PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2004/2005

Klausur zur Funktionentheorie II

Donnerstag, den 10.2.2005, 11.00 – 13.00 Uhr, HG 7

Name	
Vorname	
Matrikelnummer	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Erreichbare Punkte	5	4	4	4	3	4	2	5	31
Erreichte Punkte									
bearbeitete Aufgaben									**Zahl der abgegebenen Lösungsblätter:**

Bemerkungen:

- Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem **gesonderten** Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt deutlich lesbar mit Ihrem **Namen** und der **Aufgabennummer**.
- Kreuzen Sie in der Tabelle an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
- Geben Sie die Klausur nach Aufgaben getrennt ab.
- Füllen Sie das Deckblatt aus, und geben Sie dieses mit ab.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Viel Erfolg!

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. **Kreuzen Sie die entsprechende Antwort an.** Es werden **keine** Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen halben Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen halben Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet.

1. Die Bildmenge einer nichtkonstanten holomorphen Funktion $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ist ein Gebiet in $\mathbb{C}$.

   richtig ☐ *falsch* ☐

2. Es gibt eine holomorphe Funktion $f \neq 0$ auf $\mathbb{C}$, deren Nullstellenmenge gleich $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ ist.

   richtig ☐ *falsch* ☐

3. Ist f eine holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

   $$f(z+1) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

   so ist f konstant.

   richtig ☐ *falsch* ☐

4. Die durch $z \longmapsto \frac{z^2-1}{\exp(z)}$ definierte Funktion ist eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$.

   richtig ☐ *falsch* ☐

5. Es gibt eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$, die genau vier Urbilder unter der Weierstraßschen $\wp-$Funktion hat.

   richtig ☐ *falsch* ☐

6. Multipliziert man eine Thetafunktion f mit einer trivialen Thetafunktion, so ändert sich der Exponent von f nicht.

   richtig ☐ *falsch* ☐

7. Die Néron-Severi-Gruppe eines n-dimensionalen komplexen Torus ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$.

   richtig ☐ *falsch* ☐

8. Alle Translate D_a eines Divisors D auf einer abelschen Varietät liegen im Linearsystem $|D|$.

   richtig ☐ *falsch* ☐

9. Ist D ein Divisor auf einem komplexen Torus X, so dass H_D eine Polarisierung ist, dann existieren nur endlich viele $a \in X$ mit $D_a = D$.

   richtig ☐ *falsch* ☐

10. Ist auf einem komplexen Torus X ein effektiver Divisor D_1 und ein Divisor D_2 gegeben, so dass H_{D_2} eine Polarisierung ist, dann ist das Linearsystem $|D_1 + kD_2|$ für großes k nicht leer.

    richtig ☐ *falsch* ☐

Aufgabe 2: (*4 Punkte*)
Es seien f und g elliptische Funktionen zum selben Gitter, die in 0 einen Pol der Ordnung 3 haben und sonst holomorph sind.

(a) Zeigen Sie, dass es Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$ gibt mit
$$f - cg = a\wp + b.$$
(Hier ist $\wp$ die Weierstraßsche $\wp-$Funktion.)

(b) Begründen Sie, dass
$$h := f' - cg'$$
eine ungerade Funktion ist.

Aufgabe 3: (*4 Punkte*)
Bestimmen Sie eine möglichst große offene Teilmenge von $\mathbb{C}^2$, auf der die Potenzreihe
$$\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}_0^2} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2}}{(k_1+k_2)!}$$
eine holomorphe Funktion darstellt.

Aufgabe 4: (*4 Punkte*)
Sei $m \in \mathbb{N}$ und
$$f(z_1, z_2) := \exp(mz_1)(\exp(z_2) - \exp(-z_1))^m \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}.$$
Zeigen Sie, dass f z_2-allgemein von der Ordnung m ist, und finden Sie eine Einheit $e \in \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^2,0}$ sowie ein Weierstraß-Polynom $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}[z_2]$, so dass gilt:
$$f = eh.$$

Aufgabe 5: (*3 Punkte*)
Sei $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ eine abelsche Varietät. Sei H eine Polarisierung auf X und E die zugehörige alternierende Form. Wir betrachten die Menge
$$\widetilde{\Lambda} := \{x \in \mathbb{C}^n \mid E(x, \Lambda) \subset \mathbb{Z}\}.$$
Zeigen Sie, dass $\widetilde{\Lambda}$ ein Gitter in $\mathbb{C}^n$ ist und dass $\Lambda \subset \widetilde{\Lambda}$ gilt.

Aufgabe 6: (*4 Punkte*)
Sei X eine abelsche Varietät. Zeigen Sie, dass es nichtkonstante meromorphe Funktionen auf X gibt.

Aufgabe 7: (*2 Punkte*)
Sei X eine abelsche Varietät und $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$. Zeigen Sie: Falls die Linearsysteme $|D_1|$ und $|D_2|$ basispunktfrei sind, so ist auch das Linearsystem $|D_1 + D_2|$ basispunktfrei.

Aufgabe 8: *(2+1+2 Punkte)*

Sei X eine abelsche Varietät. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} \alpha: & X \times X & \longrightarrow & X \times X \\ & (x, y) & \longmapsto & (x+y, x-y). \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass α ein surjektiver Homomorphismus ist, und bestimmen Sie den Kern von α.

(b) Geben Sie die Matrix der analytischen Darstellung $\rho_a(\alpha)$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{C}^{2n}$ an.

(c) Seien H_1, H_2 Polarisierungen auf X und $p_1, p_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ die Projektionen auf den ersten bzw. zweiten Faktor. Zeigen Sie:

   i. Durch $H := p_1^* H_1 + p_2^* H_2$ wird eine Polarisierung auf $X \times X$ definiert.

   ii. Ist $H_1 = H_2$, so gilt: $\alpha^* H = 2H$.