

Beispiel zum Gauß-Algorithmus

Diese Aufgabe zeigt das Lösen linearer Gleichungssysteme nach dem Verfahren aus der Vorlesung.

Aufgabe

Seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 7}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

- Bestimme die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{A,0}$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.
- Bestimme die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{A,b}$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Lösung

zu a)

SCHRITT 1: ÜBERFÜHRUNG IN ZEILENSTUFENFORM

Wir betrachten die komplette Matrix A :

- Die erste Spalte von links, in der nicht nur Nullen stehen, ist Spalte 1.
- In dieser Spalte 1 steht der oberste von 0 verschiedene Eintrag (hier eine 2) in Zeile 3.
- Wir tauschen die Zeile mit der 2 nach oben, teilen sie durch 2 und eliminieren alle darunter stehenden von 0 verschiedenen Einträge:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{ZV_{1,3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{ZM_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{ZA_{1,5}(-1)} \begin{pmatrix} \overline{1} & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die neue Matrix ab Zeile 2 (also unterhalb der gestrichelten Linie):

- Die erste Spalte von links, in der nicht nur Nullen stehen, ist Spalte 2.
- In dieser Spalte 2 steht der oberste von 0 verschiedene Eintrag (hier eine 2) in Zeile 2.
- Wir tauschen die Zeile mit der 2 nach oben (entfällt), teilen sie durch 2 und eliminieren alle darunter stehenden von 0 verschiedenen Einträge (entfällt):

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{ZM_2(1/2)} \begin{pmatrix} \overline{1} & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \overline{1} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die neue Matrix ab Zeile 3:

- Die erste Spalte von links, in der nicht nur Nullen stehen, ist Spalte 3.

- In dieser Spalte 3 steht der oberste von 0 verschiedene Eintrag (hier eine -1) in Zeile 4.
- Wir tauschen die Zeile mit der -1 nach oben, teilen sie durch -1 und eliminieren alle darunter stehenden von 0 verschiedenen Einträge (entfällt):

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{ZV_{3,4}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{ZM_3(-1)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die neue Matrix ab Zeile 4:

- Die erste Spalte von links, in der nicht nur Nullen stehen, ist Spalte 6.
- In dieser Spalte 6 steht der oberste von 0 verschiedene Eintrag (hier eine -1) in Zeile 4.
- Wir tauschen die Zeile mit der -1 nach oben (entfällt), teilen sie durch -1 und eliminieren alle darunter stehenden von 0 verschiedenen Einträge:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{ZM_4(-1)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{ZA_{4,5}(-3)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die neue Matrix ab Zeile 5: Hier stehen nur Nullen, d. h. Schritt 1 ist beendet.

SCHRITT 2: ÜBERFÜHRUNG IN REDUZIerte ZEILENSTUFENFORM

Ziel ist die Eliminierung aller von 0 verschiedenen Einträge oberhalb der markierten Einsen.

- Wir betrachten Zeile 2: Oberhalb der 1 in Zeile 2, Spalte 2 steht bereits eine 0.
- Wir betrachten Zeile 3: Oberhalb der 1 in Zeile 3, Spalte 3 steht eine 1, die wir eliminieren:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{ZA_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wir betrachten Zeile 4: Oberhalb der 1 in Zeile 4, Spalte 6 steht eine -2 , eine 1 und eine -1 , die wir eliminieren:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} ZA_{4,1}(2) \\ ZA_{4,2}(-1) \\ ZA_{4,3}(1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SCHRITT 3: ABLESEN EINER BASIS DES LÖSUNGSRAUMS $\mathbb{L}_{A,0}$

Man erhält je einen Basisvektor für jede Spalte, in der **keine** der markierten Einsen steht, hier also 3 Basisvektoren für die Spalten 4, 5 und 7. Jeder Basisvektor hat so viele Einträge, wie die Matrix Spalten hat (hier 7) und entsteht wie folgt: Er enthält alle Einträge in der zugehörigen Spalte oberhalb der gestrichelten Linie mit umgekehrtem Vorzeichen, und zwar jeweils an derjenigen Stelle, die der Spaltennummer der links davon stehenden markierten 1 entspricht. An der Stelle, die der zugehörigen Spaltennummer entspricht, steht eine 1. Die restlichen Einträge sind gleich 0. Hier erhält man im Einzelnen:

- zu Spalte 4: Die Einträge oberhalb der gestrichelten Linie sind 0, 0, 0, mit umgekehrtem Vorzeichen immer noch 0, 0, 0. Die links dieser Einträge stehenden markierten Einsen stehen in den Spalten 1, 2 und 3, d. h. wir setzen 0, 0, 0 an die Stellen 1, 2, 3. Da wir in Spalte 4 sind, ist zusätzlich der 4. Eintrag gleich 1. Man erhält:

$$b_1 = \left(\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \mid 1 \ 0 \ 0 \ 0 \right) \quad (\text{als Spalte})$$

- zu Spalte 5: Die Einträge oberhalb der gestrichelten Linie sind $0, -1, -1$, mit umgekehrtem Vorzeichen $0, 1, 1$. Die links dieser Einträge stehenden markierten Einsen stehen in den Spalten 1, 2 und 3, d. h. wir setzen $0, 1, 1$ an die Stellen 1, 2, 3. Da wir in Spalte 5 sind, ist zusätzlich der 5. Eintrag gleich 1. Man erhält:

$$b_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{als Spalte})$$

- zu Spalte 7: Die Einträge oberhalb der gestrichelten Linie sind $0, 3, -2, -1$, mit umgekehrtem Vorzeichen $0, -3, 2, 1$. Die links dieser Einträge stehenden markierten Einsen stehen in den Spalten 1, 2, 3 und 6, d. h. wir setzen $0, -3, 2, 1$ an die Stellen 1, 2, 3, 6. Da wir in Spalte 7 sind, ist zusätzlich der 7. Eintrag gleich 1. Man erhält:

$$b_3 = \left(\begin{array}{c|ccc} \boxed{0} & \boxed{-3} & \boxed{2} & \boxed{1} \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right) \quad (\text{als Spalte})$$

Es gilt also

$$\mathbb{L}_{A,0} = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

zu b)

SCHRITT 1: ÜBERFÜHRUNG IN ZEILENSTUFENFORM, TEST AUF LÖSBARKEIT

Wie Schritt 1 beim homogenen Gleichungssystem, nur dass wir alle Umformungen mit der erweiterten Matrix $(A \mid b)$ durchführen. Man erhält:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{s. o.}} \left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn zu jeder Zeile auf der linken Seite, die nur Nullen enthält (also alle Zeilen unterhalb der gestrichelten Linie), auf der rechten Seite ebenfalls eine 0 steht. Hier betrifft dies nur die 5. Zeile. Dort steht auf der rechten Seite eine 0, d. h. das Gleichungssystem ist lösbar.

SCHRITT 2: ÜBERFÜHRUNG IN REDUZIerte ZEILENSTUFENFORM

Wie Schritt 2 beim homogenen Gleichungssystem, nur dass wir alle Umformungen mit der erweiterten Matrix durchführen. Man erhält:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{s. o.}} \left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

SCHRITT 3: ABLESEN DER LÖSUNGSMENGE $\mathbb{L}_{A,b}$

Man kann zu allen Spalten j , in denen markierte Einsen stehen, die Unbestimmten x_j durch die übrigen Unbestimmten wie folgt ausdrücken:

- x_1 : Zeile 1 bedeutet $x_1 = 3$.
- x_2 : Zeile 2 bedeutet $x_2 - x_5 + 3x_7 = 0 \iff x_2 = x_5 - 3x_7$.
- x_3 : Zeile 3 bedeutet $x_3 - x_5 - 2x_7 = 0 \iff x_3 = x_5 + 2x_7$.
- x_6 : Zeile 4 bedeutet $x_6 - x_7 = 0 \iff x_6 = x_7$.

Es gilt also:

$$\mathbb{L}_{A,b} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ x_5 - 3x_7 \\ x_5 + 2x_7 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_7 \end{pmatrix} : x_{4/5/7} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_{4/5/7} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y : y \in \mathbb{L}_{A,0} \right\}$$