)$ wird aufgespannt vom exzeptionellen Divisor E und der eigentlich transformierten C einer Geraden durch den Aufblasungspunkt. Wir setzen $D = \frac{1}{2}C$. Es gilt dann $-K_{S_1} \cdot D = 1$ und das zu messende Polytop ist das Dreieck P_E mit Grundseite $\text{Nef}(S_1) \cap E^\perp \cap (-K_{S_1})^{\leq 1}$ und Spitze D . Nach obiger Argumentation erhalten wir auch in diesem Fall die behauptete Formel. \square

2.3. Bestimmung der Kammervolumina

Wendet man Theorem 2.5 und Theorem 2.10 gemeinsam an, so zeigt sich ihre Stärke. Ersteres reduziert die Berechnung des Volumens einer beliebigen Kammer auf die Bestimmung des Nef-Kegel-Volumens auf einer Fläche, die aus Kontraktion der Kurven im Träger des negativen Teils der Zariski-Zerlegung der Divisoren in der Kammer entsteht, während letzteres angibt, wann dieses Nef-Kegel-Volumen endlich ist und wie es in diesem Fall bestimmt werden kann. Wir erhalten so eine vollständige Methode zur Bestimmung der Kegel-Volumina:

Gegeben sei ein big und nef Divisor P auf einer glatten projektiven Fläche X . Das Volumen der Kammer Σ_P lässt sich (im Prinzip) wie folgt bestimmen:

- Bestimme $\text{Null}(P) = \{E_1, \dots, E_s\}$. Hat eines der E_i Selbstschnitt kleiner als -1 , so ist das Volumen der Kammer unendlich.
- Anderenfalls bestimme das Bild $Y := \pi_S(X)$ von X unter der Kontraktion der Kurven E_1, \dots, E_s .
- Ist der antikanonische Divisor von Y nicht big, so hat $\text{Nef}(Y)$, und damit nach Theorem 2.5 auch die Kammer Σ_P , unendliches Volumen.
- Anderenfalls wähle wie im Beweis von Theorem 2.10 beschrieben einen Divisor D , der für jede irreduzible Kurve $C \subset Y$ mit Selbstschnitt kleiner als -1 in C^\perp liegt. Das Theorem liefert dann die Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(Y)) = \frac{1}{\rho - s} \sum_E (D \cdot E) \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_E(Y)))$$

mit Summation über alle negative Kurven E .

- Die Volumina $\text{Vol}(\text{Nef}(\pi_E(Y)))$ werden nun wiederum gemäß des vorigen Schritts bestimmt. Die Voraussetzung, dass der antikanonische Divisor big ist, ist dadurch erfüllt, dass Y die big antikanonische Fläche X als Blow-up hat.
- Nach endlich vielen Schritten endet jede Kette von Kontraktionen bei einer minimalen Regelfläche oder bei \mathbb{P}^2 . Die entsprechenden Nef-Kegel-Volumen wurden in Beispiel 2.2 direkt berechnet. Das Zusammensetzen der Ergebnisse liefert $\text{Vol}(\text{Nef}(Y))$.
- Abschließend wende Theorem 2.5 an und erhalte

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \frac{(\rho - s)!}{\rho} \text{Vol}(\text{Nef}(Y)).$$

Man beachte jedoch, dass dieses Vorgehen durchaus für jede zu behandelnde Fläche X auf wichtigen Input angewiesen ist. Insbesondere das benötigte Wissen um die negativen Kurven auf X ist ein im Anwendungsfall mögliches Hindernis. In den folgenden Kapiteln werden wir das Vorgehen im Detail vorführen: zunächst für den Fall von Del-Pezzo-Flächen und anschließend für gewisse Klassen von Flächen mit big antikanonischem Divisor. Wir werden sehen, dass die für die Berechnung der Kammervolumina notwendigen Überlegungen zu negativen Kurven und den aus deren Kontraktionen resultierenden Flächen häufig interessante Einblicke in die birationalen Zusammenhänge der behandelten Flächen liefern.

Kapitel 3

Del-Pezzo-Flächen

Für die Anwendung der in Kapitel 2 entwickelten Begriffe und Techniken bieten sich Del-Pezzo-Flächen besonders an. Nach Definition ist für eine solche Fläche X der antikanonische Divisor $-K_X$ ample. Das bedeutet insbesondere, dass das Volumen des Big-Kegels auf Del-Pezzo-Flächen endlich ist. Bemerkenswerterweise gilt auch die Umkehrung: Ist $\text{Vol}(\text{Big}(X))$ für eine glatte projektive Fläche X endlich, so ist $-K_X$ ample, X folglich eine Del-Pezzo-Fläche: Endliches Big-Kegel-Volumen ist gleichbedeutend damit, dass $-K_X$ jeden Strahl des Mori-Kegels $\overline{\text{NE}}(X)$ außerhalb des Nullpunkts schneidet. Folglich erfüllt $-K_X$ das Kleimannsche Kriterium für Ampleness.

Die Klassifikation glatter Del-Pezzo-Flächen ist wohlbekannt: X ist entweder \mathbb{P}^2 oder $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ oder eine Aufblasung S_r des \mathbb{P}^2 in $1 \leq r \leq 8$ Punkten in allgemeiner Lage¹. Der Grad einer Del-Pezzo-Fläche ist definiert als K_X^2 und für $1 \leq r \leq 8$ gilt $K_{S_r}^2 = 9 - r$. Ferner ist der Grad von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ gleich 8.

Lemma 3.1. *Sei S_r eine Del-Pezzo-Fläche mit $1 \leq r \leq 8$ und E eine (-1) -Kurve auf S_r . Dann lässt sich E durch einen birationalen Morphismus*

$$\pi_E : S_r \longrightarrow Y$$

zu einem Punkt auf einer Del-Pezzo-Fläche Y vom Grad $(9 - r + 1)$ kontrahieren. Insbesondere gilt

$$N^1(S_r)_{\mathbb{R}} = N^1(Y)_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}E, \quad (3.1)$$

$$-K_{S_r} = -K_Y - E. \quad (3.2)$$

Beweis. Aus der Ampleness von $-K_{S_r}$ folgt mit der Adjunktionsformel

$$0 \leq g(E) = 1 + \frac{1}{2}(E^2 + EK_{S_r}) \leq 0,$$

das heißt E ist eine rationale Kurve. Nach *Castelnuovo's Contractability Criterion* (vgl. [18, V, Theorem 5.7]) lässt sich E zu einem Punkt auf einer glatten Fläche Y zusammenziehen. Somit folgen (3.1) und (3.2) aus der Tatsache, dass S_r die Aufblasung von Y in einem Punkt mit exzeptionellem Divisor E ist.

Es ist also zu zeigen, dass Y eine Del-Pezzo-Fläche vom Grad $(9 - r + 1)$ ist. Betrachte dazu den Selbstschnitt von K_Y :

$$(-K_Y)^2 = (-K_{S_r} + E)^2 = (-K_{S_r})^2 + 2 - 1 = 9 - r + 1 > 0.$$

¹Das heißt keine drei der Punkte liegen auf einer Geraden, keine sechs auf einem Kegelschnitt und keine acht auf einer Kubik mit einem Doppelpunkt in einem der Punkte.

Weiter gilt für eine beliebige irreduzible Kurve C auf Y :

$$\begin{aligned} (-K_Y \cdot C) &= (\pi_E^*(-K_Y) \cdot \pi_E^*(C)) \\ &= ((-K_{S_r} + E) \cdot (\pi_E^*(C))) = (-K_{S_r} \cdot \pi_E^*(C)) > 0. \end{aligned}$$

Mit dem Nakai-Kriterium folgt die Ampleness von $-K_Y$. Die Fläche Y ist also tatsächlich Del-Pezzo vom Grad $(9 - r + 1)$. □

Lemma 3.2. *Für $r \geq 3$ liefert die Kontraktion einer (-1) -Kurve auf S_r eine Fläche S_{r-1} . Für eine (-1) -Kurve E auf S_2 ist $\pi_E(S_2) = S_1$, falls es eine (-1) -Kurve E' auf S_2 gibt mit $(E \cdot E') = 0$. Anderenfalls ist $\pi_E(S_2) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

Beweis. Die Aussage für $r \geq 3$ folgt unmittelbar aus Lemma 3.1 und der Klassifikation glatter Del-Pezzo-Flächen, denn die einzige Del-Pezzo-Fläche vom Grad $(9 - r + 1)$ ist S_{r-1} .

Betrachte nun $Y := \pi_E(S_2)$. Aufgrund der obigen Argumentation ist Y entweder S_1 oder $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Gibt es auf S_r eine (-1) -Kurve E' , die E nicht schneidet, so ist E' Pullback einer (-1) -Kurve auf Y . Da $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ keine (-1) -Kurven enthält, ist in diesem Fall $Y = S_1$.

Nehmen wir nun an, Y enthalte eine (-1) -Kurve C . Sei p der Punkt in S_1 , der zu E aufgeblasen wird und setze $s := \text{ord}_p(C)$. Die eigentlich Transformierte \tilde{C} von C auf S_2 hat dann Selbstschnitt $(C^2 - s^2)$. Da andererseits $\tilde{C}^2 \geq -1$ ist, folgt $s = 0$ und \tilde{C} ist eine (-1) -Kurve, die E nicht schneidet. Falls also auf S_2 keine (-1) -Kurve E' mit $(E \cdot E') = 0$ existiert, ist $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. □

3.1. Volumina der Zariski-Kammern

Kommen wir nach diesen Vorüberlegungen zur Bestimmung der Volumina der Zariski-Kammern auf Del-Pezzo-Flächen.

Satz 3.3. *Es sei P ein big und nef Divisor auf der Del-Pezzo-Fläche S_r mit $\text{Null}(P) = \{E_1, \dots, E_k\}$.*

(i) *Ist $k \neq r - 1$, so gilt*

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \frac{(r - k + 1)!}{(r + 1)!} \text{Vol}(\text{Nef}(S_{r-k})),$$

wobei wir $S_0 = \mathbb{P}^2$ setzen.

(ii) *Ist $k = r - 1$, so gilt*

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \begin{cases} \frac{1}{4(r+1)!} & , \text{ falls } E_1, \dots, E_k \text{ ein maximal negativ definites System bilden} \\ \frac{1}{6(r+1)!} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

(iii) Das Volumen der Nef-Kammern auf S_r mit $3 \leq r \leq 8$ ist gegeben durch

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_r)) = \frac{N_r}{(r+1)(9-r)} \text{Vol}(\text{Nef}(S_{r-1})),$$

wo N_r die Anzahl der (-1) -Kurven auf S_r bezeichne.

(iv) Im Fall $r = 2$ gilt

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_2)) = \frac{1}{21} (2 \text{Vol}(\text{Nef}(S_1)) + \text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1))).$$

(v) Schließlich gelten

$$\text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^2)) = \frac{1}{3}, \quad \text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)) = \frac{1}{8}, \quad \text{Vol}(\text{Nef}(S_1)) = \frac{1}{12}.$$

Bemerkung. Derenthal berechnet in [10] für Del-Pezzo-Flächen eine Konstante $\alpha(S_r)$, eine Variante der Volumina $\text{Vol}(\text{Nef}(S_r))$. Es handelt sich um das Volumen der „obersten Schnittfläche“ $\text{Nef}(S_r) \cap (-K_X)^{=1}$ des Polytops $\mathcal{C}_{\text{Nef}(X)}$. Multiplikation mit dem dimensionalen Faktor $\frac{1}{r+1}$ liefert das Volumen des Nef-Kegels. Die Ergebnisse dort stimmen mit den in der folgenden Tabelle festgehaltenen mit Hilfe von Satz 3.3 berechneten Volumen überein.

r	1	2	3	4	5	6	7	8
$\text{Vol}(\text{Nef}(S_r))$	1/12	1/72	1/288	1/720	1/1080	1/840	1/240	1/9

Beweis. Die Volumina in (v) wurden in Beispiel 2.2 direkt berechnet: $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und S_1 sind die (rationalen) Regelflächen mit $g = 0$, $e = 0$ beziehungsweise $g = 0$, $e = 1$.

Aussage (i) folgt im Fall $k < r - 1$ aus Theorem 2.5 zusammen mit der k -maligen Anwendung von Lemma 3.2: Die aus der Kontraktion der Kurven in $\text{Null}(P)$ resultierende Fläche ist

$$\pi_{\text{Null}(P)}(S_r) = S_{r-k}$$

und das Theorem liefert

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \frac{(r-k+1)!}{(r+1)!} \text{Vol}(\text{Nef}(S_{r-k})).$$

Die Kontraktion $k = r$ paarweise disjunkter (-1) -Kurven auf S_r liefert eine Del-Pezzo-Fläche vom Grad 9, das heißt \mathbb{P}^2 . Die in (i) behauptete Formel folgt also wiederum aus Theorem 2.5.

Für Aussage (ii) ist zu untersuchen, welche der beiden möglichen Del-Pezzo-Flächen vom Grad 8 – S_1 oder $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – aus der Kontraktion der Kurven E_1, \dots, E_{r-1} resultiert. Dazu beachte man, dass für jede (-1) -Kurve C auf $\pi_{E_1, \dots, E_{r-1}}(S_r)$ die eigentlich transformierte \tilde{C} eine (-1) -Kurve ist, die keine der exzeptionellen Kurven E_i schneidet. Es ist dann folglich $E_1, \dots, E_{r-1}, \tilde{C}$ ein negativ definites System. Es existiert also genau dann eine (-1) -Kurve auf $\pi_{E_1, \dots, E_{r-1}}(S_r)$, wenn E_1, \dots, E_{r-1} kein maximales negativ definites

System bildet. Ersteres ist genau dann der Fall, wenn die aus der Kontraktion resultierende Fläche S_1 ist. Im entgegengesetzten Fall gilt somit $\pi_{E_1, \dots, E_{r-1}}(S_r) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Die Anwendung von Theorem 2.5 liefert dann die Identität

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \begin{cases} \frac{2}{(r+1)!} \text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)) \\ \frac{2}{(r+1)!} \text{Vol}(\text{Nef}(S_1)), \end{cases}$$

welche genau der Behauptung entspricht, denn nach (v) gilt $\text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)) = \frac{1}{8}$ und $\text{Vol}(\text{Nef}(S_1)) = \frac{1}{12}$.

Betrachten wir nun die Nef-Kegel-Volumina $\text{Vol}(\text{Nef}(S_r))$. Wir gehen vor wie im Beweis von Theorem 2.10 angegeben. Sei also X eine nicht-minimale Del-Pezzo-Fläche vom Grad $9 - r$, mit anderen Worten: X entspricht der Fläche S_r mit $1 \leq r \leq 8$. Sei zunächst $r \geq 3$ vorausgesetzt. Die Zerlegung des antikanonischen Divisors in amplen und effektiven Anteil ist aufgrund der Ampleness einfach die triviale Zerlegung

$$-K_{S_r} = -K_{S_r} + 0$$

und es gilt $(-K_{S_r})^2 = 9 - r$. Wir setzen daher gemäß Theorem 2.10

$$D := -\frac{1}{9-r} K_{S_r}$$

und erhalten mit Lemma 3.2

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(S_r)) &= \frac{1}{\rho} \sum_E DE \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_E(S_r))) \\ &= \frac{1}{r+1} \sum_E \frac{1}{9-r} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(S_{r-1})) \\ &= \frac{N_r}{(r+1)(9-r)} \text{Vol}(\text{Nef}(S_{r-1})), \end{aligned}$$

also Aussage (iii). Der Fall $r = 2$ läuft im Wesentlichen analog. Allerdings liefern nach Lemma 3.2 die Kontraktionen der (-1) -Kurven unterschiedliche Flächen. Die Klassen der (-1) -Kurven auf S_2 sind einerseits die exzeptionellen Divisoren E_1 und E_2 und andererseits die Klasse $L - E_1 - E_2$ der eigentlich Transformierten der Geraden durch die beiden Aufblasungspunkte. Für die Kontraktionen gelten nach Lemma 3.2

$$\pi_{E_i}(S_2) = S_1$$

und

$$\pi_{L-E_1-E_2}(S_2) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Mit der Wahl

$$D := -\frac{1}{7} K_{S_2}$$

erhalten wir aus Theorem 2.10 die zu beweisende Formel

$$\text{Nef}(S_2) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{7} \text{Vol}(\text{Nef}(S_1)) + \frac{1}{7} \text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)) \right).$$

□

3.2. Anzahl der Zariski-Kammern bestimmter Trägergrößen

In [2] wird ein Algorithmus vorgestellt, der die Anzahl der Zariski-Kammern auf Del-Pezzo-Flächen berechnet, indem die negativ definiten Untermatrizen der Schnittmatrix der (-1) -Kurven bestimmt werden. Dieser Algorithmus lässt sich nun so modifizieren, dass die Anzahl der negativ definiten Untermatrizen bestimmter Größe, die gerade der Anzahl der Zariski-Kammern mit entsprechender Trägergröße k entspricht, ausgegeben wird. Eine Alternative zur Berechnung der Anzahl von Kammern einer vorgegebenen Trägergröße ergibt sich durch die Betrachtung der zum Wurzelsystem R_r der (-2) -Klassen in K_X^\perp gehörigen Weyl-Gruppe $W(R_r)$ (vgl. [22]). Sie operiert auf dem Gitter $N^1(X)$ und ist genau die Untergruppe der Elemente der Automorphismengruppe von $N^1(X)$ mit Fixpunkt K_X , wie in [17, Lemma 1.1] gezeigt wird. Dies hat insbesondere zur Konsequenz, dass $W(R_r)$ einfach transitiv (unter Berücksichtigung der Reihenfolge) auf der Menge der Gitterbasen von der Form L, E_1, \dots, E_r mit $L^2 = 1$ und $E_j^2 = -1$ für $1 \leq j \leq r$ operiert. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $W(R_r)$ einfach transitiv auf der Menge der r -Tupel (E_1, \dots, E_r) von disjunkten (-1) -Kurven operiert.

Nun interessiert uns die Anzahl der Zariski-Kammern der Trägergröße k für $1 \leq k \leq r$, die gerade der Anzahl der k -Tupel (E_1, \dots, E_k) disjunkter (-1) -Kurven dividiert durch die Anzahl der Permutationen, also $k!$, entspricht. Ist $k \leq r - 2$, so lässt sich ein solches k -Tupel stets durch $r - k$ exzeptionelle Kurven zu einem r -Tupel disjunkter (-1) -Kurven vervollständigen. Folglich operiert $W(R_r)$ für $1 \leq k \leq r - 2$ transitiv auf der Menge solcher k -Tupel. Nach der Bahngleichung ergibt sich also bei fester Wahl eines Tupels (E_1, \dots, E_k) die Anzahl der Zariski-Kammern mit Trägergröße k als

$$\frac{|W(R_r)|}{k! |Stab(E_1, \dots, E_k)|}.$$

Nun können wir das Gitter $N^1(S_r)$ orthogonal zerlegen als $\mathbb{Z}E_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}E_k \oplus N^1(S_{r-k})$. Der Stabilisator des Tupels (E_1, \dots, E_k) besteht also gerade aus den Automorphismen, die die ersten k Komponenten festhalten und $-K_{S_r}$ als Fixpunkte haben. Dies sind genau die Elemente von $\text{id}^k \times W(R_{r-k})$. Die gleiche Argumentation gilt für die Anzahl von Kammern mit Trägergröße $r - 1$ von Typ 2, denn diesen entsprechen genau die $(r - 1)$ -Tupel von disjunkten (-1) -Kurven, die sich zu einem r -Tupel disjunkter (-1) -Kurven vervollständigen lassen. Ferner ist hier unmittelbar klar, dass der Stabilisator eines Tupels (E_1, \dots, E_{r-1}) trivial ist. Wir haben folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.4. *Sei $k \neq r - 1$. Dann gilt*

$$\#(\text{Zariski-Kammern mit Trägergröße } k \text{ auf } S_r) = \frac{|W(R_r)|}{k! |W(R_{r-k})|},$$

wobei wir $W(R_0) = \text{id}$ setzen.

Die Anzahl der Kammern mit Trägergröße $r - 1$ auf S_r von Typ 2 ist $\frac{|W(R_r)|}{(r-1)!}$.

Bemerkung. Die Wurzelsysteme der (-2) -Klassen auf Del-Pezzo-Flächen sind wohlbekannt (vgl. [13, Abschnitt 5]):

r	2	3	4	5	6	7	8
R_r	A_1	$A_1 \times A_2$	A_4	D_5	E_6	E_7	E_8
$\#W(R_r)$	1	12	120	1920	51 840	2 903 040	696 729 600

Offen ist hier zunächst noch die Anzahl der Kammern mit Trägergröße $r - 1$ von Typ 1. Man überlegt sich aber wie folgt, dass stets genau ein Drittel der vorkommenden Kammern mit Trägergröße $r - 1$ vom ersten Typ sind, das heißt Volumen $\frac{1}{4(r+1)!}$ haben: Wir haben gesehen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die Kontraktion der Kurven in $\text{Null}(P)$ die Fläche $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ liefert. Nun ist das Resultat der Zusammenziehung beliebiger $r - 2$ Kurven aus $\text{Null}(P)$ eine Fläche S_2 , deren (-1) -Kurven die Schnittmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aufweisen. Folglich liefert die Zusammenziehung der ersten Kurve die Fläche $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und der beiden übrigen die Fläche S_1 . Da das Ergebnis der Zusammenziehung der $r - 1$ Kurven von der Reihenfolge unabhängig ist, folgt das Verhältnis 1 zu 2 von Kammern vom ersten Typ zu Kammern von Typ 2.

Die Anzahlen sowie die Volumina aller Zariski-Kammern auf Del-Pezzo-Flächen sind in den folgenden Tabellen festgehalten:

k	$\pi_k(S_r)$	Anzahl	$\text{Vol}(\Sigma_P)$
0	S_1	1	1/12
1	\mathbb{P}^2	1	1/6

Tabelle 3.1: Zariski-Kammervolumina auf S_1

k	$\pi_k(S_r)$	Anzahl	$\text{Vol}(\Sigma_P)$
0	S_2	1	1/72
1	S_1	2	1/36
1	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	1	1/24
2	\mathbb{P}^2	1	1/18

Tabelle 3.2: Zariski-Kammervolumina auf S_2

k	$\pi_k(S_r)$	Anzahl	Vol(Σ_P)
0	S_3	1	1/288
1	S_2	6	1/288
2	S_1	6	1/144
2	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	3	1/96
3	\mathbb{P}^2	2	1/72

Tabelle 3.3: Zariski-Kammervolumina auf S_3

k	$\pi_k(S_r)$	Anzahl	Vol(Σ_P)
0	S_4	1	1/720
1	S_3	10	1/1440
2	S_2	30	1/1440
3	S_1	20	1/720
3	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	10	1/480
4	\mathbb{P}^2	5	1/360

Tabelle 3.4: Zariski-Kammervolumina auf S_4

Bilden wir jeweils die Summe der Volumina aller Kammern, so erhalten wir die Gesamtvolumina der Big-Kegel:

r	1	2	3	4	5	6	7	8
Vol(Big(S_r))	1/4	1/6	1/8	11/120	13/180	1/14	17/140	19/21

Man beachte, dass sich die Volumina der Big-Kegel auch vergleichsweise einfach direkt bestimmen lassen, da die Eckpunkte des Polytops $\text{Big}(X) \cap (-K_{S_r})^{\leq 1}$ gerade der Ursprung zusammen mit den Klassen der (-1) -Kurven auf S_r sind. Für die einzelnen Kammern der Zerlegung ist jedoch schon die Bestimmung der Eckpunkte sehr rechenaufwendig und tatsächlich für größere r nicht in angemessener Zeit durchführbar.

k	$\pi_k(S_r)$	Anzahl	Vol(Σ_P)
0	S_5	1	1/1080
1	S_4	16	1/4320
2	S_3	80	1/8640
3	S_2	160	1/8640
4	S_1	80	1/4320
4	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	40	1/2880
5	\mathbb{P}^2	16	1/2160

 Tabelle 3.5: Zariski-Kammervolumina auf S_5

k	$\pi_k(S_r)$	Anzahl	Vol(Σ_P)
0	S_6	1	1/840
1	S_5	27	1/7560
2	S_4	216	1/30240
3	S_3	720	1/60480
4	S_2	1080	1/60480
5	S_1	432	1/30240
5	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	216	1/20160
6	\mathbb{P}^2	72	1/15120

 Tabelle 3.6: Zariski-Kammervolumina auf S_6

k	$\pi_k(S_r)$	Anzahl	Vol(Σ_P)
0	S_7	1	1/240
1	S_6	56	1/6720
2	S_5	765	1/60480
3	S_4	4032	1/241920
4	S_3	10080	1/483840
5	S_2	12096	1/483840
6	S_1	4032	1/241920
6	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	2016	1/161280
7	\mathbb{P}^2	576	1/120960

 Tabelle 3.7: Zariski-Kammervolumina auf S_7

k	$\pi_k(S_r)$	Anzahl	Vol (Σ_P)
0	S_8	1	1/9
1	S_7	240	1/2160
2	S_6	6720	1/60480
3	S_5	60480	1/544320
4	S_4	241920	1/2177280
5	S_3	483840	1/4354560
6	S_2	483840	1/4354560
7	S_1	138240	1/2177280
7	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	69120	1/1451520
8	\mathbb{P}^2	17280	1/1088640

Tabelle 3.8: Zariski-Kammervolumina auf S_8

Kapitel 4

Flächen mit big antikanonischem Bündel

Nachdem wir die Zariski-Kammer-Zerlegung für den Fall von Del-Pezzo-Flächen im Hinblick auf die Kammergrößen vollständig untersucht haben, wenden wir uns Flächen zu, deren antikanonischer Divisor nicht mehr als ample vorausgesetzt ist. Theorem 2.10 legt als sinnvolle Lockerung der Del-Pezzo-Bedingung die Voraussetzung nahe, dass $-K_X$ statt ample nur mehr big sein soll. Dies garantiert einerseits die Endlichkeit des Volumens der Nef-Kammer und andererseits ist für solche Flächen der Mori-Kegel $\overline{NE}(X)$ nach Satz 2.9 endlich erzeugt. In der Arbeit [26] von Testa, Várilly-Alvarado, Velasco werden solche Flächen untersucht und es finden sich dort Beispiele für Typen von Flächen, deren antikanonischer Divisor big ist. Beispielsweise ist dies klar für rationale Flächen, deren antikanonischer Divisor positiven Selbstschnitt hat. Eine andere Klasse big antikanonischer Flächen sind Aufblasungen der Hirzebruchflächen X_e mit $e \geq 1$ in beliebig vielen Punkten, die auf dem Schnitt C_0 und auf höchstens $e + 1$ verschiedenen Fasern liegen. In [26, Theorem 4.3] wird darüber hinaus eine Klassifikation derjenigen Flächen angegeben, die Aufblasungen der projektiven Ebene \mathbb{P}^2 sind und deren antikanonischer Divisor big und effektiv ist. Diese Klassifikation wollen wir als Ausgangspunkt für weitere Berechnungen von Kammervolumen verwenden, um die Anwendung der Resultate aus Kapitel 2 vorzuführen.

Proposition 4.1 ([26] Theorem 4.3). *Ist X die Aufblasung des \mathbb{P}^2 in r Punkten und ist $-K_X$ big und effektiv, so gilt einer der folgenden Fälle*

- $K_X^2 > 0$, oder äquivalenterweise $r \leq 8$, oder
- es ist $r = a + b$ und a der Aufblasungspunkte liegen auf einer Geraden und die b übrigen liegen auf einem irreduziblen Kegelschnitt, und es gilt $ab = 0$ oder $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} > 1$, oder
- es ist $r = a_1 + a_2 + a_3$ und es gibt drei Geraden L_1, L_2, L_3 , so dass genau a_i der Aufblasungspunkte auf L_i aber nicht auf einer der anderen beiden Geraden liegen, und es gilt $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 0$ oder $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} > 1$.

Im Fall, dass alle Aufblasungspunkte auf einem (möglicherweise reduziblen) Kegelschnitt C liegen, folgt die Bigness von $-K_X$ aus der Zerlegung

$$-K_X = 3L - E_1 - \dots - E_r = L + \tilde{C}$$

in den big Divisor L und die eigentlich transformierte \tilde{C} von C . Die übrigen Fälle werden in [26] mit Hilfe des Wurzelsystems der (-1) - und (-2) -Klassen auf X behandelt. Als

interessante Beispiele stellen sich die Flächen, die in der zweiten Klasse der Klassifikation liegen und $ab = 0$ erfüllen sowie diejenigen in der dritten Klasse mit $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 0$, heraus. Wir werden diese in den beiden folgenden Abschnitten behandeln.

4.1. Aufblasungen von Punkten auf einem glatten Kegelschnitt im \mathbb{P}^2

Wir betrachten Aufblasungen des \mathbb{P}^2 in r Punkten auf einem glatten Kegelschnitt. Man beachte, dass die glatten Kegelschnitte gerade die rationalen normalen Kurven des \mathbb{P}^2 sind. Die Tatsache, dass der Mori-Kegel polyedrisch ist, folgt somit unabhängig von Satz 2.9 aus dem allgemeinen Resultat von Castravet und Tevelev ([7]), dass für Aufblasung des \mathbb{P}^n in $r \geq n + 3$ Punkten, die auf einer rationalen normalen Kurve liegen, der Cox-Ring der resultierenden Varietäten stets endlich erzeugt ist. Offenbar ist im Fall $r \leq 5$ die betrachtete Aufblasung eine Del-Pezzo-Fläche und die endliche Erzeugung ist ebenfalls klar.

Entsprechend der Vorgehensweise aus Abschnitt 2.3 ist der erste Schritt zur Untersuchung der Kammerzerlegung die Bestimmung der negativen Kurven auf der betrachteten Fläche.

Satz 4.2. *Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ ein glatter Kegelschnitt, $r \geq 5$, und seien p_1, \dots, p_r verschiedene Punkte auf C . Betrachte die Aufblasung $\pi : X_C^r \rightarrow \mathbb{P}^2$ in diesen Punkten. Die Fläche X_C^r enthält $\binom{r+1}{2} + 1$ negative Kurven, nämlich:*

- Die exzeptionellen Kurven E_1, \dots, E_r ,
- die eigentlich Transformierte C' von C ,
- die eigentlich Transformierten E_{ij} von Geraden durch Punkte p_i und p_j für $i \neq j$.

Definition 4.3. Wir bezeichnen die exzeptionellen Kurven E_1, \dots, E_r als (-1) -Kurven von Typ 1 und die übrigen (-1) -Kurven E_{ij} als solche von Typ 2.

Beweis. Man überlegt sich leicht, dass die aufgelisteten Kurven sämtlich negativen Selbstschnitt haben. Genauer:

$$E_i^2 = E_{kl}^2 = -1, \quad C'^2 = 4 - r.$$

Wir haben noch zu zeigen, dass es keine weiteren negativen Kurven auf X_C^r gibt. Wie oben bezeichne $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ den Pullback einer Gerade im \mathbb{P}^2 . Dann lässt sich jeder Divisor $D \subset X_C^r$ schreiben als $D = dL - \sum_{i=1}^r m_i E_i$ mit $d, m_i \in \mathbb{Z}$. Sei nun D eine von C' und den exzeptionellen Kurven E_i verschiedene negative Kurve. Aus der Adjunktionsformel folgt die Ungleichung $-K_{X_C^r} \cdot D \leq 1$, oder

$$3d - \sum m_i \leq 1.$$

Wir betrachten nun die eigentlich Transformierte von C . Diese entspricht gerade der Klasse $2L - \sum m_i E_i$ und hat mit D den (nicht-negativen) Schnitt $2d - \sum m_i$. Es folgt

$$1 \geq 3d - \sum m_i = d + (2d - \sum m_i) \geq d \geq 1,$$

also $d = 1$, $\sum m_i = 2$. Folglich ist D die eigentlich Transformierte einer Geraden durch zwei der Punkte p_1, \dots, p_r . \square

Wenden wir uns nun gemäß Abschnitt 2.3 den aus der Kontraktion von Mengen paarweise disjunkter (-1) -Kurven resultierenden Flächen zu. Anders als bei Del-Pezzo-Flächen ist hier nicht unmittelbar klar, welche glatte Fläche aus der Kontraktion resultiert. Genauere Informationen über die resultierende Fläche sind aber unentbehrlich, wollen wir die Theoreme 2.5 und 2.10 zur Volumenbestimmung heranziehen. Ein wichtiger Schritt in diese Richtung liegt in der folgenden Beobachtung.

Proposition 4.4. *Für $r \geq 5$ sei $X_C^r \rightarrow \mathbb{P}^2$ die Aufblasung des \mathbb{P}^2 in r Punkten auf einem glatten Kegelschnitt C und C_1, \dots, C_{r-1} disjunkte (-1) -Kurven von Typ 2. Dann resultiert aus der Kontraktion dieser Kurven die Hirzebruchfläche X_{r-4} .*

Beweis. Jede der Kurven C_i hat eine Darstellung $C_i = L - E_k - E_l$ mit exceptionellen Kurven E_k, E_l von Typ 1. Für den Schnitt mit C' gilt also

$$C' \cdot C_i = (2L - E_1 - \dots - E_r) \cdot (L - E_k - E_l) = 0.$$

Bezeichnet $\pi : X_C^r \rightarrow Y$ die Kontraktion der Kurven C_1, \dots, C_{r-1} , so existiert folglich eine Kurve $C_0 \subset Y$ deren Pullback C' ist. Diese hat Selbstschnitt

$$C_0^2 = C'^2 = 4 - r < -1.$$

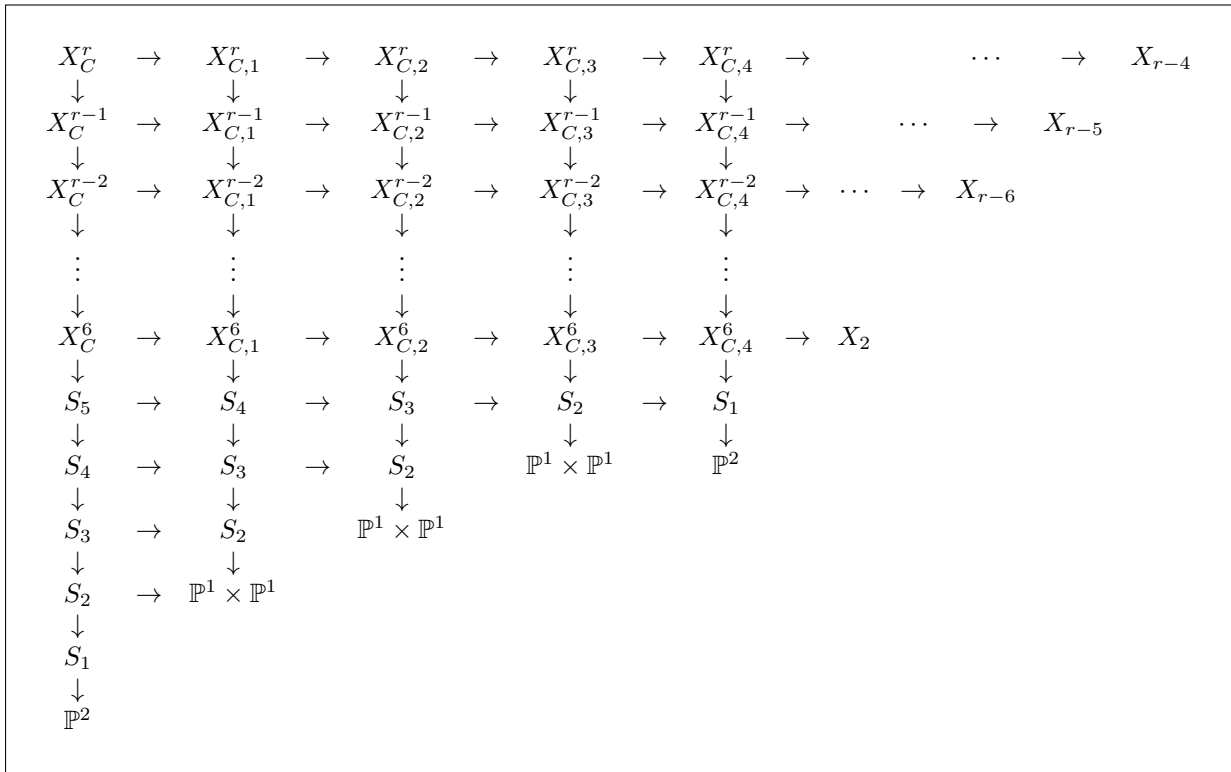
Ferner überlegt man sich, dass Y eine minimale Fläche ist: Zwei (-1) -Kurven von Typ 2 sind genau dann disjunkt, wenn sie eigentlich Transformierte von Geraden durch einen gemeinsamen Aufblasungspunkt sind, das heißt, falls sie sich als $L - E_i - E_j$ und $L - E_i - E_k$ schreiben lassen. Wir können also annehmen, dass für $i = 1, \dots, r - 1$ gilt

$$C_i = L - E_i - E_r.$$

Nun schneidet jede der übrigen (-1) -Kurven auf X_C^r eine dieser Kurven C_i . (Wähle etwa für E_j die Kurve C_j und für E_{kl} die Kurve C_m , $m \neq k, l$.) Die Fläche Y enthält folglich keine (-1) -Kurven, ist also minimal. Ferner ist die Abbildung π birational, das heißt Y ist eine minimale rationale Fläche, die eine Kurve mit negativem Selbstschnitt $4 - r$ enthält. Diese Bedingungen erfüllt nur die Hirzebruchfläche X_{r-4} . \square

Was bedeutet Proposition 4.4 nun für die Kontraktion $X_C^r \rightarrow Y$ von $k \leq r - 1$ disjunkten Kurven von Typ 2? Man überlegt sich leicht, dass für $k \neq 3$ die einzige Möglichkeit für k disjunkte Kurven von Typ 2 in den eigentlich Transformierten von Geraden durch einen gemeinsamen Aufblasungspunkt, etwa p_1 , besteht. Ein solches Set $E_{1,2}, \dots, E_{1,k+1}$ lässt sich durch die eigentlich Transformierten $E_{1,k+2}, \dots, E_{1,r}$ der übrigen Geraden durch p_1 zu einem maximal negativ definiten System vervollständigen. Folglich besagt Proposition 4.4, dass in diesem Fall Y eine Aufblasung der Hirzebruchfläche X_{r-4} in $r - k - 1$ Punkten ist. Man könnte erwarten, dass die Lage dieser Punkte in einer gewissen Weise speziell ist. Tatsächlich kann man sich aber überlegen, dass die Aufblasung von $e + 3$ Punkten auf X_e , die nicht im Schnitt C liegen und von denen keine zwei auf der gleichen Faser f liegen, schon isomorph zu X_C^{e+4} ist.

Wir bezeichnen die aus der Kontraktion von $k \neq 3$ disjunkten Kurven von Typ 2 auf X_C^r resultierende Fläche mit $X_{C,k}^r$. Für disjunkte Tripel von Kurven von Typ 2 gibt es folgende Möglichkeiten:


 Abb. 4.1: Kontraktion der (-1) -Kurven auf X_C^r

- $E_{i,j}, E_{i,k}, E_{i,l}$ für paarweise verschiedene $1 \leq i, j, k, l \leq r$. In diesem Fall ist die resultierende Fläche wiederum eine Aufblasung der Hirzebruchfläche X_{r-4} in $r - 4$ Punkten und wird mit $X_{C,3}^r$ bezeichnet.
- $E_{i,j}, E_{j,k}, E_{k,i}$ für paarweise verschiedene $1 \leq i, j, k \leq r$. Die aus der Kontraktion dieser Kurven resultierende Fläche bezeichnen wir mit $X_{C,3}^{r\bullet}$. Aufschluss über ihre Gestalt erhalten wir durch Betrachtung ihrer negativen Kurven. Neben der $(4 - r)$ -Kurve $\pi(C')$ enthält sie nur noch die Bilder der $r - 3$ exzeptionellen Kurven von Typ 1 E_l mit $l \neq i, j, k$ als negative Kurven. Diese lassen sich kontrahieren, wobei sich der Selbstschnitt der Bildkurve von C' in jedem Schritt um 1 erhöht. Wir erhalten schließlich eine glatte minimale Fläche ohne negative Kurven, deren Néron-Severi-Vektorraum die Dimension $(r + 1) - 3 - (r - 3) = 1$ hat. Folglich ist $X_{C,3}^{r\bullet}$ die Aufblasung des \mathbb{P}^2 in $r - 3$ Punkten auf einer Geraden. Diese Fläche wird in Abschnitt 4.2 genauer behandelt.

Die Zusammenziehung von (-1) -Kurven von Typ 1 verursacht weniger Schwierigkeiten, denn jede dieser Kurven ist exzeptionell bezüglich der Aufblasung der r gegebenen Punkte auf dem Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}^2$. Das bedeutet, dass die aus der Kontraktion einer solchen Kurve resultierende Fläche einfach die Aufblasung X_C^{r-1} der übrigen $r - 1$ Punkte auf C ist.

4.1.1. Volumina der Zariski-Kammern

Für die Bestimmung der Kammervolumina halten wir als erstes fest wie Theorem 2.5 in der aktuellen Situation aussieht:

Satz 4.5. *Sei $X_C^r \rightarrow \mathbb{P}^2$ die Aufblasung von $r \geq 6$ Punkten auf einem glatten Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}^2$ und C' die eigentlich transformierte von C auf X_C^r . Dann gilt für die Zariskikammer Σ_P eines big und nef Divisors P*

- (i) $\text{Vol}(\Sigma_P) = \infty$, falls $C' \in \text{Null}(P)$ und
- (ii) $\text{Vol}(\Sigma_P) = \frac{(r-k+1)!}{(r+1)!} \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_{C_1, \dots, C_k}(X_C^r)))$, falls $\text{Null}(P) = \{C_1, \dots, C_k\}$ aus (-1) -Kurven besteht.

Beweis. Da für $r \geq 6$ der Selbstschnitt C'^2 echt kleiner als -1 ist, und alle übrigen negativen Kurven (-1) -Kurven sind, ist dies einfach Theorem 2.5. \square

Wir haben also nun die Volumina der Nef-Kegel auf den Flächen $\pi_{C_1, \dots, C_k}(X_C^r)$ für (-1) -Kurven C_1, \dots, C_k zu bestimmen.

Bemerkung. 1. Wie wir gesehen haben, lässt sich X_C^r entweder als Aufblasung von \mathbb{P}^2 in r Punkten oder als Aufblasung der Hirzebruchfläche X_{r-4} in $r-1$ Punkten auffassen. Als Basis für $N^1(X_C^r)$ haben wir also die Wahl zwischen L, E_1, \dots, E_r und $C, f, E_{1,2}, \dots, E_{1,r}$, wo L die eigentlich transformierte einer Gerade in \mathbb{P}^2 darstellt und C und f die eigentlich transformierten eines Schnitts beziehungsweise einer Faser in X_{r-4} bezeichnen. Im Folgenden bezeichnen wir die Basen als Standard-, beziehungsweise Hirzebruch-Basis.

2. Eine Sonderrolle spielen die Flächen $X_{C,1}^r$, die aus der Kontraktion einer der Kurven E_{ij} vom Typ 2 resultieren. Sie enthalten $r-2$ der exzeptionellen Kurven E_1, \dots, E_r , die jeweils die Kurve C' einfach schneiden und untereinander paarweise disjunkt sind. Eine Kontraktion dieser $r-2$ Kurven liefert eine minimale rationale Fläche, die eine Kurve C mit Selbstschnitt $(4-r) + (r-2) = 2$ und keine negative Kurven enthält. Die Fläche $X_{C,1}^r$ lässt sich also als Aufblasung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in $r-2$ Punkten auf einer Kurve C aus der Klasse $f_1 + f_2$ auffassen. Ferner liegen keine zwei der Aufblasungspunkte auf einer gemeinsamen Faser f_1 oder f_2 . Es steht folglich für $N^1(X_{C,1}^r)$ außer der Hirzebruchbasis noch die „ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ -Basis“ $f_1, f_2, E_1, \dots, E_{r-2}$ zur Verfügung.

Satz 4.6. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r)) = \frac{1}{r+1} \cdot [2 \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_C^{r-1})) + \binom{r-2}{2} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r))], \quad (4.1)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r)) = \frac{1}{r} \cdot [\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^{r-1})) + (r-4) \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r))], \quad (4.2)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r)) = \frac{1}{r-1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^{r-1})) + \frac{r-4}{2} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,3}^r)) \right], \quad (4.3)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,k}^r)) = \frac{1}{r-k+1} \cdot \frac{r-k-1}{k-1} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,k+1}^r)) \quad \text{für } k \geq 3, \quad (4.4)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{r-4})) = \frac{1}{4 \cdot (r-2)}. \quad (4.5)$$

Beweis. Das Volumen des Nef-Kegels auf der Hirzebruchfläche X_{r-4} haben wir bereits in Beispiel 2.2 bestimmt (Setze dort $g = 0$, $e = r-4$).

Für die übrigen Formeln verwenden wir analog zum Beweis von Theorem 2.10 eine geschickte Zerlegung des Polytops $\mathcal{C}_{\text{Nef}(X)}$ in Pyramiden, deren Grundseitenvolumina berechenbar sind. Man beachte, dass die Konstruktion des Bezugsdivisors D im Beweis von Theorem 2.10 nicht die einzige günstige Wahl einer Pyramidenspitze für die Zerlegung ist. Tatsächlich erweist sich hier eine alternative Wahl als günstiger. Für ein Vorgehen wie in Theorem 2.10 benötigen wir einen Punkt, der in allen das Polytop bestimmenden Hyperebenen liegt, die nicht durch den Schnitt mit (-1) -Kurven gegeben sind. In unserem Fall sind dies die Hyperebenen C^\perp und $(-K_X)^{\perp 1}$. Darüber hinaus wird man sich wünschen, dass der Punkt auf möglichst vielen weiteren der bestimmenden Hyperebenen liegt, um die Zahl der zu berechnenden Pyramiden niedrig zu halten. Man beachte, dass potentiell jeder Punkt $D \in (-K_X)^{>0}$ gewählt werden kann. Liegt der Punkt außerhalb von $\mathcal{C}_{\text{Nef}(X)}$, welches durch gewisse Ungleichung U_1, \dots, U_m mit entsprechenden Hyperebenen H_1, \dots, H_m gegeben ist, so erfüllen die Koeffizienten von D bezüglich der Gitterbasis einige der Ungleichungen, sagen wir U_1 bis U_j , nicht. Die Summe der Volumina der Pyramiden P_{j+1}, \dots, P_m mit Grundhyperebenen H_{j+1}, \dots, H_m und Spitze P entspricht dann gerade der Summe der Volumina des Polytops $\mathcal{C}_{\text{Nef}(X)}$ und der Pyramiden P_1, \dots, P_j mit Grundseiten H_1, \dots, H_j . Es gilt also

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \sum_{i=j+1}^m \text{Vol}(P_i) - \sum_{i=1}^j \text{Vol}(P_i).$$

Ob das Volumen einer Teilpyramide mit Grundseite $\text{Nef}(X) \cap E^\perp$ mit positivem oder negativem Vorzeichen vorkommt, lässt sich direkt vom Schnittprodukt $D \cdot E$ ablesen. Für jede im obigen Sinne günstige Wahl eines Bezugsdivisors D gilt also weiterhin die Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{E \text{ } (-1)\text{-Kurve}} (D \cdot E) \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_E X)) \quad (4.6)$$

aus Theorem 2.10.

Nach dieser Vorüberlegung beweisen wir nun der Reihe nach die behaupteten Formeln. *Zu (4.1)*: Die Erzeuger des Mori-Kegels $\overline{\text{NE}}(X_C^r)$ sind nach Satz 2.9 gerade die in Satz 4.2 bestimmten negativen Kurven. Das für das Nef-Kegel-Volumen zu bestimmende Polytop $\text{Nef}(X_C^r) \cap (-K_{X_C^r})^{\leq 1}$ ist folglich in der Standardbasis durch die durch folgende Gleichungen beschriebenen Hyperebenen begrenzt:

$$0 = x_j \quad \text{für } 2 \leq j \leq r+1 \quad (4.7)$$

$$0 = x_1 + x_i + x_j \quad \text{für } 2 \leq i < j \leq r+1 \quad (4.8)$$

$$0 = 2x_1 + x_2 + \dots + x_{r+1} \quad (4.9)$$

$$1 = 3x_1 + x_2 + \dots + x_{r+1}. \quad (4.10)$$

Ein im oben beschriebenen Sinne günstiger Punkt $p = (p_1, \dots, p_{r+1}) \in N^1(X_C^r)$ muss die letzten beiden Gleichungen erfüllen, das heißt insbesondere muss gelten

$$1 = p_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{r+1} p_i.$$

Wir wählen den Punkt $p = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$, welcher zusätzlich $r - 4$ der Gleichungen (4.7) und $\binom{4}{2}$ der Gleichungen (4.8) erfüllt. Man beachte, dass p selbst eine nef Klasse darstellt, und folglich in der Summation der Pyramidenvolumina keine negativen Vorzeichen vorkommen. Es treten drei verschiedene Typen von Pyramiden auf, die in Tabelle 4.1.1 aufgelistet sind.

Hyperebene	Anzahl	Grundseite	$(D \cdot E)$
E_j^\perp	4	$\text{Nef}(X_C^{r-1})$	$\frac{1}{2}$
E_{ij}^\perp	$\binom{r-4}{2}$	$\text{Nef}(X_{C,1}^r)$	1
E_{ij}^\perp	$4 \cdot (r - 4)$	$\text{Nef}(X_{C,1}^r)$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 4.1: Pyramiden für die Berechnung von $\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r))$, mit $p = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$

Wie wir bereits gesehen haben, resultiert die Zusammenziehung einer der Kurven E_j in der Fläche X_C^{r-1} und die Zusammenziehung einer Kurve E_{ij} in der Fläche $X_{C,1}^r$. Folglich verhalten sich die Grundseiten gerade wie in der Tabelle dargestellt. Die Schnittprodukte $D \cdot E$ eines Divisors D aus der Klasse p mit den (-1) -Kurven lassen sich einfach bestimmen und sind ebenfalls in Tabelle 4.1.1 aufgelistet. Aufgrund der Identität

$$\binom{r-4}{2} + 2(r-4) = \binom{r-3}{2} + (r-4) = \binom{r-2}{2} - 1$$

liefert die Anwendung von (4.6) gerade die behauptete Formel (4.1).

Zu (4.2): Die Fläche $X_{C,1}^r$ entsteht aus der Fläche X_C^r durch Kontraktion einer der Kurven E_{ij} . Wir können der Einfachheit halber $i = 1$ und $j = 2$ annehmen. Die negativen Kurven auf $X_{C,1}^r$ sind gerade die Bildkurven derjenigen negativen Kurven auf X_C^r , die $E_{1,2}$ nicht schneiden. Dies sind gerade

- die Kurve C ,
- die Kurven E_3, \dots, E_r und
- die Kurven $E_{1,j}$ und $E_{2,j}$ für $3 \leq j \leq r$.

Wir können ohne Verwechslungsgefahr die Bildkurven wie ihre Urbilder bezeichnen. Nach Bemerkung 4.1.1 können wir als Basis von $N^1(X_{C,1}^r)$ die sogenannte $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ -Basis $f_1, f_2, E_3, \dots, E_r$ wählen. Es gelten die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} C &= f_1 + f_2 - E_3 - \dots - E_r \\ E_{1,j} &= f_1 - E_j \\ E_{2,k} &= f_2 - E_k. \end{aligned}$$

Die Hyperebenen, die das Polytop $\mathcal{C}_{\text{Nef}(X_{C,1}^r)}$ definieren, werden also durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$0 = x_j \quad \text{für } 3 \leq j \leq r \quad (4.11)$$

$$0 = x_1 + x_j \quad \text{für } 3 \leq j \leq r \quad (4.12)$$

$$0 = x_2 + x_j \quad \text{für } 3 \leq j \leq r \quad (4.13)$$

$$0 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r \quad (4.14)$$

$$1 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_r. \quad (4.15)$$

Unser Referenzpunkt p soll wieder wenigstens die letzten beiden Gleichungen erfüllen, das bedeutet es muss gelten

$$1 = x_1 + x_2 = - \sum_{k=3}^r x_k.$$

Wir wählen den Punkt $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{r-5}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2})$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ -Basis, also

$$D \equiv \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + (r-5)E_3 - E_4 - \dots - E_r).$$

Der Punkt p erfüllt zusätzlich jeweils $r-3$ der Gleichungen (4.12) und (4.13). Folglich liegt p nur außerhalb der Hyperebenen $E_3^\perp, \dots, E_r^\perp$ sowie $E_{1,3}^\perp$ und $E_{2,3}^\perp$. Die entsprechenden Pyramiden sind in Tabelle 4.2 festgehalten. Die jeweiligen Schnittprodukte ergeben sich direkt aus dem Schnittverhalten der Klassen $f_1, f_2, E_3, \dots, E_r$.

Hyperebene	Anzahl	Grundseite	$(D \cdot E)$
E_3^\perp	1	$X_{C,1}^{r-1}$	$-\frac{r-5}{2}$
E_j^\perp	$r-3$	$X_{C,1}^{r-1}$	$\frac{1}{2}$
$E_{1,3}^\perp$	1	$X_{C,2}^r$	$\frac{r-4}{2}$
$E_{2,3}^\perp$	1	$X_{C,2}^r$	$\frac{r-4}{2}$

Tabelle 4.2: Pyramiden für die Berechnung von $\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r))$, mit $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{r-5}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2})$

Formel (4.2) folgt dann durch Anwendung von (4.6).

Zu (4.3): Die Fläche $\text{Nef}(X_{C,2}^r)$ ergibt sich aus der Kontraktion zweier disjunkter Kurven vom Typ zwei, sagen wir $E_{1,2}$ und $E_{1,3}$. Die negativen Kurven auf $\text{Nef}(X_{C,2}^r)$ sind also (nach der Überlegung aus dem vorigen Fall) gerade die Bilder der Kurven

- C ,
- E_4, \dots, E_r ,
- $E_{1,j}$ für $4 \leq j \leq r$ und
- $E_{2,3}$.

Diesen entsprechen in der Hirzebruch-Basis $C, f, C_3, \dots, C_{r-1}$ gerade die Klassen

- C ,
- $f - C_3, \dots, f - C_{r-1}$,
- C_i für $3 \leq i \leq r-1$ und
- $C + (r-4)f - C_3 - \dots - C_{r-1}$.

Die Hyperebenen, die das Polytop $\mathcal{C}_{\text{Nef}(X_{C,1}^r)}$ definieren, werden also bezüglich der Hirzebruch-

Basis $C, f, C_3, \dots, C_{r-1}$ durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$0 = (4 - r)x_1 + x_2 \quad (4.16)$$

$$0 = x_1 + x_j \quad \text{für } 3 \leq j \leq r - 1 \quad (4.17)$$

$$0 = x_j \quad \text{für } 3 \leq j \leq r - 1 \quad (4.18)$$

$$0 = x_2 + x_3 + \dots + x_{r-1} \quad (4.19)$$

$$1 = (6 - r)x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_{r-1}. \quad (4.20)$$

Wir wählen

$$p = \left(\frac{1}{2}, \frac{r-4}{2}, \frac{4-r}{2}, 0, \dots, 0 \right)$$

und erhalten die in Tabelle 4.3 festgehaltenen Teilpyramiden.

Hyperebene	Anzahl	Grundseite	$(D \cdot E)$
C_3^\perp	1	$X_{C,2}^{r-1}$	$-\frac{r-5}{2}$
C_j^\perp	$r-4$	$X_{C,2}^{r-1}$	$\frac{1}{2}$
$(f - C_3)^\perp$	1	$X_{C,3}^r$	$\frac{r-4}{2}$

Tabelle 4.3: Pyramiden für die Berechnung von $\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r))$, mit $p = (\frac{1}{2}, \frac{r-4}{2}, \frac{4-r}{2}, 0, \dots, 0)$

Die Anwendung von (4.6) liefert somit (4.3).

Zu (4.4): Wie oben verwenden wir die Hirzebruch-Basis $C, f, C_{l+1}, \dots, C_{r-1}$ des Vektorraums $N^1(X_{C,l}^r)$. Wegen $l \geq 3$ sind die negativen Kurven auf $X_{C,l}^r$ genau die folgenden:

- Die $(4 - r)$ -Kurve C ,
- die exzeptionellen Kurven C_{l+1}, \dots, C_{r-1} und
- die eigentlich Transformierten von Fasern durch die Aufblasungspunkte, das heißt die Kurven $f - C_{l+1}, \dots, f - C_{r-1}$.

Das für das Nef-Kegel-Volumen zu bestimmende Polytop $P := \text{Nef}(X_{C,l}^r) \cap (-K_{X_{C,l}^r})^{\leq 1}$ ist also durch die $2(r - l)$ Hyperebenen definiert, die durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$0 = x_j \quad \text{für } 3 \leq j \leq r - l + 1 \quad (4.21)$$

$$0 = x_1 + x_j \quad \text{für } 3 \leq j \leq r - l + 1 \quad (4.22)$$

$$0 = (4 - r)x_1 + x_2 \quad (4.23)$$

$$1 = (6 - r)x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_{r-l+1}. \quad (4.24)$$

Wir wählen

$$p = \left(\frac{1}{l-1}, \frac{r-4}{l-1}, -\frac{1}{l-1}, \dots, -\frac{1}{l-1} \right).$$

und erhalten die in Tabelle 4.4 festgehaltenen Teilpyramiden. Formel (4.6) liefert somit die behauptete Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,l}^r)) = (r - l - 1) \cdot \frac{1}{r - l + 1} \cdot \frac{1}{l - 1} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,l+1}^r)).$$

□

Hyperebene	Anzahl	Grundseite	$(D \cdot E)$
C_j^1	$r - l - 1$	$X_{C,l+1}^r$	$\frac{1}{l-1}$

 Tabelle 4.4: Pyramiden für die Berechnung von $\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,l}^r))$, $l \geq 3$ mit $p = (\frac{1}{l-1}, \frac{r-4}{l-1}, -\frac{1}{l-1}, \dots, -\frac{1}{l-1})$

4.2. Aufblasung des \mathbb{P}^2 in Punkten auf zwei Geraden

Betrachten wir noch eine weitere Klasse von Aufblasungen der projektiven Ebene mit big und effektivem antikanonischem Divisor aus der oben angegebenen Klassifikation aus [26]: wir betrachten eine Fläche $X^{a,b}$, die aus der Aufblasung des \mathbb{P}^2 in $r = a + b$ Punkten entsteht, wobei a der Punkte auf einer Geraden L_1 und b der Punkte auf einer Geraden L_2 liegen. Der Schnittpunkt der Geraden sei nicht unter den Aufblasungspunkten. Es wird sich als zweckmäßig erweisen stets $a \geq b$ anzunehmen. Genau wie im Fall von Aufblasungspunkten auf einem irreduziblen Kegelschnitt sieht man, dass für eine negative Kurve $D = dL - \sum_{i=1}^r a_i E_i$ auf $X^{a,b}$ schon $d = 1$, $\sum_{i=1}^r a_i = 2$ gelten muss. Die negativen Kurven auf $X^{a,b}$ sind also die eigentlich Transformierten der Geraden L_1 und L_2 , die exzeptionellen Kurven $E_1^1, \dots, E_a^1, E_1^2, \dots, E_b^2$, sowie die eigentlich Transformierten der Geraden durch je einen der Aufblasungspunkte auf den Geraden L_1 und L_2 , also Kurven in den Klassen $L - E_i^1 - E_j^2$ für $1 \leq i \leq a$ und $1 \leq j \leq b$.

Die Klassen negativer Kurven sind also folgende:

$$E_i^1 \quad (4.25)$$

$$E_j^2 \quad (4.26)$$

$$L - E_i^1 - E_j^2 \quad (4.27)$$

$$L_1 - E_1^1 - \dots - E_a^1 \quad (4.28)$$

$$L_2 - E_1^2 - \dots - E_b^2. \quad (4.29)$$

Der wesentliche Schritt bei der Berechnung der Volumina der Zariski-Kammern ist wiederum die Bestimmung der Nef-Kegel-Volumina der aus der Kontraktion von Mengen von (-1) -Kurven, deren Schnittmatrizen negativ definit sind, resultierenden Flächen. Die folgende Proposition gibt Aufschluss darüber, welche Flächentypen vorkommen. Wir bezeichnen mit $X_e^{a,b}$ die Aufblasung der Hirzebruch-Fläche X_e in a Punkten auf einer Faser f und b Punkten auf dem Schnitt C . Im Fall $e = 0$ ist $X_e = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, das heißt der Schnitt C entspricht einer Geraden aus der zu f orthogonalen Geradenschar. Wir können in diesem Fall also wiederum stets $a \geq b$ annehmen.

Proposition 4.7. *Es sei S_{rpq} eine Menge von (-1) -Kurven auf $X^{a,b}$ mit negativ definiten Schnittmatrix, wo r, p, q die Anzahlen der Kurven vom Typ $\widetilde{L}_{ij} = L - E_i^1 - E_j^2$, E_i^1 beziehungsweise E_j^2 in S bezeichnen. Dann schneiden sich im Fall $r \geq 2$ alle Geraden L_{ij} , deren eigentlich Transformierten in S_{rpq} sind, entweder in einem Aufblasungspunkt auf L_1 oder in einem Aufblasungspunkt auf L_2 . Es gilt*

$$\pi_{S_{rpq}}(X^{a,b}) = \begin{cases} X^{a-p,b-q} & , \text{ falls } r = 0 \\ X_{r-1}^{a-p-1,b-q-r} & , \text{ falls sich die } r \text{ Geraden } L_{ij} \text{ auf } L_1 \text{ schneiden} \\ X_{r-1}^{b-q-1,a-p-r} & , \text{ falls sich die } r \text{ Geraden } L_{ij} \text{ auf } L_2 \text{ schneiden.} \end{cases}$$

Wir können also aus Theorem 2.5 die Kammervolumina auf $X^{a,b}$ ablesen.

Korollar 4.8. *Es sei P ein big und nef Divisor auf $X^{a,b}$ mit $\text{Null}(P) = S_{rpq}$. Dann gilt*

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \begin{cases} \frac{(a+b+1-p-q)!}{(a+b+1)!} \text{Vol}(\text{Nef}(X^{a-p,b-q})) \\ \frac{(a+b+1-r-p-q)!}{(a+b+1)!} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{r-1}^{a-p-1,b-q-r})) \\ \frac{(a+b+1-r-p-q)!}{(a+b+1)!} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{r-1}^{b-q-1,a-p-r})) \end{cases}$$

mit der Fallunterscheidung wie in Proposition 4.7.

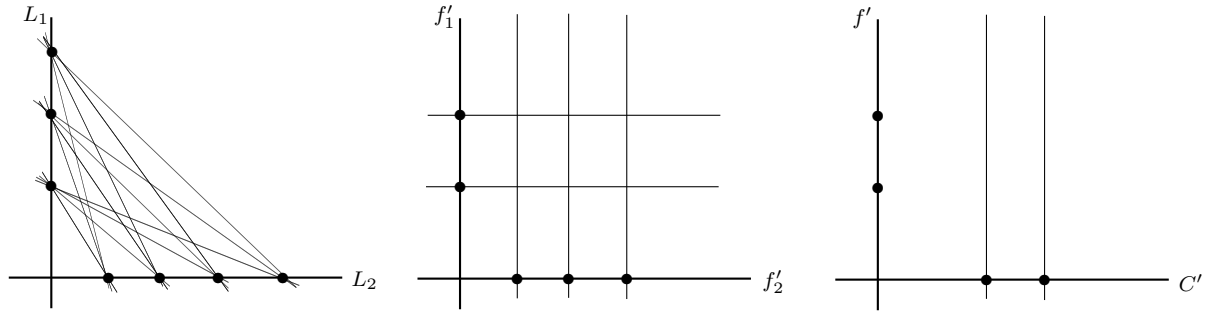


Abb. 4.2: Negative Kurven auf $X^{a,b}$, $X_0^{a,b}$ und $X_e^{a,b}$ für $e \geq 1$

Beweis. Klären wir zunächst welche Flächen aus der Kontraktion der (-1) -Kurven resultieren. Offensichtlich ist dies für die exzeptionellen Kurven E_i^1 und E_j^2 . Die resultierende Flächen sind $X^{(a-1)b}$ beziehungsweise $X^{a(b-1)}$. Induktiv folgt die Proposition im Fall $r = 0$. Die übrigen (-1) -Kurven sind vom Typ $L - E_i^1 - E_j^2$ und haben trivialen Schnitt mit den Kurven \widetilde{L}_1 und \widetilde{L}_2 , sowie mit allen exzeptionellen Kurven außer E_i^1 und E_j^2 , sowie mit den eigentlich Transformaten von Geraden, die durch einen der Punkte P_i^1 oder P_j^2 gehen. Diese Kurven sind also genau die Pullbacks der negativen Kurven auf der resultierenden Fläche. Wir zeigen, dass die resultierende Fläche die Aufblasung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in $a - 1$ Punkten auf einer Faser f_1 und $b - 1$ Punkten auf einer orthogonalen Faser f_2 ist: Wir können $i = j = 1$ annehmen. Man kontrahiere nacheinander die bezüglich der ursprünglichen Aufblasung exzeptionellen Kurven $E_2^1, \dots, E_a^1, E_2^2, \dots, E_b^2$. Die resultierende Fläche enthält zwei Kurven mit Selbstschnitt 0, die einander einfach schneiden, und keine negative Kurven. Dies kommt nur auf $X_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ vor. Die Lage der Aufblasungspunkte auf zwei Fasern verschiedener Scharen folgt unmittelbar aus dem Schnittverhalten der Kurven \widetilde{L}_1 und \widetilde{L}_2 . Dieses Argument zeigt schon die Aussage der Proposition im Fall $r = 1$. Man beachte, dass in diesem Fall die beiden letzten Zweige der Fallunterscheidung übereinstimmen.

Sei nun $r = 2$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die beiden Kurven vom ersten Typ in S_{2pq} die eigentlich Transformaten der Geraden $L_{1,1}$ und $L_{1,2}$, die sich im Punkt P_1^1 auf der Geraden L_1 schneiden, sind. Die Bildkurve der Kurve $L - E_1^1 - E_2^2$ unter der Kontraktion der Kurve $L - E_1^1 - E_2^2$ hat die Darstellung $f_1 - E_2^2$ in der Basis $f_1, f_2, E_2^1, \dots, E_a^1, E_2^2, \dots, E_b^2$, die auf $X_0^{a-1,b-1}$ als Aufblasung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ existiert. Wird

diese kontrahiert, so erhält man eine glatte rationale Fläche mit folgenden negativen Kurven:

$$\begin{aligned} C' &= \pi(f_2 - E_3^2 - \dots - E_b^2) \\ f' &= \pi(f_1 - E_2^1 - \dots - E_1^1) \\ E_j^1, & \quad 2 \leq j \leq a \\ E_i^2, & \quad 3 \leq i \leq b \\ f' - E_i^2, & \quad 3 \leq i \leq b. \end{aligned}$$

Analog zur obigen Argumentation überlegt man sich leicht, dass es sich bei einer rationalen Fläche mit diesen negativen Kurven um die Aufblasung der Hirzebruchfläche X_1 in $a - 1$ Punkten auf einer Faser und $b - 2$ Punkten auf dem Schnitt C handelt. (Man betrachte dazu die aus der Kontraktion sämtlicher Kurven E_j^1 und E_i^2 resultierende Fläche.) Mit anderen Worten:

$$\pi_{S_{2pq}}(X^{a,b}) = X_1^{a-1-p, b-2-q},$$

falls sich die beiden Geraden L_{ij} auf der Geraden L_1 schneiden. Anderenfalls gilt die obige Argumentation analog und es folgt

$$\pi_{S_{2pq}}(X^{a,b}) = X_1^{b-1-q, a-2-p}.$$

Für $r \geq 3$ überlegen wir uns zunächst, dass alle Geraden vom Typ L_{ij} mit eigentlich Transformierter in S durch einen gemeinsamen Punkt auf L_1 oder L_2 gehen müssen. Die Kurven in S haben nach Voraussetzung paarweise triviale Schnitte. Nun sind die eigentlich Transformierten der Kurven L_{ij} Kurven in den Klassen $L - E_i^1 - E_j^2$. Der Schnitt zweier solcher Klassen $L - E_{i_1}^1 - E_{j_1}^2$ und $L - E_{i_2}^1 - E_{j_2}^2$ verschwindet offenbar genau dann, wenn $i_1 = i_2$ oder $j_1 = j_2$ gilt. Folglich haben die eigentlich Transformierten von r Geraden vom Typ L_{ij} triviale Schnitte genau dann, wenn alle Geraden durch einen gemeinsamen Punkt auf L_1 oder L_2 gehen. Ohne Einschränkung nehmen wir an, der gemeinsame Punkt sei P_1^1 auf $L - 1$. Wie wir gesehen haben resultiert aus der Kontraktion zweier der r Kurven vom ersten Typ in S die Fläche $X_1^{a-1, b-2}$. Die Bildkurven der Kurven in $L - E_1^1 - E_j^2$ sind für $j \geq 3$ gerade in den Klassen $f' - E_j^2$. Es handelt sich also um die eigentlich Transformierten von Fasern f durch die Aufblasungspunkte P_j^2 auf C . Für jedes j hat $f' - E_j^2$ Schnitt 0 mit allen negativen Kurven außer E_j^2 . Ihre Kontraktion resultiert also in der Aufblasung der Hirzebruchfläche X_2 in $a - 1$ Punkten auf einer Faser und $b - 3$ Punkten auf dem Schnitt C , das heißt der Fläche $X_2^{a-1, b-3}$. Induktiv folgt die Behauptung für beliebiges $r \geq 3$. □

Die Berechnung des Nef-Kegel-Volumens auf $X^{a,b}$ erfolgt nun mit Hilfe von Theorem 2.10 und der Überlegung am Beginn des Beweises von Satz 4.6, die besagt, dass der Bezugspunkt p nicht notwendigerweise selbst nef sein muss, damit die Volumenformel aus dem Theorem gilt. Wie oben setzen wir bei $X^{a,b}$ und $X_0^{a,b}$ der Einfachheit halber stets $a \geq b$ voraus.

Satz 4.9. *Mit den obigen Bezeichnungen gelten die folgenden Identitäten:*

1.

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X^{a,b})) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \text{ falls } a = b = 0 \\ \frac{1}{2a+2} \text{Vol}(\text{Nef}(X^{a-1,0})) & , \text{ falls } b = 0, a \neq 0 \\ \frac{1}{a+b+1} \cdot \left[\text{Vol}(\text{Nef}(X^{a-1,b})) \right. \\ \quad \left. + \text{Vol}(\text{Nef}(X^{a,b-1})) \right. \\ \quad \left. + (ab - a - b) \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_0^{a-1,b-1})) \right] & , \text{ sonst} \end{cases}$$

2.

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_0^{a,b})) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , \text{ falls } a = b = 0 \\ \frac{1}{a+2} \cdot \left[\text{Vol}(\text{Nef}(X_0^{0,a-1})) - \text{Vol}(\text{Nef}(X_1^{0,a-1})) \right] & , \text{ falls } b = 0, a \neq 0 \\ \frac{1}{a+b+2} \cdot \left[\text{Vol}(\text{Nef}(X_0^{a-1,b})) \right. \\ \quad \left. + b \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_1^{a,b-1})) \right. \\ \quad \left. - \text{Vol}(\text{Nef}(X_1^{b,a-1})) \right] & , \text{ sonst} \end{cases}$$

3.

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_e^{a,b})) = \begin{cases} \frac{1}{4(e+2)} & , \text{ falls } a = b = 0 \\ \frac{1}{a+2} \cdot \frac{1}{e+2} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_e^{a-1,0})) & , \text{ falls } b = 0, a \neq 0 \\ \frac{1}{a+b+2} \cdot \left[\text{Vol}(\text{Nef}(X_e^{a,b-1})) - \text{Vol}(\text{Nef}(X_{e+1}^{a,b-1})) \right] & , \text{ falls } b \neq 0 \end{cases}$$

Beweis. Zu 1. Nach Definition ist $X^{0,0} = \mathbb{P}^2$. Das Nef-Kegel-Volumen ist $\frac{1}{3}$.

Ist $b = 0$ aber $a \neq 0$, liegen also alle Aufblasungspunkte auf einer Geraden $L_1 \subset \mathbb{P}^2$, so sind die negativen Kurven auf $X^{a,b}$ nur die exzeptionellen Kurven $E_1 \dots, E_a$ sowie die eigentlich transformierte \tilde{L}_1 von L_1 . Als Bezugspunkt wählen wir $x = \frac{1}{2} \cdot (L - E_1)$, wobei L die eigentlich transformierte einer allgemeinen Geraden im \mathbb{P}^2 bezeichne. Es gilt $x \in (-K_X)^{=1} \cap \tilde{L}_1^\perp \cap E_j^\perp$ für alle $j \neq 1$. Der Nef-Kegel von $X^{a,0}$ ist also die Pyramide $P_{E_1}^x$, hat also das Volumen

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X^{a,0})) = \frac{1}{2(a+1)} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_{E_1}(X^{a,0}))) = \frac{1}{2(a+1)} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X^{a-1,0})).$$

Betrachten wir nun den Fall $a \neq 0, b \neq 0$. Wir wählen den Bezugspunkt $x = L - E_1 - E_1^2$. Als Klasse einer (-1) -Kurve liegt x offenbar in der Hyperebene $(-K_X)^{=1}$. Ferner gilt

$$(L_1 - E_1^1 - \dots - E_a^1) \cdot x = (L_2 - E_1^2 - \dots - E_b^2) \cdot x = 0$$

und

$$(L - E_i^1 - E_j^2) \cdot x = \begin{cases} -1 & , \text{ falls } i = j = 1 \\ 0 & , \text{ falls } 1 = i \neq j \text{ oder } i \neq j = 1 \\ 1 & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

sowie für $k \in \{1, 2\}$

$$E_i^k \cdot x = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = 1 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die zu berücksichtigenden Pyramiden sind also $P_{L-E_1^1-E_1^2}^x, P_{L-E_1^1-E_2^2}^x, \dots, P_{L-E_1^1-E_b^2}^x$ und $P_{L-E_2^1-E_1^2}^x, \dots, P_{L-E_a^1-E_1^2}^x$, sowie $P_{E_1^1}^x$ und $P_{E_1^2}^x$.

Die Grundseite jeder der Pyramiden $P_{L-E_i^1-E_j^2}^x$ ist nach Proposition 4.7 gerade die Nef-Kammer der Fläche $X_0^{a-1,b-1}$ und die Grundseiten der Pyramiden $P_{E_1^1}^x$ und $P_{E_1^2}^x$ sind nach Proposition 4.7 gerade Nef($X^{a-1,b}$) beziehungsweise Nef($X^{a,b-1}$).

Hyperebene	Anzahl	Grundseite	$(E \cdot x)$
$(L - E_1^1 - E_1^2)^\perp$	1	$X_0^{a-1,b-1}$	-1
$(L - E_i^1 - E_j^2)^\perp$	$(a-1)(b-1)$	$X_0^{a-1,b-1}$	1
$(E_1^1)^\perp$	1	$X^{a-1,b}$	1
$(E_1^2)^\perp$	1	$X^{a,b-1}$	1

Tabelle 4.5: Pyramiden für die Berechnung von $\text{Vol}(\text{Nef}(X^{a,b}))$, $a \geq b > 0$ mit $x = L - E_1^1 - E_1^2$

Die Volumenformel (4.6) liefert folglich

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(X^{a,b})) &= \frac{1}{a+b+1} \sum_{E \text{ } (-1)\text{-Kurve}} (E \cdot x) \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_E(X^{a,b}))) \\ &= \frac{1}{a+b+1} \left[\text{Vol}(\text{Nef}(X^{a-1,b})) + \text{Vol}(\text{Nef}(X^{a,b-1})) \right. \\ &\quad \left. + (a-1)(b-1) \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_0^{a-1,b-1})) - \text{Vol}(\text{Nef}(X_0^{a-1,b-1})) \right], \end{aligned}$$

was der Behauptung entspricht.

Zu 2. Ist $a = b = 0$, so ist definitionsgemäß $X_0^{a,b} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, das heißt $\text{Vol}(\text{Nef}(X_0^{a,b})) = \frac{1}{8}$.

Falls alle Aufblasungspunkte auf einer Faser f_1 liegen, das heißt, falls $b = 0, a \neq 0$ gilt, so sind die negativen Kurven einerseits die exzeptionellen Kurven E_1, \dots, E_a und andererseits die Klassen $f' = f_1 - E_1 - \dots - E_a$, sowie $f_2 - E_j$ für $1 \leq j \leq a$. Als Bezugspunkte wählen wir $x = f_2 - E_1$. Dann liegt x in der Hyperebene $(-K_X)^{\perp=1}$ und schneidet von allen negativen Kurven nur E_1 . Es gilt also

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_0^{a,0})) = \text{Vol}(P_{E_1}^x) - \text{Vol}(P_{f_2-E_1}^x).$$

Die Pyramide $P_{E_1}^x$ hat als Grundseite den Kegel $\text{Nef}(X_0^{a,0}) \cap E_1^\perp$, der nach Lemma 2.4 Proposition 4.7 gerade $\text{Nef}(X_0^{a-1,0})$ entspricht. Der Punkt x hat wiederum Schnittprodukt 1 mit der die Hyperebene definierenden Kurve E_1 . Folglich ist

$$\text{Vol}(P_{E_1}^x) = \frac{1}{a+2} \text{Vol}(\text{Nef}(X_0^{a-1,0})).$$

Die Pyramide $P_{f_2-E_1}^x$ dagegen hat als Grundseite den Nef-Kegel der Fläche $X_1^{0,a-1}$, wie aus Proposition 4.7 folgt. Die Höhe der Pyramide ist 1 und für das Volumen gilt folglich

$$\text{Vol}(P_{f_2-E_1}^x) = \frac{1}{a+2} \text{Vol}(\text{Nef}(X_1^{0,a-1}))$$

und die behauptete Formel folgt.

Im Fall $a \neq 0, b \neq 0$ gehen wir ganz genauso vor. Wir wählen ebenfalls den Bezugspunkt $x = f_2 - E_1^1$. Der Unterschied zum vorherigen Fall ist, dass x zusätzlich die (-1) -Kurven $f_1 - E_1^2, \dots, f_1 - E_b^2$ schneidet, die zu diesen Kurven gehörigen Pyramiden in der Volumenberechnung also ebenfalls zu berücksichtigen sind. Nun resultiert die Kon-

Hyperebene	Anzahl	Grundseite	$(E \cdot x)$
$(E_1^1)^\perp$	1	$X_0^{a-1,b}$	1
$(f_2 - E_1^1)^\perp$	1	$X_1^{b,a-1}$	-1
$(f_1 - E_i^2)^\perp$	b	$X_1^{a,b-1}$	1

Tabelle 4.6: Pyramiden für die Berechnung von $\text{Vol}(\text{Nef}(X_0^{a,b}))$, $a \geq b > 0$ mit $x = f_2 - E_1^1$

traktion jeder dieser Kurven nach Proposition 4.7 in einer Fläche $X_1^{a,b-1}$. Die Grundseite jeder der Pyramiden $P_{f_1 - E_j^2}^x$ ist also $\text{Nef}(X_1^{a,b-1})$, ihre Höhe 1 und ihr Volumen folglich

$$\text{Vol}(P_{f_1 - E_j^2}^x) = \frac{1}{a + b + 2} \text{Vol}(\text{Nef}(X_1^{a,b-1})),$$

woraus die behauptete Formel folgt.

Zu 3. Nach Definition ist $X_E^{0,0} = X_e$ die Hirzebruchfläche mit Konstante e . Es gilt nach Beispiel 2.2 $(\text{Nef}(X_e)) = \frac{1}{4(e+2)}$.

Ist $b = 0, a \neq 0$, liegen also alle Aufblasungspunkte auf einer gemeinsamen Faser f_0 und außerhalb des Schnitts C , so sind die negativen Kurven auf dem Blow-up gerade die exzeptionellen Kurven E_1, \dots, E_a sowie die eigentlich Transformierte der Faser f_0 durch die Aufblasungspunkte. Diese liegt in der Klasse $f - E_1 - \dots - E_a$. Unser Bezugspunkt $x = x_1 C + x_2 f + x_3 E_1 + \dots + x_{a+2} E_a$ muss mindestens die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_3 + \dots + x_{a+2} \\ 0 &= -e x_1 + x_2 \\ 1 &= (2 - e)x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_{a+2} \end{aligned}$$

erfüllen. Wir wählen den Punkt $x = \frac{1}{1+e}(C + ef - E_1)$. Die einzige der Hyperebenen, die das zu bestimmende Polytop begrenzen, die x nicht enthält, ist E_1^\perp . Die Kontraktion von E_1 liefert die Fläche $X_e^{a-1,0}$ und die Behauptung folgt.

Sind weder a noch b gleich null, so sind die negativen Kurven auf dem Blow-up gerade

- die a exzeptionellen Kurven E_1^1, \dots, E_a^1 der Aufblasungspunkte auf f_0 ,
- die b exzeptionellen Kurven E_1^1, \dots, E_a^1 der Aufblasungspunkte auf C ,
- die b eigentlich Transformierten der Fasern durch die Aufblasungspunkte auf C (Selbtschnitt -1 , enthalten in den Klasse $f - E_j$) und
- die eigentlich Transformierten von f_0 (von Selbtschnitt $-a$) und C (von Selbtschnitt $-e - b$).

Unser Bezugspunkt $x = x_1 C + x_2 f + x_{1,1} E_1^1 + \dots + x_{1,a} E_a^1 + x_{2,1} E_1^2 + \dots + x_{2,b} E_b^2$ muss

mindestens die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_{1,1} + \dots + x_{1,a} \\ 0 &= -ex_1 + x_2 + x_{2,1} + \dots + x_{2,b} \\ 1 &= (2 - e)x_1 + 2x_2 + x_{1,1} + \dots + x_{1,a} + x_{2,1} + \dots + x_{2,b} \end{aligned}$$

erfüllen. Wir wählen die (-1) -Kurve $x = f - E_{2,1}$ als Bezugspunkt. Dieser erfüllt die geforderten Gleichungen und weiterhin gilt für das Schnittprodukt mit (-1) -Kurven E die Identität

$$E \cdot x = \begin{cases} -1 & , \text{ falls } E = E_1^2 \\ 1 & , \text{ falls } E = f - E_1^2 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Somit folgt die Behauptung aus Formel (4.6) zusammen mit Proposition 4.7. \square

Kapitel 5

Verallgemeinerungen, Anwendungen und Ausblick

Der in Kapitel 2 eingeführte Volumenbegriff für Zariski-Kammern im Big-Kegel von projektiven Flächen lässt sich in zweierlei Hinsicht verallgemeinern: Einerseits können wir die Hyperebene $(-K_X)^{=1}$ durch eine andere von der Gitterbasiswahl unabhängige Hyperebene ersetzen und andererseits lässt sich die Konstruktion ohne größere Schwierigkeiten auf höherdimensionale Varietäten übertragen. Diese beiden Verallgemeinerungen betrachten wir in den folgenden Abschnitten.

5.1. Verallgemeinerung 1: polarisierte Flächen

Der in Kapitel 2 eingeführte Volumenbegriff für Kegel im Néron-Severi-Vektorraum gründet sich auf die Idee, statt des (nicht-kompakten) Kegels C einen Kegelstumpf zu betrachten, der durch den Durchschnitt des Kegels mit einem (anti-)kanonisch gewählten Halbraum gegeben ist. Durch diese Wahl ist gewährleistet, dass der Volumenbegriff nicht von der Gitterbasiswahl abhängt. Man beachte jedoch, dass dies auch gesichert ist, wenn man den Kegel C stattdessen mit einem Halbraum $H^{\leq 1}$ für einen fest gewählten Divisor H schneidet und setzt

$$\text{Vol}_H(C) := \text{Vol}_{ds}(C \cap H^{\leq 1}).$$

Wählt man H ample, so ist ferner für Teilkegel des Mori-Kegels die Endlichkeit des Volumens gewährleistet. Offensichtlich hängt der verallgemeinerte Volumenbegriff nun von der Wahl des Divisors H ab. Es bietet sich daher an, den Volumenbegriff als Volumen von Kegeln im Néron-Severi-Vektorraum von Paaren (X, H) aufzufassen, wo X eine projektive Fläche und H ein fest gewählter ample Divisor auf X ist. Man spricht auch von einer *polarisierten Fläche*.

Beispiel 5.1. Es sei E eine glatte irreduzible projektive elliptische (d.h. $g(E) = 1$) Kurve und $X = E \times E$ das Selbstprodukt. Nach [21, Section 1.5.B] gelten folgende Aussagen. Für eine hinreichend allgemeine Wahl von E ist $\rho(X) = 3$ und $N^1(X)$ wird erzeugt von den beiden Fasern f_1, f_2 zusammen mit der Diagonalen δ . Dann ist jeder effektive Divisor auf X nef, das heißt es gibt genau eine Kammer in der Zariski-Zerlegung. Eine Klasse $xf_1 + yf_2 + z\delta$ ist genau dann im Nef-Kegel enthalten, wenn die Ungleichungen

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &\geq 0 \\ x + y + z &\geq 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Betrachten wir nun den amplen Divisor

$$H = (f_1 + f_2 + \delta)$$

so ist der Durchschnitt des Nef-Kegels mit der Hyperebene $H=1$ gerade die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ und mit den Punkten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ auf dem Rand. Das Volumen des Nef-Kegels bezüglich H ist also

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\pi}{9} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{27\sqrt{3}}.$$

Der verallgemeinerte Volumenbegriff liefert also auch nicht-rationale Kammervolumina.

Die Beweise der beiden Theoreme aus Kapitel 2 lassen sich mit gewissen Abschwächungen auf die verallgemeinerte Situation übertragen und wir erhalten:

Proposition 5.2. *Es sei (X, H) eine glatte polarisierte Fläche mit Picardzahl ρ .*

1. *Ist P ein big und nef Divisor auf X mit $\text{Null}(P) = \{E_1, \dots, E_s\}$ mit paarweise disjunkten (-1) -Kurven E_1, \dots, E_s , so gilt*

$$\text{Vol}_H(\Sigma_P) = \frac{(\rho - s)!}{\rho!} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^s (HE_i)} \cdot \text{Vol}_{\pi_*(H)}(\text{Nef}(\pi(X))),$$

wo π die Kontraktion der (-1) -Kurven in $\text{Null}(P)$ bezeichnet.

2. *Falls $\overline{\text{NE}}(X)$ endlich erzeugt ist und falls eine Klasse $\gamma \in N^1(X)_{\mathbb{R}}$ mit $H\gamma > 0$ existiert, so dass für jeden extremalen Strahl η , der nicht von einer (-1) -Kurve aufgespannt wird, $\gamma \in \eta^\perp$ gilt, so gilt*

$$\text{Vol}_H(\text{Nef}(X)) = \frac{1}{\rho \cdot (H \cdot \gamma)} \sum E\gamma \cdot \text{Vol}_{\pi_{E^*}H}(\text{Nef}(\pi_E X)).$$

Beweis. Der Beweis verläuft genau wie die Beweise der Theoreme 2.5 und 2.10 mit folgenden Anpassungen:

Zu 1. Kammern Σ_P , deren Träger Kurven mit Selbstschnitt ≤ -2 enthalten haben nicht mehr unendliches Volumen. In Theorem 2.5 fällt also die Charakterisierung von Kammern mit unendlichem Volumen weg und bei der Berechnung der Kammervolumina mit unserer Technik beschränken wir uns auf Kammern mit kontrahierbarem Träger.

Die Volumina auf den kontrahierten Flächen $\pi(X)$ werden bezüglich des Push-forwards $\pi_*(H)$ berechnet. Dies ist ein ample Divisor und die Identität

$$\text{Nef}(X) \cap (\text{Null}(P))^\perp \cap H \leq 1 = \text{Nef}(\pi(X)) \cap (\pi_*H)^{\leq 1}$$

folgt aus Lemma 2.4 zusammen mit der Projektionsformel. (Im Fall $H = -K_X$ hatten wir die explizite Darstellung $\pi_*H = -K_{\pi(X)}$.)

Der zusätzliche Faktor $\frac{1}{\prod_{i=1}^s (HE_i)}$ entsteht wie folgt: Im Beweis von Theorem 2.5 haben wir die Polytope

$$\begin{aligned} P_1 &:= \text{conv}(\mathcal{C}_{\text{Face}(P)}, E_1) \\ P_j &:= \text{conv}(P_{j-1}, E_j), \quad \text{für } 2 \leq j \leq s, \end{aligned}$$

betrachtet, aus denen das zu messende Polytop \mathcal{C}_{Σ_P} gebildet wurde. Nun liegen die exzeptionellen Kurven E_i nicht notwendigerweise schon in der Hyperebene H^{-1} , wie dies für den antikanonischen Divisor der Fall war. Wir wählen folglich als Spitze für die Pyramide P_j die Klasse $\frac{1}{HE_j} \cdot E_j$, die in der Hyperebene enthalten ist. Die Pyramide hat also die Höhe $\frac{1}{HE_j}$, denn die Orthogonalität von E und $\text{Face}(P)$ bleibt bei der Skalierung natürlich erhalten.

Zu 2. Theorem 2.10 beruht wesentlich auf der Tatsache, dass endliche Nef-Kegel-Volumina genau für Flächen, deren antikanonischer Divisor big ist, auftreten. Wir konnten für solche Flächen aus der Zariski-Zerlegung des antikanonischen Divisors die Existenz des Bezugsdivisors D schließen, der gerade die Bedingung an γ in der zu beweisenden Proposition erfüllt. In der aktuellen Situation müssen wir die Existenz einer solchen Klasse γ tatsächlich voraussetzen, um den Beweis von 2.10 übertragen zu können. Mit dieser Voraussetzung können wir den Beweis der Volumenformel aber fast wörtlich von dort übernehmen, indem wir $-K_X$ durch H und $-K_{\pi(X)}$ durch π_*H ersetzen. Der einzige Unterschied besteht noch darin, dass der Bezugsdivisor D im Beweis von Theorem 2.10 so konstruiert wurde, dass er in der Hyperebene $(-K_X)^{-1}$ lag. Wir wollen dies für γ nicht zusätzlich fordern, sondern erreichen dies durch die Skalierung $\gamma' = \frac{1}{H\gamma}\gamma$, wodurch der zusätzliche Faktor $\frac{1}{H\gamma}$ in der Volumenformel entsteht. \square

5.2. Seshadri-Kammer-Zerlegung des Nef-Kegels

Wir betrachten die Seshadri Konstante eines amplen Geradenbündels L auf einer glatten projektiven Fläche X in einem Punkt x . Sie ist definiert als

$$\varepsilon(L, x) := \inf \frac{LC}{\text{mult}_x C},$$

mit dem Infimum gebildet über alle irreduziblen Kurven in X , die durch x verlaufen.

Bekanntermaßen entspricht $\varepsilon(L, x)$ der größten Zahl r für die $\pi^*L - rE$ auf dem Blow-up $\pi : Y \rightarrow X$ in x mit exzeptionellem Divisor E noch nef ist (vgl. [21, Proposition 5.1.5]). Formulieren wir diese Aussage mit Hilfe der in Kapitel 2 gemachten Beobachtungen geometrischer: Wir betrachten den Nef-Kegel $\text{Nef}(Y)$ im Néron-Severi Vektorraum $N^1(Y)_{\mathbb{R}}$. Der Durchschnitt von $\text{Nef}(Y)$ mit der Hyperebene $E^{\perp} = \{\gamma \in N^1(Y)_{\mathbb{R}} \mid E\gamma = 0\}$ wird durch den Rückzugsoperator π^* mit $\text{Nef}(X)$ identifiziert (siehe Lemma 2.4). Für ein beliebiges amples Geradenbündel L auf X schneidet der Strahl $R_L := \{\pi^*L - tE \mid t \geq 0\}$ den Rand des nef Kegels gerade im Punkt $\pi^*L - \varepsilon(L, x)E$. Folglich kann die genaue Beschreibung des Randes des Nef-Kegels auf der Aufblasung eine Methode zur expliziten Bestimmung von Seshadri-Konstanten liefern. Aufgrund der Dualität von Nef-Kegel und Mori-Kegel $\overline{\text{NE}}(Y)$ trifft der Strahl R_L den Rand des Nef-Kegels entweder in einem Element P einer Seite γ^{\perp} für einen extremalen Strahl γ von $\overline{\text{NE}}(Y)$ der von einer irreduziblen Kurve aufgespannt wird oder in einer Klasse mit Selbstschnitt null. Im zweiten Fall nimmt $\varepsilon(L, x)$ den maximal möglichen Wert $\sqrt{L^2}$ an, wohingegen im ersten Fall der Strahl γ eine irreduzible Kurve enthält, die die eigentlich Transformierte einer Kurve C auf X ist, die $\varepsilon(L, x)$ berechnet, das heißt in der das Infimum in der Definition von ε angenommen wird.

Wir sehen dies wie folgt: Der extreme Strahl γ wird aufgespannt von einer irreduziblen Kurve \tilde{C} . Deren Bild $C = \pi(\tilde{C})$ ist irreduzibel mit \tilde{C} als eigentlicher Transformierter. Folglich gilt die Identität

$$\tilde{C} \cdot (\pi^*L - \varepsilon(L, x)E) = 0$$

genau dann, wenn

$$\varepsilon(L, x) = \frac{LC}{\text{mult}_x C},$$

gilt, das heißt, wenn C die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L, x)$ berechnet. Man beachte weiterhin, dass für ein amples Geradenbündel L die Klasse P_L im Durchschnitt des Strahls R_L mit dem Nef-Kegel-Rand genau dann big ist, wenn P_L positiven Selbstschnitt hat, denn P_L ist als Element des Nef-Kegel-Randes natürlich nef. Nun ist $P_L^2 > 0$ genau dann, wenn $\varepsilon(L, x)$ echt kleiner als der maximal mögliche Wert $\sqrt{L^2}$ ist. Wir wissen aus ([3, Theorem 1.2]), dass in diesem Fall der Big-Kegel in einer Umgebung von P_L in endlich viele Zariski-Kammern zerfällt. Insbesondere besteht der Rand des Nef-Kegels um P_L aus endlich vielen Seiten, jede davon gegeben durch den Durchschnitt des Nef-Kegels mit einer Hyperebene C^\perp für eine irreduzible Kurve C mit $P_L \cdot C = 0$. Folglich ist die Seshadri Funktion

$$\begin{aligned} \varepsilon : \text{Amp}(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto \varepsilon(\lambda, x) \end{aligned}$$

stückweise linear um L , und die Kammern, die durch Linearität der Seshadri Funktion definiert werden, ergeben sich durch die Projektion mit Zentrum E der Zariski-Kammer-Zerlegung von $\text{Big}(Y)$ auf $\text{Nef}(X)$. Wir haben den ersten Teil der folgenden Proposition gezeigt.

Proposition 5.3. *Es gibt eine Zerlegung des Nef-Kegels auf X in konvexe Teilkegel, die in der Umgebung von Klassen mit submaximaler Seshadri Konstante endlich polyedrisch ist, so dass die Seshadri-Funktion auf den Teilkegeln, die solche Umgebungen schneiden, linear ist.*

Außerdem ist die Anzahl derjenigen Kurven, die die Seshadri Konstante einer ampelen Klasse berechnen gerade die Anzahl derjenigen Kurven in $\text{Null}(P_L)$, die die exzeptionelle Kurve E schneiden.

Beweis. Der zweite Teil der Proposition folgt unmittelbar aus der Struktur der Zariski-Kammer-Zerlegung. Für einen big und nef Divisor P auf Y entspricht die Anzahl von Seiten des Kegels $\text{Nef}(Y)$, die P enthalten, gerade der Anzahl von Elementen in $\text{Null}(P)$. Eine irreduzible Kurve C auf Y stellt nun genau dann eine Bedingung an die Nefness von $\pi^*L - tE$ dar, wenn sie den exzeptionellen Divisor E schneidet. \square

Im Fall, dass der Mori-Kegel $\overline{\text{NE}}(Y)$ von endlich vielen bekannten irreduziblen Kurven aufgespannt wird, können die Seshadri Konstanten einer ampelen Klasse im Aufblasungspunkt auf folgende einfache Weise bestimmt werden: Wähle aus den aufspannenden Kurven diejenigen Kurven C_1, \dots, C_k aus, die den exzeptionellen Divisor positiv schneiden. Bezeichne deren Bilder auf X mit D_1, \dots, D_k . Dann folgt aus obigen Überlegung für einen beliebigen ampelen Divisor L die explizite Formel

$$\varepsilon(L, x) = \min \left(\frac{L \cdot D_i}{\text{mult}_x D_i}, \sqrt{L^2} \right).$$

Wenden wir diese Formel nun auf Del-Pezzo-Flächen an. Bezeichne wie oben mit S_r für $1 \leq r \leq 8$ die Aufblasung von \mathbb{P}^2 in r Punkten in allgemeiner Lage. Der Mori-Kegel $\overline{\text{NE}}(S_r)$ wird von den (-1) -Kurven auf S_r aufgespannt. Diese sind bekanntermaßen (siehe zum Beispiel [2, Theorem 3.1])

- die exceptionellen Divisoren E_1, \dots, E_r zu den Aufblasungspunkten p_1, \dots, p_r

und die eigentlich Transformierten der folgenden Kurven

- Geraden durch p_i, p_j ;
- falls $r \geq 5$, Kegelschnitte durch 5 der Punkte p_1, \dots, p_r ;
- falls $r \geq 7$, Kubiken durch 7 der Punkte p_1, \dots, p_r mit einem Doppelpunkt in einem davon;
- falls $r = 8$, Kurven von Grad vier durch 8 der Punkte p_1, \dots, p_8 mit Doppelpunkt in 3 davon;
- falls $r = 8$, Kurven von Grad fünf durch 8 der Punkte p_1, \dots, p_8 mit Doppelpunkt in 6 davon;
- falls $r = 8$, Kurven von Grad sechs durch 8 der Punkte p_1, \dots, p_8 mit Doppelpunkt in 7 davon und dreifachem Punkt in einem der Punkte.

Proposition 5.4. *Sei x ein allgemeiner Punkt auf der Del-Pezzo-Fläche S_r mit $r \leq 7$. Die Seshadri Konstante einer amplen Divisorenklasse $L = aH - \sum b_i E_i$ in x ist gegeben durch*

$$\varepsilon(L, x) = \min \left[\begin{array}{l} a - b_i, \\ 2a - b_{i_1} - \dots - b_{i_4}, \\ 3a - 2b_{i_1} - b_{i_2} - \dots - b_{i_6}, \\ \frac{1}{2}(3a - b_{i_1} - \dots - b_{i_6}), \\ 4a - 2(b_{i_1} + b_{i_2} + b_{i_3}) - b_{i_4} - \dots - b_{i_7}, \\ \frac{1}{2}(4a - 2(b_{i_1} + b_{i_2}) - b_{i_3} - \dots - b_{i_7}), \\ 5a - 2(b_{i_1} + \dots + b_{i_6}) - b_{i_7}, \\ \frac{1}{2}(5a - 2(b_{i_1} + \dots + b_{i_5}) - b_{i_6} - b_{i_7}), \\ \frac{1}{2}(6a - 2(b_{i_1} + \dots + b_{i_6}) - 3b_{i_7}), \\ \frac{1}{3}(6a - 2(b_{i_1} + \dots + b_{i_7})) \end{array} \right]$$

mit dem Minimum gebildet über $1 \leq i \leq r$, $1 \leq i_j \leq r$, mit $i_j \neq i_l$ für $j \neq l$. Ist $r \leq 6$, so wird das Minimum nur über die entsprechend möglichen Ausdrücke genommen.

Analoge Formeln lassen sich prinzipiell immer finden, wenn die Erzeuger des Mori-Kegels $\overline{\text{NE}}(Y)$ auf dem Blow-up $\pi : Y \rightarrow X$ im Punkt x explizit bekannt sind.

Bemerkung (Nef-Kegel-Volumen als Integral über Seshadri-Konstanten). Die Betrachtung von Seshadri-Konstanten eröffnet eine zusätzliche Interpretation der Kammer-Volumina. Sei X eine glatte projektive Fläche und H ein ample Divisor auf X . Für einen festen Punkt $x \in X$ betrachten wir die Seshadri-Funktion

$$\begin{aligned} \varepsilon_x : \text{Nef}(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ D &\mapsto \varepsilon(D, x). \end{aligned}$$

Wir können dann das Nef-Kegel Volumen $\text{Vol}_{\pi^*H}(\text{Nef}(Y))$ auf dem Blow-up $\pi : Y \rightarrow X$ interpretieren als das Integral der Seshadri-Funktion über dem Kegelstumpf $\text{Nef}(X) \cap H^{\leq 1}$, das heißt

$$\text{Vol}_{\pi^*H}(\text{Nef}(Y)) = \int_{\text{Nef}(X) \cap H^{\leq 1}} \varepsilon_x(D) ds.$$

Das Volumen des Nef-Kegels auf dem Blow-up gibt also intuitiv gesprochen an „wie viel Positivität insgesamt“ im Aufblasungspunkt x vorliegt. Verschiedene Punkte lassen sich somit vergleichen.

5.3. Verallgemeinerung 2: höhere Dimensionen

Eine natürliche Verallgemeinerung der in Kapitel 2 entwickelten Begriffe und Methoden für projektive Flächen ist deren Übertragung auf eine höherdimensionale projektive Varietät X . Wir können hier ebenso die Kegel $\text{Nef}(X)$, $\overline{\text{NE}}(X)$ und $\text{Big}(X)$ im Néron-Severi Vektorraum betrachten. Auch in dieser Situation stellt sich die Frage nach der Größe dieser Kegel und ihrer Teilkegel.

Sei X eine projektive Varietät der Dimension n und C ein Kegel im Néron-Severi Vektorraum $N^1(X)_{\mathbb{R}}$. Wir definieren sein Volumen wie folgt. Der (euklidische) Vektorraum $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ lässt sich genau wie im Flächenfall mit einem am Gitter $N^1(X)$ normalisierten Lebesgue-Maß ds versehen. Wir werden wiederum den (nicht-kompakten) Kegel mit einem kanonisch gewählten Halbraum schneiden, um zu einer messbaren Menge zu gelangen. Ein solcher Halbraum in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ ist gegeben durch den Schnitt mit einem 1-Zykel δ . Wählen wir

$$\delta = H^{n-1}$$

für einen ample Divisor H auf X , so gilt $\delta D > 0$ für jeden effektiven Divisor D auf X . Für jeden Kegel C , der im Kegel $\text{Eff}(X)$ der effektiven Divisorenklassen enthalten ist, ist folglich der Durchschnitt

$$C \cap (H^{n-1})^{\leq 1}$$

eine kompakte Menge und wir setzen

$$\text{Vol}_H(C) = \text{Vol}(C \cap (H^{n-1})^{\leq 1}).$$

Ein höherdimensionales Analogon der Zariski-Kammer Zerlegung wird in [15] (siehe dort insbesondere Theorem 2.11) und [16] untersucht. Die Autoren zeigen, dass unter der Voraussetzung, dass X endlich erzeugte Linearsysteme hat, der pseudoeffektive Kegel

$\overline{\text{Eff}}(X)$ eine Zerlegung in endlich viele polyedrische Teilkegel hat, so dass auf jedem der Teilkegel die Volumenfunktion

$$\text{vol}_X : D \mapsto \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X(mD))}{m^n/n!}$$

durch ein Polynom gegeben ist. Die Bedingung an X ist wie folgt definiert:

Die Varietät X hat endlich erzeugte Linearsysteme genau dann wenn eine Basis D_1, \dots, D_ρ von $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ aus ganzzahligen Divisoren existiert, so dass der graduierte Ring

$$\bigoplus_{m_1, \dots, m_\rho \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(m_1 D_1 + \dots + m_\rho D_\rho))$$

endlich erzeugt ist.

Beispiele für Varietäten, die diese Bedingung erfüllen, sind torische Varietäten, oder allgemeiner Mori dream spaces (vgl. [19]). Hu und Keel zeigen in [19, Corollary 2.16] außerdem, dass Fano 3-faltigkeiten (und sogar log Fano 3-faltigkeiten) Mori dream spaces sind, insbesondere also endlich erzeugte Linearsysteme besitzen.

Berechnen wir also die Volumina von Kammern auf einigen Fano 3-faltigkeiten. Diese wurden schon in den 1980er Jahren klassifiziert (siehe [23] für $\rho \geq 2$). Ein überraschendes Resultat der Klassifikation ist, dass die einzigen Fano 3-faltigkeiten mit $\rho \geq 6$ Produkte $\mathbb{P}^1 \times S_r$ für Del-Pezzo-Flächen S_r mit $r \geq 4$ sind. Insbesondere ist die größte mögliche Picardzahl $\rho = 10$. Für kleine Picardzahl ist die Lage komplizierter, im Fall $\rho = 1$ aber hängt die Isomorphieklasse einer Fano 3-faltigkeit X nur von zwei Invarianten ab, dem Index, das heißt der größten Zahl r , so dass $-K_X = mD$ für einen ganzzahligen Divisor D gilt, und dem Selbstprodukt $(-\frac{1}{r}K_X)^3$.

Im Fall von Fano-Varietäten ist die kanonische Wahl eines ample Divisors für die Kegelvolumenberechnung natürlich $H = -K_X$.

Beispiel 5.5. Sei X eine Fano 3-faltigkeit mit $\rho = 1$, Index r und $(-\frac{1}{r}K_X)^3 = d$. Dann gilt

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \frac{1}{r^2 d}.$$

Beweis. Sei $D = -\frac{1}{r}K_X$ der Erzeuger von $N^1(X)_{\mathbb{R}}$. Offenbar ist der Nef-Kegel der Strahl $\mathbb{R}^+ \cdot D$ und es gilt

$$(-K_X)^2 \cdot D = \frac{1}{r}(-K_X)^3 = r^2 d.$$

das heißt das Volumen des Nef-Kegels ist die Länge der Strecke vom Nullpunkt bis $\frac{1}{r^2 d}D$, was der Behauptung entspricht. \square

Literaturverzeichnis

- [1] Bauer, Th.: A simple proof for the existence of Zariski decompositions on surfaces. *J. Algebraic Geom.* 18, 789-793 (2009)
- [2] Bauer, Th., Funke, M., Neumann, S.: Counting Zariski chambers on Del Pezzo surfaces. *Journal of Algebra* 324, 92-101 (2010)
- [3] Bauer, Th., Küronya, A., Szemberg, T.: Zariski chambers, volumes, and stable base loci. *J. reine angew. Math.* 576, 209-233 (2004)
- [4] Bauer, Th., Schmitz, D.: Volumes of Zariski chambers. *J. Pure Appl. Algebra* (2012), [doi:10.1016/j.jpaa.2012.06.016]
- [5] Bauer, Th., Schmitz, D.: Zariski chambers on surfaces of high Picard number. Erscheint in: *LMS Journal of Computation and Mathematics*
- [6] Beauville, A.: *Complex Algebraic Surfaces*. London Mathematical Society Student Texts 34, 1996
- [7] Castravet, A.-M., Tevelev, J.: Hilbert's 14th Problem and Cox Rings. *Compositio Math.* 142, 1479-1498 (2006)
- [8] Chen, D., Schnell, C.: Surfaces with big anticanonical class. Preprint, 2008
- [9] Debarre, O.: *Higher Dimensional Algebraic Geometry*. Universitext, Springer 2001
- [10] Derenthal, U.: On a constant arising in Manin's conjecture for Del Pezzo surfaces. *Math. Res. Lett.* 3, 481-489 (2007)
- [11] Derenthal, U., Browning, T.D.: Manin's conjecture for a cubic surface with D5 singularity. *International Mathematics Research Notices IMRN* (2009), no. 14, 2620-2647
- [12] Derenthal, U., Browning, T. D.: Manin's conjecture for a quartic del Pezzo surface with A4 singularity. *Annales de l'Institut Fourier* 59 (2009), no. 3, 1231-1265
- [13] Derenthal, U., Joyce, M., Teitler, Z.: The nef cone volume of generalized Del Pezzo surfaces. *Algebra & Number Theory* 2 (2008), no. 2, pp. 157-182
- [14] De Fernex, T.: Negative curves on very general blow-ups of \mathbb{P}^2 . In: *Projective Varieties with unexpected Properties*. Hrsg: Beltrametti et al. A Volume in Memory of Giuseppe Veronese, 199-207, de Gruyter 2005
- [15] Ein, L., Lazarsfeld, R., Mustăța, M., Nakamaye, M., Popa, M.: Asymptotic invari-

- ants of line bundles. Pure Appl. Math. Q. 1, No. 2, 379-403 (2005)
- [16] Ein, L., Lazarsfeld, R., Mustăța, M., Nakamaye, M., Popa, M.: Asymptotic invariants of base loci. Ann. Inst. Fourier 56, No.6, 1701-1734 (2006)
 - [17] Friedman, R., Morgan, J. W.: Exceptional groups and del Pezzo surfaces, Symposium in Honor of C. H. Clemens Contemp. Math., 101-116 (2002)
 - [18] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. Graduate Texts in Math. 52, Springer 1977
 - [19] Hu, Y., Keel, S.: Mori Dream Spaces and GIT. Michigan Math. J. 48 (2000).
 - [20] Kollár, J., Mori, Sh.: Birational Geometry of Algebraic Varieties. Cambridge Tracts in Mathematics 134, Cambridge University Press 1998
 - [21] Lazarsfeld, R.: Positivity in Algebraic Geometry. Springer 2004
 - [22] Manin, Y.: Cubic Surfaces: Algebra, Geometry, Arithmetic, Second edition, Amsterdam-New York, North-Holland, 1986.
 - [23] Mori, Sh., Mukai, S: On Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$. Adv. Stud. Pure Math. 1, 101-129 (1983)
 - [24] Mukai, S.: Counterexample to Hilbert's fourteenth problem for the 3-dimensional additive group. RIMS preprint #1343 (2001)
 - [25] Peyre, E.: Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. Duke Math. J. 79, 101-218 (1995)
 - [26] Testa, D., Várilly-Alvarado, A., Velasco, M.: Big rational surfaces. Preprint (2009) [arXiv:0901.1094]

Anhang

English abstract

During the last years, the cone of big divisors on a smooth projective variety has become subject to intensive research, starting with the introduction of asymptotic methods which allowed the study of big divisors in the first place (cf. [15]). Since then, significant insight has been obtained.

In particular, in the case of projective surfaces interesting results have been proved. Bauer, Küronya and Szemberg in [3] prove that the big cone on a smooth projective variety admits a locally finite decomposition into locally polyhedral subcones such that the linear series of divisors in the interior of a chamber all have the same stable base loci. The authors give two alternative characterizations of the subcones, one in terms of the behavior of the volume function, the other in terms of the Zariski decomposition of divisors in a subcone. Due to the last characterization the subcones are called Zariski chambers. Additionally, the geometric structure of each chamber is described in [3].

A different perspective on the decomposition is taken in [2]. The leading question in this work is of combinatorial nature: the authors are interested in the number of Zariski chambers in the chamber decomposition of the big cone on a given projective surface. An algorithm is presented which computes the number in question from the intersection matrix of all irreducible curves with negative self-intersection.

In this thesis we add yet another point of view—metric in nature—to the description of the chamber decomposition: we introduce an invariant which measures the size of chambers in the decomposition. Remembering the defining characterization of the decomposition, we can intuitively interpret the volume of a chamber as the amount by which a divisor in the chamber can be moved without changing the stable base locus of the corresponding linear series.

Concretely, generalizing an invariant introduced by Peyre ([25]) we define the volume $\text{Vol}(C)$ of a cone C in the Néron-Severi vector space $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ of a smooth projective surface X to be the volume (with respect to a Lebesgue measure ds , suitably normalized) of the intersection

$$\overline{C} \cap (-K_X)^{\leq 1}$$

of the closure of C with the half space of divisor classes, which have intersection product at most 1 with the anticanonical divisor. The set $\overline{C} \cap (-K_X)^{\leq 1}$ need not be compact, so infinite cone volume can occur. The two main results of this thesis give necessary and sufficient conditions for the volume of a Zariski chamber to be finite. In this case, the results present formulas by which the volume can be explicitly calculated.

The first theorem states that the calculation of the volume of an arbitrary chamber on

a smooth projective surface X can be reduced to the calculation of the volume of a fixed chamber on a surface Y , which results from the contraction of (-1) -curves on X . The fixed chamber is the so called nef chamber—the one consisting of those big divisors which are nef. Its closure is the nef cone $\text{Nef}(X)$, which by the definition of cone volume has the same volume as the nef chamber. Let P be a big and nef divisor on X . By Σ_P we denote the Zariski chamber of all divisors whose negative part in the Zariski decomposition is supported on $\text{Null}(P)$, the set of irreducible curves having intersection product 0 with P . All chambers in the decomposition belong to a big and nef divisor in this way.

Theorem 1. *Let P be a big and nef divisor on a smooth projective surface X with Picard number ρ . Then either*

- *the set $\text{Null}(P)$ contains an irreducible curve C with self-intersection $C^2 < -1$ and*

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \infty,$$

or

- *$\text{Null}(P)$ consists of s pairwise disjoint (-1) -curves and*

$$\text{Vol}(\Sigma_P) = \frac{(\rho - s)!}{\rho!} \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_{\text{Null}(P)}(X))),$$

where $\pi_{\text{Null}(P)} : X \rightarrow \pi_{\text{Null}(P)}(X)$ denotes the contraction of the curves in $\text{Null}(P)$.

The remaining question of how to calculate the volume of the nef cone—Theorem 1 only yields a trivial identity in this case—is answered by the following result which we prove in section 2.2.

Theorem 2. *Let X be a smooth projective surface with Picard number ρ . Then $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$ is finite if and only if $-K_X$ is big. If in this case X is non-minimal, then there exists a \mathbb{Q} -divisor D on X such that*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \frac{1}{\rho} \sum_E (D \cdot E) \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_E(X))),$$

where the sum is taken over all (-1) -curves on X and π_E denotes the contraction of E .

By this result we can calculate the volume of the nef cone on a surface X with big anticanonical divisor inductively, since after finitely many contractions we are eventually left with a minimal surface whose anticanonical divisor is big; in particular, it must be a ruled surface. For such surfaces the nef cone volume is calculated directly in Beispiel 2.2.

In chapters 3 and 4 we present applications of these results. In the former we calculate the volumes of the Zariski chambers on del Pezzo surfaces while in the latter we consider certain surfaces whose anticanonical divisor is merely big instead of ample. We explicitly calculate the volumes of all Zariski chambers on these surfaces. Additionally, in chapter 3 we present an alternative approach to the computation of the number of Zariski chambers from [2] in the case of del Pezzo surfaces. We consider the Weyl group of the root system of (-2) -classes and obtain the number of chambers of a given support size.

In chapter 5 we investigate the possibility of generalizing the notions and methods from chapter 2. Two possible generalizations are considered. On the one hand, the half space $(-K_X)^{\leq 1}$ with which we intersect cones in order to obtain measurable sets in the definition of the cone volume can be replaced—at the cost of uniqueness—by a half space $H^{\leq 1}$ for an arbitrary ample divisor H . We present modified versions of theorems 1 and 2 which still hold in this setting.

On the other hand, it is natural to ask whether the notion of cone volume makes sense on varieties of higher dimension n as well. The definition of the volume of a cone in the Néron-Severi vector space is readily generalized by replacing the hyperplane $(-K_X)^{\leq 1}$ in the case of surfaces by the hyperplane $((K_X)^{n-1})^{\leq 1}$. However, in general we do not have as nice a decomposition of the big cone as in the case of surfaces. Therefore, we content ourselves with giving some examples of nef cone volumes on Fano 3-folds.

A further aspect we attend to in chapter 5 is the connection of the volume of the nef chamber with Seshadri constants. In particular, we interpret this volume as an integral over Seshadri constants on a surface obtained by contracting a (-1) -curve. Furthermore, we show how Seshadri constants can, in certain cases, be calculated by considering the Zariski chamber decomposition on a blow-up. We use this consideration to give an explicit formula for the Seshadri constants of any ample divisor on a del Pezzo surface of degree at least 2 in a general point.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben, sei es durch fachliche Hinweise, anregendes Miteinander oder liebevolle Aufmunterung:

Prof. Dr. Thomas Bauer für die gewissenhafte Betreuung, die interessanten und lehrreichen Diskussionen und die Ratschläge zu dieser Arbeit und über diese hinaus,

Prof. Dr. Georg Schumacher für die Erstellung des Zweitgutachtens,

Felix Grimm und Matthias Helduser für die Durchsicht der verschiedenen Manuskriptversionen, für Anregungen und Diskussionen,

und schließlich bei meiner Familie und meinen Freunden für Eure Liebe und Euer Vertrauen.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass dies mein erster Versuch einer Promotion ist.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Dissertation

Volumina der Zariski-Kammern algebraischer Flächen

selbstständig und ohne Verwendung unerlaubter Hilfsmittel angefertigt habe. Ich habe dabei keine weiteren Quellen oder Hilfen als die explizit angegebenen verwendet und habe alle wörtlichen oder sinngemäßen Zitate als solche gekennzeichnet.

Die Dissertation wurde bisher weder in vorliegender noch in einer ähnlichen Form bei einer in- oder ausländischen Hochschule anlässlich eines Promotionsgesuchs oder anderen Prüfungszwecken eingereicht.

David Schmitz

Marburg, 16. Juli 2012

Lebenslauf

PERSÖNLICHE DATEN

Name	David Georg Schmitz
Geburtsdatum	11. September 1982
Geburtsort	Krefeld
Familienstand	ledig

SCHULAUSBILDUNG

1990–1994	Gemeinschaftsgrundschule Bonhoefferstraße, Krefeld
1994–2002	Ricarda-Huch-Gymnasium Krefeld

ZIVILDIENTST

2002–2003	Klinikum der Philipps-Universität Marburg
-----------	---

STUDIUM

2003–2007	Philipps-Universität Marburg, Studiengänge Diplom Mathematik, Magister Mathematik/Philosophie.
2007–2008	University of Victoria, Victoria, BC, Kanada
2008–2009	Philipps-Universität Marburg Abschluss mit Diplom in Mathematik: September 2009

BERUFLICHE TÄTIGKEIT

seit 2009	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg
-----------	---