

Aufgabe

Die Folge (u_n) sei definiert durch

$$u_1 := 1, \quad u_2 := 5, \quad u_{n+2} := 2u_{n+1} + 3u_n \quad \text{für } n \geq 1$$

Leitet einen geschlossenen Ausdruck für u_n her, indem ihr die Spalte $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ mittels einer geeigneten Matrix A durch die Spalte $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ ausdrückt und A^n mittels Eigenwerttheorie berechnet.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+1} + 3u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung von A^n diagonalisieren wir A :

$$\chi_A(x) = \det(A - xE) = \begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (2-x)(-x) - 3 = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$.

- Bestimmung einer Basis von $E(3)$: $A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E(3) = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Bestimmung einer Basis von $E(-1)$: $A - (-1) \cdot E = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E(-1) = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Transformationsmatrix und Inverse:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_2 - 3 \cdot Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 : (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = S^{-1}$$

Wir erhalten

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (S^{-1}AS)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

und andererseits

$$(S^{-1}AS)^n = S^{-1}A \underbrace{S \cdot S^{-1}}_{=E} A \underbrace{S \cdot S^{-1}}_{=E} AS \dots S^{-1}AS = S^{-1}A^n S$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n\text{-mal}}$

also insgesamt

$$A^n = S \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} S^{-1}$$

Oben eingesetzt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cdot 3^n \\ -(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 \cdot 3^n + (-1)^n \\ 3 \cdot 3^n - (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also schließlich

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \Rightarrow u_n = \frac{u_{n+2} - 2u_{n+1}}{3} = \frac{(9 - 2 \cdot 3) \cdot 3^n + (1 + 2) \cdot (-1)^n}{3 \cdot 2} = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$$