

Einige Standard-Aufgabentypen der Funktionentheorie I

I. Untersuchung von Funktionen auf komplexe Differenzierbarkeit/Holomorphie

gegeben: Funktionsterm $f(z)$.

gesucht: Alle Punkte, in denen f $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist, evtl. die Ableitung von f in diesen Punkten und die größte offene Menge, auf der f holomorph ist.

Wie geht man vor?

1. SCHRITT: Bestimme die Menge aller Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, in denen f $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist.

- Manchmal ist es sinnvoll, direkt die Definition der $\mathbb{C}$ -Differenzierbarkeit zu prüfen: f ist genau dann $\mathbb{C}$ -differenzierbar in z_0 , wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

existiert.

- Meistens hilft aber folgende Aussage: f ist genau dann $\mathbb{C}$ -differenzierbar in z_0 , wenn

- (i) f in z_0 $\mathbb{R}$ -differenzierbar ist **und**
- (ii) f in z_0 die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (C-R-DGL) erfüllt.

Dazu schreibe man $f = u + iv$ mit reellwertigen Funktionen u und v .

Zum Nachweis von (i) genügt es zu zeigen, dass u und v , aufgefasst als Funktionen $u : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$, v analog, nach x und y partiell differenzierbar sind und die partiellen Ableitungen stetig sind.

(ii) bedeutet, dass für die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y von u und v gilt: $u_x(z_0) = v_y(z_0)$, $u_y(z_0) = -v_x(z_0)$.

Für die Ableitung gilt dann:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(z_0) + iv_x(z_0) = u_x(z_0) - iu_y(z_0) \\ &= v_y(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0) \end{aligned}$$

- Für die $\mathbb{C}$ -Differenzierbarkeit gelten die aus der reellen Analysis bekannten Ableitungsregeln (Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in analoger Form.
- Jede Funktion, die durch eine Potenzreihe dargestellt wird, ist im Innern des Konvergenzbereichs $\mathbb{C}$ -differenzierbar und die Ableitung ergibt sich durch gliedweise Differentiation.

2. SCHRITT: Bestimme die größte offene Menge in $\mathbb{C}$, auf der f holomorph ist.

Zur Erinnerung: Ist $X \subset \mathbb{C}$ offen, so heißt f holomorph auf X , wenn f in jedem Punkt von X $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist.

Man überlege sich also, welche möglichst große offene Menge in der Menge derjenigen Punkte enthalten ist, in denen f $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist. Insbesondere gilt: Ist f nur in einem einzigen Punkt oder nur entlang einer Geraden $\mathbb{C}$ -differenzierbar, so ist f nirgends holomorph.

Beispiel

AUFGABE: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ fest. In welchen Punkten ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z = x + iy \longmapsto (ax^2 - y) + i(x + by^2)$$

$\mathbb{C}$ -differenzierbar? Bestimme ihre Ableitung in diesen Punkten. Wo ist f holomorph?

LÖSUNG: Es ist $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) = ax^2 - y, \quad v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(x, y) = x + by^2$$

u und v sind nach beiden Variablen partiell differenzierbar mit

$$u_x(x, y) = 2ax, \quad u_y(x, y) = -1, \quad v_x(x, y) = 1, \quad v_y(x, y) = 2by \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Die partiellen Ableitungen sind offenbar stetig, so dass f überall $\mathbb{R}$ -differenzierbar ist.

Zu den C-R-DGL: Es gilt stets $u_y = -1 = -v_x$, so dass die zweite Gleichung für alle Werte von a und b auf ganz $\mathbb{C}$ erfüllt ist. Für die erste Gleichung machen wir eine Fallunterscheidung:

- 1. Fall: $a = b = 0$: Dann gilt stets $u_x(x, y) = 2ax = 0 = 2by = v_y(x, y)$, d. h. f ist $\mathbb{C}$ -differenzierbar auf ganz $\mathbb{C}$ mit

$$f'(x, y) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 2ax + i \cdot 1 = i \quad \text{für alle } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

(kein Wunder, denn in diesem Fall ist $f = i \cdot \text{id}_{\mathbb{C}}$)

- 2. Fall: $a \neq 0$: Dann gilt $u_x(x, y) = v_y(x, y) \iff 2ax = 2by \iff x = \frac{b}{a}y$, d. h. f ist genau in allen Punkten der Geraden $G := \mathbb{R}(b/a, 1)^T = \mathbb{R}(b, a)^T$ $\mathbb{C}$ -differenzierbar mit

$$f'(x, y) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 2ax + i \cdot 1 = 2ax + i \quad \text{für alle } z = x + iy \in G$$

- 3. Fall: $b \neq 0$: Dann folgt analog, dass f ebenfalls genau in allen Punkten der Geraden $G = \mathbb{R}(b, a)^T$ $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist mit derselben Ableitung wie im 2. Fall.

Zur Holomorphie: Für $a = b = 0$ ist f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, d. h. f ist ganz. Ansonsten ist f nirgends holomorph, da f nur auf G $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist und G keine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ enthält.

II. Berechnung eines komplexen Kurvenintegrals

gegeben: $X \subset \mathbb{C}$ Teilmenge, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, stückweise glatte Kurve γ in X .

gesucht: Das Kurvenintegral $\gamma \times f = \int_{\gamma} f(z) dz$.

Wie geht man vor?

Hier gibt es je nach Situation wesentlich verschiedene Herangehensweisen. Man stelle sich folgende Fragen:

- Kann man γ in endlich viele einfachere Teilkurven zerlegen? Dann ist das Integral gleich der Summe der Integrale über die Teilkurven, denn für stückweise glatte Kurven γ_1, γ_2 in X gilt:

$$(\gamma_1 \# \gamma_2) \times f = \gamma_1 \times f + \gamma_2 \times f$$

- Kann man explizit eine Parametrisierung von γ angeben, also eine Abbildungsvorschrift $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$? Dann kann man direkt die Definition eines komplexen Kurvenintegrals anwenden. Ist γ stetig differenzierbar auf $[a, b]$, so gilt:

$$\gamma \times f = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Ansonsten summiert man die Integrale über die Teilintervalle, auf denen γ stetig differenzierbar ist.

ACHTUNG: Nicht das $\gamma'(t)$ vergessen!

Häufig benötigte Parametrisierungen:

- Strecke von $z_0 \in \mathbb{C}$ nach $z_1 \in \mathbb{C}$: $\gamma = [z_0, z_1] : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto (1-t)z_0 + tz_1$, $\gamma'(t) = z_1 - z_0$.
- Kreis um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$: $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + re^{2\pi it}$, $\gamma'(t) = 2\pi ire^{2\pi it}$ oder auch $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + re^{it}$, $\gamma'(t) = ire^{it}$.
- Hat f in X eine holomorphe Stammfunktion F ? Dies ist z. B. dann der Fall, wenn f holomorph und X ein sternförmiges Gebiet ist. Dann ist $\gamma \times f = F(z_1) - F(z_0)$, wobei z_0 der Anfangspunkt und z_1 der Endpunkt von γ ist. In diesem Fall gilt insbesondere: Ist γ geschlossen, d. h. Anfangspunkt und Endpunkt stimmen überein, ist $\gamma \times f = 0$.
- Lässt sich γ so in endlich viele Teilkurven zerlegen, dass jede der Teilkurven in einem Gebiet verläuft, in dem f eine holomorphe Stammfunktion hat? Dann kann man das Integral wie oben zerlegen und den vorhergehenden Hinweis auf die Teilintegrale anwenden.
- Ist γ eine Kreislinie $|z - z_0| = r$, $z_0 \in X$, $r > 0$, und hat f die Form $f(z) = g(z)/(z - w)^{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$? Dann kann man die Cauchy-Integralformel anwenden, falls folgende Voraussetzungen erfüllt sind:
 - g ist holomorph auf einer offenen Menge, die $\overline{B_r(z_0)}$ enthält.
 - Es ist $w \in B_r(z_0)$.

Man erhält dann

$$\gamma \times f = \int_{|z-z_0|=r} \frac{g(z)}{(z-w)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{g(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \stackrel{\text{CIF}}{=} \frac{2\pi i}{n!} g^{(n)}(w)$$

ACHTUNG: Nicht das $2\pi i$ oder das $n!$ vergessen und nicht vergessen, die Voraussetzungen zu überprüfen!

BEMERKUNG: Evtl. kann man f zunächst durch Partialbruchzerlegung in die o. g. Form bringen.

Was muss man beachten?

Ist die Kurve in der Form $|z - z_0| = r$ oder $\partial B_r(z_0)$ oder ähnlich gegeben, also nicht als Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, sondern als ihr Bild $\text{supp } \gamma$, dann ist damit die „übliche“ Art des Durchlaufens gemeint, bei einem Kreis z. B. ein einzelner Durchlauf im Gegenuhrzeigersinn.

Beispiele

AUFGABE: Berechne folgende Integrale:

a) $\int_{|z|=1} \bar{z}^3 dz$, b) $\int_{|z|=r} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z-3)} dz$ für (i) $r = 2$, (ii) $r = 4$.

LÖSUNG: Zu a): Wir wählen die Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \bar{z}^3 dz &= \int_0^{2\pi} (\overline{e^{it}})^3 i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} (e^{-it})^3 i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} e^{-3it} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i e^{-2it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i (\cos(-2t) + i \sin(-2t)) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin(-2t) + i \cos(-2t)) dt = \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt + i \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos(2t) \right]_{t=0}^{2\pi} + i \left[\frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{t=0}^{2\pi} = -\frac{1}{2} \underbrace{\cos(4\pi)}_{=1} + \frac{1}{2} \underbrace{\cos 0}_{=1} + \frac{i}{2} \underbrace{\sin(4\pi)}_{=0} - \frac{i}{2} \underbrace{\sin 0}_{=0} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Zu b): (i) Wir schreiben

$$\frac{\sin z}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{\sin z}{z-3} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{f(z)}{(z-1)^2} \quad \text{mit} \quad f(z) = \frac{\sin z}{z-3}$$

Es ist f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{3\}$, $\overline{B_2(0)} \subset \mathbb{C} \setminus \{3\}$ und $1 \in B_2(0)$. Mit der Cauchy-Integralformel folgt:

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z-3)} dz = \frac{2\pi i}{1!} \frac{1!}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^{1+1}} dz \stackrel{\text{CIF}}{=} \frac{2\pi i}{1!} f'(1) = 2\pi i \frac{\cos(z)(z-3) - \sin z}{(z-3)^2} \Big|_{z=1} = -\frac{\pi i}{2} (2 \cos 1 + \sin 1)$$

(ii) Partialbruchzerlegung liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} &\stackrel{!}{=} \frac{Az+B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-3} \iff 1 = (Az+B)(z-3) + C(z-1)^2 \quad \xleftrightarrow{\text{Koeff.vgl.}} \begin{cases} A = -1/4 \\ B = -1/4 \\ C = 1/4 \end{cases} \\ \implies \frac{\sin z}{(z-1)^2(z-3)} &= -\frac{1}{4} \frac{(z+1)\sin z}{(z-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{\sin z}{z-3} = -\frac{1}{4} \frac{f(z)}{(z-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{\sin z}{z-3} \quad \text{mit} \quad f(z) = (z+1)\sin z \end{aligned}$$

Es sind f und $\sin$ holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $\overline{B_4(0)} \subset \mathbb{C}$ und $1, 3 \in B_4(0)$. Mit der Cauchy-Integralformel folgt:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=4} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z-3)} dz &= -\frac{1}{4} \int_{|z|=4} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz + \frac{1}{4} \int_{|z|=4} \frac{\sin z}{z-3} dz = -\frac{1}{4} \frac{2\pi i}{1!} \frac{1!}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{f(z)}{(z-1)^{1+1}} dz + \frac{1}{4} 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{\sin z}{z-3} dz \\ &\stackrel{\text{CIF}}{=} -\frac{\pi i}{2} f'(1) + \frac{\pi i}{2} \sin 3 = -\frac{\pi i}{2} (\sin z + (z+1)\cos z) \Big|_{z=1} + \frac{\pi i}{2} \sin 3 = \frac{\pi i}{2} (\sin 3 - \sin 1 - 2 \cos 1) \end{aligned}$$

(BEMERKUNG: Teil b) kann man auch mit dem Residuensatz lösen. Wie?)

III. Bestimmung einer Laurent-Entwicklung

gegeben: $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$, Kreisring $X := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$, holomorphe Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.

gesucht: Laurent-Entwicklung von f auf X .

Was genau ist gesucht?

Gesucht ist eine Zerlegung $f = f_+ + f_-$ wie folgt:

- $f_+(z) = \sum_{n \geq 0} c_n(z-a)^n$ konvergiert, d. h. ist holomorph, (insbesondere) auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$.
- $f_-(z) = \sum_{n < 0} c_n(z-a)^n$ konvergiert, d. h. ist holomorph, (insbesondere) auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$.
- $f_-(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$, d. h. $|z| \rightarrow \infty$.

Wie geht man vor?

1. SCHRITT: Schreibe f als Laurent-Reihe bzw. als Summe mehrerer Laurent-Reihen, die auf X konvergieren. Spezialfälle:

- Entwicklung von $1/(z-b)$, $b \in \mathbb{C}$, auf $\{r < |z-a| < R\}$, wenn $|b-a| \geq R$:

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{z-a-(b-a)} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{\frac{z-a}{b-a}-1} = \frac{-1}{b-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}} = \frac{-1}{b-a} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{-1}{(b-a)^{n+1}} (z-a)^n$$

Die Reihe konvergiert auf X als geometrische Reihe mit $\left|\frac{z-a}{b-a}\right| = \frac{|z-a|}{|b-a|} \leq \frac{|z-a|}{R} < 1$.

- Entwicklung von $1/(z-b)$, $b \in \mathbb{C}$, auf $\{r < |z-a| < R\}$, wenn $|b-a| \leq r$:

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{z-a-(b-a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{b-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{b-a}{z-a}\right)^n = \sum_{n \geq 0} (b-a)^n (z-a)^{-n-1} = \sum_{n \leq -1} (b-a)^{-n-1} (z-a)^n$$

Die Reihe konvergiert auf X als geometrische Reihe mit $\left|\frac{b-a}{z-a}\right| = \frac{|b-a|}{|z-a|} \leq \frac{r}{|z-a|} < 1$.

- Entwicklung von $(z-a)^k/(z-b)$, $k \in \mathbb{Z}$:
Schreibe $(z-a)^k/(z-b) = (z-a)^k \cdot 1/(z-b)$, entwickle $1/(z-b)$ wie oben und ziehe $(z-a)^k$ in die Reihe.
- Entwicklung von $1/(z-b)^2$:
Schreibe $1/(z-b)^2 = -d/dz \cdot 1/(z-b)$, entwickle $1/(z-b)$ wie oben, ziehe d/dz in die Reihe (gliedweise Differentiation nach dem Abelschen Lemma) und bilde innen die Ableitung.

2. SCHRITT:

Ordne die im 1. Schritt gefundene Darstellung in (1) Ausdrücke mit $(z-a)^n$, $n \geq 0$, (d. h. inklusive konstante Terme) und (2) Ausdrücke mit $(z-a)^n$, $n < 0$, durch Aufteilen bzw. Umsortieren der Reihen aus dem 1. Schritt. Wähle alle Terme aus (1) als f_+ und alle Terme aus (2) als f_- .

3. SCHRITT:

Stelle fest, dass die im 2. Schritt gefundene Zerlegung tatsächlich die obigen Bedingungen erfüllt. Dies ist aber bei dieser Vorgehensweise automatisch der Fall.

Was muss man beachten?

- Man lasse sich nicht durch das a verwirren. Oft ist $a = 0$ gegeben. Dann steht überall statt $z-a$ einfach z .
- Ausdrücke der Form $c(z-a)^k$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, z. B. $z-a$ oder $1/(z-a)$ (im Fall $a = 0$ heißt das z. B. z oder $1/z$), sind bereits Laurent-Reihen um a , wenn auch sehr einfache. Sie bleiben also so stehen.
- Ein konstanter Term $c \in \mathbb{C}$ hat die Form $c(z-a)^0$, d. h. er gehört zu f_+ . Ansonsten würde f_- für $z \rightarrow \infty$ nicht gegen 0 konvergieren. Insbesondere enthält eine Reihe der Form $\sum_{n \leq 0} c_n(z-a)^n$ den konstanten Term c_0 .

Beispiel

AUFGABE: Bestimme die Laurent-Entwicklung von

$$f: \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto -\frac{1}{z-1} + \frac{(z-1)^2}{(z-2)^2} + \frac{\exp(z-1)}{z-1} \quad \text{auf } X := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$$

LÖSUNG: Hier ist $a = 1$, $r = 1$ und $R = \infty$. Der Ausdruck $-\frac{1}{z-1}$ ist bereits eine Laurent-Reihe um 1, bleibt also so stehen. Für den zweiten Summanden gilt:

$$\begin{aligned} \frac{(z-1)^2}{(z-2)^2} &= (z-1)^2 \left(-\frac{d}{dz} \frac{1}{z-2} \right) = (z-1)^2 \left(-\frac{d}{dz} \frac{1}{z-1-(2-1)} \right) = (z-1)^2 \left(-\frac{d}{dz} \frac{1}{(z-1)-1} \right) \\ &= (z-1)^2 \left(-\frac{d}{dz} \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} \right) = (z-1)^2 \left(-\frac{d}{dz} \frac{1}{z-1} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z-1} \right)^n \right) = (z-1)^2 \left(-\frac{d}{dz} \sum_{n \geq 0} (z-1)^{-n-1} \right) \\ &= (z-1)^2 \sum_{n \geq 0} (-(-n-1)(z-1)^{-n-2}) = \sum_{n \geq 0} (n+1)(z-1)^{-n} = \sum_{n \leq 0} (-n+1)(z-1)^n \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert für $\left| \frac{1}{z-1} \right| = \frac{1}{|z-1|} < 1$, also $|z-1| > 1$, d. h. auf X . Für den dritten Summanden gilt:

$$\frac{\exp(z-1)}{z-1} = \frac{1}{z-1} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (z-1)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (z-1)^{n-1} = \sum_{n \geq -1} \frac{1}{(n+1)!} (z-1)^n$$

Die Reihe konvergiert auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, insbesondere auf X . Insgesamt gilt für alle $z \in X$:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z-1} + \sum_{n \leq 0} (-n+1)(z-1)^n + \sum_{n \geq -1} \frac{1}{(n+1)!} (z-1)^n \\ &= -\frac{1}{z-1} + 1 + \sum_{n < 0} (-n+1)(z-1)^n + (z-1)^{-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} (z-1)^n \\ &= \underbrace{1 + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} (z-1)^n}_{=: f_+(z)} + \underbrace{\sum_{n < 0} (-n+1)(z-1)^n}_{=: f_-(z)} \end{aligned}$$

f_+ konvergiert auf ganz $\mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \infty = R\}$, f_- konvergiert auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$ und es gilt $f_-(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$. Also ist $f = f_+ + f_-$ die Laurent-Entwicklung von f auf X .

IV. Klassifikation isolierter Singularitäten

gegeben: Funktionsterm $f(z)$.

gesucht: Klassifikation der isolierten Singularitäten von f .

Was genau ist gesucht?

Gesucht sind zunächst alle isolierten Singularitäten von f , d. h. alle Punkte $a \in \mathbb{C}$, für die gilt:

- a ist eine Singularität von f , d. h. f kann in a nicht wie angegeben definiert werden, so dass f nahe a holomorph ist.
- a ist isoliert, d. h. es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass f auf $B_\varepsilon^*(a)$ definiert und holomorph ist, also dort insbesondere keine Singularitäten hat.

Die isolierten Singularitäten sollen dabei so explizit wie möglich angegeben werden. Jede der isolierten Singularitäten soll einer der drei Klassen „hebbare Singularität“, „Pol“ bzw. „wesentliche Singularität“ zugeordnet werden. Falls ein Pol vorliegt, soll die Polstellenordnung $\nu_a f$ bestimmt werden.

Wie geht man vor?

1. SCHRITT: Bestimme alle Singularitäten von f . Wo f durch den angegebenen Funktionsterm wohldefiniert und holomorph ist, liegt keine Singularität vor. Insbesondere gilt:

- Konstanten und $\text{id}_{\mathbb{C}}$ sind holomorph.
- Summen, Produkte und Kompositionen holomorpher Funktionen sind holomorph.
- Folglich sind alle Polynome holomorph.
- Funktionen, die durch konvergente Potenzreihen beschrieben werden, sind holomorph.

Aufpassen muss man bei Quotienten, denn:

- Ein Quotient zweier holomorpher Funktionen ist außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners holomorph. In den Nullstellen des Nenners liegen (nicht notwendigerweise isolierte) Singularitäten vor.

2. SCHRITT: Stelle fest, welche der im 1. Schritt gefundenen Singularitäten isoliert sind. Z. B. gilt:

- Hat f nur *eine einzige* Singularität, so ist diese immer isoliert.
- allgemeiner: Hat f nur *endlich viele* Singularitäten, so sind diese immer isoliert.
- noch allgemeiner: Hat f alle seine Singularitäten *in den Nullstellen einer ganzen Funktion $g \neq 0$* , so sind diese immer isoliert, denn die Nullstellenmenge von g ist nach dem Identitätssatz diskret.
- Existiert eine Folge $(z_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ von Singularitäten von f mit $z_n \rightarrow z_* \in \mathbb{C}$ ($n \rightarrow \infty$), so ist z_* (falls es überhaupt eine Singularität ist), nicht isoliert.

3. SCHRITT: Klassifiziere jede der im 2. Schritt gefundenen isolierten Singularitäten $a \in \mathbb{C}$. Dazu beachte man:

- Ist $f = g + h$ eine Summe zweier Funktionen, so kann man die Summanden getrennt behandeln. Die Klasse der Singularität von f kann man in den meisten Fällen allgemein nach folgender Tabelle¹ angeben:

$g \setminus h$	wesentlich	Pol, Ordnung $\nu_a h$	hebbbar
holomorph	wesentlich	Pol, Ordnung $\nu_a f = \nu_a h$	hebbbar
hebbbar	wesentlich	Pol, Ordnung $\nu_a f = \nu_a h$	hebbbar
Pol, Ordnung $\nu_a g$	wesentlich	falls $\nu_a g \neq \nu_a h$: Pol, Ordnung $\nu_a f = \min\{\nu_a g, \nu_a h\}$ falls $\nu_a g = \nu_a h$: entweder Pol, $\nu_a f \geq \nu_a g$, oder hebbbar	
wesentlich	?		

Diejenigen Fälle, die keine allgemeine Aussage zulassen, behandelt man am besten durch Vergleich der Laurent-Reihen von g und h . Auf diese Weise zeigt man übrigens auch die Aussagen der Tabelle.

- Kann man die Laurent-Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$ von f in a explizit angeben? Wenn ja, dann gilt:

$$f \text{ hat in } a \begin{cases} \text{eine hebbare Singularität} & , \text{ falls } c_n = 0 \text{ für alle } n < 0 \\ \text{einen Pol der Ordnung } \nu_a f = m & , \text{ falls } c_n = 0 \text{ für alle } n < m < 0, c_m \neq 0 \\ \text{eine wesentliche Singularität} & , \text{ sonst, d. h. falls } c_n \neq 0 \text{ für unendlich viele } n < 0 \end{cases}$$

- Lässt sich f in a stetig/holomorph fortsetzen? Existiert der Grenzwert $\lim_{a \neq z \rightarrow a} f(z)$? Ist $|f|$ in einer Umgebung von a beschränkt? Lässt sich f nahe a in eine Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n$ entwickeln? Diese Fragen sind alle äquivalent und liefern, falls mit „ja“ beantwortet, eine hebbare Singularität.

(BEMERKUNG: Gilt $\lim_{a \neq z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$, so liegt ebenfalls eine hebbare Singularität vor. Beweis?)

¹Hinweis: Es ist nicht sinnvoll, sich diese Tabelle zu merken.

- Ist f nahe a ein Quotient g/h zweier holomorpher Funktionen g, h mit $h(a) = 0, h \not\equiv 0$? Dann hat f in a eine hebbare Singularität oder einen Pol. Zur genaueren Klassifikation kann man wie folgt vorgehen:
 - Man schreibt $g(z) = (z - a)^m g_1(z), h(z) = (z - a)^n h_1(z)$ mit $m \geq 0, n > 0$ und nahe a holomorphen Funktionen g_1, h_1 mit $g_1(a) \neq 0, h_1(a) \neq 0$. Dazu bestimmt man entweder die Nullstellenordnungen $\nu_a g = m, \nu_a h = n$ durch Betrachtung der Ableitungen, evtl. unter Zuhilfenahme der Regel $\nu_a(f_1 f_2) = \nu_a f_1 + \nu_a f_2$, oder stellt g und h explizit als Potenzreihen dar und zieht jeweils den Faktor $(z - a)$ so oft wie möglich heraus.
 - Daraus erhält man die Darstellung

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z - a)^m g_1(z)}{(z - a)^n h_1(z)} = (z - a)^{m-n} \frac{g_1(z)}{h_1(z)}$$

Dabei ist g_1/h_1 holomorph nahe a mit $g_1(a)/h_1(a) \neq 0$. Im Fall $m \geq n$, also $m - n \geq 0$, hat f in a eine hebbare Singularität. Im Fall $m < n$, also $m - n < 0$, hat f in a einen Pol der Ordnung $\nu_a f = m - n$.

- Ist f von der Form $\exp \circ g$ für eine holomorphe Funktion g , die in a eine isolierte Singularität hat? Dann kann man den Hilfssatz zu Aufgabe 8.3. benutzen: Eine hebbare oder wesentliche Singularität von g überträgt sich auf f , ein Pol von g (dessen Ordnung man dann nicht zu kennen braucht) wird zu einer wesentlichen Singularität von f .

Beispiel

AUFGABE: Klassifiziere die isolierten Singularitäten von

$$f(z) := \exp\left(\frac{z - \pi}{\sin z}\right) + \frac{(\sin(\pi z))^2}{(\log z)^5}$$

Dabei bezeichne $\log$ den Hauptzweig des Logarithmus auf Σ_1 .

LÖSUNG: Es sind $\exp, z \mapsto z - \pi, \sin, z \mapsto (\sin(\pi z))^2$ und $w \mapsto w^5$ ganze Funktionen, d. h. f hat genau dort Singularitäten,

- wo $\log$ nicht definiert ist, also in allen Punkten von $\mathbb{C} \setminus \Sigma_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, und
- wo mindestens einer der Nenner zu 0 wird: $\sin z = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}, (\log z)^5 = 0 \iff \log z = 0 \iff z = 1$.

Die Menge der Singularitäten von f ist also $S := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \cup \{n\pi : n = 1, 2, \dots\} \cup \{1\}$. f ist holomorph auf der offenen Menge $X := \mathbb{C} \setminus S$.

Die Punkte $x \in \mathbb{R}, x \leq 0$, sind alle keine isolierten Singularitäten, denn es gilt jeweils für alle $\varepsilon > 0$:

$$B_\varepsilon^*(x) \cap S \supset (x - \varepsilon, x) \neq \emptyset \implies B_\varepsilon^*(x) \cap S \neq \emptyset \implies B_\varepsilon^*(x) \not\subset \mathbb{C} \setminus S = X$$

Die Punkte 1 und $n\pi, n = 1, 2, \dots$, sind isolierte Singularitäten, denn es gilt (z. B.) $B_1^*(1) \subset X$ und $B_{\pi/2}^*(n\pi) \subset X$ für alle $n = 1, 2, \dots$.

Klassifikation von $z_0 := 1$: Wir untersuchen die Funktionen $g(z) := \sin(\pi z)$ und $\log$ nahe 1:

- $g(1) = \sin \pi = 0, g'(1) = \pi \cos \pi = -\pi \neq 0 \implies \nu_1 g = 1$, d. h. $g(z) = (z - 1)h(z)$ nahe 1 für ein hol. h mit $h(1) \neq 0$.
- $\log(1) = 0, \log'(1) = 1/1 = 1 \neq 0 \implies \nu_1 \log = 1$, d. h. $\log(z) = (z - 1)k(z)$ nahe 1 für ein holomorphes k mit $k(1) \neq 0$.

Folglich gilt nahe 1:
$$\frac{(\sin(\pi z))^2}{(\log z)^5} = \frac{(g(z))^2}{(\log z)^5} = \frac{(z - 1)^2 (h(z))^2}{(z - 1)^5 (k(z))^5} = \frac{(h(z))^2}{(z - 1)^3 (k(z))^5} = \frac{(h(z))^2}{(k(z))^5} \bigg/ (z - 1)^3.$$

Es ist h^2/k^5 holomorph mit $(h(1))^2/(k(1))^5 \neq 0, (1 - 1)^3 = 0$ und $(z - 1)^3 \neq 0$. Nach dem Satz über Pole hat dann der zweite Summand von f einen Pol in 1. Aus dem Nenner liest man die Ordnung -3 ab. Der erste Summand von f ist holomorph nahe 1. Also hat f in $z_0 = 1$ einen Pol der Ordnung $\nu_1 f = -3$.

Klassifikation von $z_1 := \pi$: Wir untersuchen die Funktion $\sin$ nahe π : $\sin \pi = 0, \sin' \pi = \cos \pi = -1 \neq 0 \implies \nu_\pi \sin = 1$, d. h. $\sin z = (z - \pi)g(z)$ nahe π für ein holomorphes g mit $g(\pi) \neq 0$. Folglich gilt nahe π :

$$\frac{z - \pi}{\sin z} = \frac{z - \pi}{(z - \pi)g(z)} = \frac{1}{g(z)}$$

Wegen $g(\pi) \neq 0$ ist dann $1/g$ eine holomorphe Fortsetzung von $z \mapsto (z - \pi)/(\sin z)$ in einer Umgebung von π . Also hat diese Funktion in π eine hebbare Singularität. Nach dem Hilfssatz zu Aufgabe 8.3. hat dann der erste Summand von f ebenfalls eine hebbare Singularität in π . Der zweite Summand ist nahe π holomorph, d. h. f hat in $z_1 = \pi$ eine hebbare Singularität.

Klassifikation von $z_n := n\pi, n = 2, 3, \dots$: Wir untersuchen die Funktion $z \mapsto (z - \pi)/(\sin z)$ nahe $n\pi$: Es sind $z \mapsto z - \pi$ und $\sin$ holomorph mit $n\pi - \pi = (n - 1)\pi \neq 0, \sin \pi = 0$ und $\sin \neq 0$, d. h. nach dem Satz über Pole hat $z \mapsto (z - \pi)/(\sin z)$ einen Pol in $n\pi$. Nach dem Hilfssatz zu Aufgabe 8.3. hat dann der erste Summand von f in $n\pi$ eine wesentliche Singularität. Der zweite Summand ist nahe $n\pi$ holomorph, d. h. f hat in $z_n = n\pi$ eine wesentliche Singularität.

V. Bestimmung eines Residuums

gegeben: $X \subset \mathbb{C}$ offen, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $a \notin X$ isolierte Singularität.

gesucht: Das Residuum $\text{res}_a f$ von f in a .

Was genau ist gesucht?

Ist $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$ die Laurent-Entwicklung von f in a , d. h. auf einer punktierten Kreisscheibe $B_\varepsilon^*(a) \subset X$, $\varepsilon > 0$, so suchen wir $\text{res}_a f := c_{-1}$.

Wie geht man vor?

In den meisten Fällen kann man einfach die Laurent-Entwicklung bestimmen und das Residuum ablesen.

MAN BEACHTET: In einer Laurent-Reihe der Form $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \dots$ ist das Residuum nicht notwendig der Koeffizient für $n = -1$, sondern der Koeffizient, der bei $(z-a)^{-1}$ steht. So erhält man z. B. in der Reihe $\sum_{n \geq -2} 3^{n+1} z^{n-1}$ für $n = 0$ den Summanden $3^{0+1} z^{0-1} = 3(z-0)^{-1}$, d. h. das Residuum in 0 ist gleich 3.

SPEZIALFALL: Hat f in a einen Pol der Ordnung $\nu_a f = -1$, so ist $\text{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$.

(BEMERKUNG: Diese Aussage lässt sich auf Pole der Ordnung $\nu_a f = -m$, $m = 2, 3, \dots$ verallgemeinern. Wie?)

Beispiele

AUFGABE: Bestimme jeweils das Residuum von

$$\text{a) } f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{\cos(2z)}{z^5} \quad \text{in } a = 0, \quad \text{b) } g : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \quad \text{in } a = \pi$$

LÖSUNG: Zu a): Für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gilt:

$$f(z) = \frac{\cos(2z)}{z^5} = \frac{1}{z^5} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2z)^{2n} = \frac{1}{z^5} \sum_{n \geq 0} \frac{2^{2n} (-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n \geq 0} \underbrace{\frac{(-4)^n}{(2n)!}}_{=: c_{2n-5}} z^{2n-5}$$

Es ist $2n-5 = -1 \iff n = 2$, d. h.

$$\text{res}_a f = \text{res}_0 f = c_{-1} = \frac{(-4)^2}{(2 \cdot 2)!} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Zu b): Wir zeigen, dass g in $a = \pi$ einen Pol der Ordnung $\nu_\pi g = -1$ hat. Dazu untersuchen wir die Funktion $\sin$ nahe π :

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{\sin^{(n)}(\pi)}{n!} (z-\pi)^n, \quad 0 = \sin(\pi) = \frac{\sin^{(0)}(\pi)}{0!} \implies \sin(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^{(n)}(\pi)}{n!} (z-\pi)^n \\ &= (z-\pi) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^{(n)}(\pi)}{n!} (z-\pi)^{n-1} = (z-\pi) \underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{\sin^{(n+1)}(\pi)}{(n+1)!} (z-\pi)^n}_{=: h(z)}, \quad h(\pi) = \frac{\sin^{(0+1)}(\pi)}{(0+1)!} = \sin'(\pi) = \cos(\pi) = -1 \neq 0 \end{aligned}$$

(Die konkrete Reihendarstellung ist notwendig, da wir den genauen Wert $h(\pi)$ benötigen werden.) Es folgt:

$$g(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{\cos(z)}{(z-\pi)h(z)} = \frac{\cos(z)}{h(z)} \Big/ (z-\pi)$$

Mit $g_1(z) := \cos(z)/h(z)$ und $g_2(z) := z-\pi$ gilt: g_1 und g_2 sind holomorph mit $g_1(\pi) = \cos(\pi)/h(\pi) = (-1)/(-1) = 1 \neq 0$, $g_2(\pi) = \pi - \pi = 0$ und $g_2 \not\equiv 0$. Nach dem Satz über Pole hat g in π einen Pol. Aus dem Nenner $g_2(z) = (z-\pi)^1$ liest man $\nu_\pi g = -1$ ab. Es folgt:

$$\text{res}_a g = \text{res}_\pi g = \lim_{z \rightarrow \pi} (z-\pi)g(z) = \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\cos(z)}{h(z)} = \frac{\cos(\pi)}{h(\pi)} = \frac{-1}{-1} = 1$$